מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

תוכן העניינים

1. סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה (יחידה 2) 1
2. סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים (יחידה 2) 5
3. סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמיתיים (יחידה 2) 16
4. סטטיסטיקה תיאורית - סכימה (יחידה 2) 18
5. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי (יחידה 2) 22
6. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן (יחידה 3) 29
7. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני (יחידה 3) 32
8. סטטיסטיקה תיאורית-ממוצע משוקלל ושונות מצורפת (יחידה 3) 36
9. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן (יחידה 3) 38
10. סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה(יחידה 3) 40
11. סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית (יחידה 3) 42
12. סטטיסטיקה תיאורית - שאלות (יחידות 3-2- מומלץ כשאלות מסכמות למבחן) 44
13. התפלגות נורמלית (יחידה 4 שימו לב את שאלות 9 ואילך לפתור רק כחזרה לבחינה) 47
14. מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר (יחידה 5) 55
15. מדד הקשר ספירמן(יחידה 5) 57
16. מדדי קשר - מדד הקשר פי (יחידה 5) 60
17. מדדי קשר - מדד הקשר הליניארי - פירסון (יחידה 5) 62
18. מדד קשר של פירסון (יחידה 5) 68
19. מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון (יחידה 5) 84
20. מדדי קשר - רגרסיה ליניארית (יחידה 5) 87
21. מדדי קשר - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת (יחידה 5) 90
22. מדדי קשר - בחירת מדד מתאים (יחידה 5) 93
23. בעיות בסיסיות בהסתברות (יחידה 6) 100

תוכן העניינים

24. קומבינטוריקה -כלל המכפלה (יחידה 6) 104

25. קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה (יידה 6) 108

26. קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (יחידה 6) 111

27. קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (יחידה 6) 113

28. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים (יחידה 6) 116

29. הסתברות מותנית במרחב דגימה אחיד (יחידה 7) 124

30. הסתברות מותנית במרחב לא אחיד (יחידה 7) 127

31. דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (יחידה 7) 130

32. תלות ואי תלות בין מאורעות (יחידה 7- ממן 31 ממח 20) 135

33. שאלות מסכמות בהסתברות (יחידה 7. מומלץ כשאלות חזרה לבחינה) 137

34. המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות (יחידה 8) 140

35. המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (יחידה 8) 143

36. המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית (יחידה 8) 146

37. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית (יחידה 8) 149

38. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (יחידה 8) 152

39. המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (יחידה 8. מומלץ כשאלות מסכמות לבחינה) 155

40. תרגול טענות (על על חומר הלימוד. חשוב מאד לבחינה) 158

41. פתרון בחינה לדוגמה מספר 1 ..... (ללא ספר)

42. פתרון בחינה לדוגמה מספר 2 ..... (ללא ספר)

43. פתרון בחינה לדוגמה מספר 3 ..... (ללא ספר)

44. פתרון בחינה לדוגמה מספר 5 ..... (ללא ספר)

45. פתרון בחינה לדוגמה מספר 4 ..... (ללא ספר)

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה (יחידה 2)

תוכן העניינים

1. כללי 1

סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.
משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות.
   לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרוש), אזור מגורים.
   משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל,דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוולי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים.
   למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים.
למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק״ג.
הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס.
בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

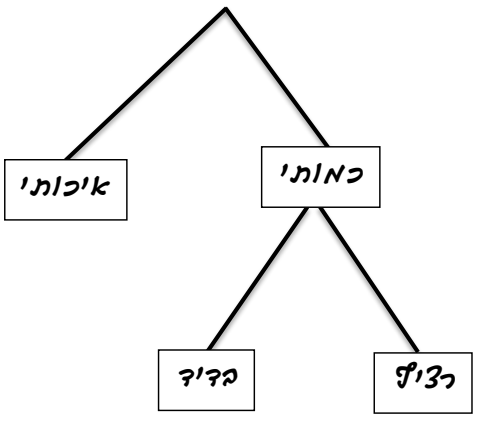
משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים.

דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):

א. גובה (בס"מ).

ב. מספר ילדים למשפחה.

ג. מידת החרדה לפני מבחן.

ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאד)

ה. השכלה.

ו. מספר אוטובוס.

ז. מקום מגורים.

ח. מין (1=גבר ; 2=אישה).

ט. מידת נעליים.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

א. מהו המשתנה הנחקר כאן?

ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:

א. שכר ב-₪.

ב. ציון בחינת בגרות.

ג. תוצאה של הטלת קובייה.

ד. מהירות ריצה בתחרות.

ה. שיעור התמיכה בממשלה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. מנה. ב. מנה. ג. סדר.
ד. סדר. ה. מנה/ סדר. ו. שמי.
ז. שמי. ח. שמי. ט. סדר.

2) א. מספר האיחורים. ב. כמותי בדיד בסולם מנה.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים (יחידה 2)

תוכן העניינים

1. כללי 5

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\cdot 100$
⋮	⋮	⋮
X_k	f_k	$\frac{f_x}{N}\cdot 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון- X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	0.08=2/25
6	4	6	0.16=4/25
7	8	14	0.32=8/25
8	5	19	0.2=5/25
9	4	23	0.16=4/25
10	2	25	0.08=2/25

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

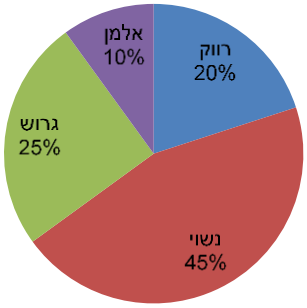
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

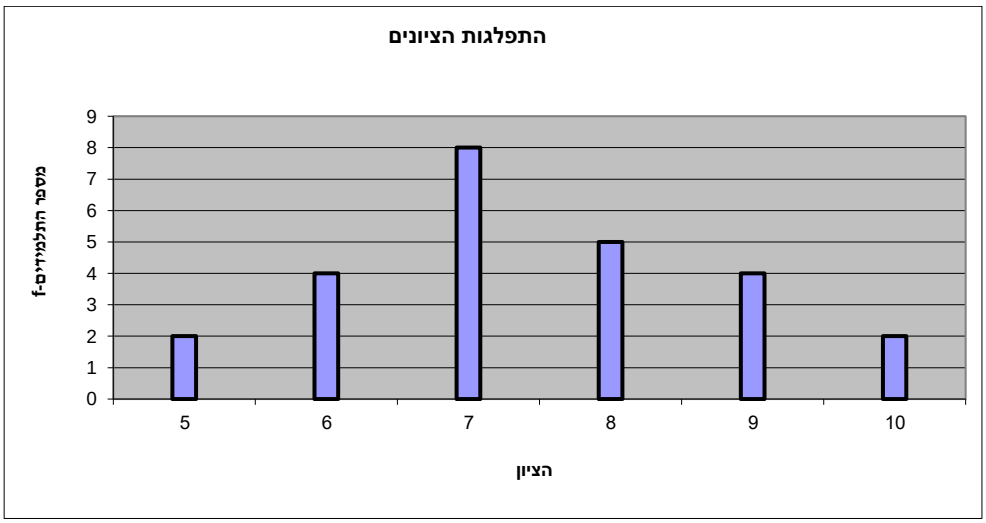
דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

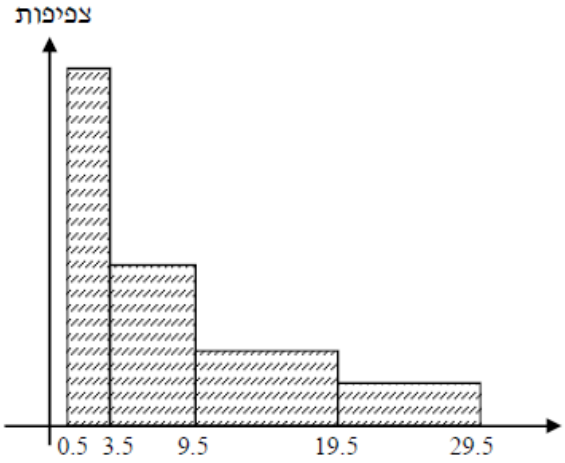


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



פוליגון – מצולעון:

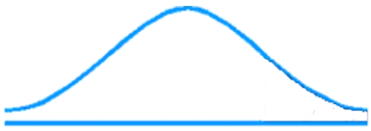
אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

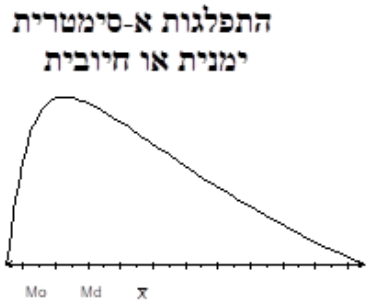
רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

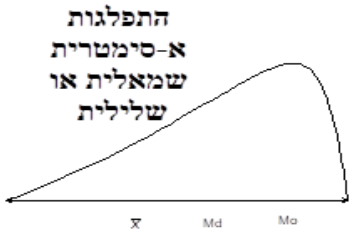
התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

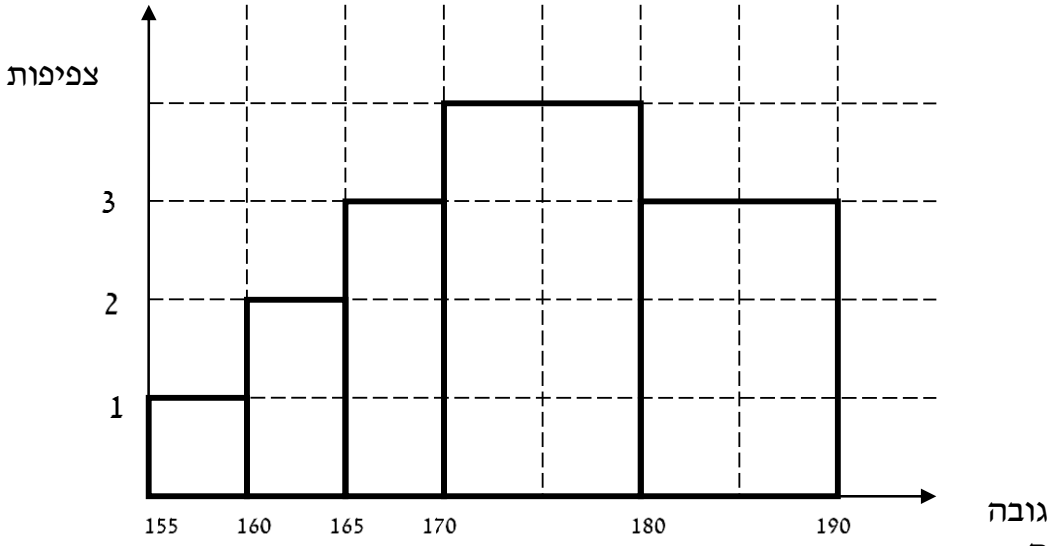
ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

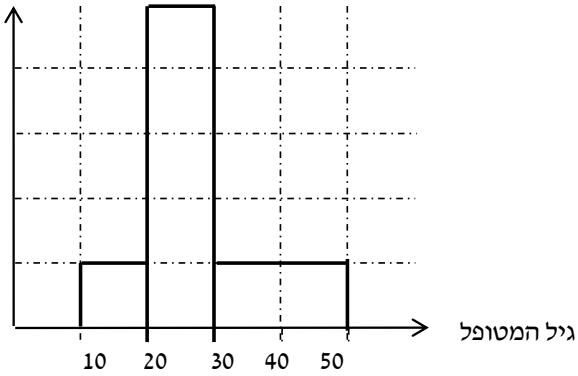
6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:
קנה מידה:



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

2) א. מקצוע מועדף.

ב. 19.6%.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.
ב. סימטרית.

7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.
ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
ד. להלן טבלה:
ה. 62.5%.

x	$f(x)$
10-20	8
20-30	40
30-50	16

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמיתיים (יחידה 2)

תוכן העניינים

1. כללי 16

סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

גבולות מדומים:

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

רמת הדיוק חייבת להיות קבועה - אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות הגבהים בס״מ של תלמידי כיתה ח׳:
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

$f(x)$	X
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

$f(x)$	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2) להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת.
יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

$f(x)$	x
542	495-595
32	595-695
154	695-795
254	795-895

2) להלן טבלה:

$f(x)$	x
18	59.5-64.5
24	64.5-69.5
52	69.5-79.5
19	79.5-89.5

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה (יחידה 2)

תוכן העניינים

1. כללי 18

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X),
ומספר הנפשות החיות בדירה (Y) חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 7. ב. 9. ג. 11. ד. 121.
ה. 14. ו. 27. ז. 126.

2) א. 3. ב. 12. ג. 7. ד. 12.
ה. 14.

3) א. נכונה. ב. נכונה. ג. לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי (יחידה 2)

תוכן העניינים

1. כללי 22

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

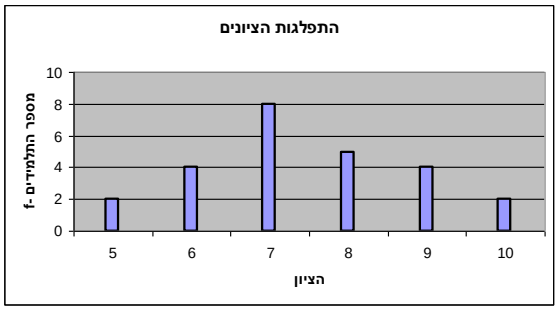
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תוכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות

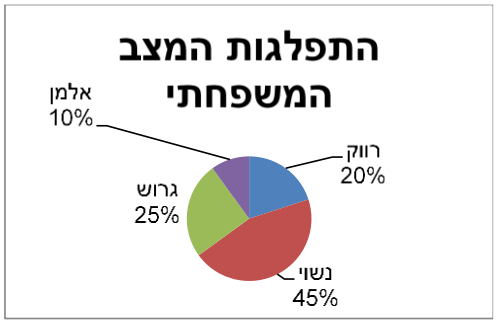
שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



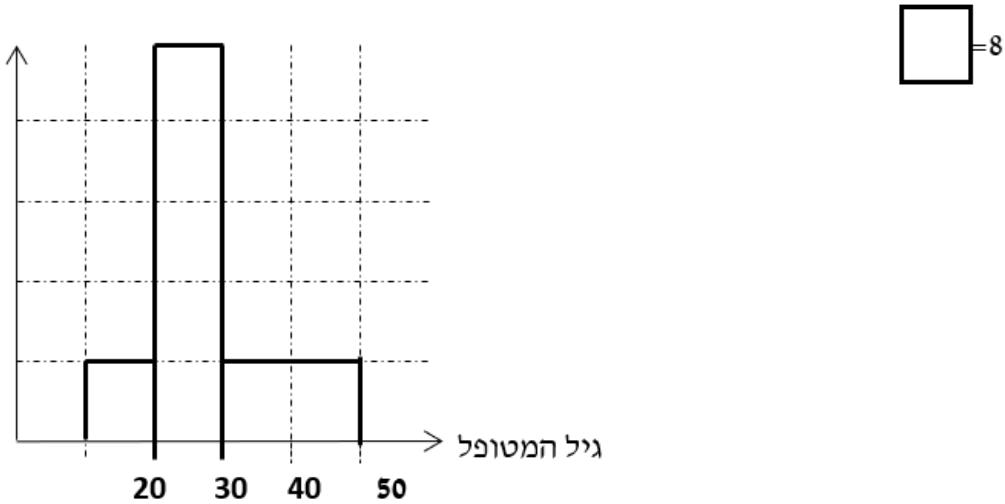
בטבלת שכיחויות במחלקות

אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.
לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}.$$

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה-$\frac{n}{2}$,

והאיבר ה-$\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$.

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average:

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

בטבלת שכיחויות

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}.$$

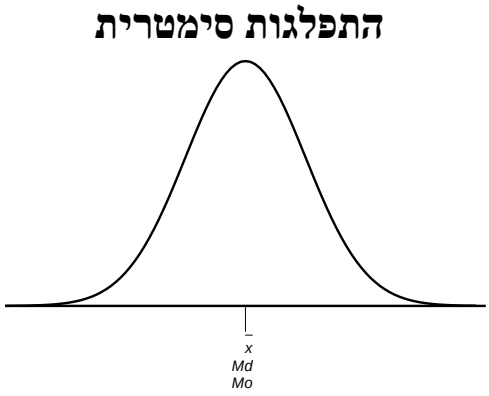
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.

א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?

ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

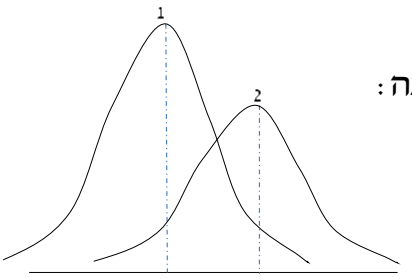
א. כמה משפחות יש בישוב?

ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

תשובות סופיות:

1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.

2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.

3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.

5) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן (יחידה 3)

תוכן העניינים

1. כללי 29

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):
ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

דוגמאות:

1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		**1430**

$$S_x^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$
$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	**פרופורציה**
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע(יקטין, יגדל, לא ישנה)
על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

4) 10.8.

5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני (יחידה 3)

תוכן העניינים

1. טווח בינרבעוני 32

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_1.

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_3.

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו.
מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

# תוכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

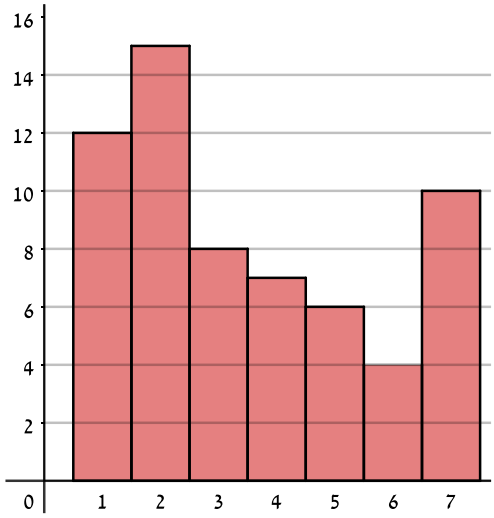
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"?

2) בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?

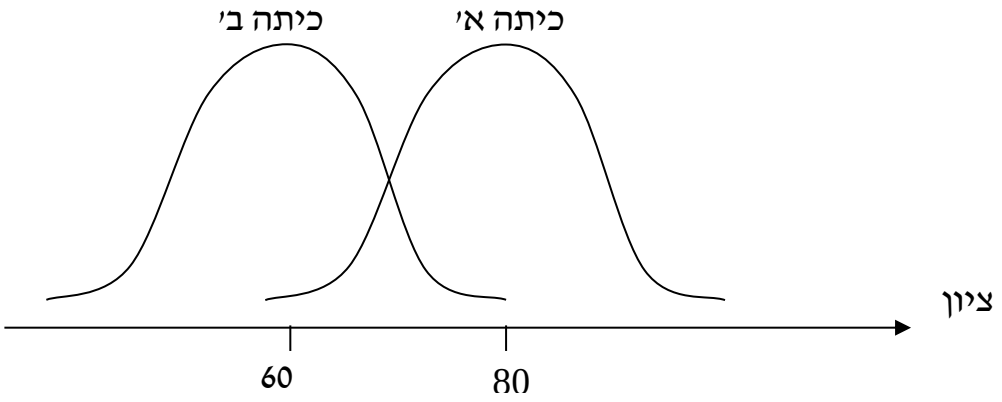
ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים

ג. אם נוסיף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה.
באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



א. כיתה א.
ב. כיתה ב'.
ג. לשתיהן אותו טווח בין-רבעוני.
ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:
א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס.
לכן:
א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
ב. סטיית התקן היא אפס.
ג. ההתפלגות היא סימטרית.
ד. מצב זה כלל לא יתכן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
מהו הטווח הבין-רבעוני?

א. 60.
ב. 2.
ג. 50.
ד. 1.

7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:

א. טווח הציונים הוא אפס.
ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
ד. אף סעיף אינו נכון.

תשובות סופיות:

1) 2.
2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
3) ג'.
4) ג'.
5) א'.
6) ד'.
7) ד'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית-ממוצע משוקלל ושונות מצורפת (יחידה 3)

תוכן העניינים

1. כללי 36

סטטיסטיקה תיאורית – ממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

רקע:

מדובר על מצב שבו ישנן כמה קבוצות שנרצה לאחד לקבוצה אחת.
מתעניינים בממוצע והשונות של הקבוצה הגדולה המתקבלת מאיחוד הקבוצות הקטנות.

n_j - מס' התצפיות בקבוצת ה- j .

j - אינדקס של הקבוצה.

N - מס' התצפיות בכל הקבוצות יחד (סכום כל ה- n_j).

$\overline{x_j}$ - הממוצע בקבוצה ה- j .

S_j^2 - השונות בקבוצה ה- j .

הנוסחאות לממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{x_j} n_j}{N} \quad ; \quad N = \sum_{j=1}^{k} n_j \quad ; \quad S_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2}{N}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחברה שני אגפים: אגף א' מונה עשרים עובדים, השכר הממוצע שם הוא 6,000 ₪ וסטיית התקן היא 2,000 ₪. באגף ב' עשרה עובדים, השכר הממוצע הוא 12,000 ₪ וסטיית התקן היא 3,000 ₪.
מהו השכר הממוצע ומהי סטיית התקן של שכר העובדים בחברה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את הממוצע המשוקלל בשכבה.

ב. חשבו את השונות המצורפת בשכבה.

2) נתונות שתי קבוצות: בקבוצה I פי שתים תצפיות מאשר בקבוצה II.
הממוצע בשתי הקבוצות הוא 70. השונות בקבוצה I היא 100.
השונות בקבוצה II היא 400.

א. מצאו את הממוצע של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

ב. מצאו את סטיית התקן של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

תשובות סופיות:

1) א. 76.22. ב. 173.5.

2) א. 70. ב. 14.14.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן (יחידה 3)

תוכן העניינים

1. כללי 38

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?

ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.

א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?

ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

1) א. לשון. ב. 72.

2) ב'.

3) א. משקל. ב. 70.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה(יחידה 3)

תוכן העניינים

1. כללי 40

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש p % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- p % .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

# תוכניות החיסכון	$F(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

X	$F(x)$
0	10
1	40
2	30
3	15
4	5

מצאו להתפלגות את:

א. האחוזון ה-60.

ב. המאון ה-40.

ג. העשירון העליון.

ד. הטווח בין הרבעונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. 1. ג.3 ד. 1.

2) א. 1 ב. 2. ג. 4 ד. 4.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית (יחידה 3)

תוכן העניינים

1. כללי 42

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y^{\ 2} = a^2 S_x^{\ 2}$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו-b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15,\ MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה:
שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות (יחידות 2-3- מומלץ כשאלות מסכמות למבחן)

תוכן העניינים

1. כללי 44

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

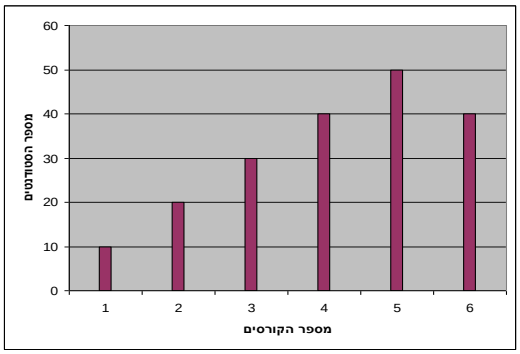
ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\overline{X} = 7\frac{1}{15}$.

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.
ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו:
א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.
ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.
ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.
ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.
ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.
ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.
ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.
ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.

ב. $\bar{X}=52$, $Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$, שכיח: 58.

ג. $S=10.12$, $R=28$.

ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.

ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.

ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

x	$f(x)$
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	40
סה"כ	**190**

3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.

ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533, סטיית תקן: 1.592.

4) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.

ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 13 - התפלגות נורמלית (יחידה 4 שימו לב את שאלות 9 ואילך לפתור רק כחזרה לבחינה)

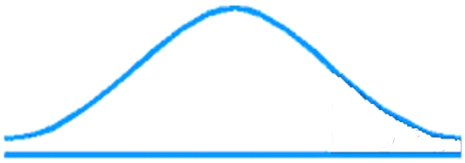
תוכן העניינים

1. כללי 47

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

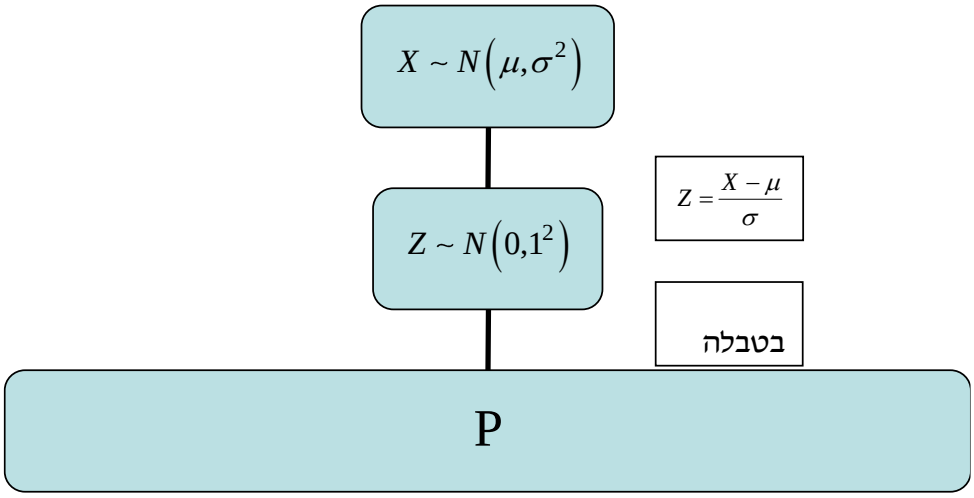
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

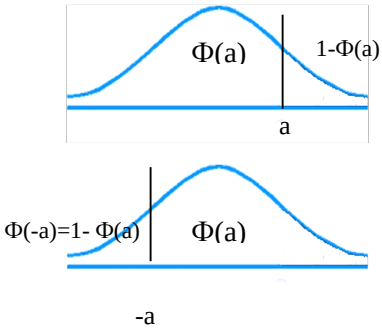
תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:

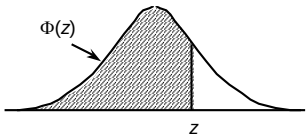
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל





© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס״מ וסטית תקן של 10 ס״מ.

א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס״מ?

ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס״מ?

ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס״מ?

ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס״מ?

ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס״מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?

ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?

ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?

ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק״ג וסטיית תקן של 8 ק״ג.

א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק״ג?

ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק״ג?

ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק״ג?

ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק״ג?

ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק״ג?

4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.

א. מצאו את העשירון העליון.

ב. מצאו את האחוזון ה-95.

ג. מצאו את העשירון התחתון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.

א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?

ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?

ד. מהו האחוזון ה-20?

ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ״ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ״ל.

א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?

ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?

ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.

א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?

ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?

ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?

ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?

ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.

א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?

i. בעשירון העליון.

ii. בממוצע.

iii. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

i. 1.

ii. 2.

iii. 3.

iv. אין לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1)	א. 89.25%	ב. 2.28%	ג. 0	ד. 50%
	ה. 50%			
2)	א. 0%	ב. 3.76%	ג. 0%	ד. 68.26%
3)	א. 26.43%	ב. 89.44%	ג. 39.44%	ד. 0.383
	ה. 100%			
4)	א. 3812.8	ב. 3958	ג. 2787.2	
5)	א. 119.2	ב. 80.8	ג. 112.6	ד. 87.4
6)	א. 500	ב. 532.9	ג. 453.48	
7)	א. 500	ב. 100	ג. 0.3446	ד. 733
	ה. 267			
8)	א. 3	ב. בממוצע.	ג. 1	
9)	א. 0.1587	ב. 0.0228	ג. 0.8563	ד. 0.3975
10)	א. 0.1359	ב. 0.675	ג. 100	ד. 0.25

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 14 - מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 55

מדדי קשר – מדד הקשר של קרמר:

רקע:

משתמשים במדד זה כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים. שאלו 100 גברים ו-100 נשים על דעתם באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה:

Y/X	בעד	נגד	נמנע	$F(x)$
גבר	50	40	10	100
אישה	30	60	10	100
$F(y)$	80	100	20	$n=200$

הטבלה נקראת טבלת O (observe):

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלבים בחישוב r_c:

שלב א': נבנה את טבלת E (Expected).

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל: $E_i = \left(F(x)\cdot F(y)\right)/n$.

Y/X	בעד	נגד	נמנע	$f(x)$
גבר				100
אישה				100
$f(y)$	80	100	20	$n=200$

שלב ב': נחשב $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

שלב ג': נחשב: $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2}$,

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה.
לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.
האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

מין/ השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?
חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות:

1) ישנו קשר בעוצמה בינונית, מקדם המתאם של קרמר: 0.595.

2) א. להלן טבלה: ב. 0.19.

y/x	תקין	לא תקין	$f(x)$
כן	50	10	60
לא	90	50	140
$f(y)$	140	60	$n=200$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 15 - מדד הקשר ספירמן(יחידה 5)

תוכן העניינים

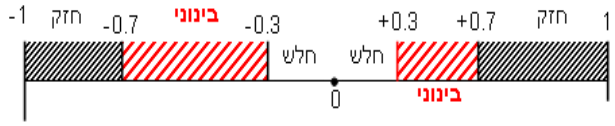
1. כללי 57

מדדי קשר – מדד הקשר של ספירמן:

רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן?
כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.
הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.
מדד הקשר בודק את:

1. כיוון הקשר.
2. עצמת הקשר.



המדד מקבל ערכים בסקלה מ-(1-) ועד 1.

קשר דירוגי חיובי מלא:
מדד הקשר של ספירמן יוצא 1.
ככל שמשתנה אחד עולה, השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי חיובי חלקי:
מקדם המתאם בין 0 ל-1.
ככל שמשתנה אחד עולה, לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

קשר דירוגי שלילי מלא:
מדד הקשר של ספירמן יוצא 1-.
ככל שמשתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי שלילי חלקי:
מקדם המתאים הוא בין 0 ל-(1-).
ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.
על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK).
כאשר מדרגים, אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

הנוסחה של מדד הקשר: $r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\left(n^2-1\right)}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר הזוג	ציון שופט א'	R_x	ציון שופט ב'	R_y	$d=r_x-r_y$	d^2
1	4		5			
2	5		5			
3	6		7			
4	5		7			
5	8		9			
6	7		9			
7	3		7			

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

X - ציון שופט א (סולם סדר).

Y - ציון שופט ב (סולם סדר).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

מספר מועמדת	1	2	3	4	5	6	7
ציון שופט א'	7	8	6	8	9	5	6
ציון שופט ב'	8	8	7	8	9	5	7

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמקו והסבירו!

2) משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חיסורים	מידת מוטיבציה
0	גבוהה
4	נמוכה
2	בינונית
5	נמוכה
1	גבוהה

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו?
חשבו באמצעות מדד הקשר המתאים והסבירו.

3) אם: $r_S = 1$, הדבר אומר שערכי X תמיד שווים לערכי Y.
האם הטענה נכונה? הסבר.

תשובות סופיות:

1) קיים קשר דירוג חיובי חזק בין הערכת שופט א' להערכת שופט ב'.
מדד הקשר: 0.973.

2) קיים קשר שלילי בעוצמה חזקה בין רמת המוטיבציה של העובד למס' החיסורים שלו.
מדד הקשר: -0.85.

3) לא נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 16 - מדדי קשר - מדד הקשר פי (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 60

מדדי קשר – מדד הקשר פי:

רקע:

מדד הקשר פי הינו דרך קיצור על מנת לחשב את מדד הקשר של קרמר. המדד רלבנטי רק כשטבלת השכיחות המשותפת היא מסוג 2/2 כלומר שני משתנים שהם דיכוטומיים.

הנוסחה: $\phi = \sqrt{\frac{(a \cdot d - b \cdot c)^2}{e \cdot f \cdot r \cdot k}}$.

b	a	
d	c	

דוגמה:

מפעל עובד בשתי משמרות, משמרת יום ומשמרת ליל, דגמו 300 מוצרים ממשמרת היום ו-200 ממשמרת הלילה, מתוך המוצרים שנדגמו ביום 10 היו פגומים, מתוך המוצרים שנדגמו בלילה 150 היו תקינים.
האם יש קשר בין סוג המשמרת לטיב המוצר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין לדעה מסוימת. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו ודעתו האישית בדבר סוגיה מסוימת. הנחקרים היו צריכים לענות האם הם בעד, נמנעים או נגד הדעה שהוצגה להם. להלן התוצאות:

מין/ דעה	בעד	נמנע	נגד
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

האם אפשר לחשב במקרה זה את מדד הקשר פי? אם כן חשבו.

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
האם ניתן לחשב את מדד הקשר של ϕ? אם כן חשבו והסבירו את המשמעות.

תשובות סופיות:

1) לא ניתן לחשב את מדד הקשר פי.

2) ניתן לחשב, מדד הקשר פי: 0.19.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 17 - מדדי קשר - מדד הקשר הליניארי - פירסון (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 62

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון):

רקע:

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).
למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.
בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:

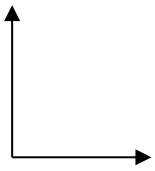
X - מס' חדרים בדירה.

Y - מס' נפשות הגרות בדירה.

להלן התוצאות שהתקבלו:

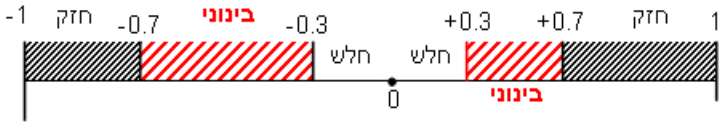
מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים.
המדד (נקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.
מקדם המתאם יסומן באות r.



כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV_{(x,y)} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}$.

שונות של המשתנה X: $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$.

שונות המשתנה Y: $S_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}}{n} - \bar{y}^2$.

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy} = \frac{COV(x,y)}{S_x \cdot S_y}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן.
בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס
וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

א. שרטט דיאגראמת פיזור לנתונים.
מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשב את מדד הקשר של פירסון.
האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו.
לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים הללו עבור חמישה חולים.
להלן התוצאות שהתקבלו:

Y	X
12	10
15	14
15	15
17	18
21	20

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים?
ומה משמעות התוצאה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \ , \ \sum_{i-1}^{20}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 76 \ ,$$

$$\sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = 60.8 .$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i^{\,2} = 2960 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i^{\,2} = 2080 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464 .$$

חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב- 3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות. לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל: $\overline{X} = \overline{Y} = 6 \ , \ S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

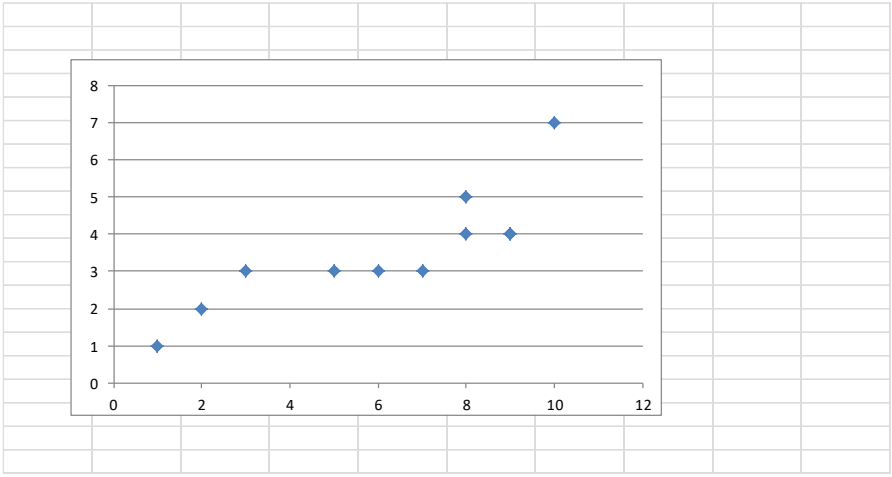
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה 4.2 ₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר ב-₪?

א. 1.
ב. 0.
ג. 4.2.
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1.
ב. 0.85.
ג. 0.15.
ד. 0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ב. -0.9325.
2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$. ב. $r_{xy}=0.96$.
3) א. 0.8.
4) 0.8.
5) 1.
6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
7) ג'.
8) א'.
9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 18 - מדד קשר של פירסון (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 68
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 79

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חדרים בדירה	2	2	3	2	3	3	4	4
מספר הנפשות בדירה	0	1	2	2	3	4	4	5

1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

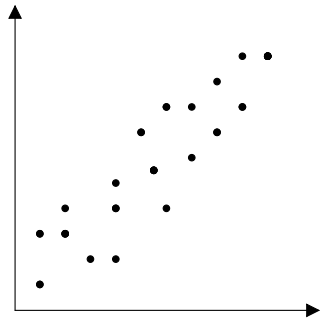
3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

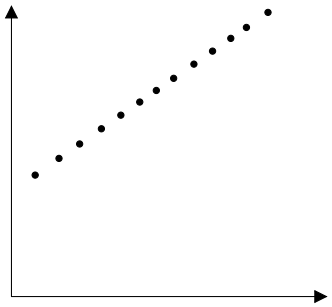
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

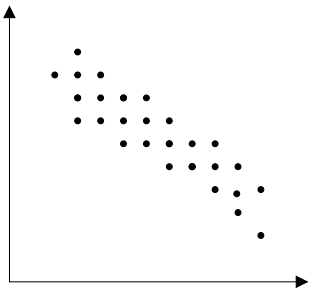
קשר לנארי חיובי חלקי



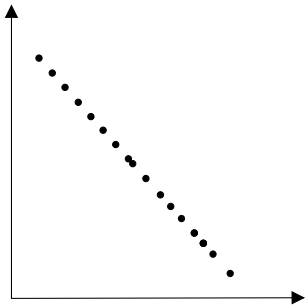
קשר לנארי חיובי מלא



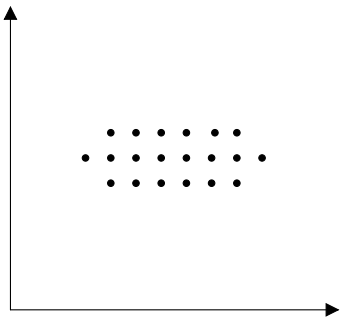
קשר לינארי שלילי חלקי



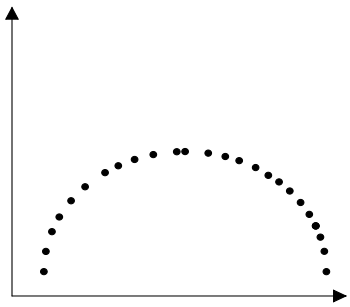
קשר לינארי שלילי מלא



אין קשר



אין קשר לינארי



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

1	0	-1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

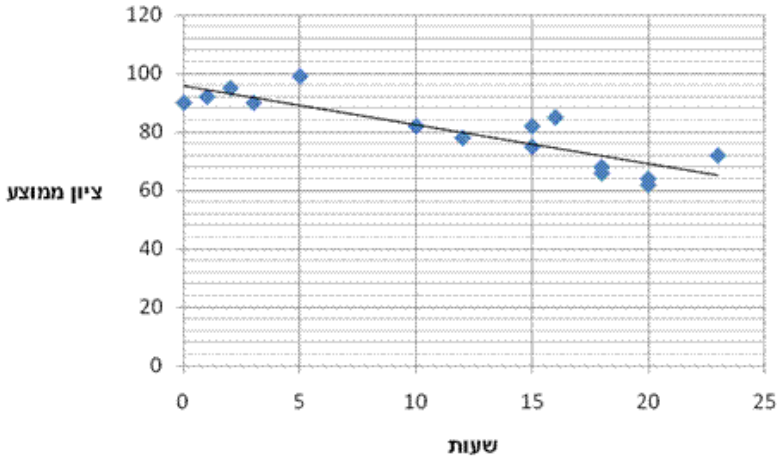
דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	?	-0.7	?
לשון	?	?	0.6
מתמטיקה	-0.1	?	?

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

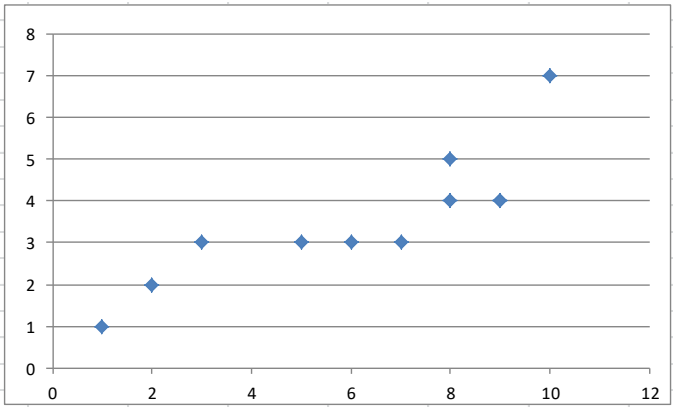
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

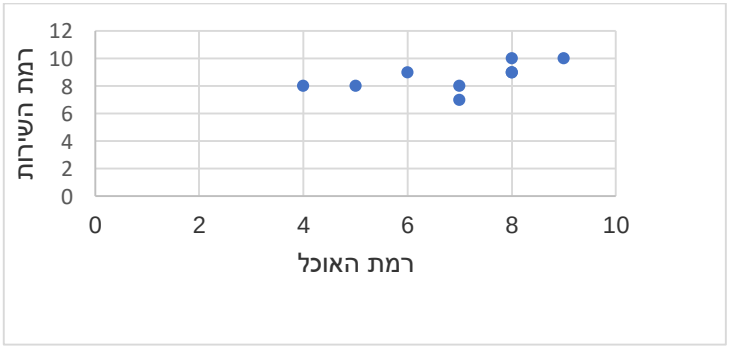
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

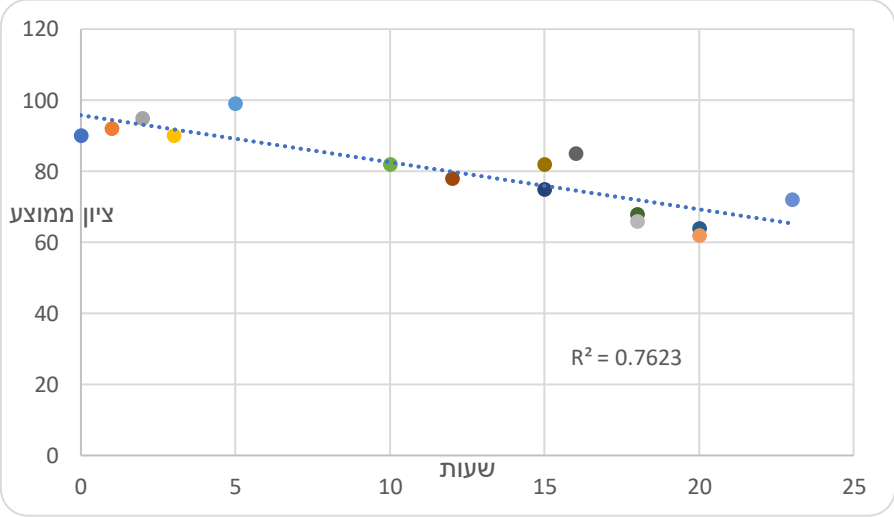
7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

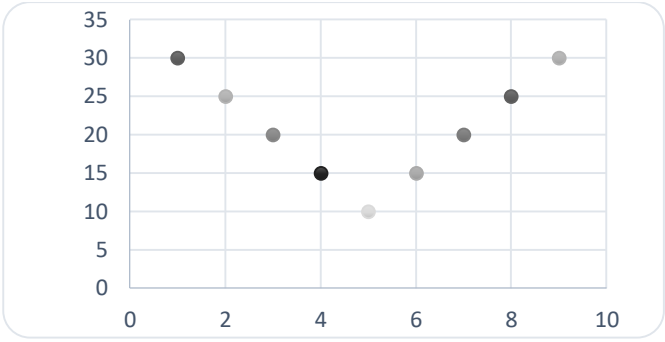


מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



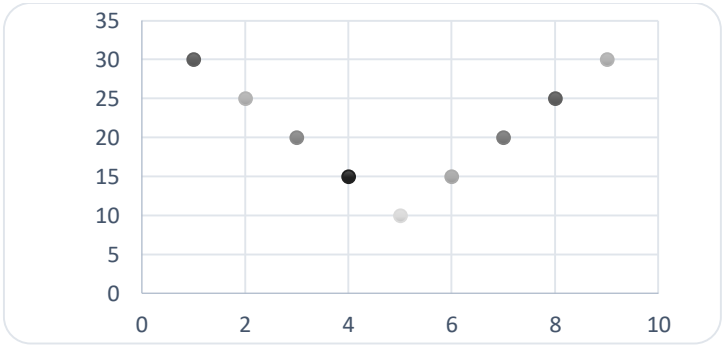
א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

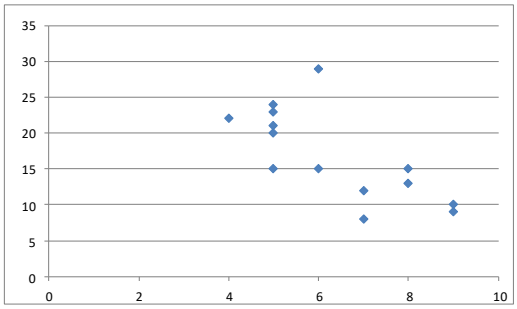
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- Y (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

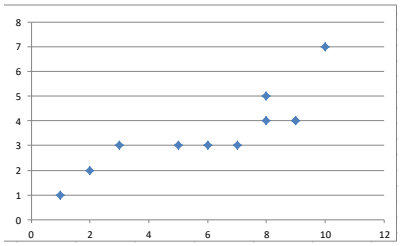
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

		159
		170
		180
		185
		204
		224
		236
		212
		168
		189
		195
		163
		187
		206
		201
		223
		242
		203
		205
197.47	AVERAGE	
536.25	VARPA	

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. שעות בילוי. ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

2) א. להלן טבלה:

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	1	-0.7	0.1
לשון	-0.7	1	0.6
מתמטיקה	-0.1	0.6	1

ב. ספורט ולשון.

3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון. ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי. ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

4) א. לעלות. ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

5) א. חלקי, חיובי. ב. קטן.

6) ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

11) ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

16) א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
X -מס' חדרים בדירה. Y-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

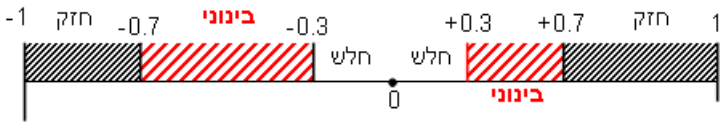
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה X: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה Y: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

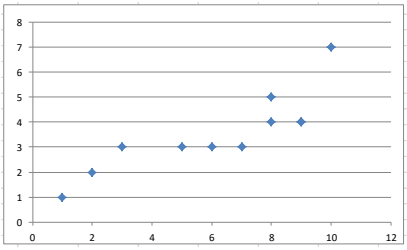
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

תשובות סופיות

1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. 0.9325-. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

3) א. 0.8.

4) 0.8.

5) 1.

6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

7) ג'.

8) א'.

9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 19 - מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 84

מדדי קשר – השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון:

רקע:

טרנספורמציה לינארית, בין אם נעשית על X , בין אם נעשית על Y , ובין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר. היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

$$r_{[(aX+b),(cY+d)]} = \begin{cases} r_{x,y} _____ if ___ a \cdot c > 0 \\ -r_{x,y} _____ if ___ a \cdot c < 0 \end{cases} .$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מבחן בנוי משני חלקים: חלק כמותי וחלק מילולי. מקדם המתאם בין שני הציונים של שני החלקים הוא 0.9.

א. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?

ב. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי בבחינה-150. מצאו את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W לציון הכמותי.

2) מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7. אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, מה יהיה מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה להוצאה החדשה?

3) חברת "לק" המייצרת גלידה החליטה לערוך מחקר לבדיקת הקשר בין מספר חבילות הגלידה הנמכרות ביום לבין הטמפרטורה באותו יום. נבדקו 10 ימים והתקבל מתאם לינארי 0.85. חברת "לק" דואגת להתחיל כל יום עם מלאי של 150 חבילות גלידה. בנוסף, מעוניינים כי הטמפרטורה תבוטא במעלות פרנהייט במקום במעלות צלסיוס. מה ערכו של מקדם המתאם בין מספר חבילות הגלידה שנשארות בסוף היום לבין הטמפרטורה במעלות פרנהייט?

הקשר בין מעלות צלסיוס ($C°$) למעלות פרנהייט ($F°$) נתון ע"י: $F=\frac{9}{5}C+32$.

בחרו בתשובה הנכונה:

א. 0.85.

ב. 0.-85.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

4) מקדם המתאם בין X ל- Y הנו 0.4. כל ערכי ה- X הוכפלו ב-2. מה יהיה מקדם המתאם החדש בין שני המשתנים?

א. 0.8.

ב. 0.4.

ג. 0.-4.

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. בין הציון המילולי הישן לחדש: 1. בין הציון המילולי החדש לכמותי: 0.9.

ב. בין W לציון המילולי: 1-, בין W לציון הכמותי: 0.9-.

2) 0.7.

3) ב'.

4) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 20 - מדדי קשר - רגרסיה ליניארית (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 87

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X.
השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$, $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20} \left(Y_i - \overline{Y}\right) = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?
ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$\mathrm{COV}\left(X,Y\right) = 7.5 \ , \ \overline{Y} = 8 \ , \ \overline{X} = 14 \ , \ S_Y = 5 \ , \ S_X = 2 \ .$$

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y. כמו כן נתון: $\overline{X} = 1.5$, $S_x = S_y = 4$,
וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.8. ב. $Y=0.8X+0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

2) א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

3) א. 1.2. ב. 29. ג. $Y=1.2X+29$.

4) -0.2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 21 - מדדי קשר - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. כללי 90

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

4) אם מגדילים את r^2, ניתן לומר כי:

א. אחוז השונות המוסברת יקטן.

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל.

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה.

ה. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים: מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y. כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא:

א. 0.44.

ב. 0.44 -.

ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.

ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.

ה. 0.35.

תשובות סופיות:

1) א. 49%. ב. 51%.
ג. שונות מוסברת: 19,600, שונות לא מוסברת: 20,400.

2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.

3) ב'.

4) ב'.

5) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 22 - מדדי קשר - בחירת מדד מתאים (יחידה 5)

תוכן העניינים

1. בחירת מדד מתאים 93

מדדי קשר – בחירת מדד מתאים:

רקע:

בפרק זה נתרגל את התהליך של בחירת מדד הקשר (מקדם המתאם) המתאים.
נתרכז בשלושת מדדי הקשר הנפוצים ביותר:

- מדד הקשר של קרמר.
- מדד הקשר של ספירמן.
- מדד הקשר של פירסון (מדד הקשר הלינארי).

בחירת מדד הקשר נעשה לפי סולמות המדידה של שני המשתנים שאנחנו רוצים לבדוק את הקשר בינם. הנושא של סולמות מדידה נלמד כבר בפרק אחר, כמו כן כל מדד קשר נלמד בפרק נפרד. אנו מתרכזים ב 3 סולמות מדידה:

- סולם שמי/ זהות (nominal).
- סולם סדר (ordinal).
- סולם כמותי (scale): לכאן אנו מאחדים את סולם רווחים ומנה יחד.

שלושת מדדי הקשר שלעיל דנים בקשר בין שני משתנים. מדדי הקשר הם סימטריים, כלומר אין זה משנה איזה משתנה נגדיר בתור משתנה X ואיזה יוגדר בתור משתנה Y.

להלן טבלה שמסכמת את בחירת המדד המתאים:

X / Y	שמי	סדר	כמותי
שמי	קרמר	קרמר	קרמר
סדר	קרמר	ספירמן	ספירמן
כמותי	קרמר	ספירמן	פירסון

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
איזה מדד קשר מתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין התפוקה היומית לכמות עובדים באותו היום במפעל?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בקרב תלמידי כיתות א' בבית הספר גבריאלי אשר בתל אביב בדקו לכל תלמיד את גובהו בס"מ ואת משקלו בק"ג. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין גובה התלמיד למשקלו?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

2) בסקר שנעשה על אזרחים במדינה בדקו לכל אזרח את השכלתו ואת שכרו. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין השכלה לשכר?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

3) בגן הילדים של שולה אספו נתונים על 25 הילדים שבגן. על כל ילד בדקו את רמת הביטחון העצמי שלו (X = מדד שמקבל ערכים בין 1 - נמוך ועד 5 - גבוה), ואת אוצר המילים שלו (Y = לפי מבחן שנעשה לכל ילד בו ספרו את מספר המילים שידע מתוך רשימה של 20 מילים). איסוף הנתונים נעשה על ידי איש מקצוע שצפה בילדים ובחן אותן.
מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת התלות בין X לבין Y?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

4) הועלתה השערה בבית הספר למדעי ההתנהגות שיש קשר בין המרצה להצלחת הסטודנט. לצורך בדיקת הטענה בדקו לגבי כל סטודנט שלמד סטטיסטיקה אצל איזה מרצה הוא למד (היו 3 מרצים שונים) והאם הוא עבר את הבחינה.
מהו מדד הקשר המתאים במקרה זה?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בבורסה בתל אביב רצו לבדוק את הקשר בין גובה הריבית במשק בסוף החודש (באחוזים), לבין תשואת מניית אקטר (באחוזים) בסוף החודש.
מהו מדד הקשר המתאים?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

6) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר:

- מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
- מה גילו של הלקוח בשנים.
- מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם חיובי בין מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות לבין גובה התשר שהוא נתן למלצר?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

7) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר:

- מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
- מה גילו של הלקוח בשנים.
- מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם בין גיל הלקוח לגובה התשר שהעניק לשירות?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הנתונים הבאים מתאימים ל-3 השאלות הבאות:

חוקרים ערכו מדגם של ילדים מכיתות ב' ו-ג' מ-4 בתי ספר שונים. הועבר לילדים שאלון בו תואר מצב מסוים והילדים התבקשו לציין את רמת החרדה שלהם באשר לאותו מצב. המשתנים שלגביהם נאספו נתונים:

- מגדר (1 - בן, 2 - בת).
- כיתה (0 - ג', 1 - ב').
- בית ספר (A, B, C, D).
- רמת חרדה (ציון שהילד היה צריך לתת בסקלה של 1 עד 10).
- גיל התלמיד בחודשים.

8) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין גיל התלמיד לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

9) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

10) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין בית הספר?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) בטבלה שלהלן נתונות שכיחויות ההצלחה והכישלון של 150 חולים:

תוצאה/ התרופה	A	B	C
נרפא	35	13	45
לא נרפא	15	37	5

החולים קיבלו 3 תרופות שונות ובדקו עבור כל חולה אם התרופה הצליחה בריפוי. מהו מדד הקשר המתאים?

א. פירסון.

ב. ספירמן.

ג. קרמר.

ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

12) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ראליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש קורלציה בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

	1	2	3	4	5	6	7	8
מוסיקאי א'	6	5	7	4	3	1	1	4
מוסיקאי ב'	5	7	5	2	3	3	2	7

מהו מדד הקשר המתאים?

א. פירסון.

ב. ספירמן.

ג. קרמר.

ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

13) להלן טבלה המסכמת את השכר באלפי ₪ של עובדים בחברה ואת רמת המוטיבציה שלהם מ-1 עד 5:

שכר	12	18	20	15	30
מוטיבציה	4	4	5	3	5

מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת רמת ההתאמה בין המוטיבציה לשכר של העובד?

א. פירסון.

ב. ספירמן.

ג. קרמר.

ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) להלן טבלה על נתונים שנאספו על מספר תצפיות:

X	1	2	3	4	5
Y	12	14	17	17	20

אם מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר לנארי בין שני המשתנים.
מהו המדד המתאים?

א. פירסון.

ב. ספירמן.

ג. קרמר.

ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

תשובות סופיות:

1) א'	**2)** ד'	**3)** ב'	**4)** ג'	**5)** א'
6) ב'	**7)** א'	**8)** ב'	**9)** ג'	**10)** ג'
11) ג'	**12)** ב'	**13)** ב'	**14)** א'	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 23 - בעיות בסיסיות בהסתברות (יחידה 6)

תוכן העניינים

1. כללי 100

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1,2,3,4,5,6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך}.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A , B , C. בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A=\{5,6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B=\{2,4,6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega|=6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A|=2$, $|B|=3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$, $\bar{B}=\{1,3,5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

x – הציון	f – מספר התלמידים – השכיחות
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A})=1-P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E.

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. התקבל פעם אחת עץ.

ii. התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D?

ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega=\{EE,EF,EG,FE,FF,FG,GE,GF,GG\}$.

ב. $B\{EF,EG,FE,FG,GE,GF\}$, $A=\{EE,EF,EG,FE,GE\}$.

ג. $\bar{A}=\{FF,FG,GF,GG\}$.

2) א. $\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1)&(2,1)&(3,1)&(5,1)&(4,1)&(6,1)\\(1,2)&(2,2)&(3,2)&(4,2)&(5,2)&(6,2)\\(1,3)&(2,3)&(3,3)&(4,3)&(5,3)&(6,3)\\(1,4)&(2,4)&(3,4)&(4,4)&(5,4)&(6,4)\\(1,5)&(2,5)&(3,5)&(4,5)&(5,5)&(6,5)\\(1,6)&(2,6)&(3,6)&(4,6)&(5,6)&(6,6)\end{Bmatrix}$.

ב. $C=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$, $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5.

4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32.

5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8.

6) א. $\Omega=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP,EEE\}$.

ב. $D=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP\}$, $A=\{PPE,PEP,EPP\}$.

ג. $\bar{D}=\{EEE\}$.

ד. $\frac{1}{8}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 24 - קומבינטוריקה -כלל המכפלה (יחידה 6)

תוכן העניינים

1. כללי 104

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$n_1 = 6$, $n_2 = 2$

$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$n_1 = 26$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$, $n_4 = 10$, $n_5 = 10$

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:

א. הטלת קובייה פעמים.

ב. מספר תלת ספרתי.

ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.

ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.
האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.
האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.

א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?

ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:

i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.

ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. המספר הוא זוגי.

ב. במספר כל הספרות שונות.

ג. במספר כל הספרות זהות.

ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.

ה. במספר לפחות שתי ספות זהות.

ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).

4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כולם ירו בקומה החמישית.

ב. כולם ירדו באותה קומה.

ג. כולם ירדו בקומה אחרת.

ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:

א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6) מטילים קובייה 4 פעמים.

א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?

ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?

ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?

ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).

א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?

ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?

ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?

ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).

א. בקוד אין את הספרה 5.

ב. בקוד מופיעה הספרה 3.

ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 36. ב. 900. ג. 70. ד. 90.

2) א. 36. ב. i. $\frac{1}{36}$. ii. $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.5. ב. 0.3024. ג. 0.0001. ד. 0.9999. ה. 0.6976. ו. 0.01.

4) א. $\frac{1}{8^5}$. ב. $\frac{1}{8^4}$. ג. 0.205. ד. $\frac{1\cdot 1\cdot 7^3}{8^5}$.

5) א. 3375. ב. 2730.

6) א. $\frac{1}{216}$. ב. $\frac{5}{18}$. ג. $\frac{13}{18}$. ד. $\frac{215}{216}$.

7) א. $\frac{23^5}{26^5}$. ב. $\frac{1}{26^4}$. ג. $1-\frac{1}{26^4}$. ד. $\frac{1}{26^2}$.

8) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

9) 2^n.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 25 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה (יידה 6)

תוכן העניינים

1. כללי 108

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$.

<u>הערה</u>: $0!=1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חשבו: בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.

א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?

ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?

ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

1) א. 24. ב. 120.

2) א. 0.2. ב. 0.8. ג. 0.022.

3) א. 362880. ב. 2880.

4) א. 3628800. ב. 0.2. ג. 0.8. ד. $\frac{1}{45}$.

5) א. $\frac{1}{792}$. ב. $\frac{1}{99}$. ג. $\frac{1}{4620}$.

6) א. 0.75. ב. 0.014. ג. $\frac{1}{14}$. ד. $\frac{1}{35}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 26 - קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (יחידה 6)

תוכן העניינים

1. כללי 111

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3=1,000$,$k=3$,$n=10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n\geq k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k=n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.

א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?

ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.

א. מה ההסתברות לזכות במשחק?

ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?

ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור.
הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.

א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?

ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:

א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

1) א. 8000. ב. 6840.

2) א. 0.0001. ב. 0.6561. ג. 0.3439.

3) 0.476.

4) א. 0.04. ב. 0.48.

5) א. 40^5. ב. 78,960,960.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 27 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (יחידה 6)

תוכן העניינים

1. כללי 113

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120.$$

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:

א. אין שום הגבלה לבחירה.
ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.

א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.

א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.

א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם: נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

תשובות סופיות:

1)	א. 53130.	ב. 20475.	ג. 3003.	
2)	א. 252.	ב. 100.	ג. 100.	ד. 60.
3)	א. 0.1117.	ב. 0.1445.	ג. 0.9819.	
4)	א. 0.02.	ב. 0.187.	ג. 0.972.	ד. 0.00246.
5)	א. 0.	ב. 0.1923.	ג. 0.009.	ד. 0.837.
6)	א. $6.45\cdot10^{-5}$.	ב. $2.58\cdot10^{-4}$.	ג. 0.3225.	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 28 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים (יחידה 6)

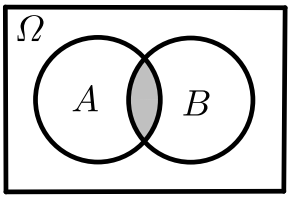
תוכן העניינים

1. כללי 116

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

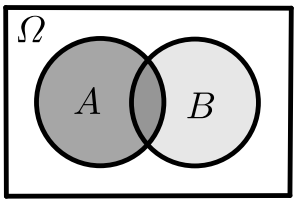
פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A\cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.

דוגמה:
בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B=\{2,4,6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A\cap B=\{6\}$.

פעולת איחוד:



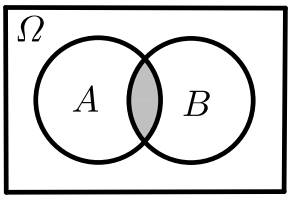
נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A\cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב-A או B.
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:
בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B=\{2,4,6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

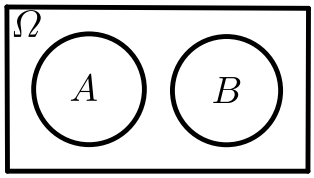
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\overline{A}$	A	
B	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(\overline{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
$A\cap B=\{\ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A\cap B)=0$.

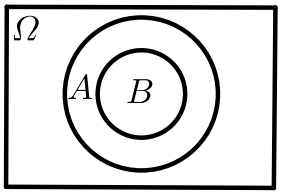
ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$ והאפשרות לקבל 3 היא: $B=\{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A\cap B=\{\ \}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות A ו-B, השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B\subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך מאורע A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B\subset A$.

$$A\cap B=B\ \ P(A\cap B)=P(B)$$
$$A\cup B=A\ \ P(A\cup B)=P(A)$$

למשל: $\begin{matrix}A=\{2,4,6\}\\B=\{2,4\}\end{matrix}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה אותיות שונות.
א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגראמת וון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
A , B , $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$.
ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4) נסמן ב-Ω את מרחב המדגם וב-ϕ קבוצה ריקה.
נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.
קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
$\overline{\overline{A}}$, $A\cap\phi$, $A\cup\phi$, $A\cap\Omega$, $A\cup\Omega$, $A\cap\overline{A}$, $\overline{\phi}$, $A\cup\overline{A}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A\cap B$.

ב. $A\cup B$.

ג. $\overline{A}\cap B$.

ד. $\overline{A}\cup\overline{B}$.

ה. $\overline{\overline{A}}$.

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים.
חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A)=0.6$,
$P(B)=0.3$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1$.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A}\cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) נתון כי: $P(A)=0.3$, $P(B)=0.25$, $P(A\cup B)=0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל-$P(A\cap B)$.

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15) A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cap\overline{B})=2\cdot P(B\cap\overline{A})$.

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A\cap B=B\cap A$.

ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$.

ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$.

ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

17) נתון ש-A ו-B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש-$P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$.

א. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.4$?

ב. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.6$?

ג. אם A ו-B זרים מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $A\cap B=\{EG,EF,FE,GE\}$.

ב. $A\cup B=\{EG,EF,EE,FE,GE,EG,GF\}$.

2) א. $B\cap\bar{A}$. ב. $A\cap\bar{B}$. ג. $A\cap B$. ד. $A\cup B$. ה. $\bar{A}\cap\bar{B}$. ו. $\bar{B}$.

3) א. $A=0,\ 2,4,6,8$, $B=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $\bar{B}=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$,

$A\cap B=0,\ 2,\ 4$, $A\cup B=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 1,\ 3$.

ב. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$, $P(\bar{B})=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7$.

4) $\bar{\bar{A}}=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup\phi=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cup\Omega=\Omega$,

$A\cap\bar{A}=\phi$, $\bar{\phi}=\Omega$, $A\cup\bar{A}=\Omega$.

5) א. $A\cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A\cup B$: כל גובה אפשרי .

ג. $\bar{A}=\bar{A}\cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A}\cup\bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.

ה. $\bar{\bar{A}}=A$: גובה מעל 1.7.

6) א. $A\cap B\cap C$. ב. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. ג. $A\cup B\cup C$.

ד. $\bar{C}$. ה. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(B\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})$.

7) א. $P(A\cup B)=0.24$. ב. $P(A\cap B)=0.04$. ג. $P(B\cap\bar{A})=0.16$.

8) א. $P(A\cap B)=10\%$. ב. $P(A\cup B)=50\%$. ג. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=50\%$.

9) א. $P(A\cap B)=0.2$. ב. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3$. ג. $P(A\cup\bar{B})=0.3$.

10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.

11) א. כן. ב. $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

12) הטענה הנכונה היא ג'.

13) א. 0.05. ב. 0.95.

14) א. $P(A\cap B)=0.06$. ב. לא. ג. $P((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))=0.43$.

15) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$.

16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A\cup B)=0.5$. ד. $P(A\cup B)=0.3$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 29 - הסתברות מותנית במרחב דגימה אחיד (יחידה 7)

תוכן העניינים

1. כללי 124

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש־B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?

3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.

4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 0.2.

2) $\frac{1}{3}$.

3) 0.5.

4) 0.

5) $\frac{1}{6}$.

6) $\frac{2}{11}$.

7) $\frac{1}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 30 - הסתברות מותנית במרחב לא אחיד (יחידה 7)

תוכן העניינים

1. כללי 127

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה:
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:

א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?

ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?

ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?

ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?

ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?

2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופטי" ו"בלי". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בלי", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופטי" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.

א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?

ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופטי", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בלי"?

ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בלי", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופטי"?

ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופטי"?

3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.

א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?

ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?

ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?

ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.

ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?

ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?

ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?

ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?

ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

תשובות סופיות:

1) א. 0.833 ב. 0.9375 ג. 0.0625 ד. 0.5 ה. 0.789

2) א. 5% ב. 0.0833 ג. 0.786 ד. 0.6875

3) א. 0.4 ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.25 ד. $\frac{6}{7}$

4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.6 ד. $\frac{23}{30}$

	אקדמאי	לא אקדמאי	סה"כ
שכיר	20	180	200
עצמאי	30	70	100
סה"כ	50	250	300

ה. 0.3 ו. 0.72

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 31 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (יחידה 7)

תוכן העניינים

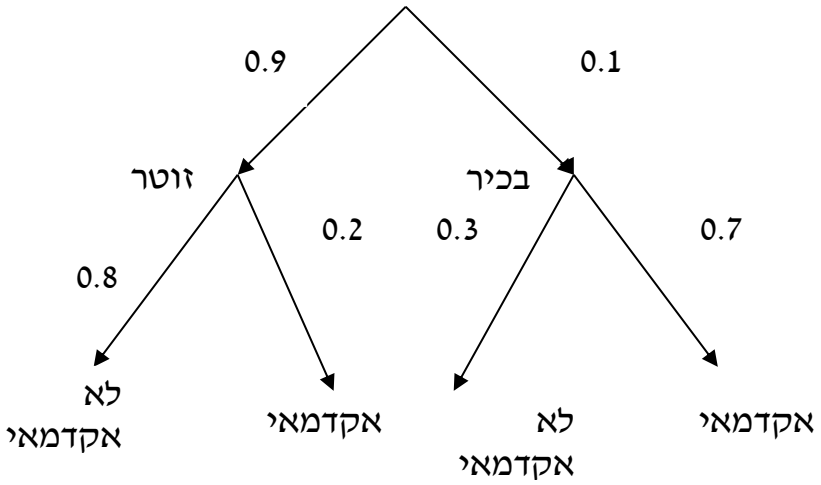
1. כללי 130

דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ? $0.1\cdot 0.7 = 0.07$.

2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ? $0.9\cdot 0.8 = 0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף
(רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי ? $0.1\cdot 0.7 + 0.9\cdot 0.2 = 0.25$.

4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?
מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה: $P\left(zutar \mid academay\right) = \frac{0.9\cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B, מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1,\ldots,A_n$ כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

אזי: $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)$.

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{A_j}{B}\right)=\frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאם סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו.
70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D.
אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים.
כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%,
ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1)	א. $\frac{2}{7}$.	ב. $\frac{23}{49}$.		
2)	א. 6%.	ב. 58%.	ג. 0.241.	ד. 0.2.
3)	א. 0.544.	ב. 0.5.		
4)	א. 9%.	ב. 0.09375.	ג. 0.9722.	
5)	א. 0.14.	ב. 0.3488.	ג. 0.2442.	
6)	א. 70%.	ב. 0.8125.		
7)	א. 0.57.	ב. 0.3158.	ג. 0.7543.	
8)	א. 0.0886.	ב. 0.2889.	ג. 0.3137.	ד. 0.8778.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 32 - תלות ואי תלות בין מאורעות (יחידה 7- ממן 13 ממח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 135

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(A/B)=P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון: $P(A\cup B)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(A)=0.2$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

תשובות סופיות:

1) כן.
2) א. 0.28. ב. 0.18.
3) א. 0.0064. ב. 0.1536.
4) א. 0.5904. ב. 0.9984.
5) א. 0.08^5. ב. 0.3409.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 33 - שאלות מסכמות בהסתברות (יחידה 7. מומלץ כשאלות חזרה לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 137

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?

ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?

ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים.
נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, וב-B את ההטלה השנייה ראש.

א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.

ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?

ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?

ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.75 ג. 0.6 ד. 0.5

2) א. 0.2 ב.0.267 ג. 0.524 ד. תלויים.

3) א. 0.2 ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06

4) א. 0.94 ב. 0.255 ג. 0.03 ד. 0.168

5) א. 15% ב. 0.692 ג. לא זרים ותלויים.

6) א. 0.65 ב. תלויים. ג. 0.5384

7) א. 8% ב. 0.733 ג. תלויים. ד. i. 0.478

ד. ii. 0.15

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 34 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות (יחידה 8)

תוכן העניינים

1. כללי 140

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

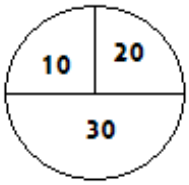
משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.
סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות .
בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2) מהאותיות A , B , C יוצרים קוד דו תווי.
א. כמה קודים ניתן ליצור?
ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים.
נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.
מצאו את ערכו של A.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.25	0.35	0.3	0.1

2) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	0.05	0.20	0.75

4) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.3	0.21	0.147	0.343

5) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.006	0.092	0.398	0.504

6) 10.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 35 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (יחידה 8)

תוכן העניינים

1. כללי 143

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

מגדירים תוחלת באופן הבא: $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu$.

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

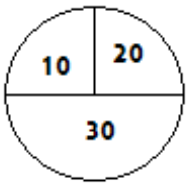
מגדירים שונות באופן הבא: $V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=\sigma^2$.

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD=\sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

$$E(X)=10\cdot 0.25+20\cdot 0.25+30\cdot 0.5=22.5=\mu$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=(10-22.5)^2\cdot 0.25+(20-22.5)^2\cdot 0.25+(30-22.5)^2\cdot 0.5=68.75=\sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{68.75}=8.29$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X:

X	-30	0	20	40
$P(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את: $E(X)$.

3) ידוע של- 20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X:

X	2	4	6	8
$E(X)$		0.3		0.2

כמו כן נתון ש: $E(X)=4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את: $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 0-5 ו-5-.
נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקציית ההסתברות.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2 , שונות: 796.

2) 0.9.

3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36 , סטיית תקן: 1.603.

4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3 , שונות: 2.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.4	0.3	0.1	0.2

6) ראו טבלה:

X	-5	0	5
$P(X)$	0.2	0.6	0.2

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 36 - המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית (יחידה 8)

תוכן העניינים

1. כללי 146

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a,b הם קבועים כלשהם: $Y=aX+b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y)=aE(X)+b$.
2) $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

שלבי העבודה:

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X)=68.75=\sigma^2$, $E(X)=22.5=\mu$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X)=4$ ו- $V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.

ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.

מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

X	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.1	0.2	0.2	0.3		

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

א. השלימו את פונקציית ההסתברות.

ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.

ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}$, $k=1,2...4$.

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 14, שונות: 32.

2) תוחלת: 8, שונות: 12.

3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

4) תוחלת: 3, שונות: 3.

5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

X	100	50	25	0
$P(X)$	0.001	0.02	0.05	0.929

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

6) ב. $V(X)=1.8275$.

7) א. $A=10$. ב. $E(X)=3$, $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$, $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$, $V(Y)=0.25$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 37 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית (יחידה 8)

תוכן העניינים

1. כללי 149

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של X:

לכל $k=0,1,2,....,n$ $\quad P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot 1$; $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X)=np$.

שונות: $V(X)=npq$.

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על <u>אותו ניסוי ברנולי</u> באופן <u>בלתי תלוי</u> זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X – מוגדר <u>כמספר ההצלחות המתקבלות</u> בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של X ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.

א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

4) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.

א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$. ב. 0.32805. ג. 0.59049.
ד. 0.0729. ה. 0.40954. ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45.

2) ב. 0.2335. ג. 0.1493. ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449.

3) א. 0.1789. ב. 2.

4) א. 0.1956. ב. 0.4253.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 38 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (יחידה 8)

תוכן העניינים

1. כללי 152

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) .$$

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) .$$

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.
מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10.
הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות.
ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2) X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3.
סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
Y - סכום הזכייה במשחק השני.
נתון:

$$E(x)=10 \quad , \quad \sigma(X)=3$$

$$E(y)=12 \quad , \quad \sigma(Y)=4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪.
מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=K)=\frac{A}{K-1} \quad , \quad K=2,3,4,5$$

ת	אחר
	0

מצאו את ערכו של A.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל.
בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 9, שונות: 15.

2) 5.

3) תוחלת: 22, שונות: 5.

4) תוחלת: 90, שונות: 275.

5) א. $A=\frac{12}{25}=0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.

ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 39 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (יחידה 8. מומלץ כשאלות מסכמות לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 155

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתון כי: $X \sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$, $Y \sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$.

א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T.
האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכויי של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

5) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.
ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

2) א. 0.03.
ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

3) א. ראו טבלה:
ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

4) א. ראו טבלה:
ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.092	0.392	0.428	0.084

ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

5) א. 2.013.
ב. 0.5256.
ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 40 - תרגול טענות (על על חומר הלימוד. חשוב מאד לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 158

תרגול טענות:

שאלות:

להלן מספר טענות.
ציינו לגבי כל טענה נכון/לא נכון ונמקו (תשובה ללא נימוק לא תתקבל).

1) בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו, השונות הינה 0.

2) ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

3) ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

4) אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

5) בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות, אחת 79 ואחת 100, לכן החציון יגדל.

6) אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

7) אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

8) אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

9) מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל.
נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

10) לסדרה של נתונים התקבל: $\overline{X}=\overline{Y}=6$, $S_x=S_y=1$, לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

11) אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

12) אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

13) בסדרה המונה 13 תצפיות, ידוע כי הממוצע הוא 40 והשונות היא 100.
מוסיפים שתי תצפיות חדשות, שהן 35 ו-45. כתוצאה מכך, הממוצע בסדרה החדשה (הכוללת 15 תצפיות) יקטן והשונות תקטן.

14) לסדרה סטטיסטית בת 61 תצפיות הממוצע 120 והחציון 110.
לסדרה זו הוסיפו עוד שתי תצפיות: 100, 140.
בעקבות כך, הממוצע והחציון של הסדרה בת 63 התצפיות אינם משתנים.

15) לסדרה סטטיסטית בת 100 תצפיות הממוצע 75 וסטיית התקן 10.
נוספו לסדרה זו עוד 2 תצפיות: 75; 75. כתוצאה מכך, הממוצע החדש (של 103 התצפיות) לא ישתנה, אך סטיית התקן תקטן.

16) לסדרת נתונים המונה 10 תצפיות ממוצע 25 וסטיית תקן 2.
נתון כי הסדרה סימטרית סביב הממוצע. בשלב מאוחר יותר נוספו שלוש תצפיות לסדרה: 23, 25 ו-27. לכן סטיית התקן של 13 התצפיות לא תשתנה.

17) בהתפלגות אסימטרית חיובית, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו בהכרח שלילי.

18) סטיית התקן של סדרת נתונים תמיד תגדל אם נוסיף גודל קבוע לכל נתוני הסדרה.

19) נתונים המאורעות A ו-B במרחב מדגם Ω. ידוע כי: $P(A)=P(B)=0.3$.
ההסתברות לכך שיקרה בדיוק מאורע אחד אם המאורעות זרים היא: $2\cdot 0.7\cdot 0.3=0.42$.

20) בהטלת קובייה הוגנת 4 פעמים, ההסתברות שיתקבלו לפחות 2 תוצאות זהות היא: $\frac{936}{1296}$.

21) המאורעות A ו-B הם מאורעות בלתי-תלויים שהסתברויותיהם הן 0.5 ו-0.3 בהתאמה. לכן ההסתברות שיקרה לפחות אחד מהם היא 0.8.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

22) A ו- B מאורעות כלשהם במרחב מדגם Ω. ידוע כי: $P(A)=P(B)=0.2$.
אם A ו- B מאורעות בלתי תלויים, ההסתברות שיתרחש בדיוק מאורע אחד מביניהם היא 0.4.

23) לסביבון 4 פאות. הסיכוי שבהטלת הסביבון שלוש פעמים נקבל את אותה תוצאה בכל פעם הוא: $\frac{1}{16}$.

24) אם: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, אז X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

25) מספר הדרכים השונות לסדר שלושה חיילים בשלשה הוא 9.

26) יש לחלק שישה צעצועים שונים ל-4 בנות ו-2 בנים. מספר הדרכים לחלק את הצעצועים הוא 48.

27) קוד של כספומט מורכב מ-4 ספרות, מתוך 0-9. ההסתברות שארבע הספרות יהיו שונות הוא 0.504.

28) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג.
בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה.
בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג הוא 0.3.

29) בכיתה ישנם 3 תלמידים. הסיכוי שתלמיד כלשהו בכיתה יעבור את הבחינה הינו 0.8. כל התלמידים לא תלויים אחד בשני.
הסיכוי שלפחות אחד יעבור את הבחינה הוא 0.992.

30) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. לכן גם השכיח שווה בין שתי החברות.

31) לפי מחקר שנעשה הטמפרטורה בחודשי החורף באזור מסוים בארץ מתפלגת נורמאלית עם תוחלת 14 וסטיית תקן 4.
ההסתברות שהטמפרטורה באזור גבוהה מ-17 מעלות בחורף קטנה מ-0.5.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

32) בחדר אוכל של קיבוץ מגישים תפריט ובו:

- 3 מנות ראשונות.
- 4 מנות עיקריות.
- 2 מנות אחרונות.

מספר המנות שאפשר להרכיב ושייכללו מנה ראשונה + מנה עיקרית + מנה אחרונה הוא 9.

33) התקיימה תחרות קליעה למטרה. אפשר לשחק עד שיש פגיעה, אך בכל מקרה לא יותר מ-4 פעמים. הסיכוי של ירון, אחד מחברי הנבחרת, לפגוע במטרה הוא 0.6. הסיכוי שירון זרק 4 פעמים למטרה בלבד הוא 0.064.

34) הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים – אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים – נקבל כי: הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים.

35) נתונה סדרה של 4 תצפיות. להלן הסטיות שלהן מהממוצע עבור 3 תצפיות מתוך ה-4: 4, 3, 2-. לכן השונות של 4 התצפיות היא 7.25.

36) הסיכוי שירון יכין שיעורים ביום מסוים הוא 0.7 אם אימא ביקשה ממנו, ו-0.4 אם אימא שלו לא בקשה ממנו. ב-60% מהימים אימא של ירון מבקשת ממנו להכין את השיעורים. הגעת לבקר את ירון והבחנת שהוא מכין שיעורים, לכן ההסתברות שאימא שלו ביקשה ממנו להכין אותם באותו היום הוא: 0.742.

37) 70% מבתי האב גרים בבתים אשר בבעלותם מתוכם 50% משלמים משכנתא על בית זה. נבחרו 20 בתי אב אקראיים. תוחלת מספר הבתים אשר גרים בהם בעליהם ומשלמים בהם משכנתא הוא 7.

38) מספר ראשי התיבות שניתן ליצור בעברית (22 אותיות) עבור שם פרטי ומשפחה הוא 44.

39) מספר המספרים התלת ספרתיים בהם הספרות שונות זו מזו הוא 648.

40) בהתפלגות נורמלית ככל שסטיית התקן יותר גבוהה אחוז המקרים שמתחת לממוצע קטן.

41) הציון הממוצע של 5 סטודנטים הוא 78. 4 סטודנטים מתוכם קיבלו את הציונים הבאים: 74, 72, 86, 70. הציון של הסטודנט החמישי הוא: 76.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

42) בתיק השקעות של משקיע מתחיל 10 מניות. הסיכוי שביום מסוים מניה תעלה הוא 0.6. נניח כי המניות אינן תלויות זו בזו. סטית התקן של מספר המניות, מתוך תיק ההשקעות, שתעלינה ביום מסוים היא 2.4.

43) ישנן שני מאורעות ונתון ששני המאורעות זרים הסיכוי שכל אחד מהם יקרה הוא 0.3 ולכן הסיכוי שלפחות אחד מהם יקרה הוא 0.6.

44) יהיו A,B,C שלושה מאורעות במרחב מדגם Ω.
ידוע כי: $P(A)=P(B)=P(C)=0.2$.
ההסתברות שיקרה רק מאורע B אם המאורעות בלתי תלויים היא 0.2 .

45) אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי 4 סוגי הדם כדלקמן:

סוג דם	אחוז מהאוכלוסייה
A	40%
O	30%
B	20%
AB	10%

נבחרו ארבעה אנשים אקראיים מאותה אוכלוסייה.
ההסתברות שבדיוק אחד מהם בעל סוג דם A הוא 0.4.

46) חושב מקדם המתאם של ספירמן בין שני משתנים והתקבל 1 לכן אם יחושב מדד הקשר של פירסון יתקבל גם כן 1.

47) חושב מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים והתקבל 1 אם יחושב מדד הקשר של ספירמן יתקבל גם 1.

48) שונות של סכום משתנים שווה תמיד לסכום השונויות של המשתנים.

49) נגדיר את A להיות התוצאה 4 בהטלת קובייה, ואת B להיות ראש בהטלת מטבע, ולכן המאורעות הללו הם מאורעות זרים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) נכון.	**2)** לא נכון.	**3)** לא נכון.	**4)** לא נכון.	**5)** לא נכון
6) נכון.	**7)** לא נכון.	**8)** לא נכון.	**9)** נכון.	**10)** לא נכון.
11) לא נכון.	**12)** נכון.	**13)** לא נכון.	**14)** נכון.	**15)** נכון.
16) לא נכון.	**17)** נכון.	**18)** לא נכון.	**19)** לא נכון.	**20)** נכון.
21) לא נכון.	**22)** לא נכון.	**23)** נכון.	**24)** לא נכון.	**25)** לא נכון.
26) לא נכון.	**27)** נכון.	**28)** לא נכון.	**29)** נכון.	**30)** לא נכון.
31) נכון.	**32)** לא נכון.	**33)** נכון.	**34)** נכון.	**35)** לא נכון.
36) נכון.	**37)** נכון.	**38)** לא נכון.	**39)** נכון.	**40)** לא נכון.
41) לא נכון.	**42)** לא נכון.	**43)** נכון.	**44)** לא נכון.	**45)** לא נכון.
46) לא נכון.	**47)** נכון.	**48)** לא נכון.	**49)** לא נכון.	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 41 - פתרון בחינה לדוגמה מספר 1

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 42 - פתרון בחינה לדוגמה מספר 2

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר) .....

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 43 - פתרון בחינה לדוגמה מספר 3

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר) .....

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 44 - פתרון בחינה לדוגמה מספר 5

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר) .....

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה א 30111

פרק 45 - פתרון בחינה לדוגמה מספר 4

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר) .....