

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה
5	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה על סולמות מדידה
7	סטטיסטיקה תיאורית- סכימה
11	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי
20	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן
23	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני
27	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון
29	סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן
31	סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה
33	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית
36	סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות
43	סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות
(ללא ספר)	התפלגות נורמלית ה
49	הסקה סטטיסטית - הקדמה
52	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי
58	מושגי יסוד באמידה
63	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים
69	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
91	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים
95	בדיקת השערות על שוניות
99	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים
103	ניתוח שונות חד כיוונית
112	ניתוח שונות דו כיווני

# תוכן העניינים

24. גודל האפקט ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

### רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה. משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

### מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות. לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרוש), אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוואלי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

### סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

### סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

### משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד...), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

### משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3...), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים. דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



## שאלות:

- (1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):
- גובה (בס"מ).
  - מספר ילדים למשפחה.
  - מידת החרדה לפני מבחן.
  - שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאד)
  - השכלה.
  - מספר אוטובוס.
  - מקום מגורים.
  - מין (1=גבר ; 2=אישה).
  - מידת נעליים.

- (2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

- מהו המשתנה הנחקר כאן?
  - האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?  
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?  
באיזה סולם מדידה המשתנה?
- (3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:
- שכר ב-ש.
  - ציון בחינת בגרות.
  - תוצאה של הטלת קובייה.
  - מהירות ריצה בתחרות.
  - שיעור התמיכה בממשלה.

**תשובות סופיות:**

- (1) א. מנה.      ב. מנה.      ג. סדר.  
ד. סדר.      ה. מנה/ סדר.      ו. שמי.  
ז. שמי.      ח. שמי.      ט. סדר.
- (2) א. מספר האיחורים.      ב. כמותי בדיד בסולם מנה.  
ג. בדיד.
- (3) א. רציף.      ב. בדיד.      ג. בדיד.  
ד. רציף.      ה. רציף.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה על סולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 5

## סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה על סולמות מדידה:

### רקע:

טרנספורמציה הינה מצב שבו עושים שינוי לערכים במשתנה הנחקר. להלן נפרט אילו טרנספורמציות מותרות על כל סולם מדידה:

#### סולם שמי (נומינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הזהות.

#### סולם סדר (אורדינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הסדר.

#### סולם רווחים (אינטרוולי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה לינארית חיובית.

#### סולם מנה/יחס –

הטרנספורמציה המותרת היא הכפלה / חילוק במספר חיובי.

## שאלות:

- (1) ציינו באילו סולמות מדידה מותרות הטרנספורמציות הבאות:
- הכפלה באפס.
  - הכפלה ב-2.
  - הכפלה במינוס 1.
  - הוספה של 3.
  - הפחתה של 3.
- (2) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם המשתנה "הטמפרטורה בחדר הסגלגל"?
- טרנספורמציה שומרת סדר.
  - טרנספורמציה לינארית חיובית.
  - טרנספורמציה שומרת יחס.
  - תשובות ב' ו-ג' נכונות.
- (3) באיזה סולם/ות מדידה מותרת החסרה של קבוע מכל מספר?
- בסולם שמי בלבד.
  - בסולמות שמי וסדר בלבד.
  - בסולמות שמי, סדר ורווחים בלבד.
  - בכל ארבעת סולמות המדידה.
- (4) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם מספרי האוטובוסים של "אגד"?
- טרנספורמציה שומרת סדר.
  - טרנספורמציה לינארית חיובית.
  - טרנספורמציה שומרת יחס.
  - כל התשובות נכונות.

## תשובות סופיות:

- (1) א. אף סולם.      ב. כל הסולמות.      ג. רק על סולם שמי.      ד. רווחים, סדר, שמי.
- (2) ד'.
- (3) ג'.
- (4) ד'.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 7

## סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות:  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

$i$	$X_i$
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

## שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה ( $X$ ), ומספר הנפשות החיות בדירה ( $Y$ ) חשבו:

$Y$	$X$	מספר דירה
1	2	1
1	3	2
2	2	3
3	4	4
2	3	5

א.  $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב.  $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג.  $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד.  $\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$

ה.  $\sum X_i$

ו.  $\sum X_i Y_i$

ז.  $\sum(X_i) \sum(Y_i)$

- (2) נתון לוח ערכי המשתנים  $X_i$  ו- $Y_i$ , כאשר:  $i = 1, 2, \dots, 6$ , ונתונים הקבועים:  
 $a = 2, b = 5$ . חשבו את הנוסחאות הבאות:

$i$	1	2	3	4	5	6
$X_i$	3	2	4	-2	1	4
$Y_i$	2	0	0	1	-5	2

$$\text{א. } \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^6 a$$

$$\text{ג. } \sum_{i=1}^6 x_i y_i$$

$$\text{ד. } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$$

$$\text{ה. } \sum_{i=1}^6 x_i + a$$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

$$\text{א. } \sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^n a = a \cdot n$$

$$\text{ג. } \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

**תשובות סופיות:**

- |         |              |           |              |
|---------|--------------|-----------|--------------|
| ד. 121. | ג. 11.       | ב. 9.     | א. 7. (1     |
|         | ז. 126.      | ו. 27.    | ה. 14.       |
| ד. 12.  | ג. 7.        | ב. 12.    | א. 3. (2     |
|         |              |           | ה. 14.       |
|         | ג. לא נכונה. | ב. נכונה. | א. נכונה. (3 |

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

1. כללי ..... 11

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

### רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

### השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

### ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 7, 9, 4, 8, 4, 10, 6.

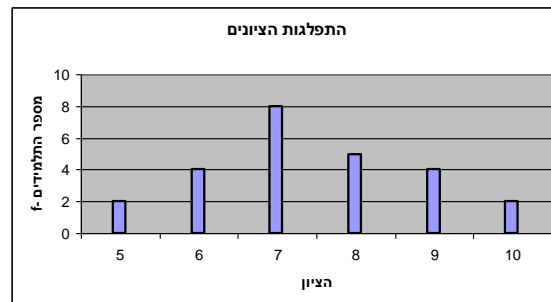
### בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

$f(x)$	# תוכניות החיסכון
100	0
75	1
25	2
25	3
25	4

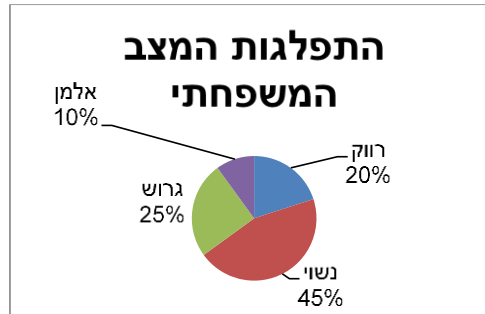
### בדיאגרמת מקלות

שיעור ה- $X$  של המקל הגבוה ביותר.



### בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



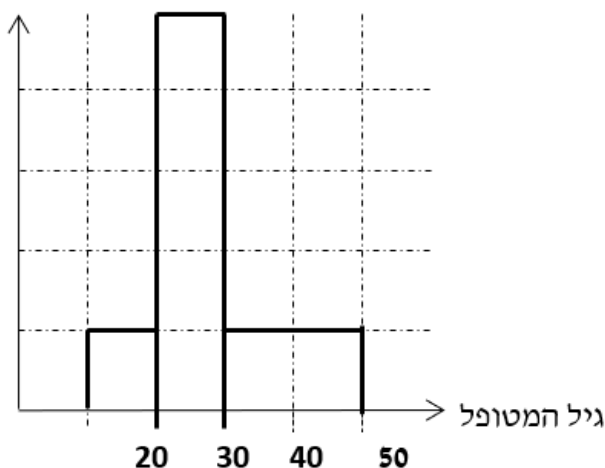
### בטבלת שכיחויות במחלקות

אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.  
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה :

$f(x)$	$X$
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

### בהיסטוגרמה

שיעור ה- $X$  של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.  
לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :



= 8

### כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.  
 השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

### אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

### החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

### ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה:  $\frac{n+1}{2}$ .

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ ,

והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$ , כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = X_{\frac{n+1}{2}}$ ,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ .

### בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

### דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

### בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה  $\frac{n}{2}$ .

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה:  $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$  - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.  
 $f(x_m)$  - השכיחות של המחלקה החציונית.

$L_0$  - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$  - גבול העליון של המחלקה.

### היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- $X$  שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

### כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

### הממוצע – Average :

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

### ברשימה

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### בטבלת שכיחויות

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$$

### במחלקות

נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה-  $X$ . הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

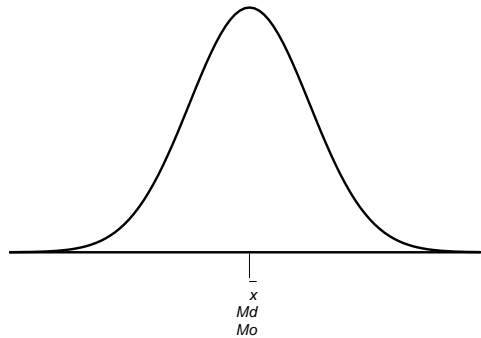
### כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

### מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

### התפלגות סימטרית

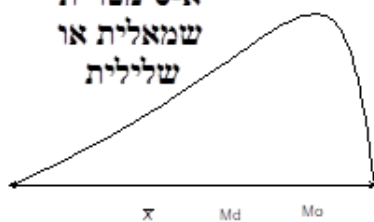


בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

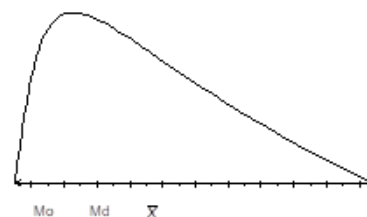
### התפלגות U



התפלגות  
א-סימטרית  
שמאלית או  
שלילית



התפלגות א-סימטרית  
ימנית או חיובית



## שאלות:

- (1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
 6, 5, 8, 7, 6, 6, 7, 6, 8, 7, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.  
 חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.
- (2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.  
 לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 4, 3, 4, 5.  
 א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?  
 ב. מהו השכיח ומהו החציון?
- (3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

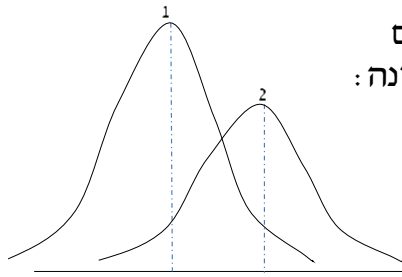
מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.  
 ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

- (4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. כמה משפחות יש בישוב?  
 ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?  
 ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.  
 הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

- א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.
- ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.
- ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.
- ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

- א. השלימו את הטבלה.
- ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.
- ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

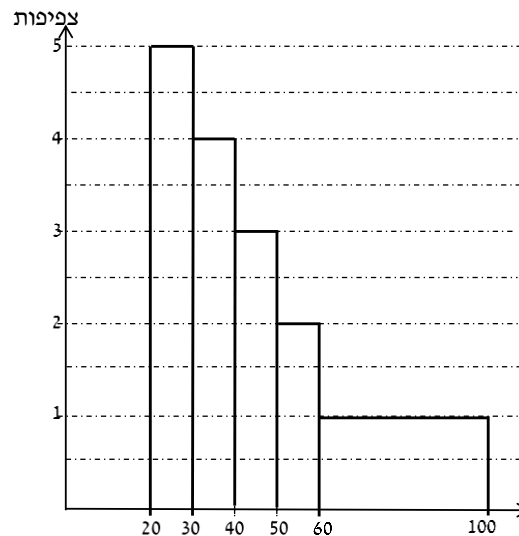
7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג. מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



- מצאו את השכיח בהתפלגות.
- מצאו את החציון בהתפלגות.
- הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
- הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

### תשובות סופיות:

- (1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.
- (2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.
- (3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.  
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.
- (4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.
- (5) ב'.
- (6) א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

מספר משפחות	מספר טלויזיות
28	0
62	1
92	2
18	3

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.

- (7) חציון וממוצע: 55.
- (8) ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.
- (9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון.  
ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 20

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

### רקע:

**המטרה:** למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

**הטווח / תחום (RANGE):**

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר:  $R = X_{\max} - X_{\min}$ .

### שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים}$$

### דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות}$$

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון $X$	השכיחות $F$	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
<b>סה"כ</b>		<b>1430</b>

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

## שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
 6, 5, 8, 7, 6, 8, 6, 7, 8, 5, 6, 7, 6, 8, 7, 6, 4, 5, 10, 9, 8, 6, 7.  
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

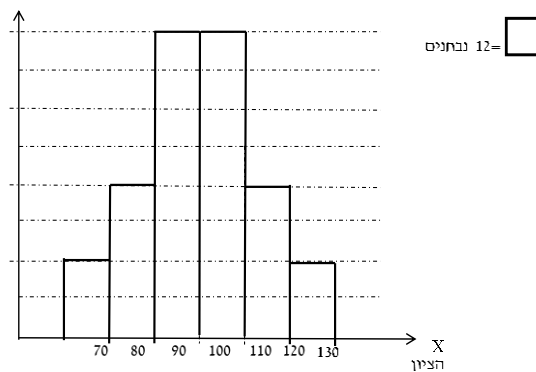
ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג: מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?  
 ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.  
 ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

### תשובות סופיות:

- 1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.  
 2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.  
 3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.  
 ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.  
 4) 10.8  
 5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.  
 6) 7.73  
 7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. טווח בינרבעוני.....23

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

### רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.  
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו-75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.  
סימון:  $Q_1$ .

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.  
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו-25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.  
סימון:  $Q_3$ .

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים:  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

### שלב ב: במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים:  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$f(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

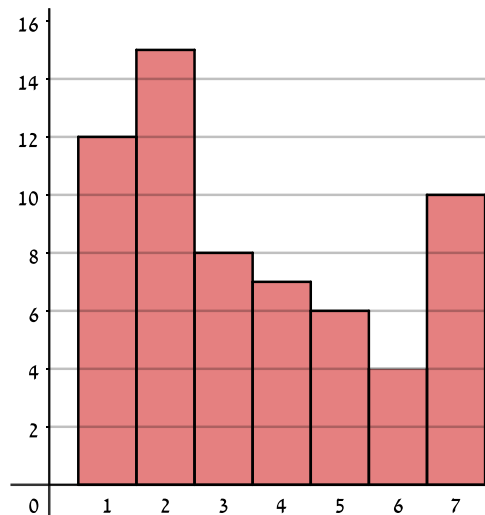
## שאלות:

1) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

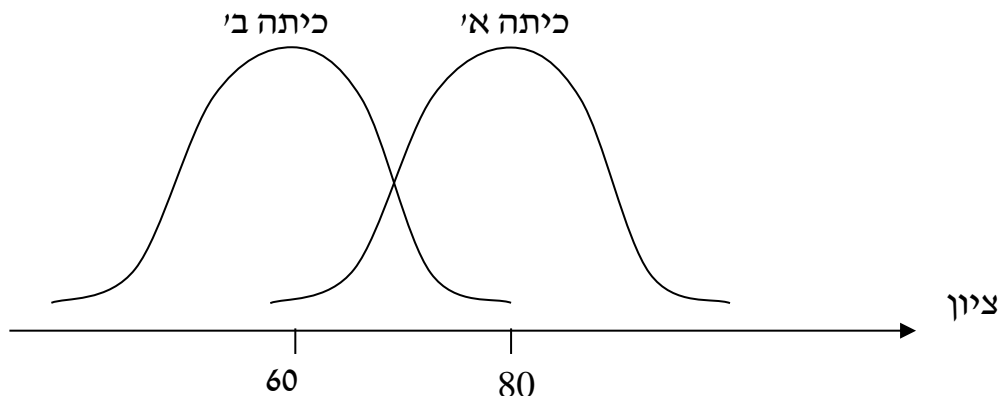
מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"?

2) בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



- א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?
- ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים?
- ג. אם נוסף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.
- ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה. באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



- א. כיתה א.
- ב. כיתה ב'.
- ג. לשתיהן אותו טווח בין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :

- א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
- ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
- ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן :

- א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
- ב. סטיית התקן היא אפס.
- ג. ההתפלגות היא סימטרית.
- ד. מצב זה כלל לא יתכן.

- 6) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
- 50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
  - 20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
  - 5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
  - 5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
- מהו הטווח הבין-רבעוני?
- א. 60.
  - ב. 2.
  - ג. 50.
  - ד. 1.

- 7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:
- א. טווח הציונים הוא אפס.
  - ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
  - ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
  - ד. אף סעיף אינו נכון.

### תשובות סופיות:

- 1) 2.
- 2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
- 3) ג.
- 4) ג.
- 5) א.
- 6) ד.
- 7) ד.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות  
מהחציון

תוכן העניינים

1. כללי ..... 27

## סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון:

### רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן. המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון. הרעיון הוא למצוא בכמה התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון, בממוצע. כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum_i |X_i - Md|}{n}$$

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum |X_i - Md| \cdot f(X)}{n}$$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור  $X$  את אמצע המחלקה.

### דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתונה רשימת המספרים הבאה: 2, 8, 7, 6, 3.  
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

## שאלות:

- (1) נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 5, 6, 9, 12, 8. מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- א. חשבו את החציון.  
 ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.  
 ג. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחושב היה משתנה, אם 5 משפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

## תשובות סופיות:

- (1) 2.5  
 (2) א. 1.5 ב. 1.14  
 ג. חציון לא ישתנה, ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי.....29

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

### רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

### ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא:  $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$ .

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
  - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
  - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

## שאלות:

- 1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?  
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- 2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	ממוצע
15	48	
2	10	סטיית תקן

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.  
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?  
 א. התפוקה.  
 ב. כמות הפועלים.  
 ג. חריגים באותה מידה.  
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- 3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.  
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?  
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

## תשובות סופיות:

- 1) א. לשון. ב. 72.  
 2) ב'.  
 3) א. משקל. ב. 70.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 31

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

### רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש  $p\%$  מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$  ב- $X_p$ .

### חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$F(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

## שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

$F(x)$	$X$
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכונניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכונניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 2      ב. 1      ג. 3      ד. 1
- (2) א. 1      ב. 2      ג. 4      ד. 4

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 33

## סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

### רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות:  $y = a \cdot x + b$ . כך יושפעו המדדים השונים:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$

$$MO_y = a \cdot MO + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

**מדדי המרכז:**

$$R_y = |a| R_x$$

$$S_y = |a| S_x$$

$$S_y^2 = a^2 S_x^2$$

**מדדי הפיזור:**

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

**מדדי המיקום היחסי:**

### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו- $b$ .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

## שאלות:

- (1) עבור סדרת נתונים התקבל:  $\bar{x} = 80, S = 15, MO = 70$ . הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.
- (2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.
- (3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נקי לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.
- (4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?
- (5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.
- (6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית:  $Y_i = a \cdot X_i + b$ , אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
- $$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$$

**תשובות סופיות:**

- (1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
- (2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
- (3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
- (4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
- (5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
- (6)  $a^2 \cdot S_x^2$

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 36

## סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

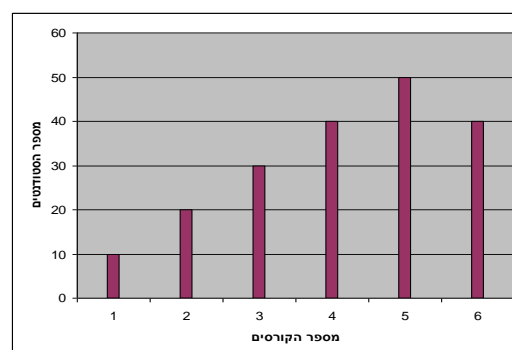
### שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?  
 ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?  
 ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?  
 ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?  
 ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



- א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?  
 ב. מהי צורת ההתפלגות?  
 ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.  
 ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.

במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל:  $\bar{X} = 7\frac{1}{15}$ .

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
- חשבו את הציון החציוני, השכיח.
- חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה). להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
- מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
- מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
  - היסטוגרמה.
  - דיאגרמת מקלות.
  - דיאגרמת עוגה.
- חשבו את המדדים הבאים:
  - טווח.
  - שכיח.
  - חציון.

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

- א. השלימו את הטבלה.
- ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

- א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
- ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
- ג. הוחלט להעניק מתנה עבור  $\frac{1}{4}$  מהלקוחות שמשלמים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
- ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:
- ממוצע.
  - שכיח.
  - חציון.
  - שונות.

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
- מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?
- חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.
- הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

מספר הנבחנים	הציון
	50-70
	70-90
	90-100
	100-110
	110-130
	130-150

- השלימו את הטבלה.
- מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?
- מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?
- הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

- 9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.
- א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.
  - ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.
  - ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.
  - ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.
  - ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.
  - ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.
  - ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.
  - ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

### תשובות סופיות:

- (1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.  
 ב.  $\bar{X} = 52$ ,  $Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$ , שכיח: 58.  
 ג.  $R = 28$ ,  $S = 10.12$ .  
 ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.  
 ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.
- (2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.  
 ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

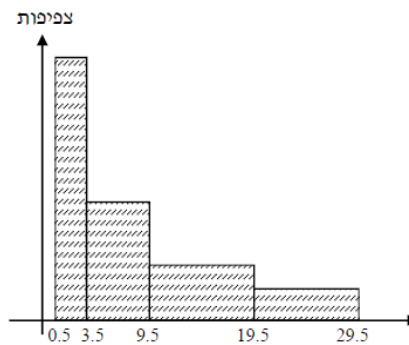
$f(x)$	$x$
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
40	6
190	סה"כ

- (3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.  
 ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533, סטיית תקן: 1.592.
- (4) א. 20%. ב. שביעות רצון (סדר).  
 ג. ii. ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.
- (5) א. להלן טבלה: ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

שכיחות	שכיחות יחסית (פרופורציה)	מספר שעות עבודה
30	15%	10-20
40	20%	20-30
60	30%	30-40
40	20%	40-50
30	15%	50-60

- ג. סטיית תקן: 12.65. ד. 53.333.  
 ה. 25%. ו. -0.395.  
 ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.
- (6) א. 38%. ב. 40%. ג. 150. ד. חציון: 100.

7) א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים:  $Mo < Md < \bar{X} < MR$ .

8) א. ראו טבלה:

מספר הנבחים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.  
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

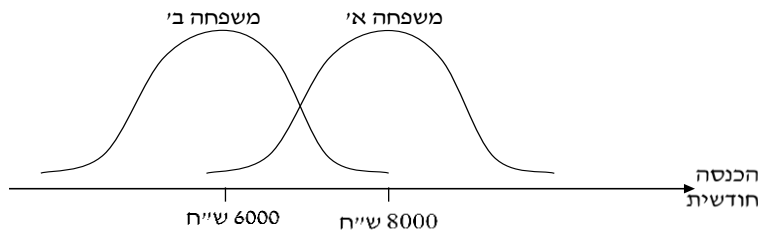
1. כללי ..... 43

## סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

### שאלות:

#### שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



- (1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
- משפחה א׳.
  - משפחה ב׳.
  - לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
  - לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
- משפחה א׳.
  - משפחה ב׳.
  - בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
  - לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
- משפחה א׳.
  - משפחה ב׳.
  - לשתיהן אותה סטית תקן.
  - לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:**

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:  
 כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

$F(x)$	$x$
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

(4) השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0.
- ב. 15.
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

(5) חציון הנתונים הוא:

- א. 2.
- ב. 1.5.
- ג. 25.5.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(6) הטווח של הנתונים:

- א. 11.
- ב. 3.
- ג. 4.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי.
- ב. חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

- 8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה : 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות :
- א. תקטן.
  - ב. תגדל.
  - ג. לא תשתנה.
  - ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

- 9) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :
- א. תגדיל את סטיית התקן.
  - ב. תקטין את סטיית התקן.
  - ג. לא תשנה את סטיית התקן.
  - ד. לא ניתן לדעת.

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 10-11:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה :

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

- 10) התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא :
- א. מיטב.
  - ב. צבי.
  - ג. לובה.
  - ד. שרית.
  - ה. סטף.

- 11) פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא :
- א. 80.55.
  - ב. 65.
  - ג. 80.
  - ד. 81.66.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-15:**

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

7	6	5	4	3	2	1	0	שוקולד פגום
8	10	11	13	12	48	63	35	מס' קופסאות

**12) מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:**

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

**13) מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?**

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

**14) מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה:**

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד.
- ד. כמותי רציף.

**15) השכיח של מספר הפגומים בקופסא:**

- א. 63.
- ב. 1.
- ג. 200.
- ד. לא ניתן לדעת.

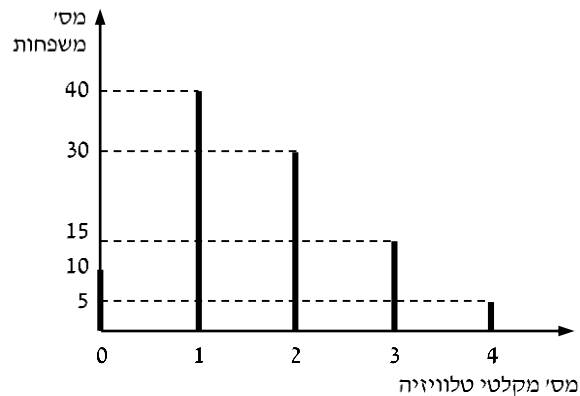
**16) ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:**

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהני"ל נכונה.

- 17) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת. החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:
- השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
  - השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
  - השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
  - שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
  - אף תשובה אינה נכונה.

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 18 עד 22:

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית. תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה:



### 18) המשתנה הנחקר כאן הוא:

- משתנה שמי.
- משתנה מסולם סדר.
- משתנה כמותי בדיד.
- משתנה כמותי רציף.

### 19) הטווח של ההתפלגות הוא:

- 35.
- 4.
- 3.
- 2.

20) ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא :

- א. 1.65
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

21) השכיח של התפלגות זו היא :

- א. 40
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

22) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

- א. יקטין אותו.
- ב. יגדיל אותו.
- ג. לא ישנה אותו.
- ד. אין לדעת.

### תשובות סופיות:

1) א'	2) ג'	3) ג'	4) ג'	5) ב'
6) ג'	7) א'	8) ג'	9) ב'	10) ה'
11) ד'	12) ג'	13) א'	14) ג'	15) ב'
16) ג'	17) ה'	18) ג'	19) ב'	20) א'
21) ג'	22) ב'			

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 13 - התפלגות נורמלית ה

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 14 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

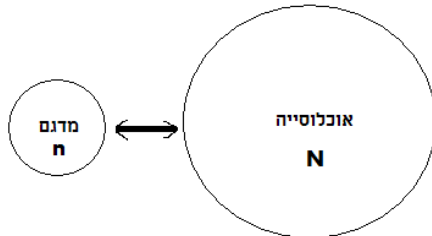
1. כללי ..... 49

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	ממוצע
$\mu$	$\bar{X}$	
$P$	$\hat{p}$	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	50
1	250
2	350
3	300
4	50
	סך הכול $N = 1000$

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 15 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי..... 52

## התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ .

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:  $E(\bar{x}) = \mu_x = \mu$ .

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:  $V(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$ .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.  
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ גדול } (n \geq 30) \text{ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:}$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.  
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.  
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
  - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
  - מהי טעות התקן?
- (2) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
  - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
- (3) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
  - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

- (4) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?  
 ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?  
 ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?  
 ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (5) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה בדיוק 755 סמ"ק?  
 ב. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה יותר מ-755 סמ"ק?  
 ג. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה לפחות 755 סמ"ק?  
 ד. בקבוקי היין שבארגו נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (6) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?  
 ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?  
 הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
- (7) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

8) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

9) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם  $\bar{X}$ . לכן:  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

10) נתון ש- $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונויות  $\sigma^2$ .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ב.  $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

ד.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

11) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר:  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו קבועים.

### תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2. ה. 78. ו. 10.6.
- (2) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.
- (3) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205.
- (4) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (5) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5.
- (6) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (7) 0.0475
- (8) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271.
- (9) ב'.
- (10) ד'.
- (11) ג'.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 16 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 58

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ . הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- מה הפרמטר בדוגמה זו?
  - מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $E(\hat{\theta}) = \theta$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ .
  - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה  $\mu$ :**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם}$$

$$E(\bar{x}) = \mu \text{ לכן } \bar{x} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} \mu . \text{ כמו כן, טעות תקן: } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$$

**פרופורציה באוכלוסייה  $p$ :**

$$\hat{p} = \frac{y}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם}$$

$$E(\hat{p}) = p, \text{ לכן } \hat{p} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} p . \text{ כמו כן טעות התקן: } \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

**שונות האוכלוסייה  $\sigma^2$ :**

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ ולכן } S^2 \text{ הינו אומד חסר הטיה ל-} \sigma^2 : S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומד ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25    ב. 0.019    ג. 0.24    ד. 0.01
- (2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.  
 ב. 100    ג. 2342    ד. 58
- (3) א. 177.9    ב. 64.1    ג. 0.4
- (4) א. 8.1    ב. 3.16
- (5) ד'
- (6) ג'
- (7) ד'
- (8) ד'
- (9) ג'

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 17 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

63	.....	1. הקדמה
67	.....	2. סוגי טעויות

## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

### תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
 הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
 בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
 אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.  
 (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.
- ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

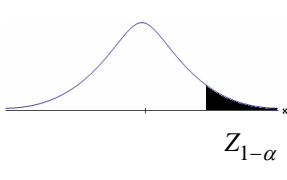
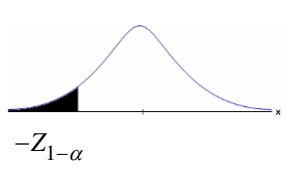
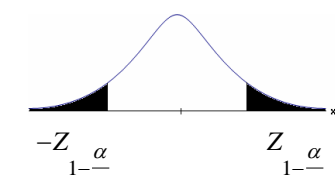
פרק 18 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה. .... 69
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה). .... 73
3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה. .... 79
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 83
5. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה). .... 88

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
			
דוחים את $H_0$ ■	דוחים את $H_0$ ■	דוחים את $H_0$ ■	

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה $H_0$ אם מתקיים:
--	--	--	-----------------------

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

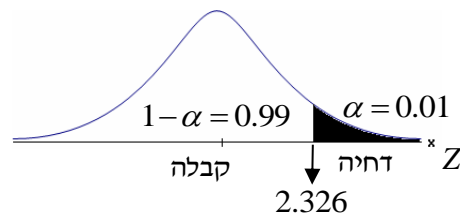
הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

**תנאים:**

1.  $X \sim N$

2.  $\sigma = 2.5$

**כלל הכרעה:**

נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{x}} = \frac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

**מסקנה:**

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 ס"מ<sup>3</sup> וסטיית תקן 20 ס"מ<sup>3</sup>. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 ס"מ<sup>3</sup> במדגם בגודל 25. א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%? ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.  
 ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

(1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

## סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_1 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

**התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:**

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב $\beta$ :	$P_{\mu_1} \left( \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left( \bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left( \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

התפלגות ממוצע המדגם:  $\bar{X} \sim N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$

התקנון:  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

**דוגמה:**

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ש"ח עם סטיית תקן של 80 ש"ח לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ש"ח בממוצע לחודש.

- רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.
- מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ש"ח. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

## פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה:  $X =$  חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר:  $\mu$ .

השערות:  
 $H_0: \mu = 200$   
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

1.  $\mu = 200$ .

2.  $n = 36$ .

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את  $H_0$  אם שקלים  $\bar{X} < 178.07$ .

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:  
 $H_0: \mu_0 = 200$   
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את  $H_0$  אם  $\bar{X} < 178.07$ .

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}(\text{לקבל את } H_0) = P_{H_1}(\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת  $\alpha$  מגדילה את  $\beta$ .

## שאלות:

$$(1) \text{ נתון ש: } X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$$

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר  $\mu$ :  $H_0: \mu = 5$ ,  $H_1: \mu = 7$ . מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

- עבור אילו ערכים של  $X$  שידגם נדחית השערת  $H_0$ ?
- מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$  מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

(2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

- רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

(3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

(4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

- רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- (5) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 50$ ,  $H_1: \mu = 58$ . מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
  - כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
    - סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
    - הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

**השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:**

- (6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
  - העוצמה של המבחן גדלה.
  - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
  - תשובות א' ו-ב' נכונות.

- (7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- השערת האפס נכונה.
  - השערת האפס נדחתה.
  - השערת האפס לא נדחתה.
  - אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- (8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	$\alpha$
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- (9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית  $H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- הן  $\alpha$ , והן  $1 - \beta$ , יקטנו.
  - $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $1 - \beta$  יגדל.
  - $\alpha$  יגדל ואילו  $1 - \beta$  יקטן.
  - הן  $\alpha$  והן  $1 - \beta$  יגדלו.

10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

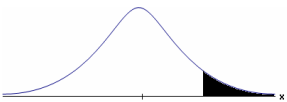

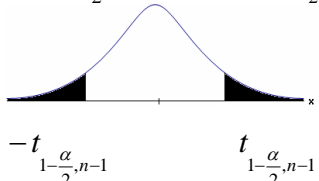
- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

### תשובות סופיות:

- 1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.  
ג. דחינו את  $H_0$ , תתכן טעות מסוג ראשון.
- 2) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 2.24$ . ב. נדחה  $H_0$ . ג. 1.
- 3) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} > 203.29$  או  $\bar{X} < 196.71$ . ב. 0.8051. ג. תקטן.
- 4) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 48.9$ . ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- 5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.  
ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- 6) ד'
- 7) ג'
- 8) ג'
- 9) א'
- 10) ב'

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

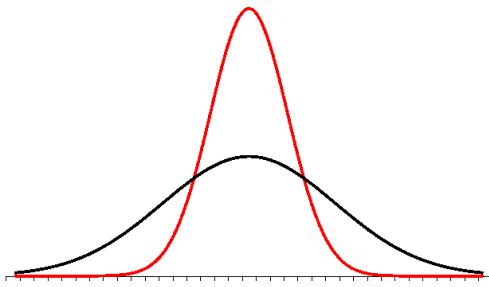
רקע:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



### התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה ששנים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  ,  $H_1: \mu < \mu_0$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:

- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$ , דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ ידועה			תנאים:
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

כאשר בהנחת השערת האפס:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה:  $X =$  משקל בק"ג.

פרמטר:  $\mu$ .

$$H_0: \mu = 65$$

השערות:  $H_1: \mu > 65$

תנאים:

$$1. X \sim N$$

$$2. \sigma = 12$$

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left( \begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

## שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu > 70$ . המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 74$ . מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.  
 א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?  
 ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?  
 ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.  
 א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?  
 ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?  
 ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

- 6) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?  
 בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
  - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
  - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
  - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- 7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
  - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
  - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
  - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- 8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל:  $p\text{ value} = 0.0254$  לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
  - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
  - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
  - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

### תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א.  $H_0: \mu = 100$   
 $H_1: \mu < 100$   
 ב. 0.1056. ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

### רקע:

נוכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

•  $p_v = P_{H_0}$  (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

אם ההשערה היא דו צדדית:

•  $p_v = 2P_{H_0}$  (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$			תנאים:
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n - 1$$

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

- רשמו את השערות המחקר.
- מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה:  $X =$  זמן נסיעה בדקות.

תנאים:  $X \sim N$ .

פרמטר:  $\mu$ .

א. השערות:  
 $H_0: \mu = 40$   
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = ( \bar{X} \leq 32.6 ) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$ , לכן דוחים את  $H_0$ .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

## שאלות:

- (1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.  
 ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- (2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
- מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?
- (3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
- $$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$
- מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
- מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 1000$   
 ב.  $20\% \leq P_v \leq 50\%$   
 ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.
- (2) 10%
- (3) 1.01, נקבל את  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

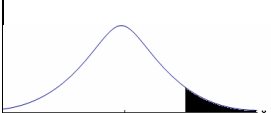
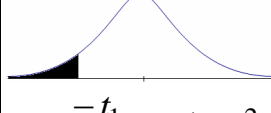
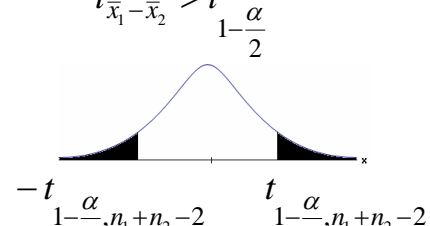
פרק 19 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 91

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$	1. מדגמים בלתי תלויים 2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית
 $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	 $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	 $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	אזור הדחייה של $H_0$

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונויות המשוקללת:

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה $H_0$ אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 200$ .

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 260$ .

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

**שאלות**

1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.  
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

100W	60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	$S$
15	13	$n$

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
- עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

**תשובות סופיות**

- (1) נדחה את  $H_0$ .
- (2) הנחות:  
1. סטיות התקן שוות.  
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.  
נקבל את  $H_0$ .
- (3) א. נדחה את  $H_0$ .  
ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.  
ג. לא נדחה את  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

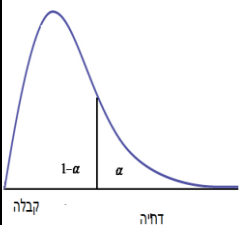
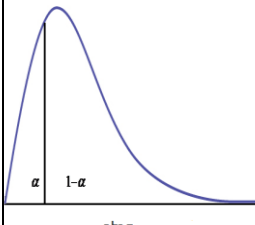
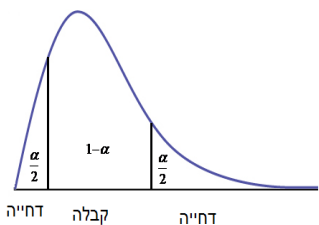
פרק 20 - בדיקת השערות על שונויות

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שתי שונויות ..... 95

## בדיקת השערות על שתי שוניות:

רקע:

השערת האפס : השערה אלטרנטיבית :	תנאים :	השערת האפס : השערה אלטרנטיבית :	תנאים :
$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	1. מדגמים בלתי תלויים 2. $X_1, X_2 \sim N$
 $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$	 $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$	 או $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1, n_2-1)}$ $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1, n_1-1)}}$	נדחה את השערת האפס אם :

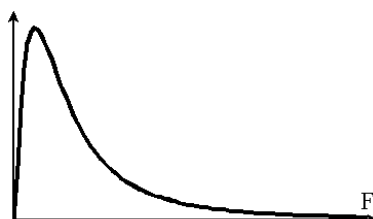
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

התפלגות F:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) : \text{אזי } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2) \text{ ו- } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2) \text{ אם}$$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

$$\text{כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה : } F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)}$$



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$



**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונויות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה :  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות :  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$   
 בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

ד"ח מנהל"ח מנכה		טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F																
		α = 0.05																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	∞	
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	246.46	248.01	249.05	252.20	253.25	254.31	
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.48	19.49	19.50	
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.69	8.66	8.64	8.57	8.55	8.53	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.69	5.66	5.63	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.43	4.40	4.37	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.74	3.70	3.67	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.49	3.44	3.41	3.30	3.27	3.23	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.20	3.15	3.12	3.01	2.97	2.93	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	2.99	2.94	2.90	2.79	2.75	2.71	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.83	2.77	2.74	2.62	2.58	2.54	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.70	2.65	2.61	2.49	2.45	2.40	
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.60	2.54	2.51	2.38	2.34	2.30	
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.30	2.25	2.21	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.22	2.18	2.13	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.38	2.33	2.29	2.16	2.11	2.07	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.11	2.06	2.01	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.06	2.01	1.96	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.02	1.97	1.92	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.21	2.16	2.11	1.98	1.93	1.88	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	1.95	1.90	1.84	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.16	2.10	2.05	1.92	1.87	1.81	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.89	1.84	1.78	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.11	2.05	2.01	1.86	1.81	1.76	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.09	2.03	1.98	1.84	1.79	1.73	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.07	2.01	1.96	1.82	1.77	1.71	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.05	1.99	1.95	1.80	1.75	1.69	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.04	1.97	1.93	1.79	1.73	1.67	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.02	1.96	1.91	1.77	1.71	1.65	
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.01	1.94	1.90	1.75	1.70	1.64	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	1.99	1.93	1.89	1.74	1.68	1.62	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.90	1.84	1.79	1.64	1.58	1.51	
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.85	1.78	1.74	1.58	1.51	1.44	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.82	1.75	1.70	1.53	1.47	1.39	
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.76	1.69	1.64	1.46	1.39	1.30	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.73	1.66	1.61	1.43	1.35	1.25	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.32	1.22	1.00	

טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F $\alpha = 0.01$ ראה איור מסה.																	
ד"ח מונה/ד"ח מכנה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	$\infty$
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6170.10	6208.73	6234.63	6313.03	6339.39	6365.86
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.45	99.46	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.83	26.69	26.60	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.15	14.02	13.93	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.68	9.55	9.47	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.52	7.40	7.31	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.28	6.16	6.07	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.48	5.36	5.28	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.92	4.81	4.73	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	3.97	3.86	3.78	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.78	3.66	3.59	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.49	3.37	3.29	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.37	3.26	3.18	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.27	3.16	3.08	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.19	3.08	3.00	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	2.99	2.88	2.80	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.89	2.78	2.70	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.81	2.70	2.62	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.78	2.66	2.58	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.75	2.63	2.55	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.72	2.60	2.52	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.69	2.57	2.49	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.66	2.55	2.47	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.48	2.37	2.29	2.02	1.92	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.38	2.27	2.18	1.91	1.80	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.31	2.20	2.12	1.84	1.73	1.60
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.39	2.21	2.09	2.00	1.72	1.60	1.46
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.15	2.03	1.95	1.66	1.53	1.38
$\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.00	1.88	1.79	1.47	1.32	1.00

## שאלות:

- (1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

- א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששוניות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?  
 ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

- (2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר

B	A	סוג המתכת
10	8	$n$
30	16	$\sum X_i$
198	60	$\sum X_i^2$

- יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:  
 יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.  
 א. האם קיים הבדל בין שוניות החוזק של מתכות?  
 ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות?  
 בכל סעיף רמת מובהקות של 10%.

## תשובות סופיות:

- (1) א. לא נדחה את  $H_0$ . ב. מסקנה לא תשתנה.  
 (2) א. לא נדחה את  $H_0$ . ב. לא נדחה את  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

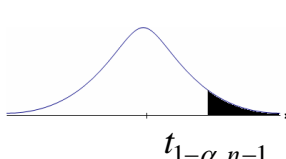
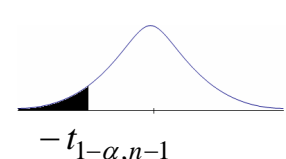
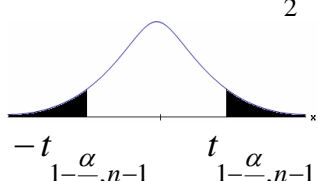
פרק 21 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים ..... 99

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

### בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
1. $\sigma_D$ אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	או $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל הכרעה: אזור הדחייה של $H_0$
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
גיל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת  $X$  לחברת  $Y$  מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

יפן	סין	מצרים	פולין	הולנד	קנדה	ארה"ב	חברה/מדינה
4.2	3.2	3.5	3	2.2	2.1	1.5	$X$
4.2	3.2	3.2	3.1	1.9	2	1.4	$Y$

- בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצע:
- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	590	500	390	670	640	420	470	506
אחרי	580	520	510	680	610	430	540	570

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

82	75	90	68	74	סטטיסטיקה א'
100	76	87	84	80	סטטיסטיקה ב'

- פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.
- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
- ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
- ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן  $Z$  למדגם יחיד.  
 ב. מבחן  $T$  למדגם יחיד.  
 ג. מבחן  $T$  למדגמים בלתי תלויים.  
 ד. מבחן  $T$  למדגמים מזווגים.

- (5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.
- (6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.

### תשובות סופיות

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $0.25 \leq p \leq 0.5$     ב. 0.5    ג. לא נדחה  $H_0$ .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 22 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

103 ..... 1. כללי

## ניתוח שונות חד כיוונית

### רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  של  $k$  אוכלוסיות שונות. לכן, בנייתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

### ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך  $k$  האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות  $\sigma^2$ .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם  $k$  רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- $n_i$  את גודל המדגם בקבוצה  $i$ .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$\bar{X}_1$  - ממוצע המדגם הראשון,  $\dots, \bar{X}_k$  - ממוצע המדגם ה- $k$ .  
 $\bar{X}$  - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{: סכום ריבועים בין הקבוצות}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{: סכום ריבועים בתוך הקבוצות}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{: סכום ריבועים כללי}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש $df$	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k - 1$	$\frac{SSB}{k - 1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n - k$	$\frac{SSW}{n - k}$	
T - סה"כ	SST	$n - 1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית  $H_0$ :  $1 - \alpha : F > F_{(k-1, n-k)}$

**שאלות**

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
  - ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
  - ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:

"הס"	"רבין"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- ד. מלאו את טבלת ANOVA.
- ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

D	C	B	A	השיטה
12	8	14	12	גודל המדגם
182	180	172	178	הממוצע
3	5	8	4	סטיית התקן

- א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

**ANOVA**

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

**ANOVA**

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			



7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA						pulse			
pulse						Tukey HSD <sup>a</sup>			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.  
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

(I) dosage		(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
10.00		20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
		30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00		10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
		30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00		10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
		20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- ד. לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- 8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:
- כמה בתי ספר יש בעיר?
  - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
  - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
  - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

### Oneway

#### ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

**Post Hoc Tests**

**Multiple Comparisons**

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

**Homogeneous Subsets**

grade

Scheffe<sup>a</sup>

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

**תשובות סופיות**

1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות:

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שווין שונויות.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

$$g. \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$$

ד. להלן טבלה:

F	MS	df	SS	מקור השונות
	100.3	2	200.6	B
	173.2	11	1904.75	W
0.58		13	2105.35	סה"כ

ה.  $F > 3.98$ .

ו. נקבל את  $H_0$ .

3) א.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$   
 ב. נדחה את  $H_0$ .  
 ג. כן.

$$H_1 : otherwise$$

הנחות:

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

4) נקבל את  $H_0$  : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את  $H_0$  : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה :

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את  $H_0$  : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד.  $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$  .

8) א. 5 ב. 25

ג. נדחה את  $H_0$  : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד.  $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$  .

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 23 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

112	1. הקדמה
122	2. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה
134	3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני

## ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

### רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- $a$  ואת מספר הרמות שלו ב- $A$ . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- $b$ , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- $B$ . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא  $A \cdot B$ .

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות  $a$  וגורם אחר להיות  $b$ . מהו  $A$  ומהו  $B$ ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- $m$  את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם  $a$  עם רמה מסוימת של גורם  $b$ .

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של  $m$ ?
- מהו הקשר המתמטי בין  $m$  לבין  $n$ , גודל המדגם?

נסמן ב- $a_1$  את הרמה הראשונה של  $a$ , ב- $a_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $b_1$  את הרמה הראשונה של  $b$ , ב- $b_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $\mu_i$  את התוחלת ברמה  $a_i$ . נסמן ב- $\mu_j$  את התוחלת ברמה  $b_j$ . נסמן ב- $\mu_{ij}$  את התוחלת של תא  $ij$ .

המשך הדוגמה :

- מה המשמעות של  $\mu_1$  ושל  $\mu_2$  ?
- מה המשמעות של  $\mu_{12}$  ושל  $\mu_{21}$  ?

השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות :

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי :  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי :  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים :  $H_0$

אחרת:  $H_1$

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_A.$$

$H_1$ : אחרת

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

$H_1$ : אחרת

$H_0$ : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

$H_1$ : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

## שאלות

- (1)** בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
- מהו המשתנה התלוי במחקר?
  - כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
  - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- (2)** במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
- מהו גודל המדגם?
  - מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
  - כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
  - כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
  - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיווני?
- מהו ערכו של  $m$  ומהו ערכו של  $n$ ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלות צלזיוס	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	6
6	C	40	6
7	C	40	7
8	C	40	6
9	C	60	9
10	C	60	8
11	C	60	7
12	C	60	10
13	w	30	9
14	w	30	9
15	w	30	9
16	w	30	10
17	w	40	12
18	w	40	13
19	w	40	11
20	w	40	11
21	w	60	14
22	w	60	14
23	w	60	15
24	w	60	13

- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאל:

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
- ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
- ג. סוג הדם של חולה.
- ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
- ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
- ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

**בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

- 6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. מבחן T לתוחלת אחת.

- 7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

8) האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

9) בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

10) במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות/ יותר מ-2 כוסות.
2. מין הנחקר: גבר/אישה.
3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
- ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
- ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
- ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

### תשובות סופיות

- 1) א. חוזק הקריעה.  
ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- 2) א. 18  
ב. המשתנה התלוי: ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת: סוג חרדה, סוג הטיפול.  
ג. 3,3  
ד. 9
- 3) א. ניתוח שונות דו גורמי.  
ג. ניתוח שונות דו גורמי.  
ב. 3,2  
ד.  $m = 2, n = 12$
- 4) א. 3  
ב. משתנים ב"ת: סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי: ציון הסרת כתמים.  
ג. 3,2  
ד.  $H_0$ : אין אינטראקציה בין הגורמים,  $H_1$ : אחרת.  
ה. עיין בסרטון הוידאו.
- 5) א. כן.  
ג. כן.  
ה. תלוי.  
ב. לא.  
ד. לא.  
ו. כן.
- 6) ג.  
7) ד.  
8) ב.  
9) ג.  
10) ג.  
11) ד.

## אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

### רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

**אפקט עיקרי:** אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקציה: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

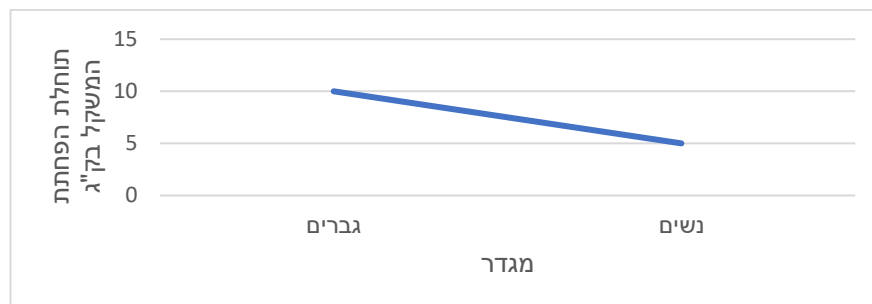
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

### מצב א:

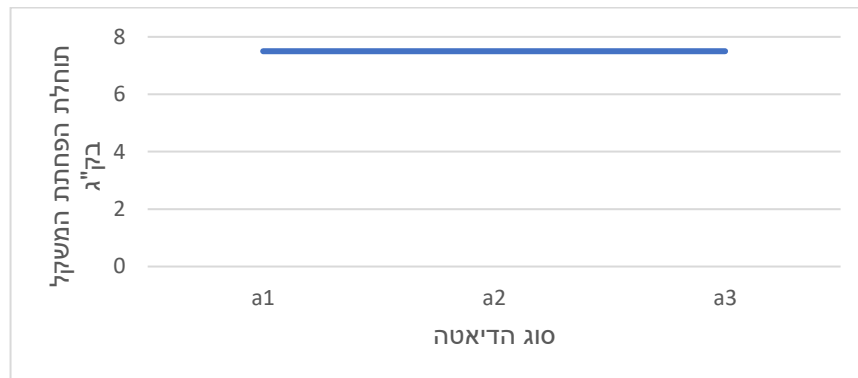
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	10	$a_1$
5	10	$a_2$
5	10	$a_3$

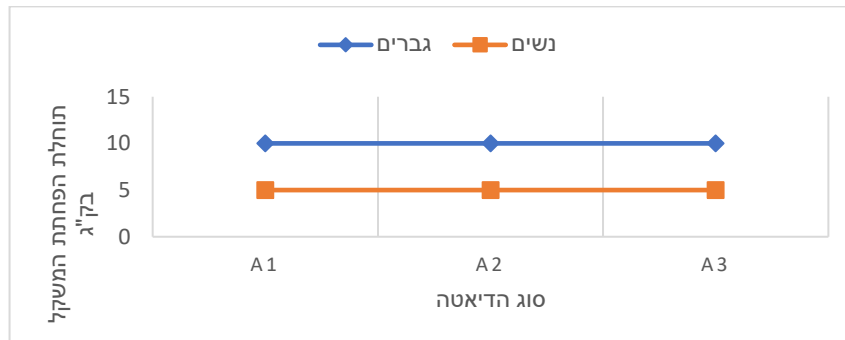
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



### תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



### גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה. הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

**מצב ב**

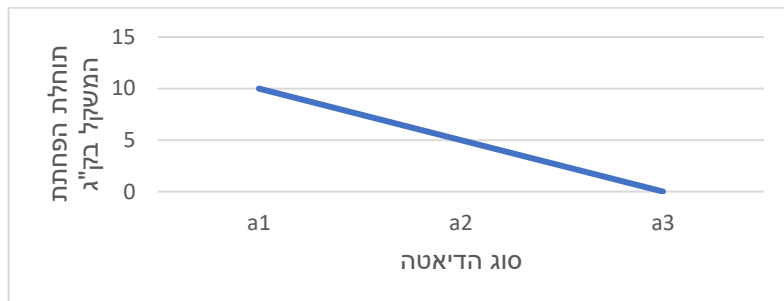
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
10	10	$a_1$
5	5	$a_2$
0	0	$a_3$

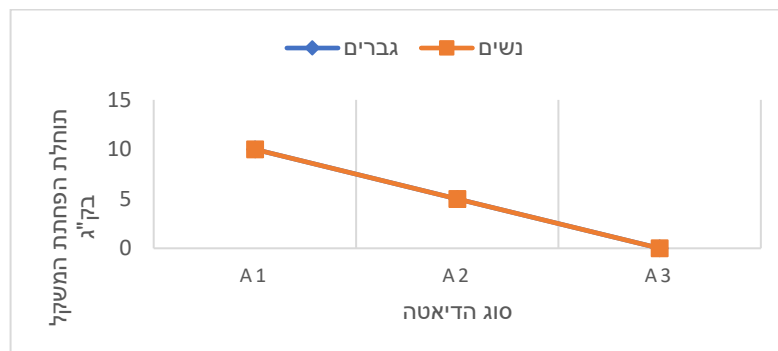
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים

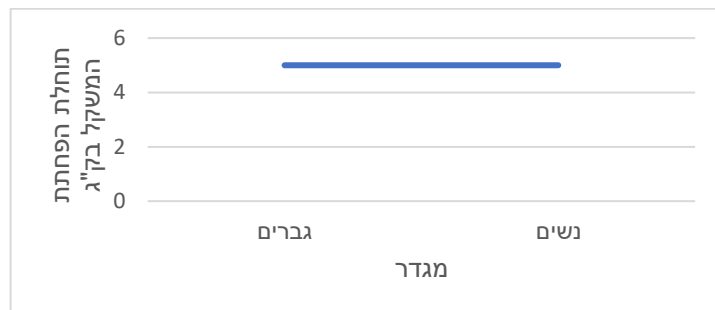
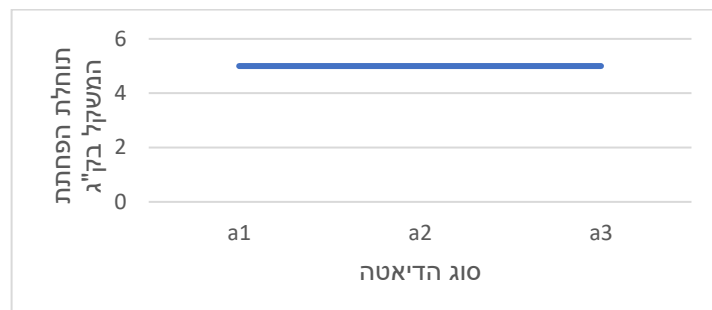
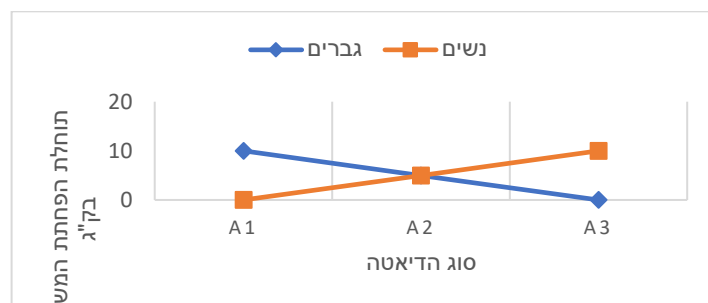


ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

**מצב ג**

הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
0	10	$a_1$
5	5	$a_2$
10	0	$a_3$

**תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר****תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה****גרף אפקטים פשוטים**

ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

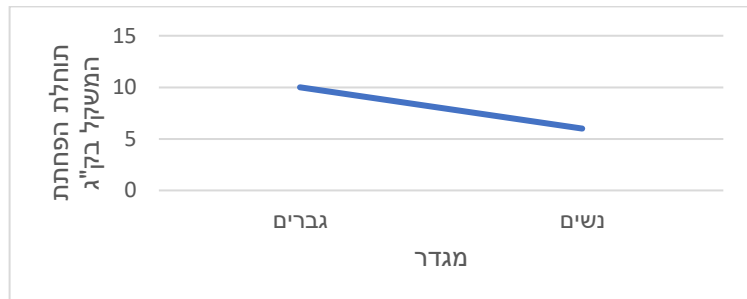
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

**מצבה**

הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	5	$a_1$
6	10	$a_2$
7	15	$a_3$

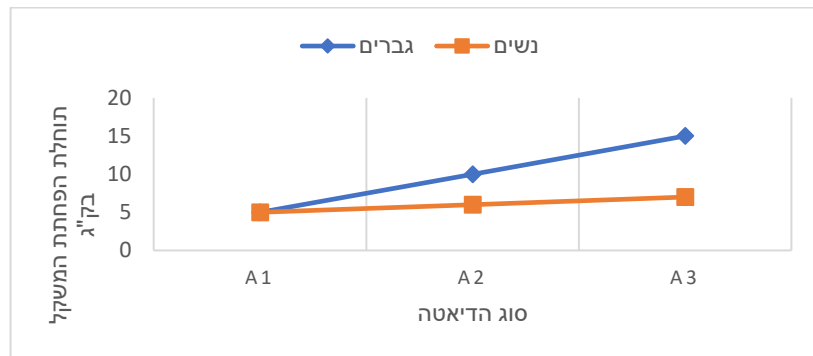
**תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר**



**תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה**



גרף אפקטים פשוטים



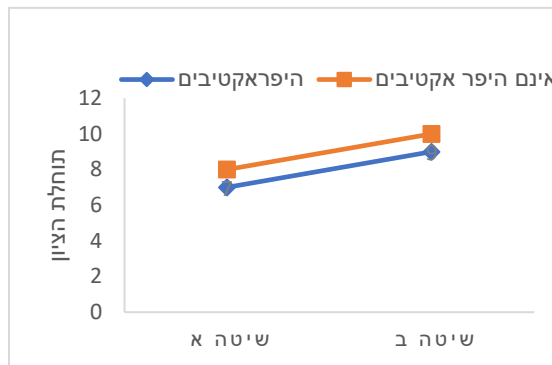
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

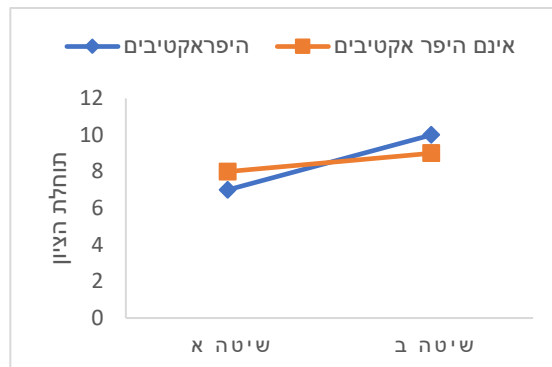
**שאלות**

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

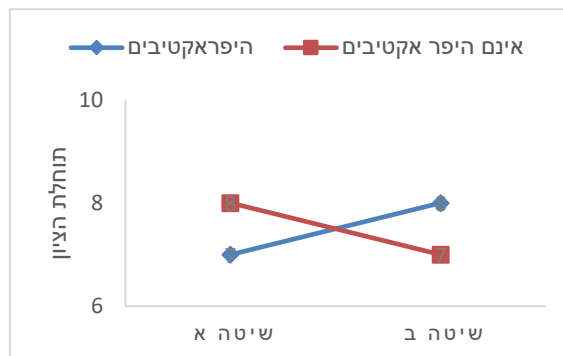
א.

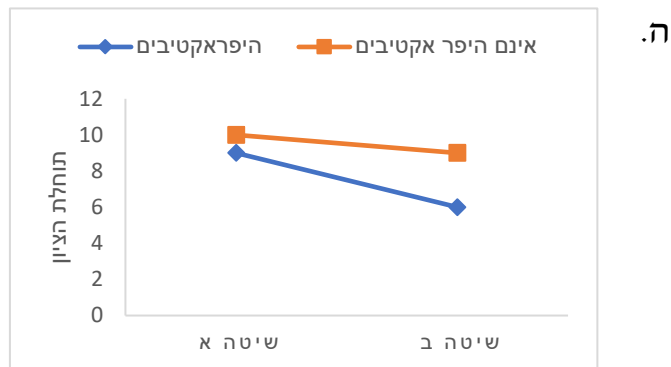
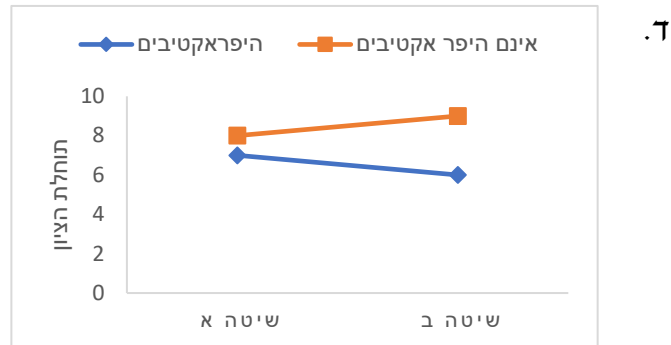


ב.



ג.





2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

דירות גג	דירות גן	
3	4	הרצליה
1	2	אשדוד
2	3	חולון

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועי	עיוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- א. תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.  
 ב. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?  
 ג. באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

אישה	גבר	
1	2	חיפה
1	2	אשקלון
1	2	רמת גן

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?  
 ב. האם קיים אפקט עיקרי למגדר?  
 ג. האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?  
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
20	20	חיפה
10	10	ירושלים
15	15	באר שבע

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?  
 ב. האם קיים אפקט עיקרי לעונה?  
 ג. האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?  
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבעתיים
10	10	בת ים

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

**בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	
100	90	מתעמלים
160	100	לא מתעמלים

- א. קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- ב. קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- ג. קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- ד. אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- א. אפקט אינטראקציה.
- ב. אפקט עיקרי של גורם המין.
- ג. אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- ד. אפקט פשוט.

- 9) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- 10) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפולים השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

### תשובות סופיות

- 1) א. אין אינטראקציה.  
 ג. אינטראקציה דיסאורדנלית.  
 ה. אינטראקציה אורדינלית.
- 2) א. המשתנים הבי"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.  
 ב. קיים.  
 ד. לא קיים.  
 ו. קיים.  
 ח. קיים.
- 3) א. עיין בסרטון הוידאו.  
 ג. רעננה ופתח תקווה.
- 4) א. לא.  
 ג. לא.
- 5) א. כן.  
 ג. לא.
- 6) לא, לא.
- 7) ד
- 8) ד
- 9) א
- 10) ב

## תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

### רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג  $A \times B$ , כאשר  $A$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $a$ , ו- $B$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $b$ .

במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך  $A \times B \times C$ , וכך הלאה.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	סה"כ
נשים	8	6	4	54
	4	8	6	
	0	10	8	
גברים	6	0	9	72
	10	2	12	
	14	4	15	
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1.  $A \times B$  הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.

2. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.

3. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות אותה שונות,  $\sigma^2$ .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

**הליך המבחן**

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

$\bar{X}_i$  – ממוצע המדגם ברמה  $i$  של גורם  $a$

$\bar{X}_j$  – ממוצע המדגם ברמה  $j$  של גורם  $b$

$\bar{X}_{ij}$  – ממוצע המדגם בתא  $ij$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה :

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\bar{X}_i$
נשים				
גברים				
$\bar{X}_j$				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

**בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים**

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא  $ij$  נחשב:  $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

סוג הדיאטה	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$
מין				
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_j - \bar{X})^2$				

**חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע**

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון  $SS$  הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם  $a$  :  $SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{.i} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם  $b$  :  $SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה :  $SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא) :

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי :

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא :

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית :  $SS_a + SS_b + SS_{ab}$ . השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית :  $SS_W$ . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות  $W$  מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים:

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_w =$$

### חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	$F$
$a$	$A - 1$	$SS_a$	$MS_a$	$F_a = MS_a / MS_w$
$b$	$B - 1$	$SS_b$	$MS_b$	$F_b = MS_b / MS_w$
$ab$	$(A - 1)(B - 1)$	$SS_{ab}$	$MS_{ab}$	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$
Within	$AB(m - 1)$	$SS_w$	$MS_w$	
Total	$n - 1 = ABm - 1$	$SS_T$		

בהמשך לדוגמה : מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

### כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי  $F_a$  מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם  $a$  ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם  $a$  יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי.  $F_a$  יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $a$  :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו :

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $b$  :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

### הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

### בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

**שאלות**

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה : 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יבול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

שונות	ממוצע	הקבוצה
40	62	צבע רגיל על שיער בהיר
44	51	צבע רגיל על שיער כהה
42	45	צבע רגיל על שיער שיבה
46	60	צבע חדש על שיער בהיר
40	54	צבע חדש על שיער כהה
42	44	צבע חדש על שיער שיבה

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם  $a$  יש 4 רמות ולגורם  $b$  יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	$df$	SS	MS	F
$a$	?	318	?	?
$b$	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

- א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.
- ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:
  - i. האם האינטראקציה מובהקת?
  - ii. האם גורם  $a$  משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
  - iii. האם לגורם  $b$  יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	8	14	11
$a_2$	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.

הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

מקור השונות	df	SS	MS	F
$a$				
$b$		281.7		
$ab$		71.7		
W		190.1		
T				

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

### תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.  
ב. עיין בסרטון הוידאו.  
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4. ב. 20. ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

# מבוא לסטטיסטיקה ושיטות מחקר

פרק 24 - גודל האפקט

תוכן העניינים

1. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות ידועה ..... (ללא ספר)
2. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות לא ידועה ..... (ללא ספר)
3. גודל האפקט בהסקה על תוחלת ההפרש במדגמים מזווגים ..... (ללא ספר)
4. גודל האפקט בהסקה על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ובהנחת שוויון שונויות . (ללא ספר)
5. גודל האפקט במבחן לניתוח שונות ..... (ללא ספר)