מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

תוכן העניינים

1. סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 1
2. סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 4
3. סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 15
4. סטטיסטיקה תיאורית- סכימה (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 17
5. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 21
6. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 30
7. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 33
8. סטטיסטיקה תיאורית-ממוצע משוקלל ושונות מצורפת (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 35
9. סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 37
10. סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 39
11. סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 42
12. סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות (יחידה 2 ממן 11 ממח 10 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) 45
13. מדד הקשר פירסון (יחידה 2 ממן 11 ממח 10) 52
14. מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון (יחידה 2 - ממן 11 ממח 10) 58
15. יסודות ההסתברות (יחידה 3 - ממח 20) 61
16. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים (יחידה 3 - ממח 20) 65
17. קומבינטוריקה -כלל המכפלה (יחידה 4 - ממן 21) 74
18. קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה (יחידה 4 - ממן 21) 78
19. קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים (יחידה 4 - ממן 21) 81
20. קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל (יחידה 4 - ממן 21) 83
21. קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (יחידה 4 - ממן 21) 86
22. קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (יחידה 4 - ממן 21) 88
23. קומבינטוריקה - שאלות מסכמות (יחידה 4- ממן 21 - מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) 91

תוכן העניינים

24. הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד (יחידה 5 - ממן 31) 96

25. הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד (יחידה 5- ממן 31) 99

26. דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (יחידה 5- ממן 31) 103

27. תלות ואי תלות בין מאורעות (יחידה 5 - ממן 31) 108

28. שאלות מסכמות בהסתברות (יחידה 5 - ממן 31 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) 111

29. המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות (יחידה 6 - ממן 41) 116

30. המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (יחידה 6 - ממן 41) 120

31. המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית (יחידה 6 - ממן 41) 123

32. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (יחידה 6 - ממן 41) 126

33. התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית (יחידה 6 - ממן 41) 129

34. התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות גיאומטרית (יחידה 6 - ממן 41) 133

35. התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות אחידה (יחידה 6 - ממן 41) 136

36. התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית (יחידה 6 - ממן 41) 139

37. התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית (יחידה 6 - ממן 41) 142

38. התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית שלילית (יחידה 6 - ממן&touq; 41) 145

39. המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (יחידה 6 - ממן 41 - מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) . 148

הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים (יחידה 8 - ממן 51 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) 152
40. המשתנה המקרי

41. התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה (יחידה 8 - ממן 51) 158

מיוחדות - התפלגות נורמלית (יחידה 8 - ממן 51 החל משאלה 6 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה) 161
42. התפלגויות רציפות

43. משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת (יחידה 7 - ממן 51) 169

44. משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים (יחידה 7 ממן 51) 175

45. המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות (יחידה 7 ממן 51) 182

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 1

סטטיסטיקה תיאורית – הקדמה:

רקע:

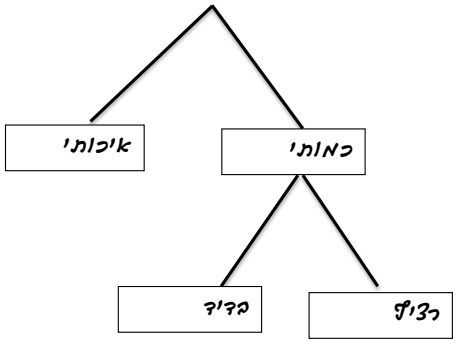
בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת, שיכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.
בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

1) מי הקבוצה הנחקרת?
2) מה גודל הקבוצה?
3) מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:



משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.
כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה) ומצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים, להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.
את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

1. משתנה בדיד – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..) וציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

2. משתנה רציף – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים. הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. כמו:
גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי), משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) סווגו את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:

א. מספר הדירות בבניין.

ב. גיל אדם בשנים.

ג. אחוז האבטלה בעיר.

ד. מקצוע לימוד מועדף.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

א. מהו המשתנה הנחקר כאן?

ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי ?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים, ציינו ליד כל אחד אם הוא רציף או בדיד:

א. שכר עובד ב-₪.

ב. ציון בחינת בגרות.

ג. תוצאה בהטלת קובייה.

ד. מהירות ריצה בתחרות.

ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

1) א. כמותי בדיד. ב. כמותי רציף. ג. כמותי רציף.
ד. איכותי.

2) א. מספר איחורים. ב. כמותי בדיד.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 4

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	f_k	$\frac{f_x}{N}\cdot 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון- X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	0.08=2/25
6	4	6	0.16=4/25
7	8	14	0.32=8/25
8	5	19	0.2=5/25
9	4	23	0.16=4/25
10	2	25	0.08=2/25

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

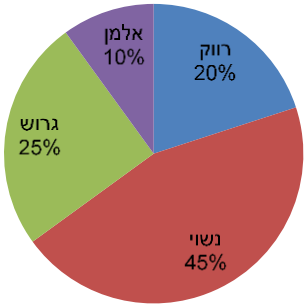
זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דיאגרמת עוגה:

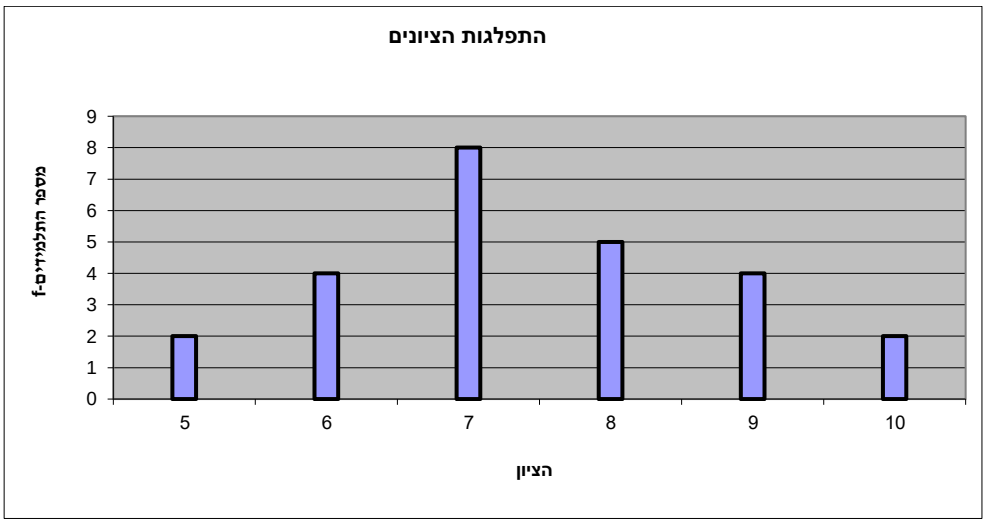
זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

התפלגות המצב המשפחתי



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

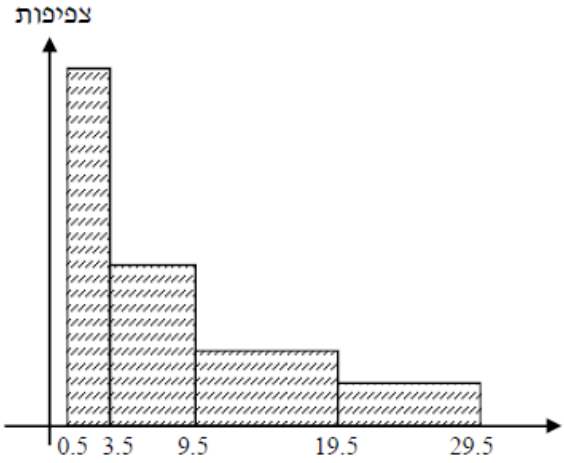


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



פוליגון – מצולעון:

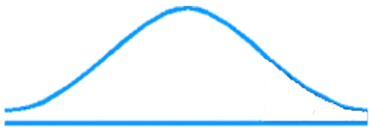
אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

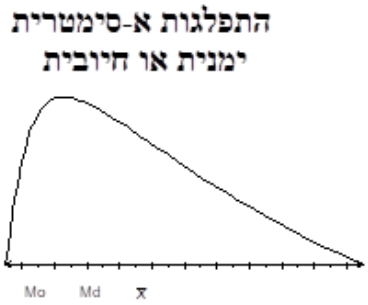
רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

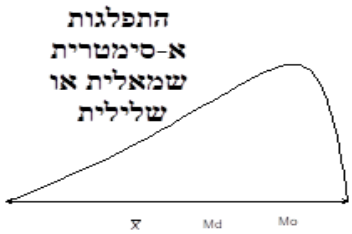
התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

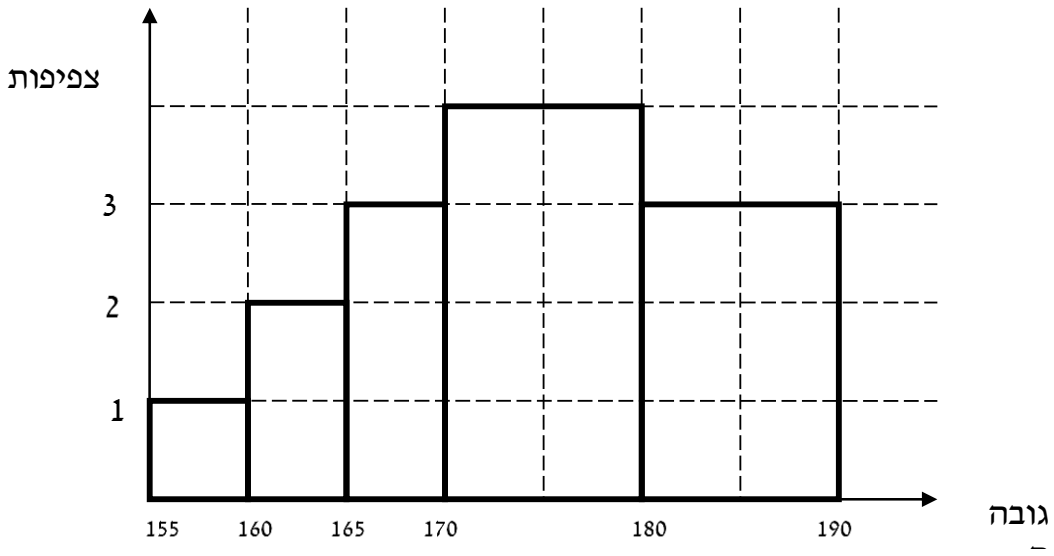
ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

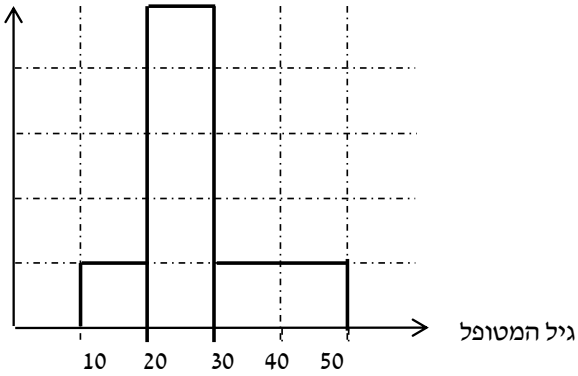
משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:
קנה מידה:

8 מטופלים=



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

2) א. מקצוע מועדף.

ב. 19.6%.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.
ב. סימטרית.

7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.
ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
ד. להלן טבלה:
ה. 62.5%.

x	$f(x)$
10-20	8
20-30	40
30-50	16

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 15

סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

גבולות מדומים:

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

רמת הדיוק חייבת להיות קבועה - אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח':
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

$f(x)$	x
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

X	$f(x)$
500-590	542
600-690	32
700-790	154
800-890	254

2) להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת.
יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

x	$f(x)$
495-595	542
595-695	32
695-795	154
795-895	254

2) להלן טבלה:

x	$f(x)$
59.5-64.5	18
64.5-69.5	24
69.5-79.5	52
79.5-89.5	19

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 17

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X),
ומספר הנפשות החיות בדירה (Y) חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 7. ב. 9. ג.11. ד. 121.
ה. 14. ו. 27. ז. 126.

2) א. 3. ב. 12. ג.7. ד.12.
ה. 14.

3) א. נכונה. ב. נכונה. ג. לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 21

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

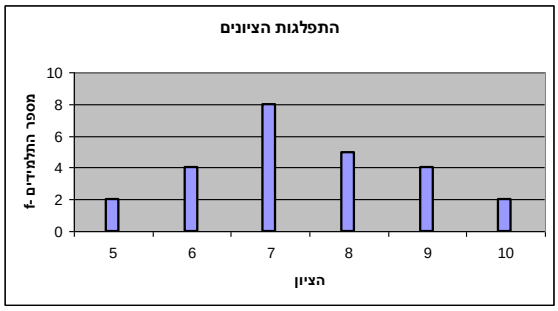
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תוכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות

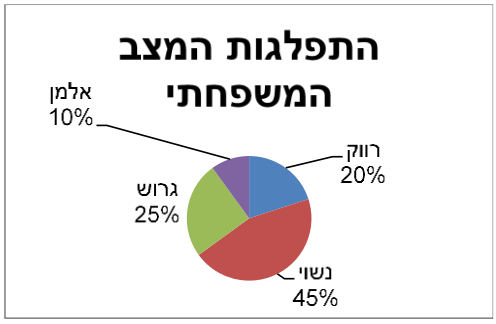
שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



בטבלת שכיחויות במחלקות

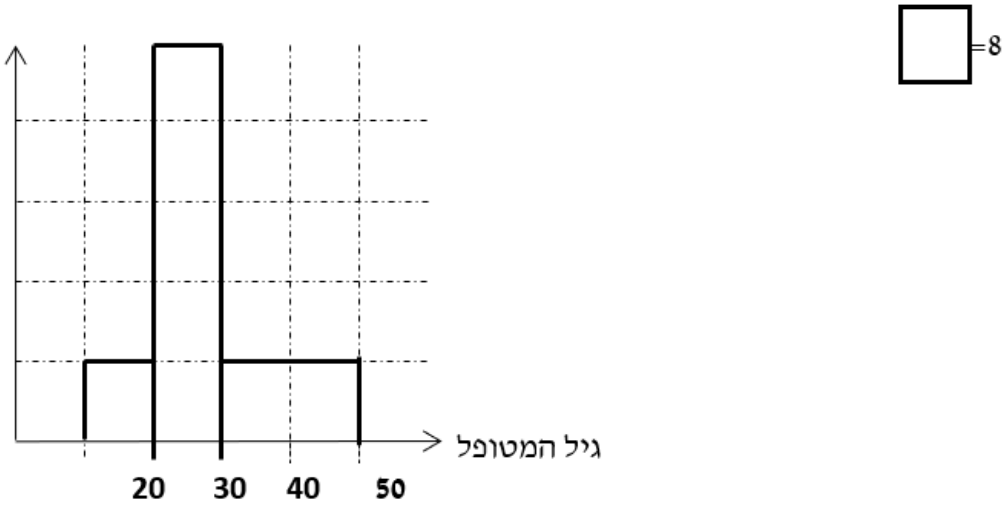
אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$.

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה-$\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$.

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average:

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

בטבלת שכיחויות

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במחלקות

נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- X .
הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

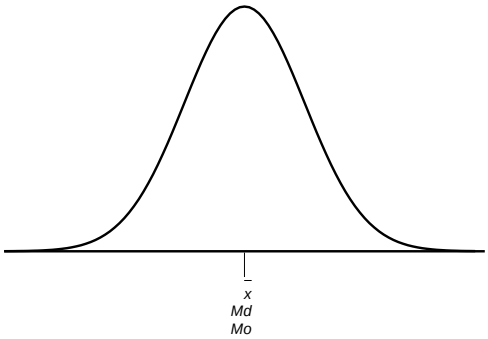
כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

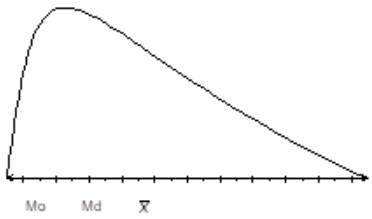
התפלגות סימטרית



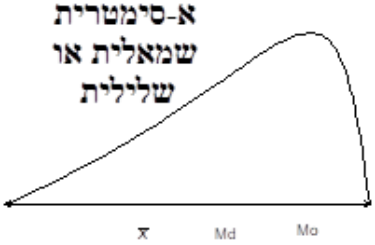
בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

התפלגות U

התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.

א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?

ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?

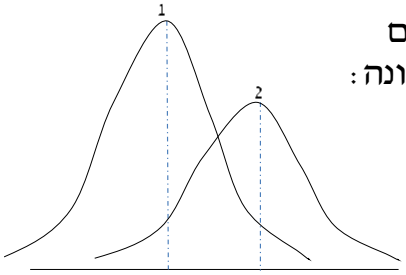
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג. מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

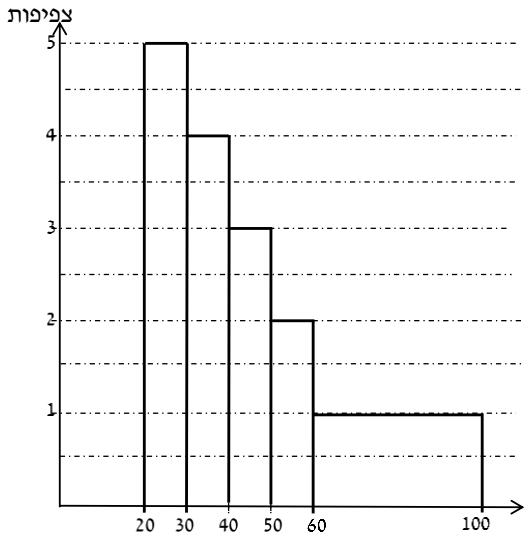
משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.
חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה.
להלן התוצאות:



א. מצאו את השכיח בהתפלגות.
ב. מצאו את החציון בהתפלגות.
ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החיצון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.

2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.

3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.

5) ב'.

6) א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	92
3	18

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.

7) חציון וממוצע: 55.

8) ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.

9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון.
ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 30

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x^{\,2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

דוגמאות:

1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x^{\,2} = \dfrac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{n} = \dfrac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		**1430**

$$S_x^{\,2} = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^{\,2}} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

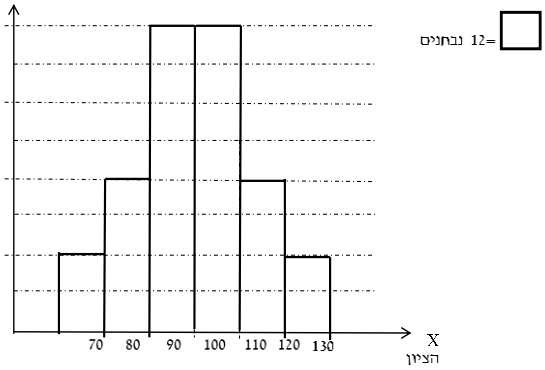
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:
מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו- 100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

תשובות סופיות:

1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

4) 10.8.

5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

6) 7.73.

7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 33

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

מספר שנות ותק	רוחב $L_1 - L_0$	f מספר עובדים (שכיחות)	F
$0.5 - 4.5$	4	56	56
$4.5 - 9.5$	5	50	106
$9.5 - 11.5$	2	48	154
$11.5 - 14.5$	3	36	190
$14.5 - 19.5$	5	10	200

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$. מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$.

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26$ שניות

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

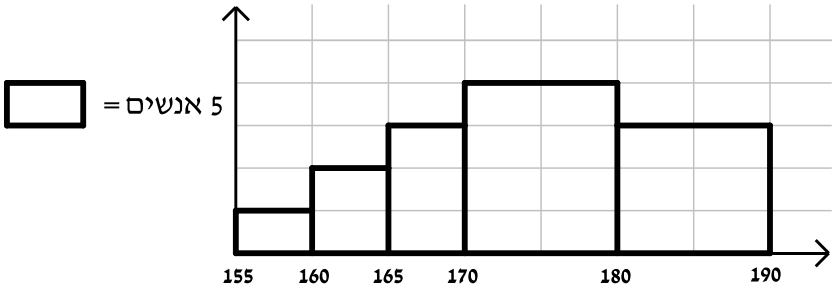
שאלות:

1) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

2) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

תשובות סופיות:

1) 13.75 ק"ג.

2) 13.33 ק"ג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית-ממוצע משוקלל ושונות מצורפת (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 35

סטטיסטיקה תיאורית – ממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

רקע:

מדובר על מצב שבו ישנן כמה קבוצות שנרצה לאחד לקבוצה אחת.
מתעניינים בממוצע והשונות של הקבוצה הגדולה המתקבלת מאיחוד הקבוצות הקטנות.

n_j - מס' התצפיות בקבוצת ה- j .

j - אינדקס של הקבוצה.

N - מס' התצפיות בכל הקבוצות יחד (סכום כל ה- n_j).

$\overline{x_j}$ - הממוצע בקבוצה ה- j .

S_j^2 - השונות בקבוצה ה- j .

הנוסחאות לממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{x_j} n_j}{N} \; ; \; N = \sum_{j=1}^{k} n_j \; ; \; S_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2}{N}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחברה שני אגפים: אגף א' מונה עשרים עובדים, השכר הממוצע שם הוא 6,000 ₪ וסטיית התקן היא 2,000 ₪. באגף ב' עשרה עובדים, השכר הממוצע הוא 12,000 ₪ וסטיית התקן היא 3,000 ₪.
מהו השכר הממוצע ומהי סטיית התקן של שכר העובדים בחברה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את הממוצע המשוקלל בשכבה.

ב. חשבו את השונות המצורפת בשכבה.

2) נתונות שתי קבוצות: בקבוצה I פי שתים תצפיות מאשר בקבוצה II.
הממוצע בשתי הקבוצות הוא 70. השונות בקבוצה I היא 100.
השונות בקבוצה II היא 400.

א. מצאו את הממוצע של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

ב. מצאו את סטיית התקן של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

תשובות סופיות:

1) א. 76.22. ב. 173.5.

2) א. 70. ב. 14.14.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 37

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערך מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערך יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?

ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.

א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?

ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

1) א. לשון. ב. 72.

2) ב'.

3) א. משקל. ב. 70.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 39

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש p % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון:

ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$.

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה: $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $x_p = L_0 + \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$, את המשתנים:

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה: $P_x = \left[\frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

	שכר ב-₪
140	4000-6000
128	6000-10000
60	10000-15000
54	15000-20000
18	20000-40000

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

שכר - X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7,000 ₪?

ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?

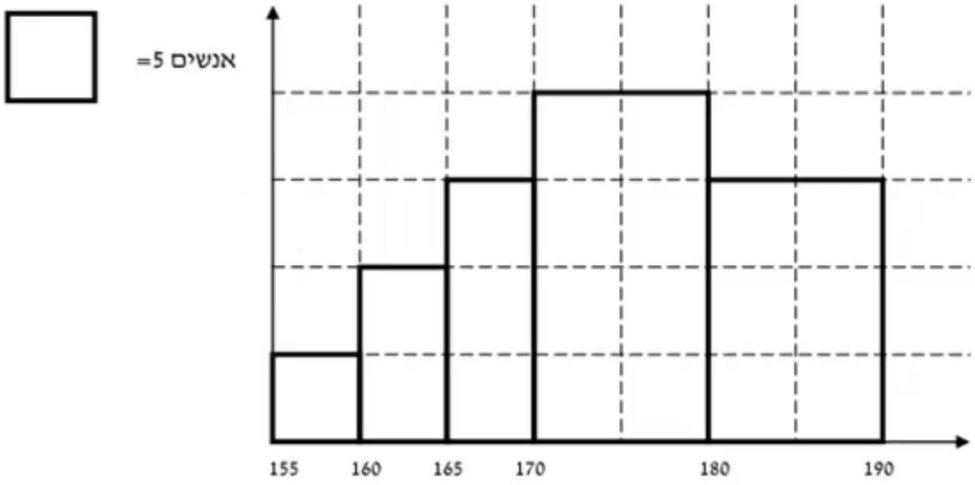
ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

2) למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60.
הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית.
מלאו את השכיחויות החסרות.

ציון- X	$f(x)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



חשבו:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.

ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.

ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

תשובות סופיות:

1) א. 13.23. ב. 22. ג. 17.2. ד. 8.82%. ה. 7.36%.
ו. 83.82%.

2) להלן טבלה:

ציון- X	$f(x)$
50-60	40
60-70	60
70-80	200
80-90	60
90-100	40

3) א. 162.5. ב. 170. ג. 183.33. ד. 3%. ה. 15%.
ו. 55%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 42

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y^{\ 2} = a^2 S_x^{\ 2}$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו-b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15, MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$,
אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
6) $a^2 \cdot S_x^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות (יחידה 2 ממן 11 ממח 01 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 45

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

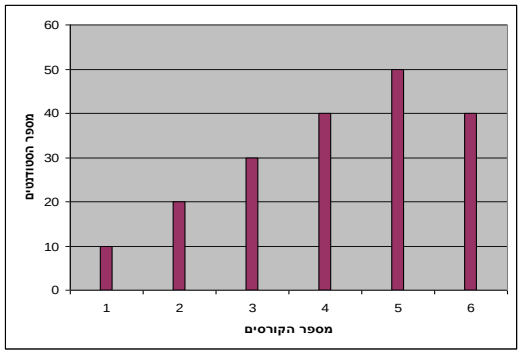
ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\overline{X} = 7\frac{1}{15}$.

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.
ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה).
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

שביעות רצון	מספר האנשים
1	40
2	60
3	50
4	30
5	20

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
   i. היסטוגרמה.
   ii. דיאגרמת מקלות.
   iii. דיאגרמת עוגה.
ד. חשבו את המדדים הבאים:
   i. טווח.
   ii. שכיח.
   iii. חציון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

א. השלימו את הטבלה.

ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.

ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?

ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?

ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?

ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?

ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?

ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?

ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?

ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:

i. ממוצע.

ii. שכיח.

iii. חציון.

iv. שונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

א. שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.

ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?

ג. חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.

ד. הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

הציון	מספר הנבחנים
50-70	
70-90	
90-100	
100-110	
110-130	
130-150	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.

ב. $\bar{X}=52$, $Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$, שכיח: 58.

ג. $S=10.12$, $R=28$.

ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.

ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.

ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

x	$f(x)$
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	40
סה"כ	**190**

3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.

ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533 , סטיית תקן: 1.592.

4) א. 20%. ב. שביעות רצון (סדר).

ג. ii. ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.

5) א. להלן טבלה: ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	30
20-30	20%	40
30-40	30%	60
40-50	20%	40
50-60	15%	30

ג. סטיית תקן: 12.65. ד. 53.333.

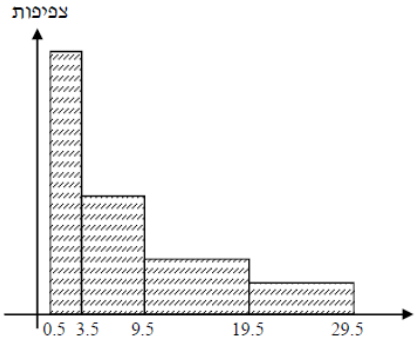
ה. 25%. ו. -0.395.

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.

6) א. 38% ב. 40% ג. 150 ד. חציון: 100.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים: $Mo < Md < \bar{X} < MR$.

8) א. ראו טבלה:

ציון	מספר הנבחנים
50-70	50
70-90	75
90-100	125
100-110	125
110-130	75
130-150	50

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 13 - מדד הקשר פירסון (יחידה 2 ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 52

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון):

רקע:

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).
למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.
בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:

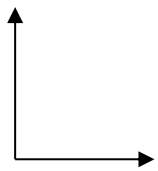
X - מס' חדרים בדירה.

Y - מס' נפשות הגרות בדירה.

להלן התוצאות שהתקבלו:

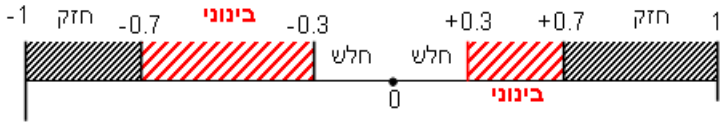
מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים.
המדד (נקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שכל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
מתאם שלילי חלקי אומר שכל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וכל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.
מקדם המתאם יסומן באות r.



כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV_{(x,y)} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}$.

שונות של המשתנה X: $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$.

שונות המשתנה Y: $S_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}}{n} - \bar{y}^2$.

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy} = \frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן.
בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס
וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

א. שרטט דיאגראמת פיזור לנתונים.
מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשב את מדד הקשר של פירסון.
האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו.
לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים הללו עבור חמישה חולים.
להלן התוצאות שהתקבלו:

Y	X
12	10
15	14
15	15
17	18
21	20

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים?
ומה משמעות התוצאה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \ , \ \sum_{i=1}^{20}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 = 76 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right) = 60.8 .$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960 \ , \ \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 .$$

חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב- 3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות. לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל: $\bar{X} = \bar{Y} = 6 \ , \ S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

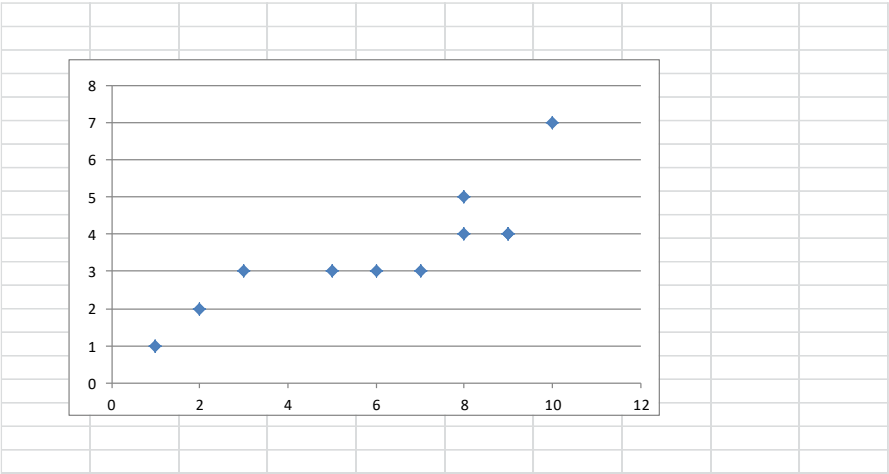
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש״ח (באותו היום ערך הדולר היה 4.2 ₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר ב-₪?

א. 1.
ב. 0.
ג. 4.2.
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1.
ב. 0.85.
ג. 0.15.
ד. 0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ב. -0.9325.
2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$. ב. $r_{xy}=0.96$.
3) א. 0.8.
4) 0.8.
5) 1.
6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
7) ג'.
8) א'.
9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 14 - מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון (יחידה 2 - ממן 11 ממח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 58

מדדי קשר – השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון:

רקע:

טרנספורמציה לינארית, בין אם נעשית על X , בין אם נעשית על Y, ובין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר. היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

$$r_{[(aX+b),(cY+d)]} = \begin{cases} r_{x,y} _____ if ___ a \cdot c > 0 \\ -r_{x,y} _____ if ___ a \cdot c < 0 \end{cases}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מבחן בנוי משני חלקים: חלק כמותי וחלק מילולי. מקדם המתאם בין שני הציונים של שני החלקים הוא 0.9.

א. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?

ב. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי בבחינה-150. מצאו את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W לציון הכמותי.

2) מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7. אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, מה יהיה מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה להוצאה החדשה?

3) חברת "לק" המייצרת גלידה החליטה לערוך מחקר לבדיקת הקשר בין מספר חבילות הגלידה הנמכרות ביום לבין הטמפרטורה באותו יום. נבדקו 10 ימים והתקבל מתאם לינארי 0.85. חברת "לק" דואגת להתחיל כל יום עם מלאי של 150 חבילות גלידה. בנוסף, מעוניינים כי הטמפרטורה תבוטא במעלות פרנהייט במקום במעלות צלסיוס. מה ערכו של מקדם המתאם בין מספר חבילות הגלידה שנשארות בסוף היום לבין הטמפרטורה במעלות פרנהייט?

הקשר בין מעלות צלסיוס ($C°$) למעלות פרנהייט ($F°$) נתון ע"י: $F=\frac{9}{5}C+32$.

בחרו בתשובה הנכונה:

א. 0.85.

ב. 0.-85.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

4) מקדם המתאם בין X ל- Y הנו 0.4. כל ערכי ה- X הוכפלו ב-2. מה יהיה מקדם המתאם החדש בין שני המשתנים?

א. 0.8.

ב. 0.4.

ג. 0.-4.

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. בין הציון המילולי הישן לחדש : 1. בין הציון המילולי החדש לכמותי : 0.9.

ב. בין W לציון המילולי : 1-, בין W לציון הכמותי : 0.9-.

2) 0.7.

3) ב'.

4) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 15 - יסודות ההסתברות (יחידה 3 - ממח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 61

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1,2,3,4,5,6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך}.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A , B , C. בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A=\{5,6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B=\{2,4,6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega|=6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A|=2$, $|B|=3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$, $\bar{B}=\{1,3,5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון – x	מספר התלמידים – השכיחות – f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A})=1-P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E.

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. התקבל פעם אחת עץ.

ii. התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D?

ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega=\{EE,EF,EG,FE,FF,FG,GE,GF,GG\}$.

ב. $A=\{EE,EF,EG,FE,GE\}$, $B\{EF,EG,FE,FG,GE,GF\}$.

ג. $\bar{A}=\{FF,FG,GF,GG\}$.

2) א. $\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1)\\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2)\\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3)\\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4)\\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5)\\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6)\end{Bmatrix}$.

ב. $C=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$, $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4. ב. 0.4. ג. 0.5.

4) א. 0.22. ב. 0.78. ג. 0.32.

5) א. 0.1. ב. 0.2. ג. 0.8.

6) א. $\Omega=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP,EEE\}$.

ב. $D=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP\}$, $A=\{PPE,PEP,EPP\}$.

ג. $\bar{D}=\{EEE\}$.

ד. $\frac{1}{8}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים (יחידה 3 - ממח 02)

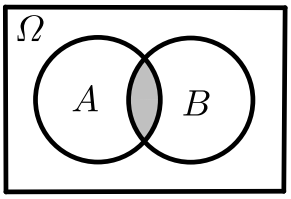
תוכן העניינים

1. כללי 65

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

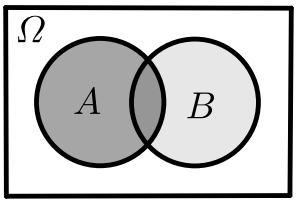
פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A\cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.

דוגמה:
בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B=\{2,4,6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A\cap B=\{6\}$.

פעולת איחוד:



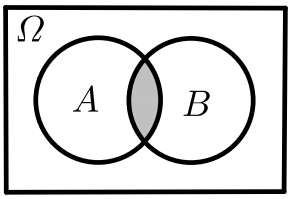
נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A\cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב-A או B.
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:
בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B=\{2,4,6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

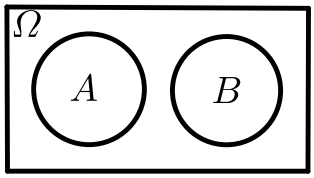
$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\overline{A}$	A	
B	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(\overline{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
$A\cap B=\{\ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A\cap B)=0$.

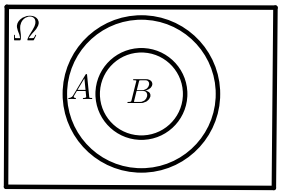
ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$ והאפשרות לקבל 3 היא: $B=\{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A\cap B=\{\ \}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות A ו-B, השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך מאורע A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$
$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

למשל: $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,4\}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה אותיות שונות.
א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגראמת ון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
A , B , $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$.
ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4) נסמן ב-Ω את מרחב המדגם וב-ϕ קבוצה ריקה.
נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.
קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
$\overline{\overline{A}}$, $A\cap\phi$, $A\cup\phi$, $A\cap\Omega$, $A\cup\Omega$, $A\cap\overline{A}$, $\overline{\phi}$, $A\cup\overline{A}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A\cap B$.

ב. $A\cup B$.

ג. $\overline{A}\cap B$.

ד. $\overline{A}\cup\overline{B}$.

ה. $\overline{\overline{A}}$.

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים.
חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1$.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A}\cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) נתון כי: $P(A)=0.3$, $P(B)=0.25$, $P(A\cup B)=0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל-$P(A\cap B)$.

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15) A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2\cdot P(B\cap\overline{A})=P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A\cap B=B\cap A$.

ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$.

ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$.

ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

17) נתון ש-A ו-B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש-$P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$.

א. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.4$?

ב. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.6$?

ג. אם A ו-B זרים מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

18) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?

ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?

ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?

ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?

ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?

ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס.
כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?

ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?

ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20) הוכיחו: $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\cap B\right)$.

21) A ו-B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P\left(A\right)+P\left(B\right)-2P\left(A\cap B\right)$?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $A\cap B=\{EG,EF,FE,GE\}$.
ב. $A\cup B=\{EG,EF,EE,FE,GE,EG,GF\}$.

2) א. $B\cap\bar{A}$. ב. $A\cap\bar{B}$. ג. $A\cap B$. ד. $A\cup B$. ה. $\bar{A}\cap\bar{B}$. ו. $\bar{B}$.

3) א. $A=0,2,4,6,8$, $B=0,1,2,3,4$, $\bar{B}=5,6,7,8,9$,
$A\cap B=0,2,4$, $A\cup B=0,2,4,6,8,1,3$.
ב. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$, $P(\bar{B})=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7$.

4) $\bar{\bar{A}}=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup\phi=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cup\Omega=\Omega$,
$A\cap\bar{A}=\phi$, $\bar{\phi}=\Omega$, $A\cup\bar{A}=\Omega$.

5) א. $A\cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A\cup B$: כל גובה אפשרי.
ג. $\bar{A}=\bar{A}\cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A}\cup\bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
ה. $A=\bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.

6) א. $A\cap B\cap C$. ב. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. ג. $A\cup B\cup C$.
ד. $\bar{C}$. ה. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(B\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})$.

7) א. $P(A\cup B)=0.24$. ב. $P(A\cap B)=0.04$. ג. $P(B\cap\bar{A})=0.16$.

8) א. $P(A\cap B)=10\%$. ב. $P(A\cup B)=50\%$. ג. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=50\%$.

9) א. $P(A\cap B)=0.2$. ב. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3$. ג. $P(A\cup\bar{B})=0.3$.

10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.

11) א. כן. ב. $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

12) הטענה הנכונה היא ג'.

13) א. 0.05. ב. 0.95.

14) א. $P(A\cap B)=0.06$. ב. לא. ג. $P((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))=0.43$.

15) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$.

16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A\cup B)=0.5$. ד. $P(A\cup B)=0.3$.

18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
ז. 59%.

19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.

20) שאלת הוכחה.

21) נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 17 - קומבינטוריקה -כלל המכפלה (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 74

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$n_1 = 6$, $n_2 = 2$

$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$n_1 = 26$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$, $n_4 = 10$, $n_5 = 10$

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:

א. הטלת קובייה פעמים.

ב. מספר תלת ספרתי.

ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.

ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.
האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.
האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.

א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?

ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:

i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.

ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. המספר הוא זוגי.

ב. במספר כל הספרות שונות.

ג. במספר כל הספרות זהות.

ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.

ה. במספר לפחות שתי ספות זהות.

ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).

4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כולם ירו בקומה החמישית.

ב. כולם ירדו באותה קומה.

ג. כולם ירדו בקומה אחרת.

ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:

א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6) מטילים קובייה 4 פעמים.

א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?

ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?

ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?

ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).

א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?

ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?

ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?

ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).

א. בקוד אין את הספרה 5.

ב. בקוד מופיעה הספרה 3.

ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 36. ב. 900. ג. 70. ד. 90.

2) א. 36. ב. i. $\frac{1}{36}$. ב. ii. $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.5. ב. 0.3024. ג. 0.0001. ד. 0.9999. ה. 0.6976. ו. 0.01.

4) א. $\frac{1}{8^5}$. ב. $\frac{1}{8^4}$. ג. 0.205. ד. $\frac{1\cdot 1\cdot 7^3}{8^5}$.

5) א. 3375. ב. 2730.

6) א. $\frac{1}{216}$. ב. $\frac{5}{18}$. ג. $\frac{13}{18}$. ד. $\frac{215}{216}$.

7) א. $\frac{23^5}{26^5}$. ב. $\frac{1}{26^4}$. ג. $1-\frac{1}{26^4}$. ד. $\frac{1}{26^2}$.

8) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

9) 2^n.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 18 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 78

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$.

<u>הערה</u>: $0!=1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חשבו : בכמה אופנים

א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?

ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.

א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?

ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?

ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.

א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?

ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.

א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.

ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?

ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?

ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.

א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?

ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?

ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.

א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?

ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?

ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

1) א. 24. ב. 120.

2) א. 0.2. ב. 0.8. ג. 0.022.

3) א. 362880. ב. 2880.

4) א. 3628800. ב. 0.2. ג. 0.8. ד. $\frac{1}{45}$.

5) א. $\frac{1}{792}$. ב. $\frac{1}{99}$. ג. $\frac{1}{4620}$.

6) א. 0.75. ב. 0.014. ג. $\frac{1}{14}$. ד. $\frac{1}{35}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 19 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 81

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2 ו- n_r זהים מסוג r: $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6.
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10.
המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו.
מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור,
אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור.
דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

1) 10.
2) 60.
3) 90.
4) 20.
5) $\frac{1}{210}$.
6) 12600.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 20 - קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. סידור עצמים במעגל 83

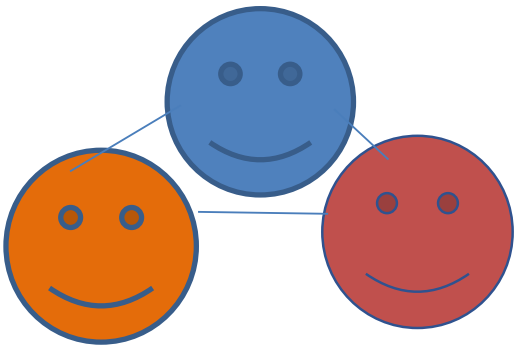
קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא: $(n-1)!$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד.
בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל.
במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:

א. גווני האפור צמודים זה לזה.

ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.

2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים.
הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציור.

ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט.
הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.

ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.

4) n בנים ו-n בנות הסתדרו במעגל באקראי.

א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?

ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?

ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 2177280. ב. 7776.

2) א. $\frac{1}{9!}$. ב. $\frac{2}{9}$.

3) א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{15}$.

4) א. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ב. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ג. $\frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 21 - קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 86

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3=1,000$, $k=3$, $n=10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n\geq k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k=n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
   א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
   ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
   א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
   ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
   ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור.
   הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
   א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
   ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
   בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
   א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

1) א. 8000. ב. 6840.
2) א. 0.0001. ב. 0.6561. ג. 0.3439.
3) 0.476.
4) א. 0.04. ב. 0.48.
5) א. 40^5. ב. 78,960,960.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 22 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (יחידה 4 - ממן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 88

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$.

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:

א. אין שום הגבלה לבחירה.
ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.

א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.

א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.

א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

8) $2n$ בנים ו-$2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

1) א. 53130. ב. 20475. ג. 3003.
2) א. 252. ב. 100. ג. 100. ד. 60.
3) א. 0.1117. ב. 0.1445. ג. 0.9819.
4) א. 0.02. ב. 0.187. ג. 0.972. ד. 0.00246.
5) א. 0. ב. 0.1923. ג. 0.009. ד. 0.837.
6) א. $6.45\cdot10^{-5}$. ב. $2.58\cdot10^{-4}$. ג. 0.3225.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $\binom{2n}{n}^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{i}^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 23 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות (יחידה -4 ממן 12 - מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 91

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ב. כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית.
הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות.
כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.

א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.

א. מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?

7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת.
חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:

א. אין בוועדות תפקידים.
ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:

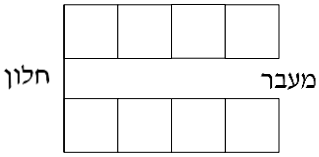
א. ללא הגבלה.
ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים.
מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.
כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11) ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.
4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12) סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
א. כמה סיסמאות שונות יש?
ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

13) מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n.
א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

14) שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

15) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).

חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):

א. בקוד אין את הספרה 5.

ב. בקוד מופיעה הספרה 3.

ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 102,400,000. ב. 78,960,960. ג. 658008.

2) א. 810,000. ב. 657,720. ג. 27,405.

3) א. 14,040,000. ב. 1,404,000. ג. 5,616,000. ד. 8,424,000.

4) א. 0.00024. ב. 0.00098. ג. 0.05933. ד. 0.75000.

5) א. 0.00098. ב. 0.17798. ג. 0.02929. ד. 0.02197.

6) א. $\frac{1}{4096}$. ב. $\frac{1}{32,768}$. ג. 0.205. ד. 0.795.
ה. 0.0105. ו. 0.5129. ז. 0.1071.

7) א. 4,200. ב. 50,400. ג. 604,800.

8) א. 604,800. ב. 2,880. ג. 2,880.

9) 0.238.

10) א. 0.1512. ב. 0.014. ג. 0.059. ד. $\frac{62}{10^6}$.

11) א. 40,320. ב. 0.1071. ג. 0.2142. ד. 0.0357.
ה. 0.5714. ו. 0.1429. ז. 0.0143. ח. 0.0095.

12) א. 60,466,176. ב. 45,239,040. ג. 48,484,800.

13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$. ב. $n\cdot(n-1)(n-2)$. ג. n^3.

14) $\frac{1}{4^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

15) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 24 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד (יחידה 5 - ממן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 96

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?

3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.

4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערן ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 0.2.

2) $\frac{1}{3}$.

3) 0.5.

4) 0.

5) $\frac{1}{6}$.

6) $\frac{2}{11}$.

7) $\frac{1}{3}$.

8) $\frac{3}{4}$.

9) $\frac{2}{3}$.

10) $\frac{1}{4}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 25 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד (יחידה 5- ממן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 99

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:

א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?

ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?

ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?

ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?

ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?

2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.

א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?

ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?

ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?

ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.

א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?

ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?

ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?

ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.

ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?

ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?

ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?

ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?

ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21:
40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.833. ב. 0.9375. ג. 0.0625. ד. 0.5. ה. 0.789.

2) א. 5%. ב. 0.0833. ג. 0.786. ד. 0.6875.

3) א. 0.4. ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.25. ד. $\frac{6}{7}$.

4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.6. ד. $\frac{23}{30}$.

	אקדמאי	לא אקדמאי	סה"כ
שכיר	20	180	200
עצמאי	30	70	100
סה"כ	50	250	300

ה. 0.3. ו. 0.72.

5) א. 0.625. ב. 0.133. ג. 0.402.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 26 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (יחידה -5 ממן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 103

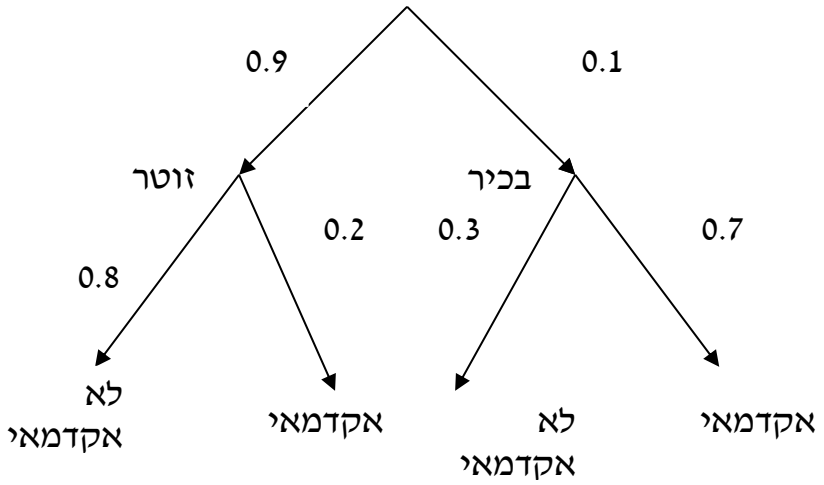
דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי? $0.1\cdot 0.7=0.07$.

2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי? $0.9\cdot 0.8=0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף
(רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי? $0.1\cdot 0.7+0.9\cdot 0.2=0.25$.

4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?
מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה: $P(zutar\,|\,academay)=\frac{0.9\cdot 0.2}{0.25}=\frac{0.18}{0.25}=0.72$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B, מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1,\ldots,A_n$ כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

אזי: $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)$.

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{A_j}{B}\right)=\frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאם סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו.
70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D.
אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P, ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.
אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
- רונית, דולב, רונית.

בכל משחק מישהו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית.
איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2}{7}$. ב. $\frac{23}{49}$.

2) א. 6%. ב. 58%. ג. 0.241. ד. 0.2.

3) א. 0.544. ב. 0.5.

4) א. 9%. ב. 0.09375. ג. 0.9722.

5) א. 0.14. ב. 0.3488. ג. 0.2442.

6) א. 70%. ב. 0.8125.

7) א. 0.57. ב. 0.3158. ג. 0.7543.

8) א. 0.0886. ב. 0.2889. ג. 0.3137. ד. 0.8778.

9) $\frac{kp}{1+p(k-1)}$.

10) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 27 - תלות ואי תלות בין מאורעות (יחידה 5 - ממן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 108

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A/B)=P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון: $P(A\cup B)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(A)=0.2$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6) עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
$P(A\cup B)=0.9$, $P(A\cap\overline{B})=0.3$, $P(A|B)=0.6$.
האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7) הוכיח שאם: $P(A/B)=P(B/A)$, אז: $P(A)=P(B)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו!

א. אם: $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B: $0<P(B)<1$, $P(A)>0$, לכן: $P(A/B)<P(A)$.

ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיובים לכן A ו-B מאורעות זרים.

ה. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A)-P(B)$ לכן A ו-B מאורעות זרים.

תשובות סופיות:

1) כן.

2) א. 0.28. ב. 0.18.

3) א. 0.0064. ב. 0.1536.

4) א. 0.5904. ב. 0.9984.

5) א. 0.08^5. ב. 0.3409.

6) לא, הם תלויים.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 28 - שאלות מסכמות בהסתברות (יחידה 5 - ממן 13 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 111

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?

ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?

ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים.
נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.

א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.

ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון.
מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?

ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?

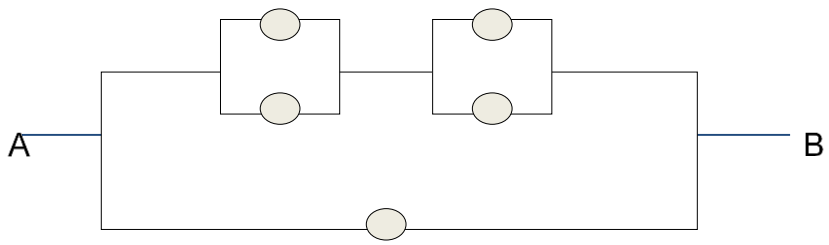
ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p.

כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.

הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P+(1-P)\left(2P-P^2\right)^2$.

9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.

א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?

ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?

ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10) נתונים שלושה מאורעות: A, B ו-C. ידוע ש: $P(A|B)=1$, $P(A|C)=1$.

תנו דוגמא ספציפית למאורעות: A, B ו-C שבה המאורעות B ו-C תלויים.

11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:

אם A ו-B בלתי תלויים, אז A ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים.

12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P כאשר: $0<P<1$.

נגדיר את המאורעות הבאים:

A - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.

B - המשחק הראשון היה ניצחון.

מה ערכו של P, עבורו A ו-B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

13) טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים שונים של המכחול הוא: $\frac{N+1}{3(N-1)}$.

14) הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.25. ב. 0.75. ג. 0.6. ד. 0.5.

2) א. 0.2. ב.0.267. ג. 0.524. ד. תלויים.

3) א. 0.2. ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06.

4) א. 0.94. ב. 0.255. ג. 0.03. ד. 0.168.

5) א. 15%. ב. 0.692. ג. לא זרים ותלויים.

6) א. 0.65. ב. תלויים. ג. 0.5384.

7) א. 8%. ב. 0.733. ג. תלויים.
ד. i. 0.478. ד. ii. 0.15.

8) שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{19}{480,700}$. ב. $\frac{27,132}{480,700}$. ג. 0.4015.

10) ראו סרטון.

11) שאלת הוכחה.

12) $\frac{1}{2}$.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 29 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 116

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

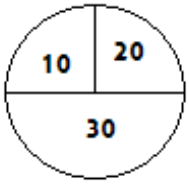
משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.
סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות .
בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2) מהאותיות: A , B , C יוצרים קוד דו תווי.
א. כמה קודים ניתן ליצור?
ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים.
נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.
מצאו את ערכו של A .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות.
בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה.
נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.25	0.35	0.3	0.1

2) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	0.05	0.20	0.75

4) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.3	0.21	0.147	0.343

5) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.006	0.092	0.398	0.504

6) 10.

7) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

8) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.74	0.15	0.1	0.01

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 30 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 120

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

מגדירים תוחלת באופן הבא: $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu$.

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

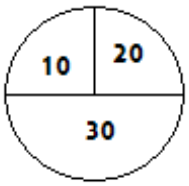
מגדירים שונות באופן הבא: $V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=\sigma^2$.

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD=\sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

$$E(X)=10\cdot 0.25+20\cdot 0.25+30\cdot 0.5=22.5=\mu$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=(10-22.5)^2\cdot 0.25+(20-22.5)^2\cdot 0.25+(30-22.5)^2\cdot 0.5=68.75=\sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{68.75}=8.29$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X:

X	-30	0	20	40
$P(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את: $E(X)$.

3) ידוע של- 20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X:

X	2	4	6	8
$E(X)$		0.3		0.2

כמו כן נתון ש: $E(X)=4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את: $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 0-5 ו-5.
נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקציית ההסתברות.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2 , שונות: 796.

2) 0.9.

3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36 , סטיית תקן: 1.603.

4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3 , שונות: 2.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.4	0.3	0.1	0.2

6) ראו טבלה:

X	-5	0	5
$P(X)$	0.2	0.6	0.2

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 31 - המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 123

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a,b הם קבועים כלשהם: $Y=aX+b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y)=aE(X)+b$.
2) $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

שלבי העבודה:

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X)=68.75=\sigma^2$, $E(X)=22.5=\mu$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X)=4$ ו- $V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.

ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

X	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.1	0.2	0.2	0.3		

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

א. השלימו את פונקציית ההסתברות.

ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.

ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}$, $k=1,2...4$.

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 14, שונות: 32.

2) תוחלת: 8, שונות: 12.

3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

4) תוחלת: 3, שונות: 3.

5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

X	100	50	25	0
$P(X)$	0.001	0.02	0.05	0.929

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

6) ב. $V(X)=1.8275$.

7) א. $A=10$. ב. $E(X)=3$, $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$, $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$, $V(Y)=0.25$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 32 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 126

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקרים אזי:

$E(T) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$.

אם: $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u> בזוגות, אזי:

$V(T) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$.

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.
מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10.
הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות.
ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2) X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3.
סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
Y - סכום הזכייה במשחק השני.
נתון:

$$\sigma(X)=3 \quad , \quad E(x)=10$$
$$\sigma(Y)=4 \quad , \quad E(y)=12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪.
מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K=2,3,4,5 \ , \ P(X=K)=\frac{A}{K-1}$$
$$0 \qquad \text{אחר} \qquad \text{ת}$$

מצאו את ערכו של A.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל.
בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 9, שונות: 15.
2) 5.
3) תוחלת: 22, שונות: 5.
4) תוחלת: 90, שונות: 275.
5) א. $A = \frac{12}{25} = 0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.
ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 33 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 129

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של X:

לכל $k=0,1,2,....,n$ $\quad P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot 1$; $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X)=np$

שונות: $V(X)=npq$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של X ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.

א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?

ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?

ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?

ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.

א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה.
לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.

א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?

ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?

ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.

א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?

ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ.
חשבו את: $E\left(X^2\right)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049

ד. 0.0729 ה. 0.40954 ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45.

2) ב. 0.2335 ג. 0.1493 ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449.

3) א. 0.5314 ב. 0.0984 ג. 0.1143.

ד. תוחלת: 18-, סטיית תקן: 14.697.

4) א. 0.1789 ב. 2.

5) א. 0.1956 ב. 0.4253.

6) א. 0.85 ב. 0.182 ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8.

7) א. 0.401 ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193.

8) 7.5.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 34 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות גיאומטרית (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 133

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.
נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
$X \sim G(p)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,...\infty$.

תוחלת: $E(X)=\frac{1}{p}$.

שונות: $V(X)=\frac{q}{p^2}$.

תכונות חשובות:

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,
דהיינו, $P(X>k)=q^k \cdot P(X=(n+k)/X>k)=P(X=n)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?

ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?

ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?

ד. אם הוצאו יותר מ-3 כדורים . מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?

ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. שידגום 3 מוצרים.

ב. שידגום 4 מוצרים.

ג. שידגום 5 מוצרים.

ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.

ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9.
אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.

א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?

ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?

ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?

ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪.
מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".

א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?

ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים,
אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?

ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?

ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.

א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?

ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?

ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.
מה ההסתברות ששיחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?

ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?

ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?

ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

תשובות סופיות:

1) א. 0.04512. ב. 0.0428. ג. 0.0407. ד. 0.6983. ה. 0.6983.

2) א. 0.009. ב. 0.0001. ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234.
ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5.

3) א. 0.999. ב. 0.875. ג. 0.03125. ד. 1.

4) א. 0.1029. ב. 9.72.

5) א. 0.06. ב. 0.7176. ג. 0.0729. ד. 9.487.

6) א. 0.015. ב. 0.0215. ג. תוחלת: $63\frac{1}{3}$, שונות: $2777\frac{7}{9}$.
ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 35 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות אחידה (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 136

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות.
הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.
$X \sim U(a,b)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=K)=\frac{1}{b-a+1}$, $K = a, a+1, .., b$.

תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

שונות: $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל.
מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45.
נתבונן במשתנה X - המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.

א. חשבו את $P(X=2)$.

ב. חשבו את $P(X\le 30)$.

ג. חשבו את $P(X>4 \mid X\le 10)$.

ד. חשבו את $P(X=k)$.

2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.

א. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?

ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:

i. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?

ii. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

3) יהי X התוצאה בהטלת קובייה.

א. מהי ההתפלגות של X?

ב. מה התוחלת של X?

ג. קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?

4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?

5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.

א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?

ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?

ג. אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?

6) הוכיחו שאם: $X\sim U(a,b)$, אז מתקיים ש: $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{45}$. ב. $\frac{30}{45}$. ג. 0.6.

2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.

ב. i. 0.08192 ב. ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71.

3) א. $X \sim U(1,6)$. ב. 3.5. ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66.

4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25.

5) א. $\frac{1}{50}$. ב. $\frac{30}{50}$. ג. $\frac{7}{30}$.

6) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 36 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 139

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim pois(\lambda)$.

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X=K)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{K}}{K!} \quad , \quad K=0,1,2,...\infty .$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X)=V(X)=\lambda .$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?

ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?

ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?

ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד.
בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.

א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?

ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בכול החלק ישנן 15 טעויות?

ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.

א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?

ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?

ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?

ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.

א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?

ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?

ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

תשובות סופיות:

1)	א. 0.0337.	ב. 0.9933.	ג. 0.1246.	ד. 5.
2)	א. 0.084.	ב. 0.099.	ג. 0.151.	
3)	א. 4.	ב. 0.407.		
4)	א. 0.1804.	ב. 0.8647.	ג. 0.6767.	ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41.
5)	א. 0.0139.	ב. 0.2196.	ג. 0.6948.	
6)	א. 16.7.	ב. 0.0708.		

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 37 - התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית (יחידה 6 - ממן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 142

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים , מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.
X מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.
משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N,D,n) יסומן על ידי: $X \sim H(N,D,n)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות: $P(X=k)=\dfrac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

התוחלת של ההתפלגות: $E(X)=n\cdot\dfrac{D}{N}$.

השונות של ההתפלגות: $V(X)=n\cdot\dfrac{D}{N}\cdot\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.

ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.
נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה (לא בטבלה).

ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X?

ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P\left(X=2 \mid X>1\right)$.

3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:

א. האוכלוסייה גדולה מאד.

ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.

4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים.
בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.

א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?

ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{5}{9}$.

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{20}{27}$.

2) א. $\frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$. ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

4) א. 0.0256. ב. 0.8.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 38 - התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית שלילית (יחידה 6 - מn"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 145

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית שלילית:

רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- r. X = מספר החזרות עד שהתקבלו r הצלחות: $X \sim NB(r,p)$.

פונקציית ההסתברות: $k = r, r+1, \ldots \infty$, $P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

תוחלת: $E(X) = \frac{r}{p}$.

שונות: $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קובייה מוטלת עד שמקבלים 3 פעמים תוצאה שגדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. כדור מוצא באקראי פעם אחר פעם ומוחזר בין הוצאה להוצאה. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוצאו עד שהתקבלו 2 כדורים לבנים בסך הכול (לא בהכרח ברצף).

א. חשבו את $P(X=2)$.

ב. חשבו את $P(X=3)$.

ג. חשבו את $P(X=4)$.

ד. חשבו את $P(X=k)$.

2) הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).

א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?

ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?

ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?

ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?

ה. מה הסיכוי שישחק k פעמים?

3) הראו שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

4) מטבע מוטל שוב ושוב עד שמתקבל שלוש פעמים עץ בסך הכול.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.

ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?

ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

5) יהיה X_i מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה, כאשר $i=1,2,\dots,n$.

הוכיחו שהתוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^{n} X_i$ זהות לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית השלילית $NB(n,p)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.36. ב. 0.288. ג. 0.0576. ד. $0.6^2 \cdot 0.4^{k-2}$.

2) א. 0.16. ב. 0.192. ג. 0.1728. ד. 0.13824. ה. $0.4^2 \cdot 0.6^{k-2}$.

3) שאלת הוכחה.

4) ב. תוחלת: 6, שונות: 6. ג. 0.1886.

5) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 39 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (יחידה 6 - ממן 14 - מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 148

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתון כי: $Y \sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$, $X \sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T.
האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל).
מהי פונקציית ההסתברות של X?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכויי של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות.
מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X)=2$ וכן $V(X)=1$.

חשבו: $E(X-5)^2$.

10) הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P. בוחרים באקראי ארבעה נבחנים.

ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P.

ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.
ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

2) א. 0.03
ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

3) א. ראו טבלה:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ב. תוחלת: 3, שונות: 2.
ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

4) א. 0.9975.
ב. 0.0172.
ג. 1.0025.

5) א. 0.375.
ב. 0.6.
ג. 0.282.
ד. 0.282.

6) א. ראו טבלה:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.092	0.392	0.428	0.084

ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.
ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

7) א. 0.4348.
ב. 0.0923.

8) א. 2.013.
ב. 0.5256.
ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

9) 10.

10) א. 0.6.
ב. 0.0384.
ג. 0.0256.
ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11.
ה. 0.24.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 40 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים (יחידה 8 - ממן 15 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

תוכן העניינים

1. כללי 152

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים:

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו').

משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.
באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

בקורס הנוכחי לא נבצע אינטגרציה כדי לחשב את השטחים, אלא נשתמש בצורות הנדסיות מקובלות.

ריענון מתמטי:

<u>נוסחאות לחישוב שטחים</u>:

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקיי 2: $S_{triangle}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{rectangle}=a\cdot b$.

<u>משוואת קו ישר</u>:

$y=mx+n$.

m - שיפוע.

n - נקודת החיתוך עם ציר ה- y .

שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$: $m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1,Y_1) ושיפועו ידוע m:
$y-Y_1=m(x-X_1)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פונקציית התפלגות מצטברת:

היא פונקציה הנותנת במשתנה רציף את הסיכוי ליפול מתחת לערך מסוים:

$$\boxed{F(t)=p(X\le t)}$$

כמו כן:

$$\boxed{p(X>t)=1-F(t)} \quad \boxed{p(a<X<b)=F(b)-F(a)}$$

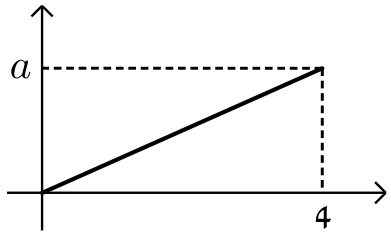
אחוזונים:

האחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו: x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P.

כלומר: $\boxed{p(X\le x_p)=p}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשרטוט שלפניכם נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה X.
X הינו זמן ההמתנה למענה קולי בדקות.



א. מצאו את ערכו של a.

ב. רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ג. חשבו את הסיכוי שזמן ההמתנה נמוך מ-2 דקות.

ד. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ה. מהו האחוזון ה-80 של ההתפלגות?

תשובות:

א.
$$S_\Delta=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{4\cdot a}{2}=2a$$
$$2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

ב.
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}\cdot x & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

ג. $p(x<2)=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{4}=p(x\le 2)$

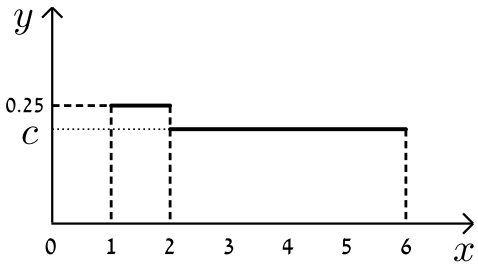
ד. $p(x\le t)=f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t\cdot\frac{t}{8}}{2}=\frac{t^2}{16} & 0\le t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$

ה. $p(x<2)=f(2)=\frac{2^2}{16}=\frac{1}{4}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של c.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2) נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

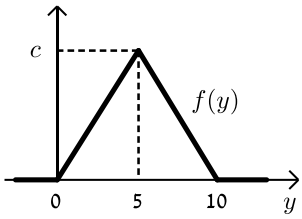
ידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות:

i. $P(Y=7.0)$.

ii. $P(Y\le 3.0)$.

iii. $P(7.5\le Y\le 15.5)$.

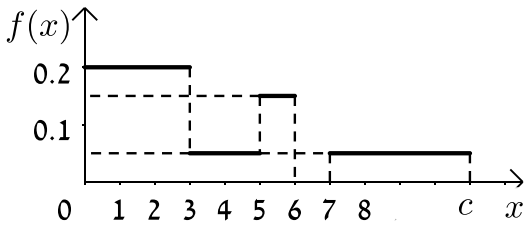
iv. $P(Y>4)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y.

הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X:



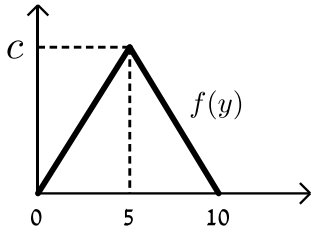
א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(X \geq 4)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(1.0 < X \leq 5.0)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



א. מה ערכו של c?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו $\frac{1}{2}$.

6) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t)=1-e^{-0.2t}$.

א. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ב. אם חיכיתי בתור 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכל פחות מרבע שעה?

ג. מה הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$.

ב. $f(t)=\begin{cases}0 & t>1\\ (t-1)\cdot 0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$.

ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

ב. 1.41. ג. $\frac{1}{16}$.

3) א. 0.2.

ב. $f(t)=p(y\le t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t\cdot 0.04t}{2}=0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-\frac{(10-t)(-0.04(t-10))}{2}=1-0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. i. 0. ii. 0.18. iii. 0.125. iv. 0.32.

ד. $Y_{0.5}=5$, $Y_{0.9}=7.76$, $Y_{0.25}=3.54$, $Y_{0.1}=2.24$.

4) א. 10.

ב. $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. $P(1<x<5)=0.5$, $P(x\ge -2)=1$, $P(x\ge 4)=0.35$.

5) א. 0.2. ב. 5 ± 1.46.

6) א. 0.0498. ב. 0.6321. ג. 115.13.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 41 - התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה (יחידה 8 - ממן 15)

תוכן העניינים

1. כללי 158

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b.

$X \sim U(a,b)$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$
$$a \le x \le b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=\frac{t-a}{b-a}.$$

התוחלת :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}.$$

השונות:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

X - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש-X קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של X?

$$a=20\ ,\ b=40$$
$$X\sim U(20,40)$$

א. $P(x<25)=f(25)=\frac{25-20}{40-20}=0.25$.

ב. $E(x)=\frac{20+40}{2}=30$

$V(x)=\frac{(40-20)^2}{12}=33\frac{1}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X, מתפלג: $U(13,16)$.

א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?

ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?

ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.

א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?

ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).

א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?

ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?

ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

ד. עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{2}{3}$.

2) א. $X \sim U(0,10)$. ב. 0.6. ג. 10.

3) א. 0.2. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 109.

ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 42 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית (יחידה 8 - ממן 15 החל משאלה 6 מומלץ כתרגול מסכם לבחינה)

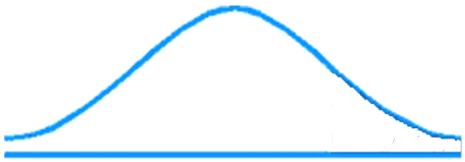
תוכן העניינים

1. כללי 161

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

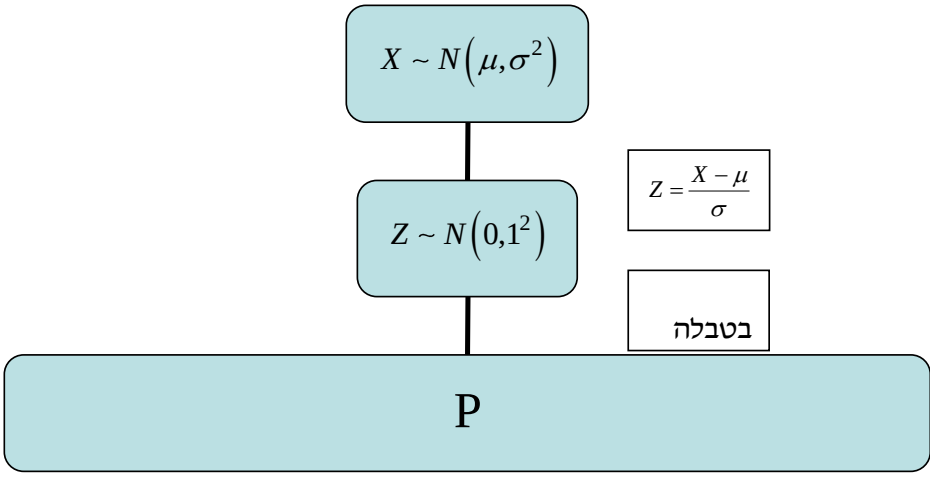
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

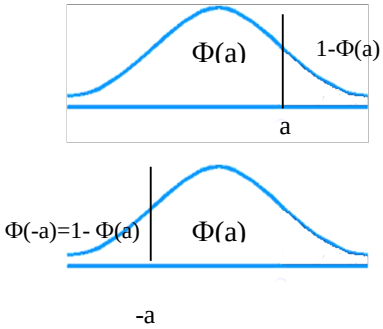
תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

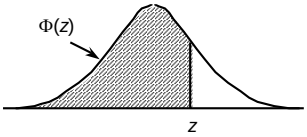
לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל


$X \sim N(\mu,\sigma^2)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
$Z \sim N(0,1^2)$
בטבלה
P


Φ(a)
1-Φ(a)
a
Φ(-a)=1- Φ(a)
Φ(a)
-a

טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?

ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?

ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?

ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?

ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?

ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?

ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?

ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?

ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?

ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?

ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?

ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.

א. מצאו את העשירון העליון.

ב. מצאו את האחוזון ה-95.

ג. מצאו את העשירון התחתון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.

א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?

ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?

ד. מהו האחוזון ה-20?

ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.

א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?

ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?

ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.

א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?

ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?

ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?

ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?

ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.

א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?

i. בעשירון העליון.

ii. בממוצע.

iii. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

i. 1.

ii. 2.

iii. 3.

iv. אין לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1)	א. 89.25%	ב. 2.28%	ג. 0	ד. 50%	ה. 50%
2)	א. 0%	ב. 3.76%	ג. 0%	ד. 68.26%	
3)	א. 26.43%	ב. 89.44%	ג. 39.44%	ד. 0.383	
	ה. 100%				
4)	א. 3812.8	ב. 3958	ג. 2787.2		
5)	א. 119.2	ב. 80.8	ג. 112.6	ד. 87.4	
6)	א. 500	ב. 532.9	ג. 453.48		
7)	א. 500	ב. 100	ג. 0.3446	ד. 733	
	ה. 267				
8)	א. 3	ב. בממוצע.	ג. 1		
9)	א. 0.1587	ב. 0.0228	ג. 0.8563	ד. 0.3975	
10)	א. 1925	ב. 0.2266	ג. 0.1587		
11)	א. 0.1359	ב. 0.675	ג. 100	ד. 0.25	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 43 - משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת (יחידה 7 - ממן 15)

תוכן העניינים

1. כללי 169

משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית: X ו- Y.

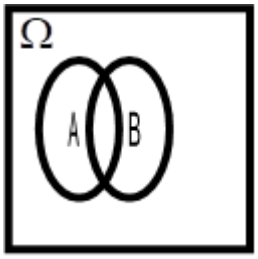
דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:



y / x	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

$$p(x=o, y=0)=0.05$$
$$p(x=o, y=1)=0$$
$$p(x=1, y=0)=0.15$$
$$p(x=1, y=1)=0.05$$
$$p(x=2, y=0)=0$$
$$p(x=2, y=1)=0.75$$

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

Y / X	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

משתנים בלתי תלויים:

X ו- Y יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y אפשריים התקיים הדבר הבא: $p(x=k, y=l)=p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

דוגמה:

$p(x=2, y=1)=0.75 \neq p(x=2)\cdot p(y=1)=0.75\cdot 0.8=0.6$.

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים.
נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y כמספר המשחקים שהאדם שיחק.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.

ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?

ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2) להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

Y/X	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

א. השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. האם X ו- Y תלויים?

ג. מצאו את הסתברות ש-$Y=3$, אם ידוע ש-$X=1$.

3) מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $\frac{1}{10}$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות.
יהי X מספר המוצרים בחבילה, ו- Y מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן $x=3$.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי X המספר הקטן מבין השניים ו- Y הגדול מביניהם.

א. חשבו את ההתפלגות של (X,Y).

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y=4$. מצאו: $E(X/Y=4)$.

5) ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.
יהי X מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי Y משתנה אינדיקטור:
1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.
0 – אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. 2.4. ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

$x \setminus y$	0	50	100	$P(y)$
1	0	0	0.3	0.3
3	0.343	0.294	0.063	0.7
$P(x)$	0.343	0.294	0.363	1

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.125.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
2	0.2	0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05	0	0.15
4	0.1	0.27	0.08	0.45
$P(x)$	0.4	0.4	0.2	1

3) א. $y/x=3 \sim B\left(n=3,\ p=\frac{1}{10}\right)$. ב. $y/x=k \sim B\left(n=k,\ p=\frac{1}{10}\right)$.

ג. 0.3. ד. להלן טבלה:

$x \setminus y$	2	3	$P(y)$
0	0.405	0.3645	
1	0.09	0.1215	
2	0.005	0.0135	
3	0	0.0005	
$P(x)$	0.5	0.5	1

4) א. להלן טבלה: ב. 0.5. תוחלת: 2.

$x \setminus y$	2	4	$P(y)$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**	$P(y)$
0	0.05	0.35	0	0.4
1	0	0.45	0.15	0.6
$P(x)$	0.05	0.8	0.15	1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 44 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים (יחידה 7 ממן 15)

תוכן העניינים

1. כללי 175

משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- ρ.
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.

-1 0 1

מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = ax + b$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שכל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שכל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם:

הנוסחה של מקדם המתאם היא: $\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

השונות המשותפת: $\operatorname{cov}(x,y) = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
2) $\operatorname{cov}(X,X) = Var(X)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

השפעת טרנספורמצייה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y)___if\ __a\cdot c>0\\ -\rho(X,Y)__if\ __a\cdot c<0\end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.
נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X)=\sum_i x_iP(x_i)=\mu=0\cdot0.05+1\cdot0.2+2\cdot0.75=1.7$$

$$V(X)=\sum_i(x_i-\mu)^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\mu^2=0^2\cdot0.05+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.75-1.7^2=0.31=\sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.31}=0.557$$

$$E(y)=\sum_i y_iP(y_i)=0+0.8=0.8$$

$$V(y)=\sum_i(y_i-\mu_y)^2P(y_i)=\sum_i y_i^2P(y_i)-\mu_y{}^2=0+0.8-0.8^2=0.16=\sigma_y{}^2$$

$$\sigma_y=\sqrt{0.16}=0.4$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$E(xy)=0\cdot0\cdot0.05+0\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot0.15+1\cdot1\cdot0.05+2\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot0.75=1.55$$

$$\operatorname{cov}(x,y)=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)=1.55-1.7\cdot0.8=0.19$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{0.19}{0.557\cdot0.4}=0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8.
אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פוני' ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?

ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?

ד. האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y.

ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?

2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y. האם המשתנים מתואמים?

ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?

ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הכדורים בתא הראשון.
Y - מספר הכדורים בתא השני.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

ב. האם המשתנים בלתי מתואמים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים.
יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. חשבו את מקדם המתאם של X ו- Y.

ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש- $X=2$.

5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן.
הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין.
נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין X לבין Y?

ד. מה יהיה מקדם המתאם:

i. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

ii. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x\backslash y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963. ו. מתואמים.

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x\backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25. ה. 0.5.

3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x\backslash y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים. ג. $\frac{2}{3}$.

$x \backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ד. i. $-\frac{2}{3}$. ii. -1. ה. $-\frac{2}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעים 30203

פרק 45 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות (יחידה 7 ממן 15)

תוכן העניינים

1. כללי 182

המשתנה המקרי הדו מימדי – קומבינציות ליניאריות:

רקע:

יהיו שני משתנים מקריים X ו- Y.

התוחלת והשונות של סכומם היא:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot\text{cov}(X,Y)$$

התוחלת והשונות של הפרשם היא:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$
$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\cdot\text{cov}(X,Y)$$

קומבינציה ליניארית:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים:
$W=(aX+b)+(cY+d)$. אזי:

$$\text{cov}\left[(aX+b),(cY+d)\right]=a\cdot c\cdot\text{cov}(X,Y)$$
$$E(W)=E\left((aX+b)+(cY+d)\right)=aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W)=V\left((aX+b)+(cY+d)\right)=a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot\text{cov}(X,Y)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתונים שני משתנים מקריים X ו- Y המקיימים:
$\mu_X=80$, $\sigma_X=15$, $\mu_Y=70$, $\sigma_Y=20$, $\text{cov}(X,Y)=200$

א. מצאו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ב. מצאו את התוחלת והשונות של X ו- Y.

ג. מצאו את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W=2X+3Y$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y/X	1	2	3	$P(X)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

א. השלימו את ההסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשבו את השונות המשותפת.

ה. חשבו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2) מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100, עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי היא 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3) נתון: $\mathrm{var}(X+2Y)=3$, $\mathrm{var}(X-2Y)=2$.

חשבו: $\mathrm{cov}(X,Y)$.

4) מטילים קובייה n פעמים. נגדיר את המשתנים הבאים:

X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

Y = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות n .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מתואמים. ד. 0.1-.

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
2	0.2	0.1	0.3	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
$P(x)$	0.4	0.2	0.4	1

ה. תוחלת: 4.4, שונות: 0.84. ו. תוחלת: 0.4-, שונות: 1.24.

2) א. 240. ב. תוחלת: 190, שונות: 1105.

ג. תוחלת: 10 , שונות: 145 ד. תוחלת: 1710, שונות: 2785.

3) 0.125-.

4) $-\frac{n}{36}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל