

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112



## תוכן העניינים

|      |                                                                |     |
|------|----------------------------------------------------------------|-----|
| 1.   | הסקה סטטיסטית - הקדמה                                          | 1   |
| 4.   | התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי (יחידה 9)                    | 4   |
| 23.  | מושגי יסוד באמידה (יחידה 01)                                   | 23  |
| 28.  | רווח סמך לתוחלת (יחידה 11 01)                                  | 28  |
| 38.  | מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים (יחידה 01)                       | 38  |
| 44.  | בדיקת השערות על תוחלת (יחידה 11 01)                            | 44  |
| 67.  | רווח סמך לפרופורציה (יחידה 11)                                 | 67  |
| 73.  | בדיקת השערות על פרופורציה (יחידה 11)                           | 73  |
| 80.  | רווח סמך להפרש פרופורציות (יחידה 11)                           | 80  |
| 82.  | בדיקת השערות על הפרש פרופורציות (יחידה 11)                     | 82  |
| 86.  | רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים (יחידה 11) | 86  |
| 90.  | בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים (יחידה 11)     | 90  |
| 105. | רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים (יחידה 11)     | 105 |
| 107. | בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים (יחידה 11)           | 107 |
| 117. | הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות (יחידה 11)        | 117 |
| 120. | רווח סמך לשונות וסטיית תקן (יחידה 11)                          | 120 |
| 125. | בדיקת השערות על שונות (יחידה 11)                               | 125 |
| 135. | שאלות מסכמות על רווחי סמך (יחידה 11)                           | 135 |
| 138. | שאלות מסכמות בבדיקת השערות (יחידה 11 01 מומלץ כחזרה לבחינה)    | 138 |
| 142. | מבחן חי בריבוע - טיב התאמה ואי תלות (יחידה 21)                 | 142 |
| 157. | מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד (יחידה 21)                         | 157 |
| 167. | מבחנים אפרמטריים למדגמים מזווגים (יחידה 21)                    | 167 |
| 186. | מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים (יחידה 21)                | 186 |

## תוכן העניינים

|     |                                               |           |
|-----|-----------------------------------------------|-----------|
| 24. | מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 1 | (ללא ספר) |
| 25. | מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 2 | (ללא ספר) |
| 26. | מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 3 | (ללא ספר) |
| 27. | מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 4 | (ללא ספר) |

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

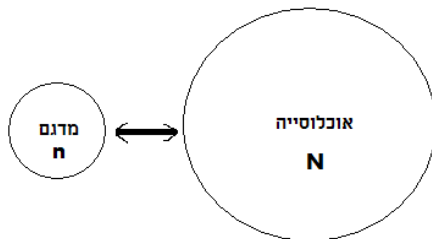
1. כללי ..... 1

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאלה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

| סטטיסטי (מדגם) | פרמטר (אוכלוסייה) | ממוצע                    |
|----------------|-------------------|--------------------------|
| $\bar{X}$      | $\mu$             |                          |
| $\hat{p}$      | $P$               | פרופורציה (שכיחות יחסית) |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"שוב "העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מי היא האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר המשפחות       | מספר מקלטים |
|--------------------|-------------|
| 50                 | 0           |
| 250                | 1           |
| 350                | 2           |
| 300                | 3           |
| 50                 | 4           |
| סך הכול $N = 1000$ |             |

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"שוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי (יחידה 9)

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי ..... 12
3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית ..... 14
4. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם ..... 19

## התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ .

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:  $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$ .

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:  $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.  
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.  
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.  
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
  - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
  - מהי טעות התקן?

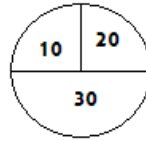
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה בישוב מסוים:

| מספר משפחות            | מספר מקלטים |
|------------------------|-------------|
| 500                    | 0           |
| 2500                   | 1           |
| 3500                   | 2           |
| 3000                   | 3           |
| 500                    | 4           |
| סך הכול<br>$N = 10000$ |             |

- בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של  $X$ .
  - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?
- נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
  - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
  - ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
  - ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
  - ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
  - ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
  - ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
  - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
  - ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
  - ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
  - ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
  - ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
  - ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

- 12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?
- ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
- ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

|               |               |               |               |        |
|---------------|---------------|---------------|---------------|--------|
| 2             | 4             | 6             | 8             | $X$    |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $P(X)$ |

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם  $\bar{X}$ . לכן:  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

- א.  $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .
- ב.  $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .
- ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .
- ד.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר:  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

- א.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.
- ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$  קבוע.
- ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$  קבוע.
- ד.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו קבועים.

17 משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

- א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
- ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

**18)** משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.  
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.  
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.  
ה. 78.  
ו. 10.6.

(2) א. להלן טבלה:

|      |     |      |      |      |        |
|------|-----|------|------|------|--------|
| 4    | 3   | 2    | 1    | 0    | $X$    |
| 0.05 | 0.3 | 0.35 | 0.25 | 0.05 | $P(X)$ |

ב.  $\sigma = 0.973$ ,  $\sigma^2 = 0.9475$ ,  $\mu = 2.05$

ג.  $\sigma(\bar{X}) = 0.486$ ,  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$ ,  $\mu_{\bar{x}} = 2.05$ .

(3)  $\sigma(\bar{X}) = 1.21$ ,  $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

(4) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.

(5) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205.

(6) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.

(7) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5.

(8) א. 0.5468 ב. 0.6826

(9) א. להלן טבלה:

|     |      |      |        |
|-----|------|------|--------|
| 30  | 20   | 10   | $X$    |
| 0.5 | 0.25 | 0.25 | $P(X)$ |

א. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75. ב. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.

ד. 0.8997

(10) 0.0475

(11) 0.1814

(12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 0.271

(13) 0.5

(14) ב'.

(15) ד'.

(16) ג'.

(17) א. 2.429 ב. 0.25

(18) 0.6826

## התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם:  $T = \sum_{i=1}^n X_i$ .  
 כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו:  $X_1, \dots, X_n$  -  
 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה  $\mu$  ושונותה  $\sigma^2$  אזי:  
 התוחלת והשונות של סכום התצפיות:  $E(T) = n\mu$ ,  $V(T) = n\sigma^2$ .

### דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , אזי:  $Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ ,  $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ .

### משפט הגבול המרכזי:

אם  $X$  מתפלג כלשהו וידוע כי:  $E(X) = \mu$ ,  $V(X) = \sigma^2$ , אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30):  $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

- בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.
- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
  - מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

## שאלות:

- (1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
- ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
- ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
- (2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
- ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
- ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?
- (3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
- ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

## תשובות סופיות:

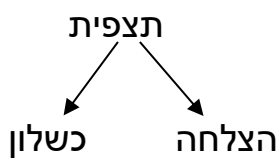
- (1) א. 0.6915      ב. 0.8413      ג. 0.5
- (2) א. תוחלת 3000 מ"ל, סטיית תקן 40 מ"ל.      ב. 0.0062
- ג. סעיף א'- לא משתנה, סעיף ב'- לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.
- (3) א. 0.0571      ב. 2036.8

## התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- $Y$ . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר  $p$  וכישלון יסומן ע"י הפרמטר  $q = 1 - p$ . מבצעים מדגם אקראי בגודל  $n$ :  $Y \sim B(n, p)$ .

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:  $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

תוחלת:  $E(y) = np$ .

שונות:  $V(y) = npq$ .

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית:  $Y \sim B(n, p)$ , ומתקיים ש:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

**תיקון רציפות:**

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

**הערות:**

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

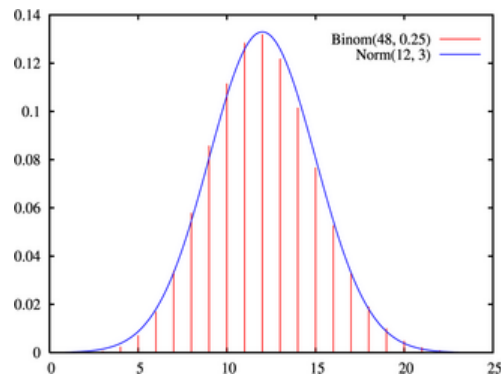
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא:  $(n \geq 30)$ .
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



## שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
  - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
  - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
  - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
  - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
  - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
  - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
  - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
  - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
  - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.201      ב. 0.3758      ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
- (2) א. 0.9332      ב. 0.6915
- (3) 0.1611
- (4) א. 0.9406      ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
- (5) א. 0.015      ב. 0.398
- (6) 0.9996
- (7) 0.8643

## התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.  
 $Y$  - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם.}$$

למשל, שיעור המובטלים במדגם -  $n = 200$  :

מספר המובטלים :  $Y = 20$ .

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ : פרופורציית המובטלים במדגם.}$$

נסמן ב- $p$  את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- $q$  את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.  
 נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

### התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

$$\text{אם: } np \geq 5 \text{ \& } nq \geq 5, \text{ אזי: } \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \quad Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

### הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.  
 התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי:  $(n \geq 30)$ .

- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

#### דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- מה ההסתברות שהשכיחות היחסית ( $\hat{p}$ ) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

## שאלות:

- (1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
  - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
  - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
  - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
- (2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
  - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
- (3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
  - א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?
  - ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
  - ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
  - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
- (4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
  - א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
  - ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?
  - ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
  - ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
- (5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

(6) נתון ש- $X \sim B(n, p)$ , ונגדיר את המשתנה הבא:  $\hat{P} = \frac{X}{n}$ .

א. הוכיחו ש:  $E(\hat{P}) = p$ ,  $V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$ .

ב. מה  $p$  המביא את  $V(\hat{P})$  להיות במקסימום?

### תשובות סופיות:

- (1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.
- (2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.
- (3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.
- (4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 0.481. ד. 0.77436.
- (5) 0.0154.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 3 - מושגי יסוד באמידה (יחידה 10)

תוכן העניינים

1. כללי ..... 23

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ . הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
- ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$ .

### פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

#### ממוצע האוכלוסייה $\mu$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ .

$E(\bar{x}) = \mu$  לכן  $\bar{x}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\mu$ . כמו כן, טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$ .

#### פרופורציה באוכלוסייה $p$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:  $\hat{p} = \frac{y}{n}$ .

$E(\hat{p}) = p$ , לכן  $\hat{p}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $p$ . כמו כן טעות התקן:  $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ .

#### שונות האוכלוסייה $\sigma^2$ :

האומד הנקודתי שלו יהיה:  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ .

$E(S^2) = \sigma^2$  ולכן  $S^2$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$ :  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$ .

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע

ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומד ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

- |                                                            |          |         |         |
|------------------------------------------------------------|----------|---------|---------|
| א. 0.25                                                    | ב. 0.019 | ג. 0.24 | ד. 0.01 |
| א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500. |          |         |         |
| ב. 100                                                     |          | ג. 2342 | ד. 58   |
| א. 177.9                                                   | ב. 64.1  | ג. 0.4  |         |
| א. 8.1                                                     | ב. 3.16  |         |         |
| ד'                                                         |          |         |         |
| ג'                                                         |          |         |         |
| ד'                                                         |          |         |         |
| ד'                                                         |          |         |         |
| ג'                                                         |          |         |         |

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 4 - רווח סמך לתוחלת (יחידה 10 11 )

תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 28
2. קביעת גודל מדגם ..... 33
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 35

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמיתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא:  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$ : נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$ .

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקרה ש- $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד:  $\mu$ .

אומד נקודתי:  $\bar{x}$ .

תנאים לבניית רווח הסמך:  $X \sim N$  או  $n \geq 30$ .

$\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך:  $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:  $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

$\varepsilon$  - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$ .
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון  $(1-\alpha)$  גבוהה יותר, כך:  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

## שאלות:

- (1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
  - מה המשתנה הנחקר?
  - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - מה רווח הסמך לפרמטר?
  - מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - מה אורך רווח הסמך?
  - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- (2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- (3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- (4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- א. ממוצע המדגם.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
  - ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
  - ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
  - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
  - ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
  - ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
  - ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
  - ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל:  $48 < \mu < 54$ . מה נכון בהכרח:

א.  $\mu = 51$ .

ב.  $\bar{X} = 6$ .

ג.  $\bar{X} = 51$ .

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

### תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג.  $\mu$ . ד.  $9200 < \mu < 9800$ .

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2)  $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א.  $223.42 < \mu < 236.58$ . ב.  $222.16 < \mu < 237.84$ .

ג. ראה סרטון.

(4) א.  $10,116 < \mu < 9,284$ . ב. הסטיה המירבית בין  $\bar{x}$  ל- $\mu$  היא 416 ש' בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א.  $4.42 < \mu < 83.5$ . ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

(9) ג'.

(10) ד'.

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$  ברמת סמך של  $1-\alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב

$$.n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad \text{בנוסחה הבאה:}$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

## שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
- א. כמה מתגייסים יש לדגום?
- ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

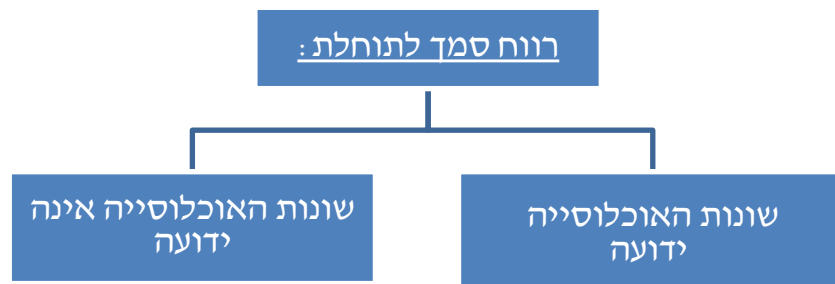
## תשובות סופיות:

- (1) 780.
- (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.
- (3)  $n = 62$ .

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

**רקע:**

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

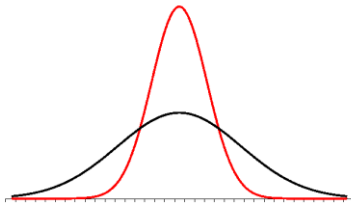


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה  $(\sigma^2)$  אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:**  $X \sim N$  או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:**  $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad \text{האומד לשונות:}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן:  $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

## שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
- ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
- ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן  $S = 13$  ס"מ.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
- א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
- ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
- ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמיתית של כלל הנבחנים.
- ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ .
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח  $\sigma = 20$ . סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$ . למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
- סטטיסטיקאי א'.
  - סטטיסטיקאי ב'.
  - אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
  - תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $79.88 < \mu < 89.72$ . ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א.  $96.63 < \mu < 107.37$ . ב.  $96.90 < \mu < 107.10$ . ג. ראה בסרטון.
- (5)  $3.149 < \mu < 3.351$ .
- (6)  $13.42 < \mu < 14.18$ .
- (7) ב'.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 5 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים (יחידה 10)

תוכן העניינים

|    |                     |
|----|---------------------|
| 38 | 1. הקדמה.....       |
| 42 | 2. סוגי טעויות..... |

## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב-  $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב-  $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב-  $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

### בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

### תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| מציאות | הכרעה |                         |                         |
|--------|-------|-------------------------|-------------------------|
|        |       | $H_0$                   | $H_1$                   |
|        | $H_0$ | טעות מסוג 1<br>אין טעות | טעות מסוג 2<br>אין טעות |

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$   
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

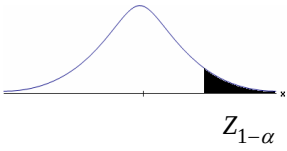
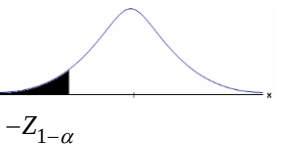
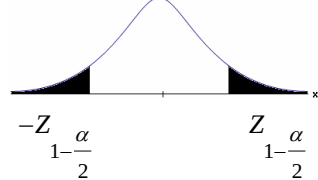
פרק 6 - בדיקת השערות על תוחלת (יחידה 10 11)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה. .... 44
2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) .... 48
3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה. .... 53
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה). .... 57
5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע). .... 60
6. ניתוח פלטים. .... 62

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:       | $H_0: \mu \leq \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$                                                                                          | $H_0: \mu \geq \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$                                                                                           | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                                                            |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                             | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                |                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                        |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ : | $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$<br><br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$<br><br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$<br><br>דוחים את $H_0$ |

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

|                                                                |                                                                |                                                                                                                                                        |                       |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | נדחה $H_0$ אם מתקיים: |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

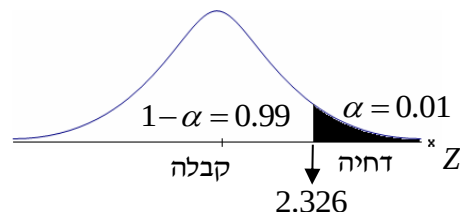
השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 2.5$ .

כלל הכרעה:



נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{X}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{X}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
  - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

- (1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
- (2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.  
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.
- (3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
- (4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
- (5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
- (6) א'.
- (7) ג'.
- (8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$ , דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| שערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבה:   |                                 | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                  |         |
|----------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1. $\sigma$ ידועה                |                                 |                                                                                                                                                | תנאים:  |
| 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול |                                 |                                                                                                                                                |         |
| $P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$  | $P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$ | אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$<br>אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$ | p-value |

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{כאשר בהנחת השערת האפס:}$$

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה:  $X$  = משקל בק"ג.

פרמטר:  $\mu$ .

השערות:  
 $H_0: \mu = 65$   
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 12$ .

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left( \begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

## שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu > 70$ . המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 74$ . מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
  - א. רשמו את השערות המחקר.
  - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
  - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
  - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
  - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
  - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
  - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

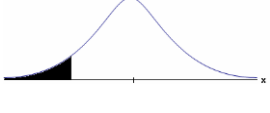
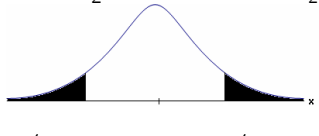
- (6) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .  
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?  
בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
  - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
  - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
  - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
  - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
  - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
  - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל:  $p\text{ value} = 0.0254$  לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
  - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
  - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
  - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

### תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א.  $H_0: \mu = 100$   
 $H_1: \mu < 100$  . ב. 0.1056 . ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 . ב. יקטן . ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

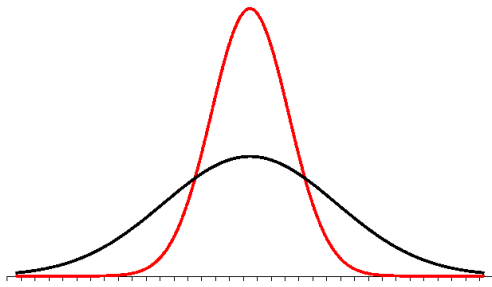
## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

| השערת האפס:<br>השערה<br>אלטרנטיבה:                | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu > \mu_0$                                                                                                                              | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu < \mu_0$                                                                                                                                | $H_0: \mu = \mu_0$<br>$H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                                            | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                                            |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה<br>של $H_0$ :          | $t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ |
| חלופה לכלל<br>ההכרעה:<br>נדחה $H_0$ אם<br>מתקיים: | $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                       | $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                         | $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$                                                                                                                 |

$$. t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$. S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  .  $H_1: \mu < \mu_0$  . חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

### רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

|                                                               |                                 |                                                                                                                                                |                                 |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $H_0: \mu = \mu_0$                                            | $H_0: \mu = \mu_0$              | $H_0: \mu = \mu_0$                                                                                                                             | השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבה: |
| $H_1: \mu > \mu_0$                                            | $H_1: \mu < \mu_0$              | $H_1: \mu \neq \mu_0$                                                                                                                          |                                 |
| 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>או<br>2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$ |                                 |                                                                                                                                                | תנאים:                          |
| $P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$                               | $P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$ | אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$<br>אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$ | p-value                         |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה:  $X$  = זמן נסיעה בדקות.

תנאים:  $X \sim N$ .

פרמטר:  $\mu$ .

א. השערות:  
 $H_0: \mu = 40$   
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = \frac{32.6 - 40}{4.88/\sqrt{5}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = ( \bar{X} \leq 32.6 ) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$ , לכן דוחים את  $H_0$ .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

## שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{א. } H_0: \mu = 1000 \\ H_1: \mu \neq 1000 \end{array} \quad \text{ב. } 20\% \leq P_v \leq 50\%$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את  $H_0$ .

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$  :

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1-\alpha$  ל- $\mu$  :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$ .

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$ .

### דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0: \mu = 80, H_1: \mu \neq 80, \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$ .  
האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

### פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל  $H_0$ .

## שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 90$ ,  $H_1: \mu \neq 90$ . החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97).  
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.  
א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.  
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצילין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצילין בקפסולה מתפלגת נורמלית.  
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצילין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.  
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

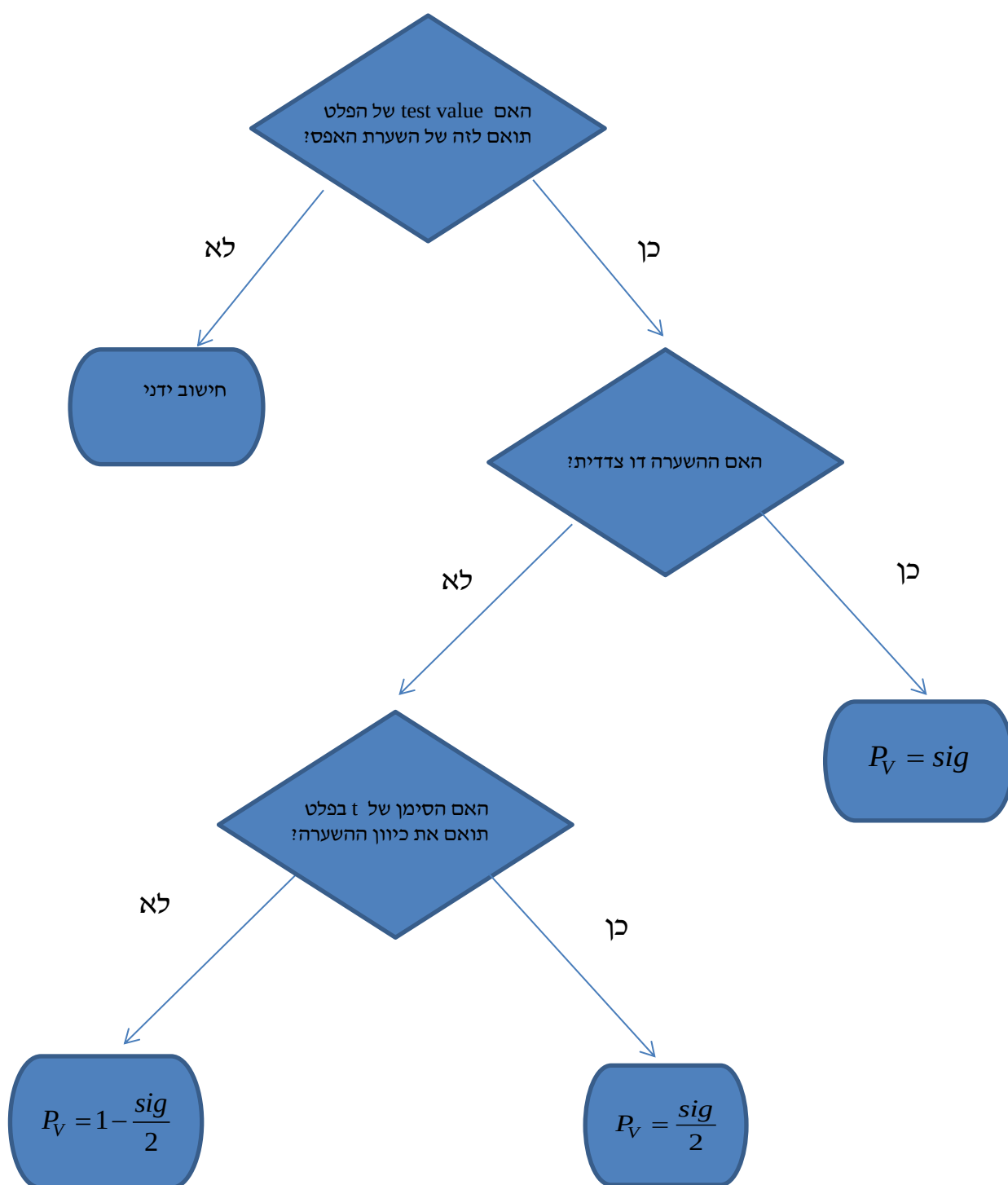
## תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.  
(2) א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$ .  
ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.  
(3) א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$ . ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

## ניתוח פלטים:

רקע:

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS:



## דוגמה (פתרון בהקלטה):

One-Sample Statistics

|           | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-----------|----|---------|----------------|-----------------|
| $\bar{X}$ | 25 | 87.6400 | 64.90434       | 12.98087        |

One-Sample Test

| Test Value = 60 |       |    |                 |                 |                                           |         |
|-----------------|-------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|
|                 |       |    |                 | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                 | t     | df | Sig. (2-tailed) |                 | Lower                                     | Upper   |
| $\bar{X}$       | 2.129 | 24 | .044            | 27.64000        | .8488                                     | 54.4312 |

ממוצע הציונים במבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגום כיתה אקראית של 25 תלמידים וללמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

- א. מהו רווח הסמך לממוצע הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדשה?
- ב. מהו  $P_V$  לבדיקת יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?
- ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

## שאלות:

- (1) באוניברסיטה גדולה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמאלי. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פלט תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראיים מתואר ראשון:

One-Sample Statistics

|     | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-----|----|---------|----------------|-----------------|
| age | 16 | 23.4375 | 2.50250        | .62562          |

One-Sample Test

|     | Test Value = 23 |    |                 |                 |                                           |        |
|-----|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|--------|
|     | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |        |
|     |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper  |
| age | .699            | 15 | .495            | .43750          | -.8960                                    | 1.7710 |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?  
 ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?  
 ג. רשום רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע כיום שונה מבעבר?

- (2) קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עבור כל ילד בדקו כמה זמן לקח לו לסיים את המשימה בדקות. להלן תוצאות הניתוח הסטטיסטי:

One-Sample Test

|      | Test Value = 4.5 |    |                 |                 |                                           |       |
|------|------------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|
|      | t                | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|      |                  |    |                 |                 | Lower                                     | Upper |
| time | -1.853           | 24 | .076            | -.09200         | -.1944                                    | .0104 |

- א. כמה ילדים השתתפו במחקר?  
 ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עבור ילדים בני 6.  
 ג. מה יש להניח כדי שרווח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמוך מ-4.5 דקות.

3) להלן פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS. הניתוח הוא עבור מדגם אקראי של קבוצת נבחנים בבגרות באנגלית.

One-Sample Statistics

|       | N   | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-------|-----|------|----------------|-----------------|
| grade | ??? | ???  | 19.62787       | 2.95901         |

One-Sample Test

|       | Test Value = 75 |    |                 |                 |                                           |       |
|-------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|
|       | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|       |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper |
| grade | ???             | 43 | .017            | -7.34091        | -13.3083                                  | ???   |

- א. השלימו את הגדלים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?  
 ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?  
 ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

4) יצרן סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ-27 מ"ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמויות הניקוטין הבאות: 21, 21, 20, 24, 22 מ"ג. הניחו כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמאלי.

One-Sample Statistics

|          | N | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------|---|---------|----------------|-----------------|
| nicotine | 5 | 21.6000 | 1.51658        | .67823          |

One-Sample Test

|          | Test Value = 27 |    |                 |                 |                                           |         |
|----------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|
|          | t               | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|          |                 |    |                 |                 | Lower                                     | Upper   |
| nicotine | -7.962          | 4  | .001            | -5.40000        | -7.2831                                   | -3.5169 |

- א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?  
 ב. אם היינו מוסיפים עוד תצפית שערכה 20. כיצד הדבר היה משפיע על הערך Sig ועל המסקנה?  
 ג. בדקו האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ-26 ברמת מובהקות של 5%.

## תשובות סופיות:

- (1) א. הסקה של תוחלת אחת. ב. 23. ג.  $(22.104, 24.771)$ . ד. נקבל  $H_0$ .
- (2) א. 25. ב.  $(4.3056, 4.5104)$ . ג. המשתנה מתפלג נורמלית. ד. נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $n = 44, \bar{X} = 67.66, t = -2.48, upper = -1.3735$ . ב. 0.017. ג. 0.0085. ד. 0.9915.
- (4) א. נכריע שיש אמת בפרסום. ב. המסקנה לא תשתנה. ג. נכריע שהתוחלת שונה מ-26.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 7 - רווח סמך לפרופורציה (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. רווח הסמך לפרופורציה ..... 67
2. קביעת גודל מדגם ..... 70

## רווח הסמך לפרופורציה:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את  $P$  – פרופורציה באוכלוסייה.

### האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

### תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

## שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
  - ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
  - ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
  - א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).
  - ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
  - ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:
 
$$0.08 < p < 0.18$$
  - א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
  - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של  $\pm 3\%$  מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
  - א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
  - ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $18.1\% < p < 29.9\%$   
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.  
 ג.  $14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א.  $0.545 \leq p \leq 0.655$       ב. האורך שלו היה קטן.      ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 52.      ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א.  $30.9\% > p > 22.5\%$       ב.  $60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 200

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה:  $1-\alpha$ .  
 החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין:  $\varepsilon$  (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$  - אורך רווח הסמך.

$\varepsilon$  - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר ( $p$ ) לאומד ( $\hat{p}$ ).

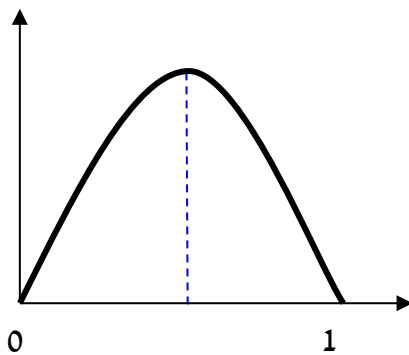
$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין אנו יודעים את  $\hat{p}$ .

נתבונן בביטוי:  $\hat{p}(1-\hat{p})$ .



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על  $\hat{p}$  נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור:  $\hat{p} = 0.5$ .

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

## שאלות:

- (1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמיתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- (2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
  - א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
  - ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
- (3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמיתי לא תעלה על 4%.
  - א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
  - ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
- (4) ענו על הסעיפים הבאים :
  - א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
  - ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
  - ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
- (5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
  - א. כמה מחוסנים יש לדגום?
  - ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
  - ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% מדוע הוא קטן מ-3%?

### תשובות סופיות:

- (1) 1.1068
- (2) א. 0.423 ב. 0.271
- (3) א. 0.601 ב. 108,000 ₪.
- (4) א. 0.335 ב.  $0.367 < p < 0.473$ .
- ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.
- (5) א. 0.1509 ב.  $0.15 \pm 0.02$  ג. ראה סרטון.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

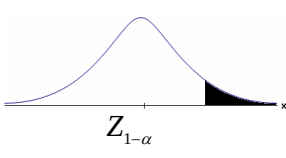
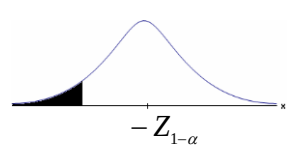
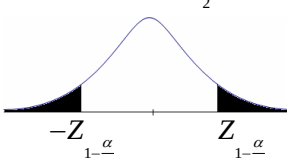
פרק 8 - בדיקת השערות על פרופורציה (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. התהליך ..... 73
2. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית ..... 76

## התהליך:

רקע:

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:      | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p > p_0$                                                                                                    | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p < p_0$                                                                                                     | $H_0: p = p_0$<br>$H_1: p \neq p_0$                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                                | $np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$                                                                                           |                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                              |
| כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של $H_0$ : | $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$<br><br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$<br><br>דוחים את $H_0$ | או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br><br>דוחים את $H_0$ |

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| כלל ההכרעה – אזור הדחייה של $H_0$ :                              |                                                                  |                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$<br>$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.  
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

## שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
  - א. רשמו את ההשערות.
  - ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
  - ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות:  $H_0: p = p_0$ ,  $H_1: p > p_0$ . חוקר א' השתמש ברמת מובהקות  $\alpha_1$  וחוקר ב' ברמת מובהקות  $\alpha_2$  החוקר הראשון דחה את  $H_0$  ואילו החוקר השני קיבל את  $H_0$ . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
  - א.  $\alpha_1 = \alpha_2$ .
  - ב.  $\alpha_1 > \alpha_2$ .
  - ג.  $\alpha_1 < \alpha_2$ .
  - ד. המצב המתואר לא אפשרי.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) א.  $H_0: p = 0.2$   
 ב. נקבל  $H_0$ .  
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה  $H_0$ .  
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

## מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב-  $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית: | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p > p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p < p_0$ | $H_0 : p = p_0$<br>$H_1 : p \neq p_0$                                                                                                      |
|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים:                           | $np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$   |                                    |                                                                                                                                            |
| p-value                          | $P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p})$    | $P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p})$    | אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} > p_0$<br>אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} < p_0$ |

כאשר בהנחת השערת האפס:  $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון:  $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

## שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.  
א. מהי מובהקות התוצאה?  
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.  
א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?  
ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?  
ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?  
ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .  
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5%:  
(בחרו בתשובה הנכונה)  
א. יקבל את השערת האפס  
ב. ידחה את השערת האפס.  
ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה:  
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך  $p\text{-value}$  של 3%,  
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),  
היינו מקבלים ערך  $p\text{-value}$  של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0455.  
 ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את  $H_0$ .  
 ברמת מובהקות של 5% : נדחה את  $H_0$ .
- (2) א. 0.0548.      ב. 0.0548.      ג. מעל 0.0548.  
 ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3)  $p_v = 0$ , נדחה את  $H_0$ .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 9 - רווח סמך להפרש פרופורציות (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. רווח סמך להפרש פרופורציות ..... 80

## רווח סמך להפרש פרופורציות:

### רקע:

**המטרה:** לאמוד את  $p_1 - p_2$  : הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

**האומד הנקודתי:**  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ .

**התנאי לבניית רווח הסמך:** כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבדקים לפחות 10).

$$\text{רווח סמך: } (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה  $X$ , מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה  $Y$ . מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

## שאלות:

- (1) מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.
- א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.
- (2) במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.
- ב. האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?
- (3) נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית. נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-4.9\% < P_F - P_M < 14.9\%$  . ב.  $22.5\% < p < 31.8\%$
- (2) א.  $0.093 < P_A - P_B < 0.307$  . ב. כן.
- (3)  $0.625 < p < 0.7754$

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

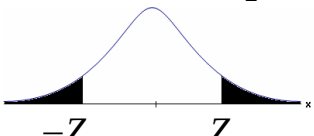
פרק 10 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. כללי ..... 82

## בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

### רקע

| השערת האפס :<br>השערה אלטרנטיבית:                                                                                                                                     | 1. מדגמים בלתי תלויים                                                                                                                                                   | 2. מדגמים גדולים                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 > 0$                                                                                                                          | $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 < 0$                                                                                                                            | $H_0: p_1 - p_2 = 0$<br>$H_1: p_1 - p_2 \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| תנאים:                                                                                                                                                                | כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של:                                                                                                                                          | כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של:                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
| $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$<br><br>$Z_{1-\alpha}$<br>- דוחים את $H_0$ | $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$<br><br>$-Z_{1-\alpha}$<br>- דוחים את $H_0$ | או $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br><br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>- דוחים את $H_0$ |  |

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \quad \text{כאשר הפרופורציה המשוקללת:}$$

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ | $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$<br>או $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ |
| $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ |                                                                                                                                                                                                                                           |

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}) \quad : \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \text{ התפלגות של}$$

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \stackrel{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה.  
 נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה.  
 האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

## שאלות

- (1) במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.  
האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות?  
בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- (2) אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה.  
במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.  
א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?  
ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?
- (3) נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.  
א. מהי מובהקות התוצאה?  
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.  
א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.  
ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?  
ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?  
ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

### תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את  $H_0$ .
- (2) א. נדחה  $H_0$ .  
ב. נדחה  $H_0$ .
- (3) א. 0.0139  
ב. נדחה  $H_0$ .
- (4) א. ראה סרטון.  
ב. נדחה  $H_0$ .  
ג. 0.8238  
ד. תגדל.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 11 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי  
תלויים (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה ידועות..... 86
2. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות..... 88

## כששונויות האוכלוסייה ידועות:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

1.  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  ידועות.

2.  $X_1, X_2 \sim N$  או  $n_1, n_2 > 30$ .

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך:  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ .

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1-\alpha$ , לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה ש"ח 9200.  
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל ש"ח 8700.  
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ש"ח. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

## שאלות:

- (1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
- (2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99. א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ. ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
- (3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

## תשובות סופיות:

- (1)  $(-20, 90)$ .
- (2) א.  $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$ .  
 ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.
- (3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$2. X_1, X_2 \sim N$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2$$

$$\text{רווח סמך: } (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{1-\alpha}{2}, n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$ , לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| מספר האקדמאים                | תל אביב | באר שבע |
|------------------------------|---------|---------|
| ממוצע הכנסות של אקדמאים      | 11,000  | 9500    |
| סטיית התקן של הכנסות אקדמאים | 200     | 250     |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

## שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה              | ישראל   | ארה"ב   |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם          | 15      | 15      |
| סכום הציונים        | 1560    | 1470    |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה  $X$  שמתפלג:  $N(\mu_x, \sigma^2)$ , ומשתנה  $Y$  שמתפלג:  $N(\mu_y, \sigma^2)$ .

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$  ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
- השונות שווה.
  - שהציונים מתפלגים נורמלית.
  - המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

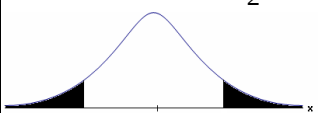
פרק 12 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות ..... 90
2. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות ..... 94
3. ניתוח פלטים ..... 98

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות – רקע

| $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$                                                                                                      | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$                                                                                                        | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$                                                                                                                                                                                                                   | השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| מדגמים בלתי תלויים<br>$\sigma_1, \sigma_2$ ידועות<br>$X_1, X_2 \sim N$<br>או מדגמים מספיק גדולים                                                                    |                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                     | תנאים:                                                                                          |
| $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$<br><br>$Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$<br><br>$-Z_{1-\alpha}$<br>דוחים את $H_0$ | או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br><br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>דוחים את $H_0$ | כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של $H_0$ :<br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ |

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה $H_0$ אם מתקיים:                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$<br>או<br>$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |                                                                                                                                                                                                                              |

התפלגות הפרש הממוצעים:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{התקנון:}$$

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

## שאלות

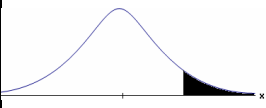
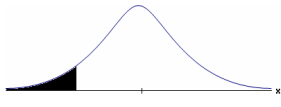
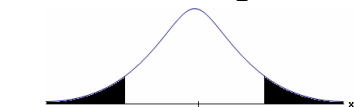
- (1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- (2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
- (3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
  - א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.
  - ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו-40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.
  - א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
  - ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

**תשובות סופיות**

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה את  $H_0$ .
- (3) א. 0      ב. נדחה את  $H_0$ .
- (4) א. נדחה את  $H_0$ , אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.  
ב. 0.6331

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:<br>תנאים:                                                                     | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$                                                                                                                                 | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$                                                                                                                                  | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$<br>$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות<br>3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ |

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונות המשוקללת:

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה $H_0$ אם מתקיים:                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$<br>או<br>$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |                                                                                                                                                                                                                                                      |

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 200$ .

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 260$ .

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

|     |    |    |     |    |     |     |      |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
|     | 69 | 74 | 105 | 91 | 82  | 100 | 2013 |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.  
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה              | ישראל   | ארה"ב   |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם          | 15      | 15      |
| סכום הציונים        | 1560    | 1470    |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.  
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| הקבוצה    | 60W  | 100W |
|-----------|------|------|
| $\bar{X}$ | 1007 | 956  |
| $S$       | 80   | 72   |
| $n$       | 13   | 15   |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.  
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?  
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

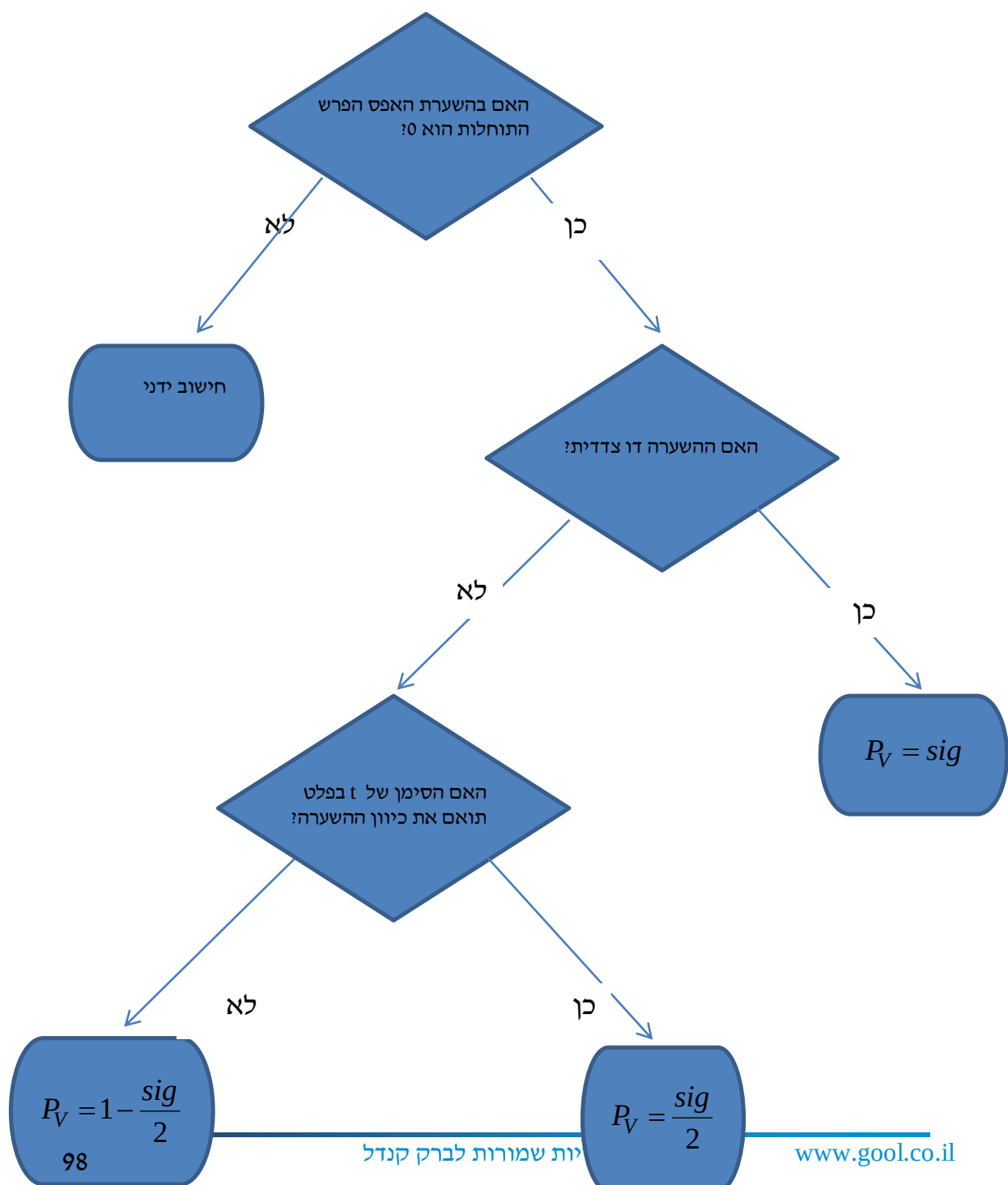
## תשובות סופיות

- (1) נדחה את  $H_0$ .
- (2) הנחות:
  1. סטיות התקן שוות.
  2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
 נקבל את  $H_0$ .
- (3) א. נדחה את  $H_0$ . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את  $H_0$ .

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### ניתוח פלטים – רקע

מובהקות התוצאה על סמך הפלט:



### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים משני אזורים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל :

Group Statistics

|                                | Region of the United States | N   | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------------------------------|-----------------------------|-----|------|----------------|-----------------|
| Number of Brothers and Sisters | North East                  | 676 | 3.76 | 2.939          | .113            |
|                                | South East                  | 410 | 4.05 | 2.993          | .148            |

Independent Samples Test

|                                |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |         |                 |                 |                       |                                           |       |
|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|---------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|-------|
|                                |                             | F                                       | Sig. | t                            | df      | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |       |
|                                |                             |                                         |      |                              |         |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper |
| Number of Brothers and Sisters | Equal variances assumed     | .173                                    | .677 | -1.583                       | 1084    | .114            | -.293           | .185                  | -.657                                     | .070  |
|                                | Equal variances not assumed |                                         |      | -1.576                       | 850.945 | .115            | -.293           | .186                  | -.658                                     | .072  |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויון שונויות בין שני האזורים?
- ג. בדוק האם קיים הבדל בין "South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחינת מספר האחים והאחיות הממוצע.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שההפרש הממוצע בין "South East" לבין "North East" חיובי?

## שאלות

- 1) להלן פלט מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדדה בסולם ציונים של 1 עד 5.

Group Statistics

|          | GENDER | N   | Mean   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------|--------|-----|--------|----------------|-----------------|
| optimizm | MALE   | 633 | 2.6053 | .49781         | .01979          |
|          | FEMALE | 568 | 2.5503 | .48483         | .02034          |

Independent Samples Test

|          |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |          |                 |                 |                       |                                           |        |
|----------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|--------|
|          |                             | F                                       | Sig. | t                            | df       | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |        |
|          |                             |                                         |      |                              |          |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper  |
| optimizm | Equal variances assumed     | .383                                    | .536 | 1.935                        | 1199     | .053            | .05500          | .02842                | -.00076                                   | ?      |
|          | Equal variances not assumed |                                         |      | 1.938                        | 1190.977 | .053            | .05500          | .02838                | -.00068                                   | .11067 |

- א. האם ניתן להניח ששוונות האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?
- ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?
- ג. מצא את הגבול העליון של רווח הסמך המסומן בסימן שאלה בפלט. דייק עד 5 ספרות אחרי הנקודה.
- ד. בנה רווח סמך לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמך של 95%.

(2) פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים למבחן אינטליגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

### Group Statistics

|       |   | N  | Mean     | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|-------|---|----|----------|----------------|-----------------|
| grade | A | 9  | 96.8889  | 9.40006        | 3.13335         |
|       | B | 11 | 108.4545 | 11.46616       | 3.45718         |

| Independent Samples Test                |                             |      |      |                              |        |                 |                 |                       |                                           |          |
|-----------------------------------------|-----------------------------|------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|----------|
| Levene's Test for Equality of Variances |                             |      |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |          |
|                                         |                             | F    | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |          |
|                                         |                             |      |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper    |
| grade                                   | Equal variances assumed     | .206 | .656 | -2.428                       | 18     | .026            | -11.56566       | 4.76333               | -21.57304                                 | -1.55828 |
|                                         | Equal variances not assumed |      |      | -2.479                       | 17.997 | .023            | -11.56566       | 4.66583               | -21.36832                                 | -1.76299 |

### T-Test

מקרא:

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

א. רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציונם נבדק פעם אחרי המבחן הראשון שעשו ופעם אחרי המבחן השני?

ג. האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני אנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק

ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.05$ .

ד. האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.01$ .

3) כחלק ממחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז. לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שלהלן:

## T-Test

Group Statistics

| מקום המגורים       | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------------------|----|---------|----------------|-----------------|
| גיל הנישואין עיר א | 50 | 24.8072 | 1.38978        | .19654          |
| עיר ב              | 50 | 23.0131 | 1.62070        | .22920          |

Independent Samples Test

|              |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|--------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------|
|              |                             | F                                       | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|              |                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper   |
| גיל הנישואין | Equal variances assumed     | .330                                    | .567 | 5.942                        | 98     | .000            | 1.79415         | .30193                | 1.19497                                   | 2.39332 |
|              | Equal variances not assumed |                                         |      | 5.942                        | 95.772 | .000            | 1.79415         | .30193                | 1.19480                                   | 2.39350 |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.
- ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחתנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?

## 4) להלן פלט של תוכנת SPSS :

## T-Test

|   | N  | Mean    | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|---|----|---------|----------------|-----------------|
| X | 26 | 36.3077 | 13.23259       | 2.59513         |
| Y | 24 | 46.4583 | 20.96369       | 4.27920         |

## Independent Samples Test

|                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |        |                 |                 |                       |                                           |         |
|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------|
|                             | F                                       | Sig. | t                            | df     | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                             |                                         |      |                              |        |                 |                 |                       | Lower                                     | Upper   |
| Equal variances assumed     | 4.446                                   | .040 | -2.164                       | ???    | .044            | -10.15064       | ???                   | -20.03781                                 | -.26347 |
| Equal variances not assumed |                                         |      | -2.038                       | 38.267 | .048            | ???             | 5.00462               | -20.27964                                 | -.02164 |

א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שקיים הבדל בין השונות של  $X$  לזה של  $Y$ ?

ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  גדולה מהתוחלת של  $Y$ ?

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  קטנה מהתוחלת של  $Y$ ?

## תשובות סופיות

- (1) א. נקבל את  $H_0$  ונכריע שיש שוויון שוניות.  
 ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות הממוצעת.  
 ג. 0.11076  
 ד.  $2.5665 \leq \mu \leq 2.6441$
- (2) א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגמים בלתי תלויים.  
 ב. מבחן T למדגמים מזווגים.  
 ג. נקבל את  $H_0$ , נקבע לקיום שוויון שוניות.  
 ד. נקבל את  $H_0$ , לא נקבל את טענת הפסיכולוגים.
- (3) א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגמים בלתי תלויים.  
 ב.  $1.19497 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.39332$  ג. כן.
- (4) א. 10.15, 4.69, -48  
 ב. 0.04  
 ג. 0.978  
 ד. 0.022

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 13 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 105

## רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

### רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש  $n$  צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים:  $X$  ו- $Y$ .

ניצור משתנה חדש:  $D = x - y$ .

הפרמטר שנרצה לאמוד:  $\mu_D$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \quad x, y \sim N$$

2. המדגם מזווג.

$$\text{נוסחת רווח הסמך: } \bar{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש:  $df = n - 1$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

| הקובץ               | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---------------------|----|----|----|----|----|
| הזמן בתוכנה הראשונה | 25 | 48 | 49 | 46 | 38 |
| הזמן בתוכנה השנייה  | 27 | 46 | 42 | 40 | 48 |

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.

מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

## שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב' :

|     |    |    |    |    |          |
|-----|----|----|----|----|----------|
| 82  | 75 | 90 | 68 | 74 | סמסטר א' |
| 100 | 76 | 87 | 84 | 80 | סמסטר ב' |

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

| חברה/ מדינה  | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|--------------|-------|------|-------|-------|-------|-----|-----|
| בזק - X      | 1.5   | 2.1  | 2.2   | 3     | 3.5   | 3.2 | 4.2 |
| קווי זהב - Y | 1.4   | 2    | 1.9   | 3.1   | 3.3   | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-19 < \mu_0 < 38$  . ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
- ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2)  $-0.013 < \mu < 0.185$  .

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

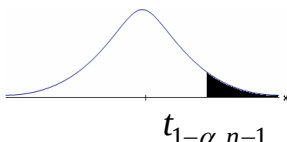
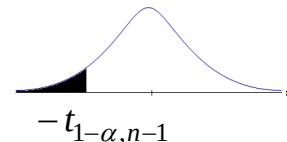
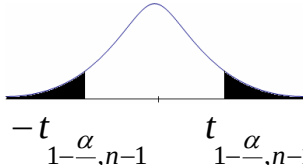
פרק 14 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים (יחידה 11)

תוכן העניינים

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 107 | 1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים |
| 111 | 2. ניתוח פלטים                  |

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

### בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

| $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D > C$                                                                                                                                  | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D < C$                                                                                                                                    | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D \neq C$                                                                                                                                                                                                                                      | השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבית:                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. $\sigma_D$ אינה ידועה<br>2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול                                                                                                          |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              | תנאים:                                           |
| $t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\alpha, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$<br><br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$<br>- דוחים את $H_0$ | כלל ההכרעה:<br>אזור הדחייה של $H_0$              |
| $\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                         | $\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                           | $\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$<br>ו<br>$\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$                                                                                                                      | חלופה לכלל<br>הכרעה:<br>נדחה $H_0$ אם<br>מתקיים: |

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

| המוצר / רשת   | מגה בעיר | שופרסל |
|---------------|----------|--------|
| שמפו          | 17       | 18     |
| ג'ל כביסה     | 48       | 57     |
| עוגת גבינה    | 35       | 35     |
| לחם           | 12       | 10     |
| קפה נמס       | 49       | 47     |
| בקבוק יין     | 113      | 142    |
| גבינה בולגרית | 20       | 26     |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת  $X$  לחברת  $Y$  מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

| חברה/מדינה | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|------------|-------|------|-------|-------|-------|-----|-----|
| $X$        | 1.5   | 2.1  | 2.2   | 3     | 3.5   | 3.2 | 4.2 |
| $Y$        | 1.4   | 2    | 1.9   | 3.1   | 3.2   | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

|      |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| לפני | 506 | 470 | 420 | 640 | 670 | 390 | 500 | 590 |
| אחרי | 570 | 540 | 430 | 610 | 680 | 510 | 520 | 580 |

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו-ב':

|              |    |    |    |    |     |
|--------------|----|----|----|----|-----|
| סטטיסטיקה א' | 74 | 68 | 90 | 75 | 82  |
| סטטיסטיקה ב' | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן  $Z$  למדגם יחיד.  
 ב. מבחן  $T$  למדגם יחיד.  
 ג. מבחן  $T$  למדגמים בלתי תלויים.  
 ד. מבחן  $T$  למדגמים מזווגים.

- (5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

|               |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| משקל במכשיר 1 | 2.5 | 0.7 | 9.6 | 4.5 |
| משקל במכשיר 2 | 0.5 | 1.7 | 6.9 | 3.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

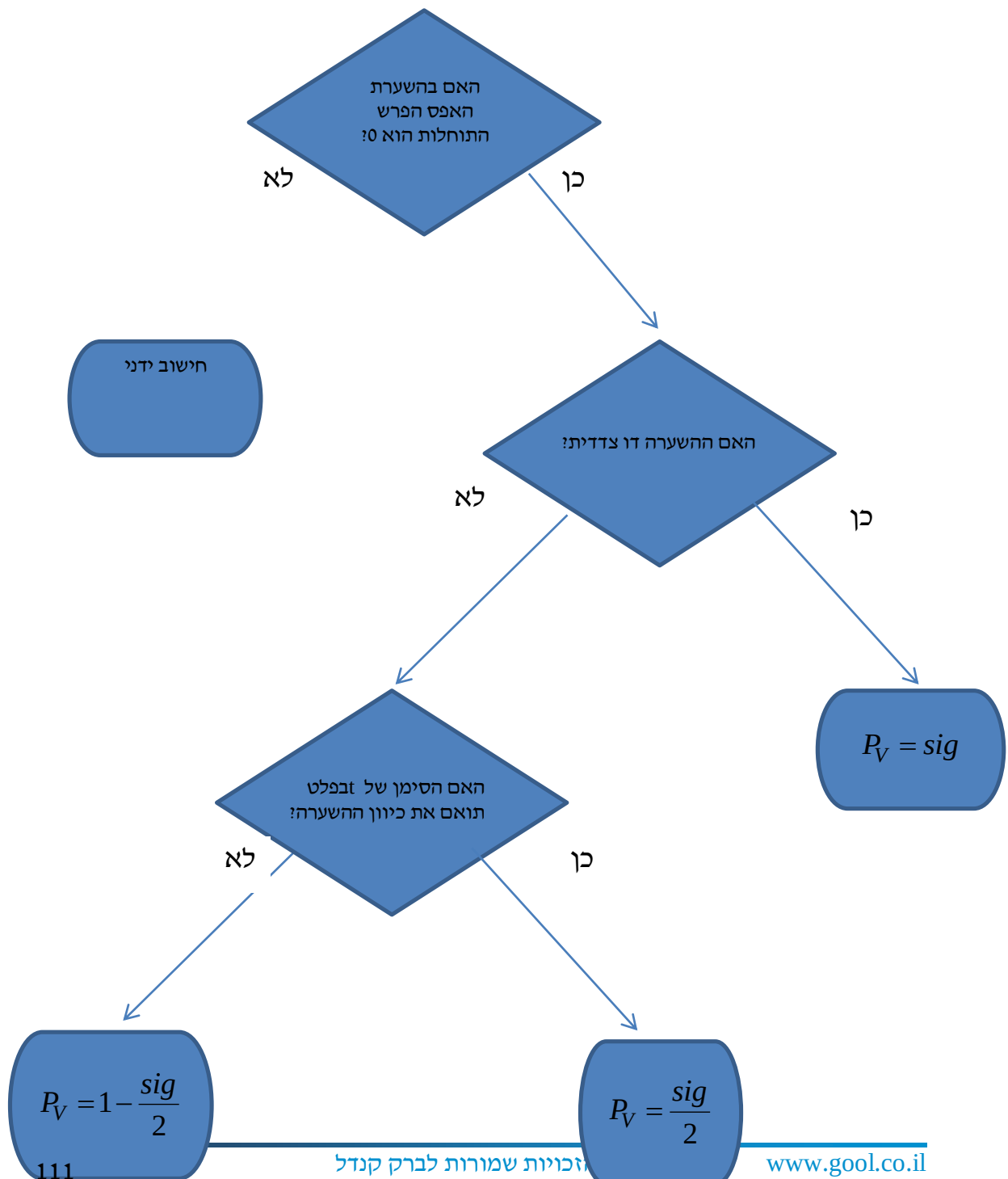
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.
- (6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.

### תשובות סופיות

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $0.25 \leq p \leq 0.5$  ב. 0.5 ג. לא נדחה  $H_0$ .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

מדגמים מזווגים – ניתוח פלטים – רקע



**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניחו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות :

| 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | נבדק |
|----|----|----|----|----|------|
| 30 | 28 | 25 | 22 | 40 | לפני |
| 12 | 10 | 13 | 24 | 30 | אחרי |

**Paired Samples Statistics**

|        |        | Mean    | N | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------|--------|---------|---|----------------|-----------------|
| Pair 1 | BEFORE | 29.0000 | 5 | 6.85565        | 3.06594         |
|        | AFTER  | 17.8000 | 5 | 8.72926        | 3.90384         |

**Paired Samples Test**

|        |                | Paired Differences |                |                 |                                           | t        | df    | Sig. (2-tailed) |       |
|--------|----------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|----------|-------|-----------------|-------|
|        |                | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 90% Confidence Interval of the Difference |          |       |                 |       |
|        |                |                    |                |                 | Difference                                |          |       |                 |       |
|        |                |                    |                |                 | Lower                                     |          |       |                 | Upper |
| Pair 1 | BEFORE - AFTER | 11.20000           | 8.19756        | 3.66606         | 3.38452                                   | 19.01548 | 3.055 | 4               | .038  |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

## שאלות

- 1) בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלת הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

| Paired Samples Test |                                                                               |                    |                |                 |                                           |       |       |     |                 |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|-------|-------|-----|-----------------|
|                     |                                                                               | Paired Differences |                |                 |                                           |       | t     | df  | Sig. (2-tailed) |
|                     |                                                                               | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference |       |       |     |                 |
|                     |                                                                               |                    |                |                 | Lower                                     | Upper |       |     |                 |
| Pair 1              | Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother | -.007              | 3.115          | .100            | -.203                                     | .189  | -.072 | 973 | .943            |

- א. תנו אומדן להפרש הממוצעים.  
 ב. תנו אומדן לטעות התקן של הפרש הממוצעים.  
 ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלת האבות להשכלת האימהות ברמת מובהקות של 5%?

- 2) בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קוריאני. להלן פלט המנתח את הציונים ששופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

Paired Samples Statistics

|        |             | Mean   | N   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|--------|-------------|--------|-----|----------------|-----------------|
| Pair 1 | Italy       | ???    | 300 | .86742         | .05008          |
|        | South Korea | 8.9183 | ??? | .81992         | .04734          |

Paired Samples Test

|        |                     | Paired Differences |                |                 |                                           | t       | df      | Sig. (2-tailed) |       |
|--------|---------------------|--------------------|----------------|-----------------|-------------------------------------------|---------|---------|-----------------|-------|
|        |                     | Mean               | Std. Deviation | Std. Error Mean | 95% Confidence Interval of the Difference |         |         |                 |       |
|        |                     |                    |                |                 | Lower                                     |         |         |                 | Upper |
| Pair 1 | Italy - South Korea | -.42233            | .36153         | .02087          | -.46341                                   | -.38126 | -20.234 | ???             | ???   |

- א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).  
 ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קוריאני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.  
 ג. מהו רווח הסמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין השופטים?  
 ד. בנו את הרווח כעת ברמת סמך של 98% לתוחלת פער בציונים בין השופטים.

3) בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראיים במבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

| Paired Samples Test |                |                    |                |                    |                                                 |          |        |    |                 |
|---------------------|----------------|--------------------|----------------|--------------------|-------------------------------------------------|----------|--------|----|-----------------|
|                     |                | Paired Differences |                |                    |                                                 |          | t      | df | Sig. (2-tailed) |
|                     |                | Mean               | Std. Deviation | Std. Error<br>Mean | 95% Confidence<br>Interval of the<br>Difference |          |        |    |                 |
|                     |                |                    |                |                    | Lower                                           | Upper    |        |    |                 |
|                     |                |                    |                |                    |                                                 |          |        |    |                 |
| Pair 1              | Before - After | -7.45455           | 19.28303       | 2.90703            | -13.31712                                       | -1.59197 | -2.564 | 43 | .014            |

- א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונסח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.
- ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של 5%.
- ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5 נקודות ברמת מובהקות של 5%.
- ד. מצאו רווח סמך לתוחלת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של 95%.

## (4) להלן פלט של תכנת SPSS :

## T-Test

## Paired Samples Statistics

|          | Mean    | N | Std. Deviation | Std. Error<br>Mean |
|----------|---------|---|----------------|--------------------|
| Pair 1 x | 54.0000 | 6 | 5.86515        | 2.39444            |
| y        | 46.5000 | 6 | 10.72847       | 4.37988            |

## Paired Samples Test

|                    | Paired Differences |                   |                    |                                              |          | t  | df | Sig. (2-tailed) |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------------------|----------|----|----|-----------------|
|                    | Mean               | Std.<br>Deviation | Std. Error<br>Mean | 95% Confidence Interval of the<br>Difference |          |    |    |                 |
|                    |                    |                   |                    | Lower                                        | Upper    |    |    |                 |
| Pair 1<br>x -<br>y | 7.50000            | ??                | 4.72405            | -4.64356                                     | 19.64356 | ?? | 5  | .173            |

- א. מלא את החלקים החסרים בטבלה.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין  $X$  ל- $Y$  בממוצע?
- ג. האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלה או קטנה, אם הינו מוסיפים עוד תצפית שההפרש בין  $X$  ל- $Y$  הוא 0.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  גדול מ- $Y$  בממוצע?
- ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  קטן מ- $Y$  בממוצע?
- ו. בנו רווח סמך לתוחלת של  $X$  ברמת סמך של 90%.

## תשובות סופיות

- (1) א. -0.007      ב. 0.1      ג. אין הבדל מובהק.
- (2) א.  $d.f = 299$  ,       $n = 300$  ,       $\bar{X} = 8.496$  ,  $\text{Sig} = 0$  .
- ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. (0.46341, 0.38126)      ד. (0.4708, 0.3738) .
- (3) א. ראה וידאו.      ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. לא נדחה את  $H_0$  .
- ד. (1.592, 13.317) .
- (4) א. 1.5876 , 11.5715      ב. 0.173      ג. יגדל.
- ד. 0.0865      ה. 0.9135      ו.  $49.18 < \mu < 58.82$  .

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 15 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות (יחידה 11  
(

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 117

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

### רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu_1 - \mu_2$  :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל-  $\mu_1 - \mu_2$  :

אם  $C$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$  .

אם  $C$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$  .

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו :  $\alpha = 5\%$ ,  $H_0 : \mu_D = 80$ ,  $H_1 : \mu_D \neq 80$  .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%,  $78 < \mu_D < 83$  .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

## שאלות

(1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.

להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

| סמסטר א' | סמסטר ב' |
|----------|----------|
| 74       | 80       |
| 68       | 84       |
| 90       | 87       |
| 75       | 76       |
| 82       | 100      |

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

(2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

|        |    |    |    |
|--------|----|----|----|
| מרצה X | 82 | 90 | 68 |
| מרצה Y | 68 | 81 | 64 |

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

## שאלות רב-ברירה :

(3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ .

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$  ;  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$  ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו :  $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ , רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.  
לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
  - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
  - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של  $D$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$  ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א.  $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$  ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג'.
- (4) א'.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 16 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן (יחידה 11)

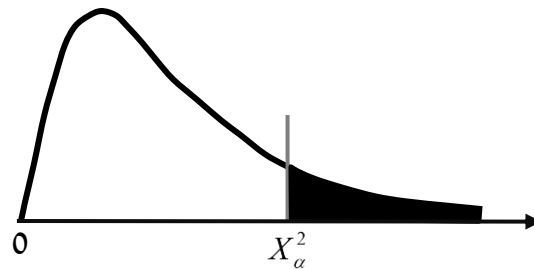
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 ..... 120

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

**דוגמה:**

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רוח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

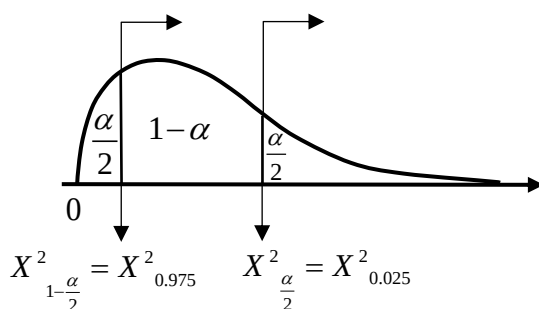
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

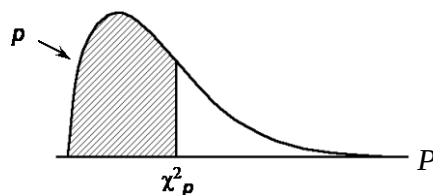
$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

- (1)  $8.4 < \sigma^2 < 194.2$
- (2) א.  $30.285 < \mu < 31.315$  ב.  $0.836 < \sigma < 1.606$
- (3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב.  $99.32 \leq \mu \leq 108.68$  ג.  $7.94 < \sigma < 13.7$
- ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.  
בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.
- (4) א.  $68.75 < \mu < 82.15$  ב.  $47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ :

| df | .005     | .01     | .025    | .05     | .10    | .25   | .50   | .75  | .90  | .95  | .975 | .99  | .995 |
|----|----------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| 1  | 0.004393 | 0.00157 | 0.00982 | 0.02393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2  | 0.0100   | 0.0201  | 0.0506  | 0.103   | 0.211  | 0.575 | 1.39  | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3  | 0.0717   | 0.115   | 0.216   | 0.352   | 0.584  | 1.21  | 2.37  | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4  | 0.207    | 0.297   | 0.484   | 0.711   | 1.06   | 1.92  | 3.36  | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5  | 0.412    | 0.554   | 0.831   | 1.15    | 1.61   | 2.67  | 4.35  | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6  | 0.676    | 0.872   | 1.24    | 1.64    | 2.20   | 3.45  | 5.35  | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7  | 0.989    | 1.24    | 1.69    | 2.17    | 2.83   | 4.25  | 6.35  | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8  | 1.34     | 1.65    | 2.18    | 2.73    | 3.49   | 5.07  | 7.34  | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9  | 1.73     | 2.09    | 2.70    | 3.33    | 4.17   | 5.90  | 8.34  | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16     | 2.56    | 3.25    | 3.94    | 4.87   | 6.74  | 9.34  | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60     | 3.05    | 3.82    | 4.57    | 5.58   | 7.58  | 10.3  | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07     | 3.57    | 4.40    | 5.23    | 6.30   | 8.44  | 11.3  | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57     | 4.11    | 5.01    | 5.89    | 7.04   | 9.30  | 12.3  | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07     | 4.66    | 5.63    | 6.57    | 7.79   | 10.2  | 13.3  | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60     | 5.23    | 6.26    | 7.26    | 8.55   | 11.0  | 14.3  | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14     | 5.81    | 6.91    | 7.96    | 9.31   | 11.9  | 15.3  | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70     | 6.41    | 7.56    | 8.67    | 10.1   | 12.8  | 16.3  | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26     | 7.01    | 8.23    | 9.39    | 10.9   | 13.7  | 17.3  | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84     | 7.63    | 8.91    | 10.1    | 11.7   | 14.6  | 18.3  | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43     | 8.26    | 9.59    | 10.9    | 12.4   | 15.5  | 19.3  | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03     | 8.90    | 10.3    | 11.6    | 13.2   | 16.3  | 20.3  | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64     | 9.54    | 11.0    | 12.3    | 14.0   | 17.2  | 21.3  | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26     | 10.2    | 11.7    | 13.1    | 14.8   | 18.1  | 22.3  | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89     | 10.9    | 12.4    | 13.8    | 15.7   | 19.0  | 23.3  | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5     | 11.5    | 13.1    | 14.6    | 16.5   | 19.9  | 24.3  | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2     | 12.2    | 13.8    | 15.4    | 17.3   | 20.8  | 25.3  | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8     | 12.9    | 14.6    | 16.2    | 18.1   | 21.7  | 26.3  | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5     | 13.6    | 15.3    | 16.9    | 18.9   | 22.7  | 27.3  | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1     | 14.3    | 16.0    | 17.7    | 19.8   | 23.6  | 28.3  | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8     | 15.0    | 16.8    | 18.5    | 20.6   | 24.5  | 29.3  | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

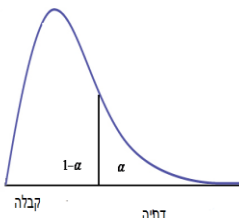
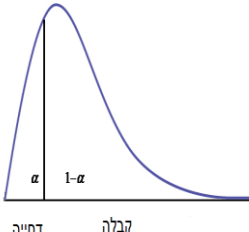
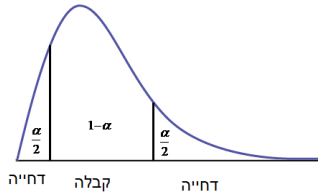
פרק 17 - בדיקת השערות על שונויות (יחידה 11)

תוכן העניינים

|     |                     |
|-----|---------------------|
| 125 | 1. שונות וסטיית תקן |
| 130 | 2. שתי שונויות      |

## שונות וסטיית תקן:

רקע:

| השערות האפס :<br>השערה<br>אלטרנטיבית: | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$                                                         | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$                                                           | $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$<br>$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$                                                                                                                        |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים :                               | $X \sim N$                                                                                                           |                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                        |
| נדחה את<br>השערת האפס<br>אם:          |  $\chi^2 > \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$ |  $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$ |  $\chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)} \text{ או } \chi^2 > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ |

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

התפלגות חי בריבוע:

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)} : \text{אם } X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע מתקיים ש:}$$

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף. התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם  $\mu$  אינו ידוע אז:  $d.f = n - 1$

**דוגמה:**

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 15$ . מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה. במדגם של 20 ישראלים התקבל:

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420 \quad \text{מה המסקנה ברמת מובהקות של 5\%?}$$

**פתרון:**

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן I.Q.

המשתנה:  $X =$  ציון I.Q.

פרמטר:  $\sigma^2$

$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 225$$

השערות:

הנחה:  $X \sim N$

כלל הכרעה:  $d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19$

נדחה את  $H_0$  אם  $X^2 > 32.9$  או  $X^2 < 8.91$

תוצאות המדגם:  $n = 20$

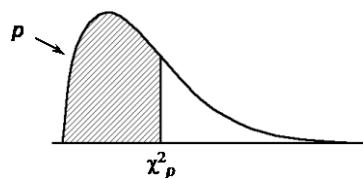
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את  $H_0$ , לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן

I.Q. שונה מזו של אמריקאים. ( $\alpha = 5\%$ )

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

| df | $p$                  |                      |                      |                      |        |       |       |      |      |      |      |      |      |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|    | .005                 | .01                  | .025                 | .05                  | .10    | .25   | .50   | .75  | .90  | .95  | .975 | .99  | .995 |
| 1  | 0.0 <sup>4</sup> 393 | 0.0 <sup>3</sup> 157 | 0.0 <sup>3</sup> 982 | 0.0 <sup>2</sup> 393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2  | 0.0100               | 0.0201               | 0.0506               | 0.103                | 0.211  | 0.575 | 1.39  | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3  | 0.0717               | 0.115                | 0.216                | 0.352                | 0.584  | 1.21  | 2.37  | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4  | 0.207                | 0.297                | 0.484                | 0.711                | 1.06   | 1.92  | 3.36  | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5  | 0.412                | 0.554                | 0.831                | 1.15                 | 1.61   | 2.67  | 4.35  | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6  | 0.676                | 0.872                | 1.24                 | 1.64                 | 2.20   | 3.45  | 5.35  | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7  | 0.989                | 1.24                 | 1.69                 | 2.17                 | 2.83   | 4.25  | 6.35  | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8  | 1.34                 | 1.65                 | 2.18                 | 2.73                 | 3.49   | 5.07  | 7.34  | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9  | 1.73                 | 2.09                 | 2.70                 | 3.33                 | 4.17   | 5.90  | 8.34  | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16                 | 2.56                 | 3.25                 | 3.94                 | 4.87   | 6.74  | 9.34  | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60                 | 3.05                 | 3.82                 | 4.57                 | 5.58   | 7.58  | 10.3  | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07                 | 3.57                 | 4.40                 | 5.23                 | 6.30   | 8.44  | 11.3  | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57                 | 4.11                 | 5.01                 | 5.89                 | 7.04   | 9.30  | 12.3  | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07                 | 4.66                 | 5.63                 | 6.57                 | 7.79   | 10.2  | 13.3  | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60                 | 5.23                 | 6.26                 | 7.26                 | 8.55   | 11.0  | 14.3  | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14                 | 5.81                 | 6.91                 | 7.96                 | 9.31   | 11.9  | 15.3  | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70                 | 6.41                 | 7.56                 | 8.67                 | 10.1   | 12.8  | 16.3  | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26                 | 7.01                 | 8.23                 | 9.39                 | 10.9   | 13.7  | 17.3  | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84                 | 7.63                 | 8.91                 | 10.1                 | 11.7   | 14.6  | 18.3  | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43                 | 8.26                 | 9.59                 | 10.9                 | 12.4   | 15.5  | 19.3  | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03                 | 8.90                 | 10.3                 | 11.6                 | 13.2   | 16.3  | 20.3  | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64                 | 9.54                 | 11.0                 | 12.3                 | 14.0   | 17.2  | 21.3  | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26                 | 10.2                 | 11.7                 | 13.1                 | 14.8   | 18.1  | 22.3  | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89                 | 10.9                 | 12.4                 | 13.8                 | 15.7   | 19.0  | 23.3  | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5                 | 11.5                 | 13.1                 | 14.6                 | 16.5   | 19.9  | 24.3  | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2                 | 12.2                 | 13.8                 | 15.4                 | 17.3   | 20.8  | 25.3  | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8                 | 12.9                 | 14.6                 | 16.2                 | 18.1   | 21.7  | 26.3  | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5                 | 13.6                 | 15.3                 | 16.9                 | 18.9   | 22.7  | 27.3  | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1                 | 14.3                 | 16.0                 | 17.7                 | 19.8   | 23.6  | 28.3  | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8                 | 15.0                 | 16.8                 | 18.5                 | 20.6   | 24.5  | 29.3  | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

## שאלות:

(1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלי. החברה החליפה את מכוונת האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארו. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).  
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):  
1008, 1024, 1005, 996, 997.  
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלי עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 110, 90, 72, 50, 38.  
א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?  
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?  
ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?  
ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

(3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלי עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.  
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.  
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

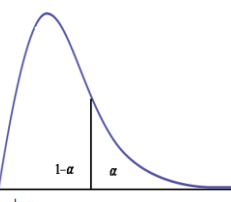
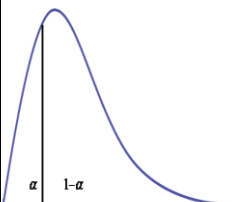
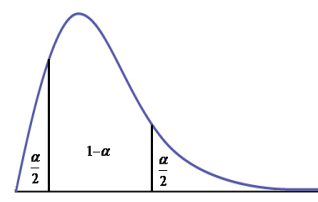
(4) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma < 2$ ,  $H_0: \sigma = 2$ .  
במדגם של 21 תצפיות התקבלה סטיית תקן 1.143.  
תן הערכה למובהקות התוצאה.

**תשובות סופיות:**

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) א. נדחה את  $H_0$ . ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת. ד. לא תשתנה.
- (3) א. נדחה את  $H_0$ . ב. לא נדחה את  $H_0$ .
- (4)  $0 \leq P_v \leq 0.005$

## בדיקת השערות על שתי שונות:

רקע:

| השערת האפס :<br>השערה אלטרנטיבית : | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$                                                        | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$                                                                  | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$<br>$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$                                                                                                                       |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| תנאים :                            | 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $X_1, X_2 \sim N$                                                                                                 |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                 |
| נדחה את השערת האפס אם :            | <br>קבלה<br>דחייה<br>$F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$ | <br>דחייה<br>קבלה<br>$F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ | <br>דחייה<br>קבלה<br>דחייה<br>$F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1, n_2-1)}$ או $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ |

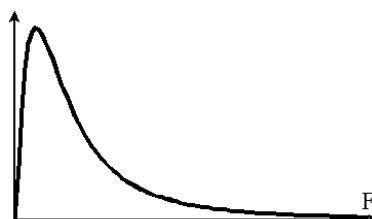
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

התפלגות F:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) \text{ אם } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2) \text{ ו- } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2) \text{ אזי}$$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

$$\text{כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה : } F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}$$



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$

**דוגמה:**

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמן ביצוע המשימה:  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$ .

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:  $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$ . בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונות? מה יש להניח?

**פתרון:**

האוכלוסיות: נשים מול גברים.

משתנה:  $y$  = זמן ביצוע משימה של גבר,  $x$  = זמן ביצוע משימה של אישה

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} : \text{פרמטר}$$

$$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1$$

השערות:

$$H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1$$

הנחות: 1. מדגימים ב"ת 2.  $x, y \sim N$

כלל הכרעה:

$$\alpha = 2\%$$

$$n_1 = 13, d.f_1 = n_1 - 1 = 12$$

$$n_2 = 10, d.f_2 = n_2 - 1 = 9$$

נדחה את  $H_0$  אם  $F > 5.11$  או  $F < 0.23$

$$S_y^2 = \frac{204}{10-1} = 22\frac{2}{3}$$

תוצאות המדגם:

$$S_x^2 = \frac{200}{13-1} = 16\frac{2}{3}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16\frac{2}{3}}{22\frac{2}{3}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

מסקנה: ברמת מובהקות של 2% נקבל את  $H_0$ .

לא קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים מבחינת השונות שלהם.

| טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| α = 0.05                         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ד"ח מנהל"ח מסכה                  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 12     | 16     | 20     | 24     | 60     | 120    | ∞      |
| 1                                | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 243.91 | 246.46 | 248.01 | 249.05 | 252.20 | 253.25 | 254.31 |
| 2                                | 18.51  | 19.00  | 19.16  | 19.25  | 19.30  | 19.33  | 19.35  | 19.37  | 19.38  | 19.40  | 19.41  | 19.43  | 19.45  | 19.45  | 19.48  | 19.49  | 19.50  |
| 3                                | 10.13  | 9.55   | 9.28   | 9.12   | 9.01   | 8.94   | 8.89   | 8.85   | 8.81   | 8.79   | 8.74   | 8.69   | 8.66   | 8.64   | 8.57   | 8.55   | 8.53   |
| 4                                | 7.71   | 6.94   | 6.59   | 6.39   | 6.26   | 6.16   | 6.09   | 6.04   | 6.00   | 5.96   | 5.91   | 5.84   | 5.80   | 5.77   | 5.69   | 5.66   | 5.63   |
| 5                                | 6.61   | 5.79   | 5.41   | 5.19   | 5.05   | 4.95   | 4.88   | 4.82   | 4.77   | 4.74   | 4.68   | 4.60   | 4.56   | 4.53   | 4.43   | 4.40   | 4.37   |
| 6                                | 5.99   | 5.14   | 4.76   | 4.53   | 4.39   | 4.28   | 4.21   | 4.15   | 4.10   | 4.06   | 4.00   | 3.92   | 3.87   | 3.84   | 3.74   | 3.70   | 3.67   |
| 7                                | 5.59   | 4.74   | 4.35   | 4.12   | 3.97   | 3.87   | 3.79   | 3.73   | 3.68   | 3.64   | 3.57   | 3.49   | 3.44   | 3.41   | 3.30   | 3.27   | 3.23   |
| 8                                | 5.32   | 4.46   | 4.07   | 3.84   | 3.69   | 3.58   | 3.50   | 3.44   | 3.39   | 3.35   | 3.28   | 3.20   | 3.15   | 3.12   | 3.01   | 2.97   | 2.93   |
| 9                                | 5.12   | 4.26   | 3.86   | 3.63   | 3.48   | 3.37   | 3.29   | 3.23   | 3.18   | 3.14   | 3.07   | 2.99   | 2.94   | 2.90   | 2.79   | 2.75   | 2.71   |
| 10                               | 4.96   | 4.10   | 3.71   | 3.48   | 3.33   | 3.22   | 3.14   | 3.07   | 3.02   | 2.98   | 2.91   | 2.83   | 2.77   | 2.74   | 2.62   | 2.58   | 2.54   |
| 11                               | 4.84   | 3.98   | 3.59   | 3.36   | 3.20   | 3.09   | 3.01   | 2.95   | 2.90   | 2.85   | 2.79   | 2.70   | 2.65   | 2.61   | 2.49   | 2.45   | 2.40   |
| 12                               | 4.75   | 3.89   | 3.49   | 3.26   | 3.11   | 3.00   | 2.91   | 2.85   | 2.80   | 2.75   | 2.69   | 2.60   | 2.54   | 2.51   | 2.38   | 2.34   | 2.30   |
| 13                               | 4.67   | 3.81   | 3.41   | 3.18   | 3.03   | 2.92   | 2.83   | 2.77   | 2.71   | 2.67   | 2.60   | 2.51   | 2.46   | 2.42   | 2.30   | 2.25   | 2.21   |
| 14                               | 4.60   | 3.74   | 3.34   | 3.11   | 2.96   | 2.85   | 2.76   | 2.70   | 2.65   | 2.60   | 2.53   | 2.44   | 2.39   | 2.35   | 2.22   | 2.18   | 2.13   |
| 15                               | 4.54   | 3.68   | 3.29   | 3.06   | 2.90   | 2.79   | 2.71   | 2.64   | 2.59   | 2.54   | 2.48   | 2.38   | 2.33   | 2.29   | 2.16   | 2.11   | 2.07   |
| 16                               | 4.49   | 3.63   | 3.24   | 3.01   | 2.85   | 2.74   | 2.66   | 2.59   | 2.54   | 2.49   | 2.42   | 2.33   | 2.28   | 2.24   | 2.11   | 2.06   | 2.01   |
| 17                               | 4.45   | 3.59   | 3.20   | 2.96   | 2.81   | 2.70   | 2.61   | 2.55   | 2.49   | 2.45   | 2.38   | 2.29   | 2.23   | 2.19   | 2.06   | 2.01   | 1.96   |
| 18                               | 4.41   | 3.55   | 3.16   | 2.93   | 2.77   | 2.66   | 2.58   | 2.51   | 2.46   | 2.41   | 2.34   | 2.25   | 2.19   | 2.15   | 2.02   | 1.97   | 1.92   |
| 19                               | 4.38   | 3.52   | 3.13   | 2.90   | 2.74   | 2.63   | 2.54   | 2.48   | 2.42   | 2.38   | 2.31   | 2.21   | 2.16   | 2.11   | 1.98   | 1.93   | 1.88   |
| 20                               | 4.35   | 3.49   | 3.10   | 2.87   | 2.71   | 2.60   | 2.51   | 2.45   | 2.39   | 2.35   | 2.28   | 2.18   | 2.12   | 2.08   | 1.95   | 1.90   | 1.84   |
| 21                               | 4.32   | 3.47   | 3.07   | 2.84   | 2.68   | 2.57   | 2.49   | 2.42   | 2.37   | 2.32   | 2.25   | 2.16   | 2.10   | 2.05   | 1.92   | 1.87   | 1.81   |
| 22                               | 4.30   | 3.44   | 3.05   | 2.82   | 2.66   | 2.55   | 2.46   | 2.40   | 2.34   | 2.30   | 2.23   | 2.13   | 2.07   | 2.03   | 1.89   | 1.84   | 1.78   |
| 23                               | 4.28   | 3.42   | 3.03   | 2.80   | 2.64   | 2.53   | 2.44   | 2.37   | 2.32   | 2.27   | 2.20   | 2.11   | 2.05   | 2.01   | 1.86   | 1.81   | 1.76   |
| 24                               | 4.26   | 3.40   | 3.01   | 2.78   | 2.62   | 2.51   | 2.42   | 2.36   | 2.30   | 2.25   | 2.18   | 2.09   | 2.03   | 1.98   | 1.84   | 1.79   | 1.73   |
| 25                               | 4.24   | 3.39   | 2.99   | 2.76   | 2.60   | 2.49   | 2.40   | 2.34   | 2.28   | 2.24   | 2.16   | 2.07   | 2.01   | 1.96   | 1.82   | 1.77   | 1.71   |
| 26                               | 4.23   | 3.37   | 2.98   | 2.74   | 2.59   | 2.47   | 2.39   | 2.32   | 2.27   | 2.22   | 2.15   | 2.05   | 1.99   | 1.95   | 1.80   | 1.75   | 1.69   |
| 27                               | 4.21   | 3.35   | 2.96   | 2.73   | 2.57   | 2.46   | 2.37   | 2.31   | 2.25   | 2.20   | 2.13   | 2.04   | 1.97   | 1.93   | 1.79   | 1.73   | 1.67   |
| 28                               | 4.20   | 3.34   | 2.95   | 2.71   | 2.56   | 2.45   | 2.36   | 2.29   | 2.24   | 2.19   | 2.12   | 2.02   | 1.96   | 1.91   | 1.77   | 1.71   | 1.65   |
| 29                               | 4.18   | 3.33   | 2.93   | 2.70   | 2.55   | 2.43   | 2.35   | 2.28   | 2.22   | 2.18   | 2.10   | 2.01   | 1.94   | 1.90   | 1.75   | 1.70   | 1.64   |
| 30                               | 4.17   | 3.32   | 2.92   | 2.69   | 2.53   | 2.42   | 2.33   | 2.27   | 2.21   | 2.16   | 2.09   | 1.99   | 1.93   | 1.89   | 1.74   | 1.68   | 1.62   |
| 40                               | 4.08   | 3.23   | 2.84   | 2.61   | 2.45   | 2.34   | 2.25   | 2.18   | 2.12   | 2.08   | 2.00   | 1.90   | 1.84   | 1.79   | 1.64   | 1.58   | 1.51   |
| 50                               | 4.03   | 3.18   | 2.79   | 2.56   | 2.40   | 2.29   | 2.20   | 2.13   | 2.07   | 2.03   | 1.95   | 1.85   | 1.78   | 1.74   | 1.58   | 1.51   | 1.44   |
| 60                               | 4.00   | 3.15   | 2.76   | 2.53   | 2.37   | 2.25   | 2.17   | 2.10   | 2.04   | 1.99   | 1.92   | 1.82   | 1.75   | 1.70   | 1.53   | 1.47   | 1.39   |
| 90                               | 3.95   | 3.10   | 2.71   | 2.47   | 2.32   | 2.20   | 2.11   | 2.04   | 1.99   | 1.94   | 1.86   | 1.76   | 1.69   | 1.64   | 1.46   | 1.39   | 1.30   |
| 120                              | 3.92   | 3.07   | 2.68   | 2.45   | 2.29   | 2.18   | 2.09   | 2.02   | 1.96   | 1.91   | 1.83   | 1.73   | 1.66   | 1.61   | 1.43   | 1.35   | 1.25   |
| ∞                                | 3.84   | 3.00   | 2.60   | 2.37   | 2.21   | 2.10   | 2.01   | 1.94   | 1.88   | 1.83   | 1.75   | 1.64   | 1.57   | 1.52   | 1.32   | 1.22   | 1.00   |

| טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F $\alpha = 0.01$ ראה איור מסה. |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |          |
|----------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| ד"ח מונה/ד"ח מכנה                                              | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       | 10      | 12      | 16      | 20      | 24      | 60      | 120     | $\infty$ |
| 1                                                              | 4052.18 | 4999.50 | 5403.35 | 5624.58 | 5763.65 | 5858.99 | 5928.36 | 5981.07 | 6022.47 | 6055.85 | 6106.32 | 6170.10 | 6208.73 | 6234.63 | 6313.03 | 6339.39 | 6365.86  |
| 2                                                              | 98.50   | 99.00   | 99.17   | 99.25   | 99.30   | 99.33   | 99.36   | 99.37   | 99.39   | 99.40   | 99.42   | 99.44   | 99.45   | 99.46   | 99.48   | 99.49   | 99.50    |
| 3                                                              | 34.12   | 30.82   | 29.46   | 28.71   | 28.24   | 27.91   | 27.67   | 27.49   | 27.35   | 27.23   | 27.05   | 26.83   | 26.69   | 26.60   | 26.32   | 26.22   | 26.13    |
| 4                                                              | 21.20   | 18.00   | 16.69   | 15.98   | 15.52   | 15.21   | 14.98   | 14.80   | 14.66   | 14.55   | 14.37   | 14.15   | 14.02   | 13.93   | 13.65   | 13.56   | 13.46    |
| 5                                                              | 16.26   | 13.27   | 12.06   | 11.39   | 10.97   | 10.67   | 10.46   | 10.29   | 10.16   | 10.05   | 9.89    | 9.68    | 9.55    | 9.47    | 9.20    | 9.11    | 9.02     |
| 6                                                              | 13.75   | 10.92   | 9.78    | 9.15    | 8.75    | 8.47    | 8.26    | 8.10    | 7.98    | 7.87    | 7.72    | 7.52    | 7.40    | 7.31    | 7.06    | 6.97    | 6.88     |
| 7                                                              | 12.25   | 9.55    | 8.45    | 7.85    | 7.46    | 7.19    | 6.99    | 6.84    | 6.72    | 6.62    | 6.47    | 6.28    | 6.16    | 6.07    | 5.82    | 5.74    | 5.65     |
| 8                                                              | 11.26   | 8.65    | 7.59    | 7.01    | 6.63    | 6.37    | 6.18    | 6.03    | 5.91    | 5.81    | 5.67    | 5.48    | 5.36    | 5.28    | 5.03    | 4.95    | 4.86     |
| 9                                                              | 10.56   | 8.02    | 6.99    | 6.42    | 6.06    | 5.80    | 5.61    | 5.47    | 5.35    | 5.26    | 5.11    | 4.92    | 4.81    | 4.73    | 4.48    | 4.40    | 4.31     |
| 10                                                             | 10.04   | 7.56    | 6.55    | 5.99    | 5.64    | 5.39    | 5.20    | 5.06    | 4.94    | 4.85    | 4.71    | 4.52    | 4.41    | 4.33    | 4.08    | 4.00    | 3.91     |
| 11                                                             | 9.65    | 7.21    | 6.22    | 5.67    | 5.32    | 5.07    | 4.89    | 4.74    | 4.63    | 4.54    | 4.40    | 4.21    | 4.10    | 4.02    | 3.78    | 3.69    | 3.60     |
| 12                                                             | 9.33    | 6.93    | 5.95    | 5.41    | 5.06    | 4.82    | 4.64    | 4.50    | 4.39    | 4.30    | 4.16    | 3.97    | 3.86    | 3.78    | 3.54    | 3.45    | 3.36     |
| 13                                                             | 9.07    | 6.70    | 5.74    | 5.21    | 4.86    | 4.62    | 4.44    | 4.30    | 4.19    | 4.10    | 3.96    | 3.78    | 3.66    | 3.59    | 3.34    | 3.25    | 3.17     |
| 14                                                             | 8.86    | 6.51    | 5.56    | 5.04    | 4.69    | 4.46    | 4.28    | 4.14    | 4.03    | 3.94    | 3.80    | 3.62    | 3.51    | 3.43    | 3.18    | 3.09    | 3.00     |
| 15                                                             | 8.68    | 6.36    | 5.42    | 4.89    | 4.56    | 4.32    | 4.14    | 4.00    | 3.89    | 3.80    | 3.67    | 3.49    | 3.37    | 3.29    | 3.05    | 2.96    | 2.87     |
| 16                                                             | 8.53    | 6.23    | 5.29    | 4.77    | 4.44    | 4.20    | 4.03    | 3.89    | 3.78    | 3.69    | 3.55    | 3.37    | 3.26    | 3.18    | 2.93    | 2.84    | 2.75     |
| 17                                                             | 8.40    | 6.11    | 5.18    | 4.67    | 4.34    | 4.10    | 3.93    | 3.79    | 3.68    | 3.59    | 3.46    | 3.27    | 3.16    | 3.08    | 2.83    | 2.75    | 2.65     |
| 18                                                             | 8.29    | 6.01    | 5.09    | 4.58    | 4.25    | 4.01    | 3.84    | 3.71    | 3.60    | 3.51    | 3.37    | 3.19    | 3.08    | 3.00    | 2.75    | 2.66    | 2.57     |
| 19                                                             | 8.18    | 5.93    | 5.01    | 4.50    | 4.17    | 3.94    | 3.77    | 3.63    | 3.52    | 3.43    | 3.30    | 3.12    | 3.00    | 2.92    | 2.67    | 2.58    | 2.49     |
| 20                                                             | 8.10    | 5.85    | 4.94    | 4.43    | 4.10    | 3.87    | 3.70    | 3.56    | 3.46    | 3.37    | 3.23    | 3.05    | 2.94    | 2.86    | 2.61    | 2.52    | 2.42     |
| 21                                                             | 8.02    | 5.78    | 4.87    | 4.37    | 4.04    | 3.81    | 3.64    | 3.51    | 3.40    | 3.31    | 3.17    | 2.99    | 2.88    | 2.80    | 2.55    | 2.46    | 2.36     |
| 22                                                             | 7.95    | 5.72    | 4.82    | 4.31    | 3.99    | 3.76    | 3.59    | 3.45    | 3.35    | 3.26    | 3.12    | 2.94    | 2.83    | 2.75    | 2.50    | 2.40    | 2.31     |
| 23                                                             | 7.88    | 5.66    | 4.76    | 4.26    | 3.94    | 3.71    | 3.54    | 3.41    | 3.30    | 3.21    | 3.07    | 2.89    | 2.78    | 2.70    | 2.45    | 2.35    | 2.26     |
| 24                                                             | 7.82    | 5.61    | 4.72    | 4.22    | 3.90    | 3.67    | 3.50    | 3.36    | 3.26    | 3.17    | 3.03    | 2.85    | 2.74    | 2.66    | 2.40    | 2.31    | 2.21     |
| 25                                                             | 7.77    | 5.57    | 4.68    | 4.18    | 3.85    | 3.63    | 3.46    | 3.32    | 3.22    | 3.13    | 2.99    | 2.81    | 2.70    | 2.62    | 2.36    | 2.27    | 2.17     |
| 26                                                             | 7.72    | 5.53    | 4.64    | 4.14    | 3.82    | 3.59    | 3.42    | 3.29    | 3.18    | 3.09    | 2.96    | 2.78    | 2.66    | 2.58    | 2.33    | 2.23    | 2.13     |
| 27                                                             | 7.68    | 5.49    | 4.60    | 4.11    | 3.78    | 3.56    | 3.39    | 3.26    | 3.15    | 3.06    | 2.93    | 2.75    | 2.63    | 2.55    | 2.29    | 2.20    | 2.10     |
| 28                                                             | 7.64    | 5.45    | 4.57    | 4.07    | 3.75    | 3.53    | 3.36    | 3.23    | 3.12    | 3.03    | 2.90    | 2.72    | 2.60    | 2.52    | 2.26    | 2.17    | 2.06     |
| 29                                                             | 7.60    | 5.42    | 4.54    | 4.04    | 3.73    | 3.50    | 3.33    | 3.20    | 3.09    | 3.00    | 2.87    | 2.69    | 2.57    | 2.49    | 2.23    | 2.14    | 2.03     |
| 30                                                             | 7.56    | 5.39    | 4.51    | 4.02    | 3.70    | 3.47    | 3.30    | 3.17    | 3.07    | 2.98    | 2.84    | 2.66    | 2.55    | 2.47    | 2.21    | 2.11    | 2.01     |
| 40                                                             | 7.31    | 5.18    | 4.31    | 3.83    | 3.51    | 3.29    | 3.12    | 2.99    | 2.89    | 2.80    | 2.66    | 2.48    | 2.37    | 2.29    | 2.02    | 1.92    | 1.80     |
| 50                                                             | 7.17    | 5.06    | 4.20    | 3.72    | 3.41    | 3.19    | 3.02    | 2.89    | 2.78    | 2.70    | 2.56    | 2.38    | 2.27    | 2.18    | 1.91    | 1.80    | 1.68     |
| 60                                                             | 7.08    | 4.98    | 4.13    | 3.65    | 3.34    | 3.12    | 2.95    | 2.82    | 2.72    | 2.63    | 2.50    | 2.31    | 2.20    | 2.12    | 1.84    | 1.73    | 1.60     |
| 90                                                             | 6.93    | 4.85    | 4.01    | 3.53    | 3.23    | 3.01    | 2.84    | 2.72    | 2.61    | 2.52    | 2.39    | 2.21    | 2.09    | 2.00    | 1.72    | 1.60    | 1.46     |
| 120                                                            | 6.85    | 4.79    | 3.95    | 3.48    | 3.17    | 2.96    | 2.79    | 2.66    | 2.56    | 2.47    | 2.34    | 2.15    | 2.03    | 1.95    | 1.66    | 1.53    | 1.38     |
| $\infty$                                                       | 6.63    | 4.61    | 3.78    | 3.32    | 3.02    | 2.80    | 2.64    | 2.51    | 2.41    | 2.32    | 2.18    | 2.00    | 1.88    | 1.79    | 1.47    | 1.32    | 1.00     |

## שאלות:

- (1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

|     |    |    |     |    |     |     |      |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
|     | 69 | 74 | 105 | 91 | 82  | 100 | 2013 |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?  
 ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

- (2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר

| B   | A  | סוג המתכת    |
|-----|----|--------------|
| 10  | 8  | $n$          |
| 30  | 16 | $\sum X_i$   |
| 198 | 60 | $\sum X_i^2$ |

- יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:  
 יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.  
 א. האם קיים הבדל בין שונות החוזק של מתכות?  
 ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות?  
 בכל סעיף רמת מובהקות של 10%.

- (3) מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500₪ וסטיית תקן של 300₪.  
 במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומדן חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16.  
 במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומדן חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000₪.  
 א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כלל המבוגרים.  
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

## תשובות סופיות:

- (1) א. לא נדחה את  $H_0$ . ב. מסקנה לא תשתנה.  
 (2) א. לא נדחה את  $H_0$ . ב. לא נדחה את  $H_0$ .  
 (3) א. נדחה את  $H_0$ . ב. נדחה את  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 18 - שאלות מסכמות על רווחי סמך (יחידה 11)

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך.....135

## שאלות מסכמות על רווחי סמך:

### שאלות:

- (1) מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps. מהירות מתחת ל-10Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה. התוצאות שהתקבלו במדגם: ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה. בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים:
- תוחלת מהירות הגלישה.
  - סטיית תקן של מהירות הגלישה.
  - הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.

- (2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות:

| מספר פעמים | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|------------|----|----|----|----|----|----|
| מספר אנשים | 86 | 34 | 28 | 22 | 20 | 10 |

- תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום.  $\alpha = 0.05$ .
  - אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה".  $\alpha = 0.1$ .
- (3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא:  $0.81 < p < 0.91$ . רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.
- כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?
  - באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
  - בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

- (4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

- א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?  
 ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?  
 ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

- (5) להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט:

| אזור מגורים            | גוש דן | שאר הארץ |
|------------------------|--------|----------|
| גודל המדגם             | 200    | 240      |
| מספר משפחות בעלי טאבלט | 160    | 168      |

- א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.  
 ב. בנו רווח סמך לפרופורציות משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

- (6) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים.

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832 \text{ cm}^2, \quad \bar{x} = 176.2 \text{ cm}$$

- א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.  
 ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

- (7) בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?  
 ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

(8) להלן מדגם של שכר הדירה ב-9 של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב:

|      |      |      |      |      |          |
|------|------|------|------|------|----------|
| 7500 | 6500 | 7000 | 7500 | 8000 | שנת 2012 |
| 7700 | 6800 | 7800 | 8200 | 8000 | שנת 2013 |

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $80.65 \leq \mu \leq 93.35$     ב.  $13.5 < \sigma < 22.9$     ג.  $0.225 \leq p \leq 0.575$
- (2) א.  $1.21 \leq \mu \leq 1.65$     ב.  $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$
- (3) א. 70    ב. 0.9988    ג.  $83\% < p < 89\%$
- (4) א.  $97.4 \leq \mu \leq 106.6$     ב. לא    ג. יגדל.
- (5) א.  $0.5\% \leq p_1 - p_2 \leq 19.5\%$     ב.  $0.704 \leq p \leq 0.786$
- (6) א.  $170.8 \leq \mu \leq 181.6$     ב.  $8.8 \leq \sigma \leq 14.3$
- (7) א.  $-372 \leq \mu_A - \mu_B \leq 772$ , לא    ב.  $6467 \leq \mu_A \leq 7133$
- (8)  $-21 \leq \mu_D \leq 821$

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 19 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות (יחידה 11 10 מומלץ כחזרה  
לבחינה)

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות.....138

## שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

### שאלות

- (1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 520$ ,  $H_1: \mu > 520$ . כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$ . חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי  $\alpha = 0.05$ . חוקר ב' מחליט לדחות  $H_0$  אם  $\bar{X} > 522$ .

- למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?
- מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור  $\mu_1 = 525$ ?
- הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור  $\mu_1 = 525$ , של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'?
- חוקר א' קיבל במדגם שלו  $\bar{X} = 523$ . מהי מסקנתו?

- (2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5. דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב-49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.
- מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום)?
  - אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייקים" שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

| מוצר / רשת | A | B |
|------------|---|---|
| 1          | 5 | 5 |
| 2          | 4 | 5 |
| 3          | 5 | 3 |
| 4          | 7 | 4 |

- (3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:
- הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
- אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.
- בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.
  - חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

(4) במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=10, \quad \sum X_i = 1020, \quad \sum X_i^2 = 105120$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n=14, \quad \sum X_i = 1386, \quad \sum X_i^2 = 138644$$

נתון שציוני הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% האם קיים שוויון שונויות בין אוכלוסיית אמריקה לאוכלוסיית ישראל?

ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

(5) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

|     |     |     |     |     |     |                        |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------------------|
| 180 | 140 | 171 | 189 | 156 | 176 | סטודנטים באוניברסיטאות |
| 150 | 204 | 186 | 191 | 190 | 180 | סטודנטים במכללות       |

א. נסחו את ההשערות ובדקו אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדקו את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

(6) במדינת טרפפו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמלית גם כן. להלן משכורותיהם באלפי דולר:

|     |     |     |     |     |       |
|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 1.1 | 1.2 | 0.7 | 0.9 | 2   | גברים |
| 1.2 | 1.8 | 1.9 | 1.1 | 1.4 | נשים  |

א. בדקו את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפפו ברמת מובהקות של 5%.

בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.

ב. חזרו על הסעיף הקודם ללא ההנחה הנ"ל.

ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפפו. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

(7) במטרה להשוות בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות:

| לא צופים | צופים |       |
|----------|-------|-------|
| 42       | 320   | נשים  |
| 120      | 72    | גברים |

- א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?  
 ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שמבין הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאחוז הגברים.

(8) בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם במדגם ל-102 משפחות היה מדיח כלים.  
 ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.  
 האם ניתן לדעת את הסתברותה?

(9) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם. ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

- א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.  
 ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.  
 ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

(10) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

| מספר הנסיעות | 0  | 1   | 2  | 3  | 4  |
|--------------|----|-----|----|----|----|
| מספר המשפחות | 84 | 102 | 26 | 20 | 12 |

- א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?  
 ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

(11) נתון כי:  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$ .

מעוניינים לבדוק את ההשערות:  $H_0: \mu = 40$ ,  $H_1: \mu > 40$ .

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל  $\bar{X} = 45$ .

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה:  $H_1: \mu < 40$ .

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה:  $H_1: \mu \neq 40$ .

(12) ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של

16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים

התקבלה שונות מדגמית 118.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב

נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב

תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

## תשובות סופיות

- |                                         |                    |                                    |                 |
|-----------------------------------------|--------------------|------------------------------------|-----------------|
| (1) א. חוקר א'                          | ב. 0.0122          | ג. גדלה.                           | ד. נדחה $H_0$ . |
| (2) א. לפחות 0.0808                     | ב. 0.7995          |                                    |                 |
| (3) א. לא נדחה $H_0$ .                  | ב. לא נדחה $H_0$ . |                                    |                 |
| (4) א. לא נדחה $H_0$ .                  | ב. לא נדחה $H_0$ . |                                    |                 |
| (5) א. לא נדחה $H_0$ .                  | ב. בין 5% ל-10%    | ג. נדחה $H_0$ .                    |                 |
| (6) א. נדחה $H_0$ .                     | ב. נדחה $H_0$ .    | ג. נדחה $H_0$ .                    |                 |
| (7) א. נדחה $H_0$ .                     | ב. נדחה $H_0$ .    |                                    |                 |
| (8) א. $H_0: p = 0.6$<br>$H_1: p > 0.6$ | ב. נדחה $H_0$ .    | ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05. |                 |
| (9) א. לא נדחה $H_0$ .                  | ב. 0.8643          | ג. 0.8749                          |                 |
| (10) א. נדחה $H_0$ .                    | ב. נדחה $H_0$ .    |                                    |                 |
| (11) א. 0.0062                          | ב. 0.9938          | ג. 0.0124                          |                 |
| (12) א. לא נדחה $H_0$ .                 | ב. לא נדחה $H_0$ . |                                    |                 |

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 20 - מבחן חי בריבוע - טיב התאמה ואי תלות (יחידה 12)

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה..... (ללא ספר)
2. מבחן טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת..... 142
3. מבחן לאי תלות..... (ללא ספר)
4. מקדם המתאם של קרמר..... 144
5. ניתוח פלטים במבחן אי תלות..... 146

### הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיכוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדית על פרופורציה בודדת.

#### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

הטילו מטבע 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".  
בדקו האם המטבע הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.

## שאלות

(1) בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדפת עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשוב ש-40% מהאנשים מעדיפים כלבים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברה שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן על פרופורציה.

(2) לסוכנות מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.

ב. בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך אחרת לבדוק את ההשערה?

(3) בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה.

ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון.

התוצאות שהתקבלו מסוכמות בטבלה הבאה:

| המסלול         | 1  | 2  | 3  |
|----------------|----|----|----|
| מספר הניצחונות | 20 | 15 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מספר 1

גבוה מ- $\frac{1}{3}$ .

## תשובות סופיות

(1) לא נדחה  $H_0$ .

(2) א. נדחה  $H_0$ . ב. לא נדחה  $H_0$ .

(3) א. לא נדחה  $H_0$ . ב. לא נדחה  $H_0$ .

## מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? - כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

| $f(x)$    | נמנע | נגד | בעד | $X/Y$  |
|-----------|------|-----|-----|--------|
| 100       | 10   | 40  | 50  | גבר    |
| 100       | 10   | 60  | 30  | אישה   |
| $n = 200$ | 20   | 100 | 80  | $f(y)$ |

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)

$X$  - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

$Y$  - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

### שלבים בחישוב $r_c$ :

#### שלב א' :

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל  $E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$ .

| $f(x)$  | נמנע | נגד | בעד | $X/Y$  |
|---------|------|-----|-----|--------|
| 100     |      |     |     | גבר    |
| 100     |      |     |     | אישה   |
| $n=200$ | 20   | 100 | 80  | $f(y)$ |

#### שלב ב' :

נחשב  $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ .

#### שלב ג' :

נחשב:  $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$

כאשר  $L$  מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

## שאלות

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.

| מין / השכלה | נמוכה | תיכונית | גבוהה |
|-------------|-------|---------|-------|
| גבר         | 120   | 40      | 20    |
| אישה        | 20    | 20      | 80    |

להלן התוצאות:

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?

חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

## תשובות סופיות

- (1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.
- (2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

| $y/x$  | תקין | לא תקין | $f(x)$ |
|--------|------|---------|--------|
| כן     | 50   | 10      | 60     |
| לא     | 90   | 50      | 140    |
| $f(y)$ | 140  | 60      | 200    |

## פליטים על מבחן לאי תלות – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים:  $H_0$ .

יש תלות בין המשתנים:  $H_1$ .

דרגות חופש:  $d.f = (r-1)(c-1)$ .

כאשר:  $r$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

$c$  - ספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$O_i$  - השכיחות נצפית במדגם בתא  $i$ .

$E_i$  - שכיחות צפויה במדגם בתא  $i$  בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש

אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין  $E$  קטן מ-1 וגם אין ביותר מ-20% מהתאים  $E$  קטן מ-5.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

במחקר רצו לבדוק את הקשר בין צבע שיער לבין צבע עיניים של אנשים. הפלטים שהתקבלו מצורפים.

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- ב. כמה קטגוריות יש לכל משתנה?
- ג. רשמו את השערות המחקר.
- ד. מה מספר דרגות החופש?
- ה. כמה אנשים במדגם נמצאו עם שיער חום?
- ו. כמה אנשים היית מצפה במדגם שיהיה להם שיער חום ועיניים ירוקות בהנחה ואין קשר בין צבע שיער לצבע עיניים?
- ז. מתוך הבלונדינים מה אחוז בעלי עיניים כחולות במדגם?
- ח. מתוך בעלי עיניים ירוקות מה אחוז הבלונדינים במדגם?
- ט. מה ערכו של סטטיסטי המבחן ומהי מובהקות התוצאה?
- י. מה מסקנת המחקר?  $\alpha = 5\%$

להלן הפלטים שהתקבלו :

## Case Processing Summary

|                        | Cases |         |         |         |       |         |
|------------------------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|
|                        | Valid |         | Missing |         | Total |         |
|                        | N     | Percent | N       | Percent | N     | Percent |
| hair_color * eye_color | 78    | 100.0%  | 0       | 0.0%    | 78    | 100.0%  |

## hair\_color \* eye\_color Crosstabulation

|            |                     |                     | eye_color |        |        | Total  |
|------------|---------------------|---------------------|-----------|--------|--------|--------|
|            |                     |                     | brown     | green  | Blue   |        |
| hair_color | black               | Count               | 13        | 7      | 7      | 27     |
|            |                     | Expected Count      | 10.7      | 8.3    | 8.0    | 27.0   |
|            |                     | % within hair_color | 48.1%     | 25.9%  | 25.9%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 41.9%     | 29.2%  | 30.4%  | 34.6%  |
|            | brown               | Count               | 12        | 12     | 6      | 30     |
|            |                     | Expected Count      | 11.9      | 9.2    | 8.8    | 30.0   |
|            |                     | % within hair_color | 40.0%     | 40.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 38.7%     | 50.0%  | 26.1%  | 38.5%  |
|            | blond               | Count               | 6         | 5      | 10     | 21     |
|            |                     | Expected Count      | 8.3       | 6.5    | 6.2    | 21.0   |
|            |                     | % within hair_color | 28.6%     | 23.8%  | 47.6%  | 100.0% |
|            |                     | % within eye_color  | 19.4%     | 20.8%  | 43.5%  | 26.9%  |
| Total      | Count               | 31                  | 24        | 23     | 78     |        |
|            | Expected Count      | 31.0                | 24.0      | 23.0   | 78.0   |        |
|            | % within hair_color | 39.7%               | 30.8%     | 29.5%  | 100.0% |        |
|            | % within eye_color  | 100.0%              | 100.0%    | 100.0% | 100.0% |        |

## Chi-Square Tests

|                              | Value              | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|------------------------------|--------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square           | 5.880 <sup>a</sup> | 4  | .208                  |
| Likelihood Ratio             | 5.641              | 4  | .228                  |
| Linear-by-Linear Association | 2.682              | 1  | .101                  |
| N of Valid Cases             | 78                 |    |                       |

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.19.

## שאלות

- 1) בסקר שנעשה על ידי משרד ראש הממשלה נדגמו 60 אזרחים. כל אזרח נשאל על מגדרו והאם הוא בעד הקמת מדינה פלסטינית.
- א. מה ההשערות הנבדקות ומהו סטטיסטי המבחן?
  - ב. אם סטטיסטי המבחן היה גדל כיצד הדבר היה משפיע על SIG שבפלט.
  - ג. האם קיים קשר בין מגדר ודעה ברמת מובהקות של 5%?
  - ד. מהו האומדן לאחוז התומכים במדינה פלסטינית מתוך הגברים?
  - ה. איזה אחוז מהנשאלים שהיו בעד מדינה פלסטינית הם גברים?

להלן הפלטים:

## Chi-Square Tests

|                                 | Value              | df | Asymp. Sig.<br>(2-sided) |
|---------------------------------|--------------------|----|--------------------------|
| Pearson Chi-Square              | 1.973 <sup>a</sup> | 2  | .373                     |
| Likelihood Ratio                | 1.987              | 2  | .370                     |
| Linear-by-Linear<br>Association | 1.882              | 1  | .170                     |
| N of Valid Cases                | 60                 |    |                          |

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 7.25.

## gender \* opinion Crosstabulation

|        |        |                  | opinion |        |            | Total  |
|--------|--------|------------------|---------|--------|------------|--------|
|        |        |                  | yes     | now    | no opinion |        |
| gender | Male   | Count            | 10      | 10     | 9          | 29     |
|        |        | Expected Count   | 12.6    | 9.2    | 7.3        | 29.0   |
|        |        | % within gender  | 34.5%   | 34.5%  | 31.0%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 38.5%   | 52.6%  | 60.0%      | 48.3%  |
|        |        | % of Total       | 16.7%   | 16.7%  | 15.0%      | 48.3%  |
|        | female | Count            | 16      | 9      | 6          | 31     |
|        |        | Expected Count   | 13.4    | 9.8    | 7.8        | 31.0   |
|        |        | % within gender  | 51.6%   | 29.0%  | 19.4%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 61.5%   | 47.4%  | 40.0%      | 51.7%  |
|        |        | % of Total       | 26.7%   | 15.0%  | 10.0%      | 51.7%  |
| Total  |        | Count            | 26      | 19     | 15         | 60     |
|        |        | Expected Count   | 26.0    | 19.0   | 15.0       | 60.0   |
|        |        | % within gender  | 43.3%   | 31.7%  | 25.0%      | 100.0% |
|        |        | % within opinion | 100.0%  | 100.0% | 100.0%     | 100.0% |
|        |        | % of Total       | 43.3%   | 31.7%  | 25.0%      | 100.0% |

2) להלן פלט על סמך סקר שנעשה בקרב סטודנטים, בסקר נשאלו הסטודנטים על המוזיקה אותה הם מעדיפים וצורת הבילוי המועדפת עליהם.

Crosstab

Count

|        |       | בילוי |       |        | Total |
|--------|-------|-------|-------|--------|-------|
|        |       | קריאה | ספורט | מועדון |       |
| מוזיקה | רוק   | 0     | 0     | 11     | 11    |
|        | פופ   | 1     | 6     | 8      | 15    |
|        | קלאסי | 5     | 6     | 9      | 20    |
| Total  |       | 6     | 12    | 28     | 46    |

Chi-Square Tests

|                    | Value               | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|--------------------|---------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square | 11.929 <sup>a</sup> | ?  | .018                  |
| N of Valid Cases   | 46                  |    |                       |

a. 5 cells (55.6%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 1.43.

- א. בין אלו משתנים נבדק הקשר? כמה קטגוריות לכל משתנה?
- ב. האם התנאים של המודל מתקיימים?
- ג. מה מספר דרגות החופש במבחן הני"ל?
- ד. מה ההשערות של המבחן?

- 3) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות. הפלטים מצורפים.
- א. השלימו את שלושת המספרים החסרים בטבלה (היכן שיש סימני שאלה).
- ב. מה ערכו של חי בריבוע הסטטיסטי.
- ג. תנו הערכה למובהקות התוצאה לבדיקת הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות.

Crosstabulation רמת\_הכנסה \* צרכן עגבניות

|                            |                       | צרכן עגבניות |           | Total  |
|----------------------------|-----------------------|--------------|-----------|--------|
|                            |                       | אורגני       | לא אורגני |        |
| הרבה מתחת לממוצע רמת_הכנסה | Count                 | 17           | 42        | 59     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 28.8%        | ?         | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 13.6%        | 33.6%     | 23.6%  |
| מתחת לממוצע                | Count                 | 27           | 22        | 49     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 55.1%        | 44.9%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | ?            | 17.6%     | 19.6%  |
| ממוצע                      | Count                 | 31           | 29        | 60     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 51.7%        | 48.3%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 24.8%        | 23.2%     | 24.0%  |
| מעל הממוצע                 | Count                 | 44           | 26        | 70     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 62.9%        | 37.1%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 35.2%        | 20.8%     | 28.0%  |
| הרבה מעל הממוצע            | Count                 | ?            | 6         | 12     |
|                            | % within רמת_הכנסה    | 50.0%        | 50.0%     | 100.0% |
|                            | % within צרכן עגבניות | 4.8%         | 4.8%      | 4.8%   |
| Total                      | Count                 | 125          | 125       | 250    |

- 4) חוקר בדק את הקשר בין צבע השיער לבין צבע העיניים בעזרת מבחן חי בריבוע בקרב 52 נבדקים. תוצאות המבחן מוצגות בטבלה. בנוסף ידוע כי סטטיסטי המבחן שהתקבל מעיבוד הנתונים הוא 8.08.
- מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 1%?
  - מה ערכו של E עבור עיניים כחולות וצבע שיער כהה.
  - מה יהיה בקירוב ערכו של מקדם המתאם של קרמר?
  - מהי פרופורציית בעלי צבע השיער הבהיר מקרב בעלי העיניים הירוקות?
- להלן הפלט:

Crosstabulation צבע עיניים \* צבע שיער

|            |      | צבע שיער   |        | Total  |        |
|------------|------|------------|--------|--------|--------|
|            |      | כהה        | בהיר   |        |        |
| צבע עיניים | כחול | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 50.0%  | 50.0%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 21.6%  | 53.3%  | 30.8%  |
|            |      | % of Total | 15.4%  | 15.4%  | 30.8%  |
|            | חום  | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 83.3%  | 16.7%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 27.0%  | 13.3%  | 23.1%  |
|            |      | % of Total | 19.2%  | 3.8%   | 23.1%  |
|            | ירוק | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 79.2%  | 20.8%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 51.4%  | 33.3%  | 46.2%  |
|            |      | % of Total | 36.5%  | 9.6%   | 46.2%  |
| Total      |      | Count      |        |        |        |
|            |      | % within   | 71.2%  | 28.8%  | 100.0% |
|            |      | % within   | 100.0% | 100.0% | 100.0% |
|            |      | % of Total | 71.2%  | 28.8%  | 100.0% |

- 5) במחקר מסוים רצו לבדוק האם יש קשר בין המגדר להוצאה על לבוש במשך שנה. דגמו באופן מקרי גברים ונשים ובדקו את רמת ההוצאה שלהם על לבוש בשנה האחרונה. חוקר א' בדק האם קיים הבדל בתוחלות ההוצאה בין גברים לנשים. חוקר ב' קיבץ את ההוצאה לקטגוריות ובאופן הזה בדק האם קיים הבדל בהתפלגות ההוצאה בין גברים לנשים. הקטגוריות חולקו לשלוש קבוצות הוצאה.
- א. איזה פלט מתאים לאיזה אחד מהחוקרים? נמקו.
- ב. מה מסקנתו של חוקר א'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ותנו מסקנה במונחי המשתנים).
- ג. איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר א'? נסחו את הטעות במונחי השאלה.
- ד. מהי מסקנתו של חוקר ב'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ורשמו מסקנה במונחי המשתנים).
- ה. איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר ב'? נסחו זאת במונחי השאלה.
- ו. כיצד ניתן ליישב את מסקנות שני החוקרים?

להלן פלט ראשון:

## T-Test

## Group Statistics

| gender         | N  | Mean   | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------------|----|--------|----------------|-----------------|
| female         | 40 | 2.9000 | 1.15025        | .18187          |
| male           | 40 | 2.6000 | 2.52982        | .40000          |
| dimensio<br>n1 |    |        |                |                 |

## Independent Samples Test

| Independent Samples Test |                             |                                         |      |                              |                 |                 |                       |        |                                           |         |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------|------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|--------|-------------------------------------------|---------|
|                          |                             | Levene's Test for Equality of Variances |      | t-test for Equality of Means |                 |                 |                       |        |                                           |         |
|                          |                             |                                         |      |                              |                 |                 |                       |        | 95% Confidence Interval of the Difference |         |
|                          |                             |                                         |      |                              |                 |                 |                       |        | Lower                                     | Upper   |
|                          | F                           | Sig.                                    | t    | df                           | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference |        |                                           |         |
| expose                   | Equal variances assumed     | 16.805                                  | .000 | .683                         | 78              | .497            | .30000                | .43941 | -.57479                                   | 1.17479 |
|                          | Equal variances not assumed |                                         |      | .683                         | 54.464          | .498            | .30000                | .43941 | -.58078                                   | 1.18078 |

להלן פלט שני:

**Crosstabs****Case Processing Summary**

|                   | Cases |         |         |         |       |         |
|-------------------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|
|                   | Valid |         | Missing |         | Total |         |
|                   | N     | Percent | N       | Percent | N     | Percent |
| gender * category | 80    | 100.0%  | 0       | .0%     | 80    | 100.0%  |

**gender \* category Crosstabulation**

|        |        |                   | category |        |        | Total  |
|--------|--------|-------------------|----------|--------|--------|--------|
|        |        |                   | a        | b      | c      |        |
| gender | Female | Count             | 2        | 30     | 8      | 40     |
|        |        | Expected Count    | 11.0     | 21.0   | 8.0    | 40.0   |
|        |        | % within gender   | 5.0%     | 75.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 9.1%     | 71.4%  | 50.0%  | 50.0%  |
|        | Male   | Count             | 20       | 12     | 8      | 40     |
|        |        | Expected Count    | 11.0     | 21.0   | 8.0    | 40.0   |
|        |        | % within gender   | 50.0%    | 30.0%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 90.9%    | 28.6%  | 50.0%  | 50.0%  |
| Total  |        | Count             | 22       | 42     | 16     | 80     |
|        |        | Expected Count    | 22.0     | 42.0   | 16.0   | 80.0   |
|        |        | % within gender   | 27.5%    | 52.5%  | 20.0%  | 100.0% |
|        |        | % within category | 100.0%   | 100.0% | 100.0% | 100.0% |

**Chi-Square Tests**

|                    | Value               | df | Asymp. Sig. (2-sided) |
|--------------------|---------------------|----|-----------------------|
| Pearson Chi-Square | 22.442 <sup>a</sup> | 2  | .000                  |
| Likelihood Ratio   | 25.064              | 2  | .000                  |
| N of Valid Cases   | 80                  |    |                       |

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8.00.

## תשובות סופיות

- (1) א. 1.973      ב. קטן .      ג. לא נדחה  $H_0$  .      ד. 34.5%      ה. 38.5% .
- (2) א. בילוי מועדף ומוזיקה מועדפת עם 3 קטגוריות לכל משתנה.      ב. לא      ג. 4 .      ד.  $H_0$  אין תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.       $H_1$  יש תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.
- (3) א. 6, 21.6%, 71.2%      ב. 15.8      ג. קטן מ-0.005 .
- (4) א. לא נדחה  $H_0$  .      ב. 11.4      ג. 0.394      ד. 20.8% .
- (5) א. פלא א' - חוקר א', פלא ב' - חוקר ב' .      ב. נקבל את  $H_0$  .      ג. טעות מסוג שני- הכרענו שאין הבדל בין גברים לנשים למרות שיש במציאות הבדל.      ד. נקבל את  $H_1$  .      ה. טעות מסוג ראשון- הכרענו שיש קשר בין מין להוצאה למרות שבמציאות אין קשר.      ו. כל חוקר פעל בשיטה סטטיסטית שונה ובמצב כזה יתכן מסקנות סותרות.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 21 - מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד (יחידה 12)

תוכן העניינים

1. מבחן הבינום ..... 157
2. חישוב רמת מובהקות ועוצמת מבחן במבחן הבינום ..... 162

## מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

### מבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר  $p$ . הפרמטר  $p$  מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצלחה. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן:

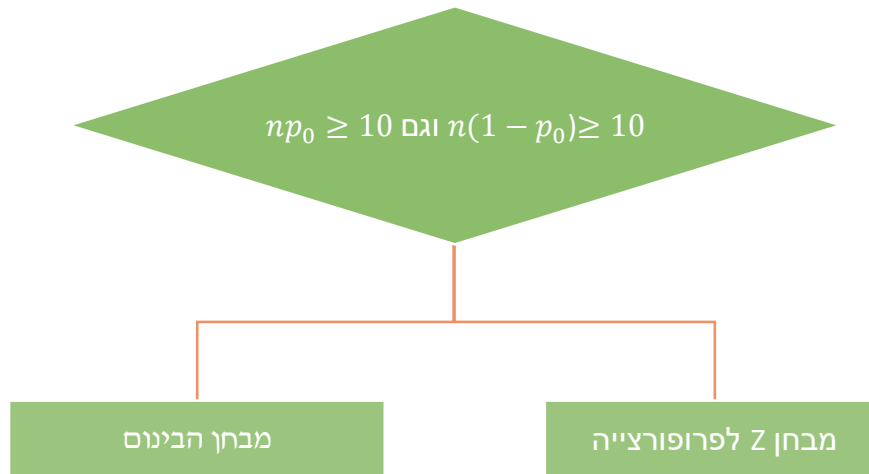
|                 |                 |                    |                   |
|-----------------|-----------------|--------------------|-------------------|
| $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$    | השערת האפס:       |
| $H_1 : p > p_0$ | $H_1 : p < p_0$ | $H_1 : p \neq p_0$ | השערה אלטרנטיבית: |

### דוגמה:

במדינה אירופאית התנהל לפני 4 שנים משאל עם בדבר לגליזציה של הקנאביס. במשאל העם 40% מהאזרחים היו בעד לגליזציה של הקנאביס ובשל כך חוק הלגליזציה לא עבר באותה המדינה. במדגם שנעשה כיום בו השתתפו 15 אזרחים מהמדינה 10 ענו שהם תומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה. פרלמנטר מהמדינה חוקר האם כיום אחוז התומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה עלה יחסית לאחוז שהתקבל במשאל העם במדינה לפני 4 שנים. רשמו את השערות המחקר.

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל  $n$  ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב-  $Y$ . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש:  $Y \sim B(n, p)$ .

מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטרים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



#### דוגמה:

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן הבינום היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם  $\alpha \geq PV$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס. כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

כאשר התוחלת של ההתפלגות הבינומית היא:  $E(Y) = np$ . בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

#### דוגמה:

חשבו את מובהקות התוצאה. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

## טבלת התפלגות בינומית מצטברת

| $n$ | $x$ | $p$    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     |     | 0.10   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   |
| 5   | 0   | 0.5905 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 | 0.0102 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.9185 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.3370 | 0.1875 | 0.0870 | 0.0308 | 0.0067 | 0.0005 |
|     | 2   | 0.9914 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.6826 | 0.5000 | 0.3174 | 0.1631 | 0.0579 | 0.0086 |
|     | 3   | 0.9995 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9130 | 0.8125 | 0.6630 | 0.4718 | 0.2627 | 0.0815 |
|     | 4   | 1.0000 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9898 | 0.9688 | 0.9222 | 0.8319 | 0.6723 | 0.4095 |
|     | 5   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 10  | 0   | 0.3487 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0060 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.7361 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0464 | 0.0107 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.9298 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.1673 | 0.0547 | 0.0123 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.9872 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.3823 | 0.1719 | 0.0548 | 0.0106 | 0.0009 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9984 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.6331 | 0.3770 | 0.1662 | 0.0474 | 0.0064 | 0.0002 |
|     | 5   | 0.9999 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.8338 | 0.6230 | 0.3669 | 0.1503 | 0.0328 | 0.0016 |
|     | 6   | 1.0000 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9452 | 0.8281 | 0.6177 | 0.3504 | 0.1209 | 0.0128 |
|     | 7   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9877 | 0.9453 | 0.8327 | 0.6172 | 0.3222 | 0.0702 |
|     | 8   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9893 | 0.9536 | 0.8507 | 0.6242 | 0.2639 |
|     | 9   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9940 | 0.9718 | 0.8926 | 0.6513 |
|     | 10  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 15  | 0   | 0.2059 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.5490 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0052 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.8159 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0271 | 0.0037 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.9444 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.0905 | 0.0176 | 0.0019 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9873 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.2173 | 0.0592 | 0.0094 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 5   | 0.9978 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.4032 | 0.1509 | 0.0338 | 0.0037 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 6   | 0.9997 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.6098 | 0.3036 | 0.0951 | 0.0152 | 0.0008 | 0.0000 |
|     | 7   | 1.0000 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.7869 | 0.5000 | 0.2131 | 0.0500 | 0.0042 | 0.0000 |
|     | 8   | 1.0000 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9050 | 0.6964 | 0.3902 | 0.1311 | 0.0181 | 0.0003 |
|     | 9   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9662 | 0.8491 | 0.5968 | 0.2784 | 0.0611 | 0.0023 |
|     | 10  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9907 | 0.9408 | 0.7827 | 0.4845 | 0.1642 | 0.0127 |
|     | 11  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9981 | 0.9824 | 0.9095 | 0.7031 | 0.3518 | 0.0556 |
|     | 12  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9963 | 0.9729 | 0.8732 | 0.6020 | 0.1841 |
|     | 13  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9948 | 0.9647 | 0.8329 | 0.4510 |
|     | 14  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9953 | 0.9648 | 0.7941 |
|     | 15  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20  | 0   | 0.1216 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.3917 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.6769 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0036 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.8670 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0160 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9568 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.0510 | 0.0059 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 5   | 0.9887 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.1256 | 0.0207 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 6   | 0.9976 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.2500 | 0.0577 | 0.0065 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 7   | 0.9996 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.4159 | 0.1316 | 0.0210 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 8   | 0.9999 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.5956 | 0.2517 | 0.0565 | 0.0051 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 9   | 1.0000 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.7553 | 0.4119 | 0.1275 | 0.0171 | 0.0006 | 0.0000 |
|     | 10  | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.8725 | 0.5881 | 0.2447 | 0.0480 | 0.0026 | 0.0000 |
|     | 11  | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9435 | 0.7483 | 0.4044 | 0.1133 | 0.0100 | 0.0001 |
|     | 12  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9790 | 0.8684 | 0.5841 | 0.2277 | 0.0321 | 0.0004 |
|     | 13  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9935 | 0.9423 | 0.7500 | 0.3920 | 0.0867 | 0.0024 |
|     | 14  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9984 | 0.9793 | 0.8744 | 0.5836 | 0.1958 | 0.0113 |
|     | 15  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9941 | 0.9490 | 0.7625 | 0.3704 | 0.0432 |
|     | 16  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9987 | 0.9840 | 0.8929 | 0.5886 | 0.1330 |
|     | 17  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9964 | 0.9645 | 0.7939 | 0.3231 |
|     | 18  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9924 | 0.9308 | 0.6083 |
|     | 19  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9885 | 0.8784 |
|     | 20  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## שאלות

- (1) אחוז האנשים שאוכלים גלילות בחודשי החורף הינו 30%, קיים חשש בקרב מיצרי הגלילות כי השנה פחת אחוז אוכלי הגלילות בחודשי החורף. לשם כך נדגמו 12 אנשים אשר מתוכם 2 טענו שהם אוכלים גלילה בחודשי החורף.
- א. רשמו את השערות המוצגות בשאלה זו וציינו מהו המבחן הסטטיסטי המתאים.
- ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?
- ג. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות גדולה יותר מ- 10%?
- (2) מטבע הוטל 15 פעמים במטרה לבדוק האם המטבע סימטרי.
- בסך הכול התקבלו בהטלות 3 פעמים עץ.
- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם המטבע הוא סימטרי.
- ב. עבור אילו רמות מובהקות נוכל להסיק שהמטבע אינו סימטרי?
- (3) אחוז המובטלים במשק לפני 5 שנים היה 10%. מעוניינים לבדוק האם כיום אחוז המובטלים קטן לעומת זה שהיה לפני 5 שנים. במדגם של 20 אנשים התקבל מובטל אחד ויחיד.
- א. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוסק שכיום אחוז האבטלה נמוך מאשר לפני 5 שנים?
- ב. מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?
- (4) נניח ש 40% מהאוכלוסייה מכירה את המוצרים של חברת "רמקס". החברה מתכננת לצאת בקמפיין פרסום שמטרתו להעלות את המודעות לקיומם של המוצרים של החברה באוכלוסייה. בזמן הקמפיין נדגמו 20 אנשים אקראיים מתוכם 70% טענו שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס".
- א. מהי מובהקות התוצאה?
- ב. כיצד מובהקות התוצאה הייתה משתנה אם במדגם 80% היו טוענים שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס"?

- (5) חברה לתוספי מזון דיווחה שנטילת מולטי ויטמין מקטינה את הסיכוי לחלות במחלות חורף במהלך החורף. לפי משרד הבריאות 70% מהאוכלוסייה חולים במחלות חורף במהלך החורף. במחקר השתתפו 20 אנשים אשר נטלו במהלך שנה מולטי ויטמין. במהלך החורף נמצא ש 12 מתוכם חלו במחלות חורף במהלך החורף. את המחקר יש לבצע ברמת מובהקות של 5%. נסמן ב: PV את מובהקות התוצאה של המחקר.
- א. האם המשפט הבא נכון?  
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של 5% ניתן להגיד ש-70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".
- ב. האם המשפט הבא נכון?  
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של PV 70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".
- ג. חשבו את PV.

### תשובות סופיות

- |                        |                       |                  |
|------------------------|-----------------------|------------------|
| (1) א. מבחן הבינום.    | ב. לא נדחה את $H_0$ . | ג. לא ניתן לדעת. |
|                        |                       |                  |
|                        |                       |                  |
|                        |                       |                  |
|                        |                       |                  |
|                        |                       |                  |
| (2) א. נדחה את $H_0$ . | ב. לפחות 0.0352       |                  |
| (3) א. 0.3917          | ב. לא נדחה את $H_0$ . |                  |
| (4) א. 0.0065          | ב. תקטן.              |                  |
| (5) א. לא נכון.        | ב. לא נכון.           | ג. 0.2277.       |

## חישוב הסתברויות לטעויות ועוצמת המבחן במבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר  $p$ . הפרמטר  $p$  מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצלחה. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן:

|                 |                 |                    |                   |
|-----------------|-----------------|--------------------|-------------------|
| $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$ | $H_0 : p = p_0$    | השערת האפס:       |
| $H_1 : p > p_0$ | $H_1 : p < p_0$ | $H_1 : p \neq p_0$ | השערה אלטרנטיבית: |

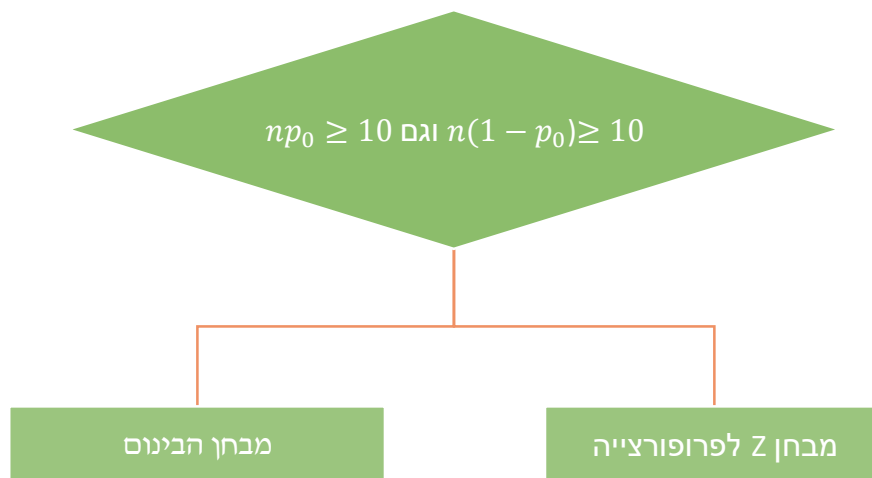
### דוגמה:

בחברת פז 40% מעובדי החברה מאחרים לעבודה. מנכ"ל החברה מעוניין לצמצם את אחוז העובדים המאחרים בחברה. לצורך כך, בוחר המנכ"ל מחלקה אקראית במטרה לבדוק עליה שיטת תמריצים שאמורה לצמצם את אחוז המאחרים. במחלקה שנבחרה 10 עובדים והופעלה עליה שיטת התמריצים הנבדקת. הוסכם שאם מספר המאחרים במחלקה יהיה לכל היותר עובד אחד לאחר הפעלת שיטת התמריצים, תופעל שיטת התמריצים על כלל החברה.

• מהן השערות המחקר?

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל  $n$  ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- $Y$ . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש:  $Y \sim B(n, p)$ .

מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטריים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



### דוגמה:

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

נזכיר את המצבים האפשריים בבדיקת השערות:

| מציאות | הכרעה |             |             |
|--------|-------|-------------|-------------|
|        |       | H0          | H1          |
|        | H0    | אין טעות    | טעות מסוג 1 |
|        | H1    | טעות מסוג 2 | אין טעות    |

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):**

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:**

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

**רמת בטחון:**

$$1-\alpha = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

**עוצמה:**

$$\pi = 1-\beta = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

**דוגמה:**

- מהי רמת המובהקות של המחקר המוצע?
- אם בשיטת התמריצים, הסיכוי לאחר הוא 10%, מה ההסתברות שהמחקר יגלה זאת?

טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור  $n$  - ים שונים

| $n$ | $x$ | $p$    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     |     | 0.10   | 0.20   | 0.25   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   |
| 5   | 0   | 0.5905 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.0778 | 0.0312 | 0.0102 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.9185 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.3370 | 0.1875 | 0.0870 | 0.0308 | 0.0067 | 0.0005 |
|     | 2   | 0.9914 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.6826 | 0.5000 | 0.3174 | 0.1631 | 0.0579 | 0.0086 |
|     | 3   | 0.9995 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9130 | 0.8125 | 0.6630 | 0.4718 | 0.2627 | 0.0815 |
|     | 4   | 1.0000 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9898 | 0.9688 | 0.9222 | 0.8319 | 0.6723 | 0.4095 |
| 10  | 5   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
|     | 0   | 0.3487 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0060 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.7361 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0464 | 0.0107 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.9298 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.1673 | 0.0547 | 0.0123 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.9872 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.3823 | 0.1719 | 0.0548 | 0.0106 | 0.0009 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9984 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.6331 | 0.3770 | 0.1662 | 0.0474 | 0.0064 | 0.0002 |
|     | 5   | 0.9999 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.8338 | 0.6230 | 0.3669 | 0.1503 | 0.0328 | 0.0016 |
|     | 6   | 1.0000 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9452 | 0.8281 | 0.6177 | 0.3504 | 0.1209 | 0.0128 |
|     | 7   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9877 | 0.9453 | 0.8327 | 0.6172 | 0.3222 | 0.0702 |
|     | 8   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9893 | 0.9536 | 0.8507 | 0.6242 | 0.2639 |
|     | 9   | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9940 | 0.9718 | 0.8926 | 0.6513 |
|     | 10  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 15  | 0   | 0.2059 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.5490 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0052 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.8159 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0271 | 0.0037 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.9444 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.0905 | 0.0176 | 0.0019 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9873 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.2173 | 0.0592 | 0.0094 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 5   | 0.9978 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.4032 | 0.1509 | 0.0338 | 0.0037 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 6   | 0.9997 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.6098 | 0.3036 | 0.0951 | 0.0152 | 0.0008 | 0.0000 |
|     | 7   | 1.0000 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.7869 | 0.5000 | 0.2131 | 0.0500 | 0.0042 | 0.0000 |
|     | 8   | 1.0000 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9050 | 0.6964 | 0.3902 | 0.1311 | 0.0181 | 0.0003 |
|     | 9   | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9662 | 0.8491 | 0.5968 | 0.2784 | 0.0611 | 0.0023 |
|     | 10  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9907 | 0.9408 | 0.7827 | 0.4845 | 0.1642 | 0.0127 |
|     | 11  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9981 | 0.9824 | 0.9095 | 0.7031 | 0.3518 | 0.0556 |
|     | 12  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9963 | 0.9729 | 0.8732 | 0.6020 | 0.1841 |
|     | 13  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9948 | 0.9647 | 0.8329 | 0.4510 |
|     | 14  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9953 | 0.9648 | 0.7941 |
|     | 15  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20  | 0   | 0.1216 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 1   | 0.3917 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 2   | 0.6769 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0036 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 3   | 0.8670 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0160 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 4   | 0.9568 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.0510 | 0.0059 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 5   | 0.9887 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.1256 | 0.0207 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 6   | 0.9976 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.2500 | 0.0577 | 0.0065 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 7   | 0.9996 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.4159 | 0.1316 | 0.0210 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 |
|     | 8   | 0.9999 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.5956 | 0.2517 | 0.0565 | 0.0051 | 0.0001 | 0.0000 |
|     | 9   | 1.0000 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.7553 | 0.4119 | 0.1275 | 0.0171 | 0.0006 | 0.0000 |
|     | 10  | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.8725 | 0.5881 | 0.2447 | 0.0480 | 0.0026 | 0.0000 |
|     | 11  | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9435 | 0.7483 | 0.4044 | 0.1133 | 0.0100 | 0.0001 |
|     | 12  | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9790 | 0.8684 | 0.5841 | 0.2277 | 0.0321 | 0.0004 |
|     | 13  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9935 | 0.9423 | 0.7500 | 0.3920 | 0.0867 | 0.0024 |
|     | 14  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9984 | 0.9793 | 0.8744 | 0.5836 | 0.1958 | 0.0113 |
|     | 15  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9941 | 0.9490 | 0.7625 | 0.3704 | 0.0432 |
|     | 16  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9987 | 0.9840 | 0.8929 | 0.5886 | 0.1330 |
|     | 17  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9964 | 0.9645 | 0.7939 | 0.3231 |
|     | 18  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9924 | 0.9308 | 0.6083 |
|     | 19  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9885 | 0.8784 |
|     | 20  | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם במוסד לימוד מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 תלמידים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.
- א. מהי רמת המובהקות במבחן המוצע?
  - ב. מהי העוצמה במבחן המוצע בהנחה ובמוסד 30% בנים?
  - ג. כיצד התשובות לסעיפים הקודמים ישתנו אם ישנו את המבחן כך שיוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 3 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות? הסבירו ללא חישוב מחדש.
- (2) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 70%. מעוניינים לבדוק האם שיטת משחק מסוימת מעלה את סיכויי הזכייה לצורך כך מחליטים לשחק את המשחק 20 פעמים תוך שימוש בשיטה הנבדקת. מחליטים שאם מספר הזכיות במדגם יהיה לפחות 18 נקבל את הטענה שאכן השיטה עובדת והיא מעלה את סיכויי ההצלחה להיות 90%.
- מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון ומה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני במבחן שהוצע?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא סימטרי הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל, יוחלט שהמטבע הוגן, אחרת נחליט שהמטבע לא הוגן.
- א. רשמו את השערות המחקר.
  - ב. מה ההסתברות להחליט שהמטבע אינו סימטרי למרות שבפועל המטבע הינו סימטרי?
  - ג. מהי ההסתברות שאם במטבע הסיכוי לעץ הוא 20%, אכן נגלה זאת?
  - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם הסיכוי לעץ במטבע אף נמוך מ-20%?
- (4) נתון ש- $X \sim B(15, p)$  ההשערות של המחקר הן:  $H_0: p = 0.3$   $H_1: p > 0.3$ .
- כלל ההכרעה הוא: נדחה את השערת האפס אם  $X \geq 8$ .
- א. מהי רמת המובהקות במחקר זה?
  - ב. מה יקרה לרמת המובהקות אם כלל ההכרעה יהיה: נדחה את השערת האפס אם  $X \geq 7$ ? הסבירו ללא חישוב.
  - ג. מה יקרה לרמת המובהקות אם השערות המחקר יהיו  $H_0: p = 0.3$   $H_1: p \neq 0.3$  אבל כלל ההכרעה לא ישתנה? הסבירו ללא חישוב.

### תשובות סופיות

- (1) א. 0.0547      ב. 0.3828      ג. תגדלנה.
- (2)  $\beta = 0.3231$        $\alpha = 0.0355$
- (3) א.  $H_0 : p = 0.5$   
 $H_1 : p \neq 0.5$       ב. 0.0078      ג. 0.1678
- ד. העוצמה תגדל.
- (4) א. 0.05      ב. תגדל.      ג. לא תשתנה.

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 22 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים (יחידה 12)

תוכן העניינים

|     |                                            |
|-----|--------------------------------------------|
| 167 | 1. מבחן הסימן                              |
| 170 | 2. מבחן הסימן - על ידי שימוש בטבלה בינומית |
| 174 | 3. מבחן הסימן - פלטים                      |
| 177 | 4. מבחן ווילקוקסון- פלטים                  |
| 181 | 5. תרגול בזיהוי מבחנים                     |
| 184 | 6. מבחן מקנמר                              |

## מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

### מבחן הסימן – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשמש בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו. מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית. מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

(+) – אם מצב X גבוה ממצב Y.

(-) – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים

האפקטיביים (השוניים מאפס) ב-  $n^*$ .

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי ( $p+$ ) שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי ( $p-$ ).

### השערות המבחן:

$$\begin{array}{ll} H_0 : P_- = 0.5 & \text{או} & H_0 : P_+ = 0.5 \\ H_1 : P_- \neq, <, > 0.5 & & H_1 : P_+ \neq, <, > 0.5 \end{array}$$

נסמן ב  $n(+)$  או ב  $S_+$  את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב  $n(-)$  או ב  $S_-$  את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (-).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס:  $n(+), n(-) \sim B(n^*, 0.5)$ .

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם

$PV \leq \alpha$  נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת: בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|-----------|------------|------|
| אדוויל    | 1.2        | 1.5  |
| אקמול     | 2.6        | 2.6  |
| אופטלגין  | 0.9        | 1.4  |
| פוסטינור  | 3.5        | 3.2  |
| סטרפסיל   | 1.1        | 1.4  |
| נורפן     | 1.7        | 1.8  |
| לורסטין   | 0.8        | 1.1  |
| קולדקס    | 1.5        | 2    |
| אלרגיז    | 2          | 2.8  |
| נוסידקס   | 2          | 2.5  |
| קורמיר    | 3          | 3.3  |

## שאלות

- (1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| א | 62 | 74 | 68 | 94 | 82 | 67 | 65 | 84 | 78 | 80 |
| ב | 70 | 80 | 70 | 90 | 77 | 67 | 80 | 86 | 79 | 82 |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.
- ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?
- (2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?
- (3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב נמדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

- (4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.
- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?
- ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו.
- מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

- (5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א.  $n(+) + n(-) = n^*$

ב.  $n(+) + n(-) = n$

ג.  $n(+) = n(-)$

ד.  $n(+) - n(-) = n^*$

### תשובות סופיות

- (1) א. לא נדחה את  $H_0$ . ב. לא תשתנה המסקנה.

- (2) נדחה את  $H_0$ .

- (3) נדחה את  $H_0$ .

- (4) א. 0.172. ב. תקטן.

- (5) א'.

## מבחן הסימן (שימוש בטבלה של התפלגות בינומית) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשמש שם בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו. מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי - מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

(+) – אם מצב X גבוה ממצב Y.

(-) – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים

האפקטיביים (השוניים מאפס) ב-  $n^*$ .

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי ( $p+$ ) שווה לסיכוי לקבל

הפרש שלילי ( $p-$ ).

### השערות המבחן:

$$\begin{array}{ll} H_0: P_- = 0.5 & \text{או} & H_0: P_+ = 0.5 \\ H_1: P_- \neq, <, > 0.5 & & H_1: P_+ \neq, <, > 0.5 \end{array}$$

נסמן ב  $n(+)$  או ב  $S_+$  את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב  $n(-)$  או ב  $S_-$  את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (-).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס:  $n(+), n(-) \sim B(n^*, 0.5)$ .

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם

$PV \leq \alpha$  נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

במקום להציב בפונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית.

נשתמש בטבלה של פונקציית ההסתברות המצטברת של ההתפלגות הבינומית עבור סיכוי של 0.5 להצלחה.

באמצעות הטבלה הבאה נוכל לחשב את PV.

טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור  $p=0.5$ 

| $\begin{matrix} X \\ n \end{matrix}$ | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 5                                    | 031 | 188 | 500 | 812 | 969 | †   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 6                                    | 016 | 109 | 344 | 656 | 891 | 984 | †   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 7                                    | 008 | 062 | 227 | 500 | 773 | 938 | 992 | †   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 8                                    | 004 | 035 | 145 | 363 | 637 | 855 | 965 | 996 | †   |     |     |     |     |     |     |     |
| 9                                    | 002 | 020 | 090 | 254 | 500 | 746 | 910 | 980 | 998 | †   |     |     |     |     |     |     |
| 10                                   | 001 | 011 | 055 | 172 | 377 | 623 | 828 | 945 | 989 | 999 | †   |     |     |     |     |     |
| 11                                   |     | 006 | 033 | 113 | 274 | 500 | 726 | 887 | 967 | 994 | †   | †   |     |     |     |     |
| 12                                   |     | 003 | 019 | 073 | 194 | 387 | 613 | 806 | 927 | 981 | 997 | †   | †   |     |     |     |
| 13                                   |     | 002 | 011 | 046 | 133 | 291 | 500 | 709 | 867 | 954 | 989 | 998 | †   | †   |     |     |
| 14                                   |     | 001 | 006 | 029 | 090 | 212 | 395 | 605 | 788 | 910 | 971 | 991 | 999 | †   | †   |     |
| 15                                   |     |     | 004 | 018 | 059 | 151 | 304 | 500 | 696 | 849 | 941 | 982 | 996 | †   | †   | †   |
| 16                                   |     |     | 002 | 011 | 038 | 105 | 227 | 402 | 598 | 773 | 895 | 962 | 989 | 998 | †   | †   |
| 17                                   |     |     | 001 | 006 | 025 | 072 | 166 | 315 | 500 | 685 | 834 | 928 | 975 | 994 | 999 | †   |
| 18                                   |     |     | 001 | 004 | 015 | 048 | 119 | 240 | 407 | 593 | 760 | 881 | 952 | 985 | 996 | 999 |
| 19                                   |     |     |     | 002 | 010 | 032 | 084 | 180 | 324 | 500 | 676 | 820 | 916 | 968 | 990 | 998 |
| 20                                   |     |     |     | 001 | 006 | 021 | 058 | 132 | 252 | 412 | 588 | 748 | 868 | 942 | 979 | 994 |
| 21                                   |     |     |     | 001 | 004 | 013 | 039 | 095 | 192 | 332 | 500 | 668 | 808 | 905 | 961 | 987 |
| 22                                   |     |     |     |     | 002 | 008 | 026 | 067 | 143 | 262 | 416 | 584 | 738 | 857 | 933 | 974 |
| 23                                   |     |     |     |     | 001 | 005 | 017 | 047 | 105 | 202 | 339 | 500 | 661 | 798 | 895 | 953 |
| 24                                   |     |     |     |     | 001 | 003 | 011 | 032 | 076 | 154 | 271 | 419 | 581 | 729 | 846 | 924 |
| 25                                   |     |     |     |     |     | 002 | 007 | 022 | 054 | 115 | 212 | 345 | 500 | 655 | 788 | 885 |

## דוגמה: (פתרון בהקלטה)

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|-----------|------------|------|
| אדוויל    | 1.2        | 1.5  |
| אקמול     | 2.6        | 2.6  |
| אופטלגין  | 0.9        | 1.4  |
| פוסטינור  | 3.5        | 3.2  |
| סטרפסיל   | 1.1        | 1.4  |
| נורפן     | 1.7        | 1.8  |
| לורסטין   | 0.8        | 1.1  |
| קולדקס    | 1.5        | 2    |
| אלרגיז    | 2          | 2.8  |
| נוסידקס   | 2          | 2.5  |
| קורמיר    | 3          | 3.3  |

## שאלות

- (1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 80 | 78 | 84 | 65 | 67 | 82 | 94 | 68 | 74 | 62 | א |
| 82 | 79 | 86 | 80 | 67 | 77 | 90 | 70 | 80 | 70 | ב |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.
- ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?
- (2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?
- (3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.
- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?
- ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

- (5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א.  $n(+) + n(-) = n^*$

ב.  $n(+) + n(-) = n$

ג.  $n(+) = n(-)$

ד.  $n(+) - n(-) = n^*$

**תשובות סופיות**

- (1) א. לא נדחה  $H_0$ . ב. לא תשתנה המסקנה.
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נדחה  $H_0$ .
- (4) א. 0.172 ב. תקטן.
- (5) א'.

## ניתוח פלטים במבחן הסימן

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בדקו לאנשים את רמת הסוכר בדם בבוקר לעומת רמת הסוכר בלילה, ובצעו את מבחן הסימן. להלן הפלט שהתקבל. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסוכר בלילה גבוה מאשר בבוקר.

### Sign Test

| Frequencies |                                   |    |
|-------------|-----------------------------------|----|
|             |                                   | N  |
| night-day   | Negative Differences <sup>a</sup> | 13 |
|             | Positive Differences <sup>b</sup> | 27 |
|             | Ties <sup>c</sup>                 | 5  |
|             | Total                             | 45 |

a. day > night

b. day < night

c. day = night

| Test Statistics <sup>a</sup> |             |
|------------------------------|-------------|
|                              | day - night |
| Z                            | -2,055      |
| Asymp. Sig. (2-tailed)       | ,040        |

a. Sign Test

## שאלות

- 1) מחקר בדק את רמת שביעות הרצון משירות לקוחות אחרי רפורמה שבוצעה בחברה. להלן תוצאות שהתקבלו כאשר שביעות הרצון הייתה בסקלה מ-1 כלל לא מרוצה ועד 5 מרוצה מאד.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 4 | 1 | 1 | 4 | 5 | 4 | 2 | 5 | 4 | 5 | 4 | 2 | Before |
| 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | After  |

## Sign Test

## Frequencies

|              |                                   | N   |
|--------------|-----------------------------------|-----|
| after-before | Negative Differences <sup>a</sup> | ??? |
|              | Positive Differences <sup>b</sup> | ??? |
|              | Ties <sup>c</sup>                 | ??? |
|              | Total                             | ??? |

a. after &lt; before

b. after &gt; before

c. after = before

Test Statistics<sup>a</sup>

|                       | after-before      |
|-----------------------|-------------------|
| Exact Sig. (2-tailed) | .289 <sup>b</sup> |

- א. השלימו את סימני השאלה שבטבלה.  
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הרפורמה הייתה יעילה.  
 ג. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה אם היו מוסיפים עוד 2 תצפיות שעבורם הפרש שביעות הרצון היה אפס?  
 ד. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה של הפלט אם הינו מוסיפים תצפית כזו:

|        |       |
|--------|-------|
| Before | After |
| 5      | 4     |

(2) להלן פלט של מבחן הסימן:

**Sign Test****Frequencies**

|                            |                                      | N   |
|----------------------------|--------------------------------------|-----|
| time_after-<br>time_before | Negative<br>Differences <sup>a</sup> | 27  |
|                            | Positive<br>Differences <sup>b</sup> | 2   |
|                            | Ties <sup>c</sup>                    | ??? |
|                            | Total                                | 30  |

a. time\_after &lt; time\_before

b. time\_after &gt; time\_before

c. time\_after = time\_before

**Test Statistics<sup>a</sup>**

|                            | time_after-<br>time_before |
|----------------------------|----------------------------|
| Z                          | -4.457                     |
| Asymp. Sig. (2-<br>tailed) | .000                       |

a. Sign Test

- א. השלימו את החלק החסר שמסומן בסימן שאלה.  
 ב. מה הייתה מובהקות התוצאה אם ההשערה הייתה חד צדדית?  
 ג. מה היה קורה למובהקות התוצאה הרשומה בפלט אם תצפית אחת הייתה עוברת מההפרש החיובי להפרש השלילי?

**תשובות סופיות**

- (1) א. 2,6,4,12      ב. לא נדחה את  $H_0$  .  
 ג. לא תשתנה המסקנה      ד. תגדל.  
 (2) א. 1      ב. לא ניתן לדעת.      ג.  $P_V$  ישאר 0.

## ניתוח פלטי SPSS במבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים – רקע

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי  $X$  לערכי  $Y$ . מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן  $t$  למדגם מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר. נראה איך מנתחים פלט של תכנת SPSS במבחן זה על ידי דוגמה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר ברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת :

| שם התרופה | קופת חולים | פארם |
|-----------|------------|------|
| אדוויל    | 1.2        | 1.5  |
| אקמול     | 2.6        | 2.6  |
| אופטלגין  | 0.9        | 1.4  |
| פוסטינור  | 3.5        | 3.2  |
| סטרפסיל   | 1.1        | 1.4  |
| נורפן     | 1.7        | 1.8  |
| לורסטין   | 0.8        | 1.1  |
| קולדקס    | 1.5        | 2    |
| אלרגיז    | 2          | 2.8  |
| נוסידקס   | 2          | 2.5  |
| קורמיר    | 3          | 3.3  |

להלן פלט שמתקבל מהרצת מבחן ווילקוקסון על הנתונים הללו:

### Wilcoxon Signed Ranks Test

|           |                | Ranks          |           |              |
|-----------|----------------|----------------|-----------|--------------|
|           |                | N              | Mean Rank | Sum of Ranks |
| HMO-PHARM | Negative Ranks | 9 <sup>a</sup> | ???       | 51.00        |
|           | Positive Ranks | 1 <sup>b</sup> | 4.00      | 4.00         |
|           | Ties           | 1 <sup>c</sup> |           |              |
|           | Total          | 11             |           |              |

a. HMO < PHARM

b. HMO > PHARM

c. HMO = PHARM

### Test Statistics<sup>a</sup>

|                        | HMO-PHARM           |
|------------------------|---------------------|
| Z                      | -2.434 <sup>b</sup> |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .015                |
| Exact Sig. (2-tailed)  | .014                |
| Exact Sig. (1-tailed)  | .007                |

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on positive ranks.

א. הסבירו מדוע מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים מתאים למקרה זה?

ב. השלם את הערך החסר שמסומן בסימני שאלה בטבלה.

ג. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

## שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן תוצאות הפלט שהתקבל:

## Wilcoxon Signed Ranks Test

| Ranks           |                |                |           |              |
|-----------------|----------------|----------------|-----------|--------------|
|                 |                | N              | Mean Rank | Sum of Ranks |
| STAS2-<br>STAS1 | Negative Ranks | 2 <sup>a</sup> | 6.50      | 13.00        |
|                 | Positive Ranks | 8 <sup>b</sup> | 5.25      | 42.00        |
|                 | Ties           | 0 <sup>c</sup> |           |              |
|                 | Total          | 10             |           |              |

a. STAS2 &lt; STAS1

b. STAS2 &gt; STAS1

c. STAS2 = STAS1

Test Statistics<sup>a</sup>

|                        | STAS2-<br>STAS1     |
|------------------------|---------------------|
| Z                      | -1.483 <sup>b</sup> |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .138                |

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% את הטענה.  
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

(2) מחקר בדק את רמת שביעות הרצון משירות לקוחות אחרי רפורמה שבוצעה בחברה. להלן תוצאות שהתקבלו כאשר שביעות הרצון הייתה בסקלה מ-1

כלל לא מרוצה ועד 5 מרוצה מאד.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| 4 | 1 | 1 | 4 | 5 | 4 | 2 | 5 | 4 | 5 | 4 | 2 | Before |
| 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | After  |

### Wilcoxon Signed Ranks Test

|              |                | Ranks  |           |              |
|--------------|----------------|--------|-----------|--------------|
|              |                | N      | Mean Rank | Sum of Ranks |
| after-before | Negative Ranks | ?????a | 3.25      | ??????       |
|              | Positive Ranks | ?????b | 4.92      | ??????       |
|              | Ties           | ?????c |           |              |
|              | Total          | 12     |           |              |

a. after < before

b. after > before

c. after = before

### Test Statistics<sup>a</sup>

|                        | after-before |
|------------------------|--------------|
| Z                      | -1.622       |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | .105         |

א. השלימו את הערכים עם סימני השאלה אשר בטבלה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הרפורמה הייתה יעילה.

ג. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה אם היו מוסיפים עוד 2 תצפיות שעבורן הפרש שביעות הרצון היה אפס?

ד. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה של הפלט אם הינו מוסיפים תצפית כזו:

| before | after |
|--------|-------|
| 5      | 4     |

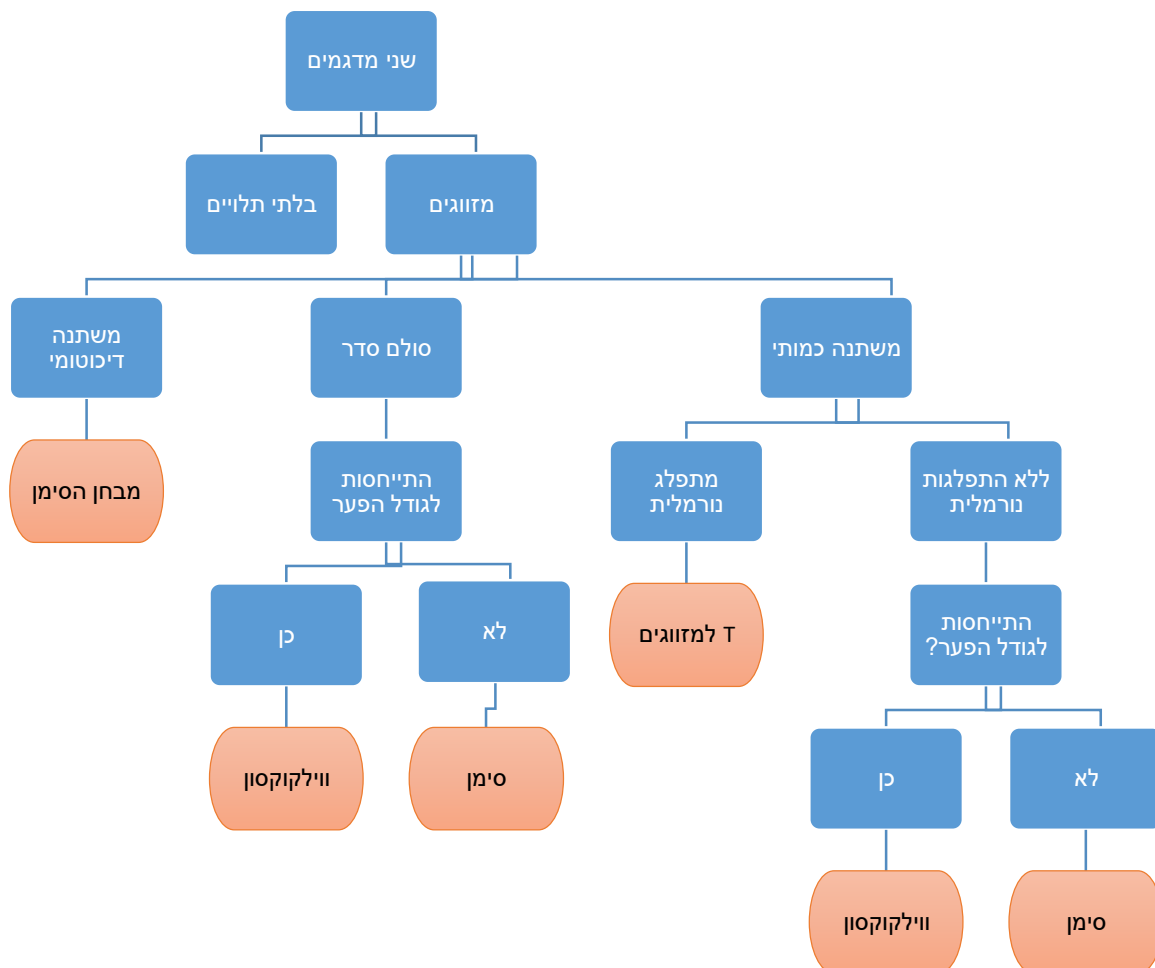
### תשובות סופיות

(1) א. לא נדחה  $H_0$ . ב. לא תשתנה המסקנה.

(2) א. 2, 6, 4, 6.5, 29.5 ב. לא נדחה  $H_0$ .

ג. לא משתנה. ד. גדלה.

## זיהוי מבחנים סטטיסטיים – רקע



## שאלות

(1) במטרה להשוות את רמת האפיה של שני קונדיטורים בחרו 9 מאפים שונים (קרואסון, בראוני וכדומה) ונתנו לכל אחד משני הקונדיטורים לאפות את 9 המאפים השונים. 18 המאפים שנאפו ניתנו למומחה שנתן ציון למאפים השונים. הציון שניתן הוא בין 1 ל-5 לפי ניסיונו וטעמו האישי של המומחה. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

(2) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ריאליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיך התוכנית רצה לבדוק האם יש הבדל בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

|   |   |   |   |   |   |   |   |            |
|---|---|---|---|---|---|---|---|------------|
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |            |
| 4 | 1 | 1 | 3 | 4 | 7 | 5 | 6 | מוסיקאי א' |
| 7 | 2 | 3 | 3 | 2 | 5 | 7 | 5 | מוסיקאי ב' |

מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

(3) במחקר בדקו לאנשים את רמת הסוכר בבוקר ואת רמת הסוכר בערב. מתוך 26 אנשים ל-3 רמת הסוכר הייתה זהה. ל-14 רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הערב. וליתר רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הבוקר. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 6% האם קיים הבדל בין רמת הסוכר בבוקר לרמת הסוכר בערב אצל האנשים. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

- (4) חוקר מעוניין לבדוק את התפתחות היכולת לדחות סיפוקים מידיים בקרב ילדים. לשם כך, הוא משתמש במבחן לבדיקה של דחיית סיפוקים, ומעביר אותו בו זמנית ל-2 קבוצות גיל. מבחן זה מודד כמה זמן (בשניות) מסוגל הילד לדחות קבלה של תגמול מידי קטן על מנת לקבל תגמול גדול יותר בעתיד. התוצאות שמתקבלות הן הזמנים של הנחקרים בכל קבוצת גיל. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקסון.
  - מבחן הסימן.
  - מבחן T למזווגים.
  - מבחן למדגמים בלתי תלויים.
- (5) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר השתתפו נשאלים האם הם נהגו לרכוש את המשקה לפני הקמפיין והאם הם רכשו אותו לאחר הקמפיין. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקסון.
  - מבחן הסימן.
  - מבחן T למזווגים.
  - מבחן למדגמים בלתי תלויים.
- (6) מחקר התעניין בדפוסי שיחות הטלפון, שמנהל הפרט בעקבות פרידה מבן זוגו. במחקר השתתפו גברים ו-נשים (כולם נפרדו מבן זוגם). המשתתפים דיווחו על משך השיחות (בדקות; לפני ואחר הפרידה). שאלת המחקר בחנה האם פרידה מבן הזוג קשורה למשך השיחות (משך השיחות הוא משתנה שנהוג להתייחס אליו כמתפלג נורמלית). מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקסון.
  - מבחן הסימן.
  - מבחן T למזווגים.
  - מבחן למדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות

- א'.
- א'.
- ב'.
- ד'.
- ב'.
- ג'.

## מבחן מקנמר – רקע

מבחן סטטיסטי זה נכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים. המבחן רלבנטי כשהמדגם מזווג וכשהמשתנה התלוי (הנחקר) הוא דיכוטומי, כלומר מקבל שני ערכים בלבד. מספר התצפיות שחל בהן שינוי צריך להיות לפחות 20; אם תנאי זה לא מתקיים אפשר לבצע את מבחן הסימן במקום.

### דוגמה:

50 איש נשאלו האם הם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה. הם נשאלו בשני מצבים: פעם ראשונה לפני שצפו בסרטון ופעם שניה שבוע אחרי שצפו בסרטון. התוצאות שהתקבלו היו:

13 אנשים טענו שהם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה גם לפני הצפייה בסרטון וגם אחרי הצפייה בסרטון.

9 אנשים טענו שלפני הצפייה בסרטון הם לא שלחו מסרונים אבל אחרי הצפייה בסרטון הם כן שלחו מסרונים בזמן הנהיגה.

20 איש טענו שהם נהגו לשלוח מסרונים לפני הסרטון אך אחרי צפייה בסרטון הם הפסיקו לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה.

8-1 אנשים לא שלחו מסרונים בזמן הנהיגה לא לפני ולא אחרי צפייה בסרטון. מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

### מבנה המבחן:

סטטיסטי המבחן הוא:  $Z = \frac{B-C}{\sqrt{B+C}}$  כאשר  $B, C$  – שכיחויות שבהן חל שינוי ומתעלמים מהשכיחויות שלא חל בהן שינוי. הסטטיסטי מתפלג  $Z \sim N(0,1)$ .

### דוגמה:

בדקו ברמת מובהקות של 5%: האם לסרטון השפעה על שליחת המסרונים בזמן הנהיגה?

## שאלות

- (1) פוליטיקאי הופיע אמש בתכנית טלוויזיה והוא מעוניין לבדוק האם התוכנית שיפרה את אמון הציבור בו. לצורך כך בוצע סקר שבו נשאל הצופה האם בעינו הפוליטיקאי נתפס כאמין לפני התוכנית והאם הוא נתפס כאמין לאחר התוכנית. להלן התוצאות שהתקבלו (המספרים מייצגים מספר צופים):  
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

| לפני    |      |         |     |
|---------|------|---------|-----|
| לא אמין | אמין |         |     |
| 21      | 12   | אמין    | אחר |
| 17      | 7    | לא אמין |     |

- (2) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר שבו השתתפו 50 נשאלים 30 טענו שלא שינו את הרגלי הצריכה. 15 טענו שהחלו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין ו-5 טענו שהפסיקו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין.  
א. מהי מובהקות התוצאה?  
ב. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

## תשובות סופיות

- (1) לא נדחה  $H_0$ .  
(2) א. 0.025 ב. נדחה  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 23 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים (יחידה 12)

תוכן העניינים

1. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים..... 186
2. מבחן פישר..... 193

## מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים. מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

### דוגמה:

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת B. פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20. מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

| שיטה A | שיטה B |
|--------|--------|
| 16     | 14     |
| 17     | 14     |
| 20     | 19     |
| 10     | 9      |
| 18     | 8      |

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

### השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:

- נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
- נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
- נחשב את  $W_1$  - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,
- $W_2$  - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
- נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \quad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

- הסטטיסטי U: במבחן דו צדדי  $U = \min(U_1, U_2)$  במבחן חד צדדי U יהיה ה- $U_i$ , שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.  
 טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את  
 ה-  $U$  הסטטיסטי.

טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של  $U$  שנסמן ב-  $U_c$ .

| טבלה מהסוג הראשון                                                                | טבלה מהסוג השני                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $n_1 - n_2 \leq 8$                                                               | $n_1$ או $n_2 \geq 9$                                                 |
| עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את $P_v$<br>אם $P_v \leq \alpha$ דוחים את $H_0$ . | נותנת את הערך הקריטי $U_c$<br>כל הכרעה: נדחה את $H_0$ אם $U \leq U_c$ |

#### דוגמה:

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים**
 $n_2 = 3$ 

| u  | $n_1$ |       |       |
|----|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     |
| 0  | 0.250 | 0.100 | 0.050 |
| 12 | 0.500 | 0.200 | 0.100 |
| 3  | 0.750 | 0.400 | 0.200 |
| 4  |       | 0.600 | 0.350 |
| 5  |       |       | 0.500 |
|    |       |       | 0.650 |

 $n_2 = 4$ 

| u | $n_1$ |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|
|   | 1     | 2     | 3     | 4     |
| 0 | 0.200 | 0.067 | 0.028 | 0.014 |
| 1 | 0.400 | 0.133 | 0.057 | 0.029 |
| 2 | 0.600 | 0.267 | 0.114 | 0.057 |
| 3 |       | 0.400 | 0.200 | 0.100 |
| 4 |       | 0.600 | 0.314 | 0.171 |
| 5 |       |       | 0.429 | 0.243 |
| 6 |       |       | 0.571 | 0.343 |
| 7 |       |       |       | 0.443 |
| 8 |       |       |       | 0.557 |

 $n_2 = 5$ 

| u  | $n_1$ |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 0  | 0.167 | 0.047 | 0.018 | 0.008 | 0.004 |
| 1  | 0.333 | 0.095 | 0.036 | 0.016 | 0.008 |
| 2  | 0.500 | 0.190 | 0.071 | 0.032 | 0.016 |
| 3  | 0.667 | 0.286 | 0.125 | 0.056 | 0.028 |
| 4  |       | 0.429 | 0.196 | 0.095 | 0.048 |
| 5  |       | 0.571 | 0.286 | 0.143 | 0.075 |
| 6  |       |       | 0.393 | 0.206 | 0.111 |
| 7  |       |       | 0.500 | 0.278 | 0.155 |
| 8  |       |       | 0.607 | 0.365 | 0.210 |
| 9  |       |       |       | 0.452 | 0.274 |
| 10 |       |       |       | 0.548 | 0.345 |
| 11 |       |       |       |       | 0.421 |
| 12 |       |       |       |       | 0.500 |
| 13 |       |       |       |       | 0.579 |

$$n_2 = 6$$

| u  | $n_1$ |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
| 0  | 0.143 | 0.036 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 1  | 0.286 | 0.071 | 0.024 | 0.010 | 0.004 | 0.002 |
| 2  | 0.428 | 0.143 | 0.048 | 0.019 | 0.009 | 0.004 |
| 3  | 0.571 | 0.214 | 0.083 | 0.033 | 0.015 | 0.008 |
| 4  |       | 0.321 | 0.131 | 0.057 | 0.026 | 0.013 |
| 5  |       | 0.429 | 0.190 | 0.086 | 0.041 | 0.021 |
| 6  |       | 0.571 | 0.274 | 0.129 | 0.063 | 0.032 |
| 7  |       |       | 0.357 | 0.176 | 0.089 | 0.047 |
| 8  |       |       | 0.452 | 0.238 | 0.123 | 0.066 |
| 9  |       |       | 0.548 | 0.305 | 0.165 | 0.090 |
| 10 |       |       |       | 0.381 | 0.214 | 0.120 |
| 11 |       |       |       | 0.457 | 0.268 | 0.155 |
| 12 |       |       |       | 0.545 | 0.331 | 0.197 |
| 13 |       |       |       |       | 0.396 | 0.242 |
| 14 |       |       |       |       | 0.465 | 0.294 |
| 15 |       |       |       |       | 0.535 | 0.350 |
| 16 |       |       |       |       |       | 0.409 |
| 17 |       |       |       |       |       | 0.469 |
| 18 |       |       |       |       |       | 0.531 |

$$n_2 = 7$$

| u  | $n_1$ |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| 0  | 0.125 | 0.028 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 1  | 0.250 | 0.056 | 0.017 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 2  | 0.375 | 0.111 | 0.033 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 3  | 0.500 | 0.167 | 0.058 | 0.021 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 4  | 0.625 | 0.250 | 0.092 | 0.036 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 5  |       | 0.333 | 0.133 | 0.055 | 0.024 | 0.011 | 0.006 |
| 6  |       | 0.444 | 0.192 | 0.082 | 0.037 | 0.017 | 0.009 |
| 7  |       | 0.556 | 0.258 | 0.115 | 0.053 | 0.026 | 0.013 |
| 8  |       |       | 0.333 | 0.158 | 0.074 | 0.037 | 0.019 |
| 9  |       |       | 0.417 | 0.206 | 0.101 | 0.051 | 0.027 |
| 10 |       |       | 0.500 | 0.264 | 0.134 | 0.069 | 0.036 |
| 11 |       |       | 0.583 | 0.324 | 0.172 | 0.090 | 0.049 |
| 12 |       |       |       | 0.394 | 0.216 | 0.117 | 0.064 |
| 13 |       |       |       | 0.464 | 0.265 | 0.147 | 0.082 |
| 14 |       |       |       | 0.538 | 0.319 | 0.183 | 0.104 |
| 15 |       |       |       |       | 0.378 | 0.223 | 0.130 |
| 16 |       |       |       |       | 0.438 | 0.267 | 0.159 |
| 17 |       |       |       |       | 0.500 | 0.314 | 0.191 |
| 18 |       |       |       |       | 0.562 | 0.365 | 0.228 |
| 19 |       |       |       |       |       | 0.418 | 0.267 |
| 20 |       |       |       |       |       | 0.473 | 0.310 |
| 21 |       |       |       |       |       | 0.527 | 0.355 |
| 22 |       |       |       |       |       |       | 0.402 |
| 23 |       |       |       |       |       |       | 0.451 |
| 24 |       |       |       |       |       |       | 0.500 |
| 25 |       |       |       |       |       |       | 0.549 |

$$n_2 = 8$$

| u  | $n_1$ |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |
| 0  | 0.111 | 0.022 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1  | 0.222 | 0.044 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2  | 0.333 | 0.089 | 0.024 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 3  | 0.444 | 0.133 | 0.042 | 0.014 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 4  | 0.556 | 0.200 | 0.067 | 0.024 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5  |       | 0.267 | 0.097 | 0.036 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 6  |       | 0.356 | 0.139 | 0.055 | 0.023 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 7  |       | 0.444 | 0.188 | 0.077 | 0.033 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 8  |       | 0.556 | 0.248 | 0.107 | 0.047 | 0.021 | 0.010 | 0.005 |
| 9  |       |       | 0.315 | 0.141 | 0.064 | 0.030 | 0.014 | 0.007 |
| 10 |       |       | 0.387 | 0.184 | 0.085 | 0.041 | 0.020 | 0.010 |
| 11 |       |       | 0.461 | 0.230 | 0.111 | 0.054 | 0.027 | 0.014 |
| 12 |       |       | 0.539 | 0.285 | 0.142 | 0.071 | 0.036 | 0.019 |
| 13 |       |       |       | 0.341 | 0.177 | 0.091 | 0.047 | 0.025 |
| 14 |       |       |       | 0.404 | 0.217 | 0.114 | 0.060 | 0.032 |
| 15 |       |       |       | 0.467 | 0.262 | 0.141 | 0.076 | 0.041 |
| 16 |       |       |       | 0.533 | 0.311 | 0.172 | 0.095 | 0.052 |
| 17 |       |       |       |       | 0.362 | 0.207 | 0.116 | 0.065 |
| 18 |       |       |       |       | 0.416 | 0.245 | 0.140 | 0.080 |
| 19 |       |       |       |       | 0.472 | 0.286 | 0.168 | 0.097 |
| 20 |       |       |       |       | 0.528 | 0.331 | 0.198 | 0.117 |
| 21 |       |       |       |       |       | 0.377 | 0.232 | 0.139 |
| 22 |       |       |       |       |       | 0.426 | 0.268 | 0.164 |
| 23 |       |       |       |       |       | 0.475 | 0.306 | 0.101 |
| 24 |       |       |       |       |       | 0.525 | 0.347 | 0.221 |
| 25 |       |       |       |       |       |       | 0.389 | 0.253 |
| 26 |       |       |       |       |       |       | 0.433 | 0.287 |
| 27 |       |       |       |       |       |       | 0.478 | 0.323 |
| 28 |       |       |       |       |       |       | 0.522 | 0.360 |
| 29 |       |       |       |       |       |       |       | 0.399 |
| 30 |       |       |       |       |       |       |       | 0.439 |
| 31 |       |       |       |       |       |       |       | 0.480 |
| 32 |       |       |       |       |       |       |       | 0.520 |

טבלה למציאת  $U_c$ 

ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים.

| $n_1$ | $n_2$ |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|       | 9     | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  |
| 1     |       |    |    |    |    |    |     |     |     |     | 0   | 0   |
| 2     | 1     | 1  | 1  | 2  | 2  | 2  | 3   | 3   | 3   | 4   | 4   | 4   |
| 3     | 3     | 4  | 5  | 5  | 6  | 7  | 7   | 8   | 9   | 9   | 10  | 11  |
| 4     | 6     | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  |
| 5     | 9     | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18  | 19  | 20  | 22  | 23  | 25  |
| 6     | 12    | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23  | 25  | 26  | 28  | 30  | 32  |
| 7     | 15    | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28  | 30  | 33  | 35  | 37  | 39  |
| 8     | 18    | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33  | 36  | 39  | 41  | 44  | 47  |
| 9     | 21    | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39  | 42  | 45  | 48  | 51  | 54  |
| 10    | 24    | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44  | 48  | 51  | 55  | 58  | 62  |
| 11    | 27    | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50  | 54  | 57  | 61  | 65  | 69  |
| 12    | 30    | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55  | 60  | 64  | 68  | 72  | 77  |
| 13    | 33    | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61  | 65  | 70  | 75  | 80  | 84  |
| 14    | 36    | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66  | 71  | 77  | 82  | 87  | 92  |
| 15    | 39    | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72  | 77  | 83  | 88  | 94  | 100 |
| 16    | 42    | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77  | 83  | 89  | 95  | 101 | 107 |
| 17    | 45    | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83  | 89  | 96  | 102 | 109 | 115 |
| 18    | 48    | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88  | 95  | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19    | 51    | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94  | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20    | 54    | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |

## שאלות

- (1) מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

| קבוצה א | קבוצה ב |
|---------|---------|
| 68      | 82      |
| 82      | 74      |
| 78      | 82      |
| 94      | 64      |
| 87      | 67      |
|         | 65      |

- (2) מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- (3) במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:  
 קבוצת הטיפול: 1, 3, 9, 3, 4, 0, 8, 12, 16.  
 קבוצת הביקורת: 19, 7, 28, 13, 23, 12.  
 בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

## תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את  $H_0$ .  
 (2) נדחה את  $H_0$ .  
 (3) לא נדחה את  $H_0$ .

\\

## מבחן פישר – רקע

מבחן זה הוא מבחן הנכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים. משתמשים במבחן כאשר מתעניינים להשוות בין שתי אוכלוסיות והמשתנה התלוי הוא דיכוטומי, כלומר משתנה שיש לו שני ערכים אפשריים. במבחן זה יוצרים מדגם אחד שמקבל טיפול כלשהו ומדגם אחר המהווה קבוצת ביקורת ואינו מקבל את הטיפול. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת שתי פרופורציות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. במבחן הפרמטרי דורשים שבכל מדגם מספר ההצלחות וגם מספר הכישלונות יהיה לפחות 10 (הפחות מחמירים דורשים לפחות 5). מבחן פישר, אותו נעשה בפרק זה, נקרא בספרות המקצועית: "Fisher exact probability test".

### דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים בקורס סטטיסטיקה. נלקחו 2 כיתות הלומדות סטטיסטיקה בנות 15 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת ניתנו שיעורי עזר ובכיתה השנייה לא ניתנו שיעורי עזר. בכיתה בה ניתנו שיעורי עזר נכשל בקורס ובכיתה שבה לא ניתנו שיעורי עזר 3 נכשלו בקורס. מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן פישר היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם  $\alpha \geq PV$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס. כדי לחשב את מובהקות התוצאה נבנה טבלת שכיחות משותפת במבנה הבא:

| סה"כ | "הצלחה" | "כישלון" |              |
|------|---------|----------|--------------|
| A+B  | B       | A        | קבוצת טיפול  |
| C+D  | D       | C        | קבוצת ביקורת |
| N    | B+D     | A+C      | סה"כ         |

בנו את טבלת השכיחות המשותפת המתאימה לדוגמה:

| סה"כ |     |     |              |
|------|-----|-----|--------------|
| A+B  | B   | A   | קבוצת טיפול  |
| C+D  | D   | C   | קבוצת ביקורת |
| N    | B+D | A+C | סה"כ         |

**דוגמה:**

בהנחת השערת האפס התפלגות של  $A$  הינו משתנה מקרי היפר גיאומטרי שבו יש אוכלוסייה בגודל  $N$ , מתוכם  $C + A$  "מיוחדים" ואנו דוגמים מתוכם מדגם בגודל  $B + A$ .

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפר גיאומטרית במקרה זה,

$$\text{כאשר } X \text{ מייצג את השכיחות } A \text{ תהיה: } \frac{\binom{A+C}{x} \binom{B+D}{A+B-x}}{\binom{N}{A+B}}.$$

חשבו את מובהקות התוצאה בדוגמה ומה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

## שאלות

(1) פסיכיאטרים נשאלו האם תרופה אנטי דיכאונית מסוימת אכן משפיעה על מצב הרוח. נלקחו 28 אנשים שהתלוננו על דיכאון ברמה דומה והם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 16 נטלו את התרופה האנטי דיכאונית הנחקרת והיתר היוו קבוצת ביקורת ונטלו פלסיבו. כעבור 3 חודשים נבדק מצבם הנפשי של כל משתתפי המחקר. בקרב אלו שנטלו את התרופה רק 2 התלוננו על דיכאון ובקרב אלו שנטלו הפלסבו 6 התלוננו על דיכאון. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

(2) חנות פרחים מעוניינת לבדוק את הטענה שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים. נדגמו 20 פרחים מאותו סוג. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות: 10 פרחים יהיו בקבוצת הניסוי, כלומר בתאורה אולטרה סגולה והפרחים הנותרים יהיו בקבוצת הביקורת – באותם התנאים בדיוק אך ללא תאורה אולטרה סגולה. כעבור 5 ימים נבדקו כלל הפרחים.

| תקין | נבול | תאורה / מצב הפרח לאחר 5 ימים |
|------|------|------------------------------|
| 9    | 1    | אולטרה סגולה                 |
| 3    | 7    | רגילה                        |

א. מה היא רמת המובהקות המינימלית עבורה יוסק שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים?  
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם בקבוצת הביקורת היו נמצאים פחות פרחים נבולים?

(3) משרד החינוך הזמין מחקר שמטרתו היה לבדוק האם שנת צהריים קבועה בזמן לימודי התיכון משפיעה על הזכאות לבגרות. נדגמו בוגרי תיכון אקראיים שנשאלו שתי שאלות:  
 Q1 - האם בזמן התיכון נהגת לישון צהריים באופן קבוע?  
 Q2 - האם את/ה זכאית/ת לעודת בגרות?  
 להלן התוצאות שהתקבלו.

א. רשמו את השערות המבחן. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה?  
 ג. בדקו את השערות המחקר ברמת מובהקות של 6%.

| שאלון/ מספר נשאל | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Q1               | כן | לא | לא | לא | כן | כן | לא | לא | לא | לא | לא | כן | לא | לא |
| Q2               | כן | כן | כן | לא | כן | כן | לא | לא | כן | כן | לא | כן | כן | לא |

**תשובות סופיות**

- (1) נדחה את  $H_0$ .
- (2) א. 0.0099      ב. תקטן.
- (3) א. מבחן פישר.      ב. 0.8112      ג. לא נדחה  $H_0$ .

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 24 - מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 1

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 25 - מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 2

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 26 - מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 3

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 27 - מבוא לסטטיסטיקה ב - פתרון בחינה לדוגמה מספר 4

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)