מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

תוכן העניינים

תוכן העניינים

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות

תוכן העניינים

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1,2,3,4,5,6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך}.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A, B, C. בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A=\{5,6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B=\{2,4,6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega|=6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A|=2$, $|B|=3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$, $\bar{B}=\{1,3,5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון – x	מספר התלמידים – השכיחות – f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A})=1-P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E.

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. התקבל פעם אחת עץ.

ii. התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D?

ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega=\{EE,EF,EG,FE,FF,FG,GE,GF,GG\}$.

ב. $A=\{EE,EF,EG,FE,GE\},\ B\{EF,EG,FE,FG,GE,GF\}$.

ג. $\bar{A}=\{FF,FG,GF,GG\}$.

2) א. $$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1)&(2,1)&(3,1)&(5,1)&(4,1)&(6,1)\\(1,2)&(2,2)&(3,2)&(4,2)&(5,2)&(6,2)\\(1,3)&(2,3)&(3,3)&(4,3)&(5,3)&(6,3)\\(1,4)&(2,4)&(3,4)&(4,4)&(5,4)&(6,4)\\(1,5)&(2,5)&(3,5)&(4,5)&(5,5)&(6,5)\\(1,6)&(2,6)&(3,6)&(4,6)&(5,6)&(6,6)\end{Bmatrix}.$$

ב. $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $C=\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4. ב. 0.4. ג. 0.5.

4) א. 0.22. ב. 0.78. ג. 0.32.

5) א. 0.1. ב. 0.2. ג. 0.8.

6) א. $\Omega=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP,EEE\}$.

ב. $A=\{PPE,PEP,EPP\}$, $D=\{PPP,PPE,PEP,EPP,PEE,EPE,EEP\}$.

ג. $\bar{D}=\{EEE\}$.

ד. $\frac{1}{8}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

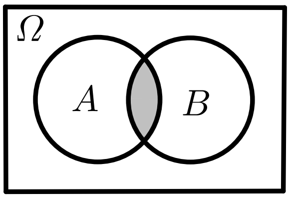
פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים

תוכן העניינים

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

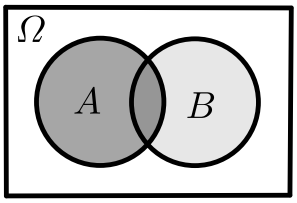
פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A\cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.

דוגמה:
בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B=\{2,4,6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A\cap B=\{6\}$.

פעולת איחוד:

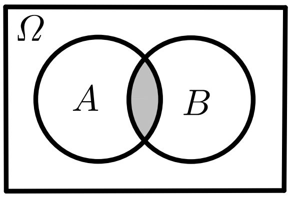


נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A\cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב-A או B.
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:
בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B=\{2,4,6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):
סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע״י הקשר הבא:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$P(A\bigcap B)=1-P(\overline{A}\bigcup\overline{B})$$

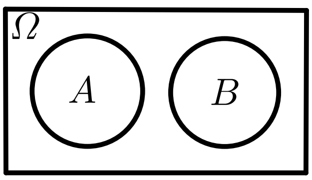
$$P(A\bigcup B)=1-P(\overline{A}\bigcap\overline{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\overline{A}$	A	
B	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(\overline{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
$A\cap B=\{\ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

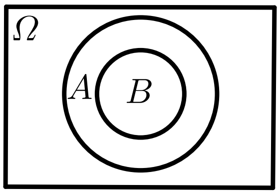
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A\cap B)=0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A=\{5,6\}$ והאפשרות לקבל 3 היא: $B=\{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A\cap B=\{\ \}$.

מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות A ו-B, השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B\subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך מאורע A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B\subset A$.

$A\cap B=B \quad P(A\cap B)=P(B)$

$A\cup B=A \quad P(A\cup B)=P(A)$

למשל: $A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,4\}$.

שאלות:

1) מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - במילה נמצאת האות E.
B - במילה אותיות שונות.
א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגראמת וון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
A , B , $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$.
ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4) נסמן ב-Ω את מרחב המדגם וב-ϕ קבוצה ריקה.
נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.
קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
$\overline{\overline{A}}$, $A \cap \phi$, $A \cup \phi$, $A \cap \Omega$, $A \cup \Omega$, $A \cap \overline{A}$, $\overline{\phi}$, $A \cup \overline{A}$.

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A\cap B$.

ב. $A\cup B$.

ג. $\overline{A}\cap B$.

ד. $\overline{A}\cup\overline{B}$.

ה. $\overline{\overline{A}}$.

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים.
חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:
א. ששתי המניות תעלנה.
ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.
ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.
B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.
C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.
א. האם A ו-B מאורעות זרים?
ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?
ג. האם A ו-C מאורעות זרים?
ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A)=0.6$,
$P(B)=0.3$, $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1$.
א. האם A ו-B מאורעות זרים?
ב. חשבו את $P(\bar{A}\cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:
A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.
B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.
איזו טענה נכונה?
א. A ו-B מאורעות זרים.
ב. A ו-B מאורעות משלימים.
ג. B מכיל את A.
ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.
א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?
ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14) נתון כי: $P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.25\ ,\ P(A\cup B)=0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל-$P(A\cap B)$.

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15) A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2\cdot P(B\cap\overline{A})=P(A\cap\overline{B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A\cap B=B\cap A$.

ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$.

ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$.

ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

17) נתון ש-A ו-B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש-$P(A)=0.3\ ,\ P(B)=0.2$.

א. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.4$?

ב. האם יתכן ש-$P(A\cup B)=0.6$?

ג. אם A ו-B זרים מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A\cup B)$?

18) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?

ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?

ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?

ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?

ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?

ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס.
כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20) הוכיחו: $P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$.

21) A ו-B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$?

תשובות סופיות:

1) א. $A\cap B=\{EG,EF,FE,GE\}$.
ב. $A\cup B=\{EG,EF,EE,FE,GE,EG,GF\}$.

2) א. $B\cap\bar{A}$. ב. $A\cap\bar{B}$. ג. $A\cap B$. ד. $A\cup B$. ה. $\bar{A}\cap\bar{B}$. ו. $\bar{B}$.

3) א. $A=0, 2 ,4 ,6 ,8$, $B=0, 1, 2, 3, 4$, $\bar{B}=5, 6, 7, 8, 9$,
$A\cap B=0, 2, 4$, $A\cup B=0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$.
ב. $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$, $P(\bar{B})=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cup B)=0.7$.

4) $\bar{\bar{A}}=A$, $A\cap\phi=\phi$, $A\cup\phi=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cup\Omega=\Omega$,
$A\cap\bar{A}=\phi$, $\bar{\phi}=\Omega$, $A\cup\bar{A}=\Omega$.

5) א. $A\cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A\cup B$: כל גובה אפשרי.
ג. $\bar{A}=\bar{A}\cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A}\cup\bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
ה. $A=\bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.

6) א. $A\cap B\cap C$. ב. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. ג. $A\cup B\cup C$.
ד. $\bar{C}$. ה. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(B\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})$.

7) א. $P(A\cup B)=0.24$. ב. $P(A\cap B)=0.04$. ג. $P(B\cap\bar{A})=0.16$.

8) א. $P(A\cap B)=10\%$. ב. $P(A\cup B)=50\%$. ג. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=50\%$.

9) א. $P(A\cap B)=0.2$. ב. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.3$. ג. $P(A\cup\bar{B})=0.3$.

10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.

11) א. כן. ב. $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

12) הטענה הנכונה היא ג'.

13) א. 0.05. ב. 0.95.

14) א. $P(A\cap B)=0.06$. ב. לא. ג. $P((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A}))=0.43$.

15) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$.

16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A\cup B)=0.5$. ד. $P(A\cup B)=0.3$.

18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
ז. 59%.

19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.

20) שאלת הוכחה.

21) נכון.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6 \ , \ n_2 = 2$$
$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26 \ , \ n_2 = 10 \ , \ n_3 = 10 \ , \ n_4 = 10 \ , \ n_5 = 10$$
$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
א. הטלת קובייה פעמים.
ב. מספר תלת ספרתי.
ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.
האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.
האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. המספר הוא זוגי.
ב. במספר כל הספרות שונות.
ג. במספר כל הספרות זהות.
ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
ה. במספר לפחות שתי ספות זהות.
ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).

4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. כולם ירו בקומה החמישית.
ב. כולם ירדו באותה קומה.
ג. כולם ירדו בקומה אחרת.
ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6) מטילים קובייה 4 פעמים.
א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?

7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?
ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
א. בקוד אין את הספרה 5.
ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

GOOL בשביל התירגול

תשובות סופיות:

1) א. 36. ב. 900. ג. 70. ד. 90.

2) א. 36. ב. i. $\frac{1}{36}$. ב. ii. $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.5. ב. 0.3024. ג. 0.0001. ד. 0.9999. ה. 0.6976. ו. 0.01.

4) א. $\frac{1}{8^5}$. ב. $\frac{1}{8^4}$. ג. 0.205. ד. $\frac{1\cdot 1\cdot 7^3}{8^5}$.

5) א. 3375. ב. 2730.

6) א. $\frac{1}{216}$. ב. $\frac{5}{18}$. ג. $\frac{13}{18}$. ד. $\frac{215}{216}$.

7) א. $\frac{23^5}{26^5}$. ב. $\frac{1}{26^4}$. ג. $1-\frac{1}{26^4}$. ד. $\frac{1}{26^2}$.

8) א. 0.9^a. ב. $1-0.9^a$. ג. 0.5^a.

9) 2^n.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 4 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$.

<u>הערה</u>: $0!=1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d, כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba?

שאלות:

1) חשבו : בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

1) א. 24. ב. 120.

2) א. 0.2. ב. 0.8. ג. 0.022.

3) א. 362880. ב. 2880.

4) א. 3628800. ב. 0.2. ג. 0.8. ד. $\frac{1}{45}$.

5) א. $\frac{1}{792}$. ב. $\frac{1}{99}$. ג. $\frac{1}{4620}$.

6) א. 0.75. ב. 0.014. ג. $\frac{1}{14}$. ד. $\frac{1}{35}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2 ו- n_r זהים מסוג r: $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K?

שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6.
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10.
המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו.
מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור,
אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור.
דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

1) 10.
2) 60.
3) 90.
4) 20.
5) $\frac{1}{210}$.
6) 12600.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 6 - קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל

תוכן העניינים

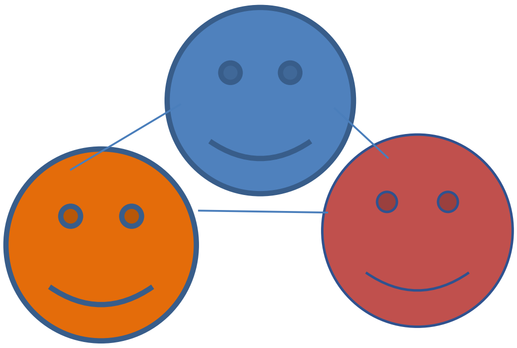
קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא: $(n-1)!$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד.
בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



שאלות:

1) מעצב פנים יצר ללקוחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל.
במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:

א. גווני האפור צמודים זה לזה.

ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.

2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים.
הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציור.

ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט.
הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.

ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.

4) n בנים ו-n בנות הסתדרו במעגל באקראי.

א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?

ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?

ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

תשובות סופיות:

1) א. 2177280. ב. 7776.

2) א. $\frac{1}{9!}$. ב. $\frac{2}{9}$.

3) א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{15}$.

4) א. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ב. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$. ג. $\frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים <u>שונים</u>, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3=1{,}000$, $k=3$, $n=10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n\ge k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k=n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים <u>שונים</u>.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$.

שאלות:

1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.

א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?

ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.

א. מה ההסתברות לזכות במשחק?

ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?

ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור.
הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.

א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?

ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם :

א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

1) א. 8000. ב. 6840.

2) א. 0.0001. ב. 0.6561. ג. 0.3439.

3) 0.476.

4) א. 0.04. ב. 0.48.

5) א. 40^5. ב. 78,960,960.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{(n)_k}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$.

הערות:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$.

3) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

שאלות:

1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
   א. אין שום הגבלה לבחירה.
   ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
   ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
   א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
   ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
   ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
   ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
   יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
   א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
   ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
   ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
   א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
   ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
   ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
   ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן.
   מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר).
   שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
   א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
   ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
   ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
   ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.

8) $2n$ בנים ו-$2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

1) א. 53130. ב. 20475. ג. 3003.
2) א. 252. ב. 100. ג. 100. ד. 60.
3) א. 0.1117. ב. 0.1445. ג. 0.9819.
4) א. 0.02. ב. 0.187. ג. 0.972. ד. 0.00246.
5) א. 0. ב. 0.1923. ג. 0.009. ד. 0.837.
6) א. $6.45\cdot10^{-5}$. ב. $2.58\cdot10^{-4}$. ג. 0.3225.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $\binom{2n}{n}^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{i}^2$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 9 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

רקע:

מספר האפשרויות לבחור k עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך n עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים, ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת:

$$\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}.$$

דוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך אוכלוסייה של n עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	**עם התחשבות בסדר הבחירה**	**ללא התחשבות בסדר הבחירה**
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$
ללא החזרה	$(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

שאלות:

1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?

2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?

3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:
   א. הכדורים זהים.
   ב. הכדורים שונים זה מזה.

4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:
   א. המשחקים שונים זה מזה.
   ב. במשחקים זהים זה לזה.

5) מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 = 3$.

6) מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה הבאה:
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$.

7) במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?

8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה אות יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?

9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20.
אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:
   א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.
   ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

10) ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים.
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

11) ישנם k כדורים להכניס ל-n תאים $(n>k)$.
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

תשובות סופיות:

1) 495.

2) 21.

3) א. 45. ב. 6561.

4) א. 4^{10}. ב. 286.

5) 4.

6) 1771.

7) 15.

8) 10.

9) א. $\frac{1}{4845}$. ב. $\frac{1}{8855}$.

10) א. 7776 ב. 252. ג. 720. ד. 6.

11) א. n^k. ב. $\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$. ג. $(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$. ד. $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 10 - כלל ההכלה וההפרדה

תוכן העניינים

כלל ההכלה וההפרדה:

רקע:

אנו מעוניינים בנוסחה לחישוב הסתברות של איחוד מאורעות. אם קיימים n מאורעות זרים בזוגות, הסיכוי לאיחוד המאורעות הוא סכום ההסתברויות של כלל המאורעות.

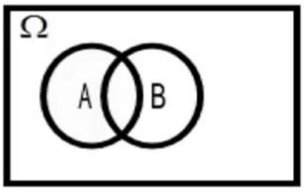
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right).$$

אם דנים במאורעות שאינם בהכרח זרים בזוגות, סכימת ההסתברויות של כלל המאורעות תוביל לספירה כפולה של חלק מהמאורעות.
למשל: אדם מטיל קובייה. מה הסיכוי לקבל תוצאה זוגית או את התוצאה 2 לכל היותר?

בדוגמה שהוצגה לעיל מדובר בהסתברות לאיחוד שני מאורעות ומתקיים:

$$P\left(A_1\cup A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\cap A_2\right).$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:

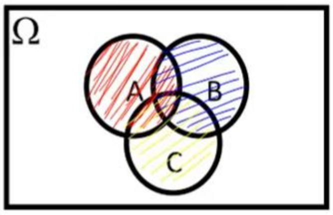


נוסחה זו היא נוסחת ההכלה וההפרדה לשני מאורעות.

במקרה של שלושה מאורעות נוסחת ההכלה וההפרדה תיראה כך:

$$P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)-P\left(A_1\cap A_2\right)-P\left(A_1\cap A_3\right)-P\left(A_2\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\right).$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:



כעת נכליל את הנוסחה ל-n מאורעות:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)-\sum_{i<j} P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{i<j<k} P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)\ldots+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מטילים חמש קוביות. מה ההסתברות שלפחות אחת מהתוצאות הבאות לא תתקבל באף אחת מהקוביות: 1, 2, 3, 4?

שאלות:

1) רני קיבלה ליום הולדתה חמש מתנות וסידרה אותן בשורה מימין לשמאל.

א. מה ההסתברות שהמתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה הראשונה בשורה והמתנה העטופה בסרט ירוק לא תהיה האחרונה בשורה?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהמאורעות הבאים יתרחש?

i. המתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה השנייה בשורה.

ii. המתנה הקטנה ביותר לא תהיה השנייה בשורה.

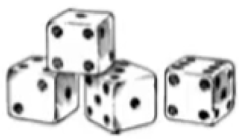
iii. המתנה העטופה בנייר חום לא תהיה השלישית בשורה.

2) אדם הטיל קובייה ארבע פעמים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A: התוצאה 1 התקבלה לפחות פעם אחת.

B: התוצאה 2 התקבלה לפחות פעם אחת.

C: התוצאה 3 התקבלה לפחות פעם אחת.



חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. $P(A\cap B)$.

ב. $P(A\cap B\cap C)$.

3) מפזרים באופן מקרי חמישה כדורים בעשרה תאים. הכדורים ממוספרים מ-1 עד 5. אין הגבלה על מספר הכדורים בכל תא.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. לפחות אחד משני התאים השמאליים ריק.

ב. לפחות אחד משלושת התאים השמאליים ריק.

ג. שני התאים השמאליים תפוסים.

ד. ארבעת התאים השמאליים תפוסים.

4) בוחרים מספר אקראי מהמספרים: $\Omega=\{1,2,...,1000\}$.

מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק לפחות באחד מהמספרים: 5, 3, 2?

5) עשרה ילדי גן נתבקשו לבחור גיבור-על מרשימה של 14 גיבורי-על. אם כל ילד בוחר באקראי מתוך הרשימה ללא תלות בילדים אחרים, מה ההסתברות שבדיוק שישה גיבורי-על ייבחרו?

6) ניסוי מקרי הוא בעל מרחב המדגם: $\Omega=\{1,2,3,...\}$.
$P(n)$ הוא ההסתברות לקבל את התוצאה n ממרחב המדגם.
נתון ש: $P(n)=A\cdot 0.5^n$. כמו כן נתון ש- A הוא קבוע חיובי.

א. מצאו את ערכו של הפרמטר A.
ב. חשבו את: $P(n>6)$.
ג. חשבו את הסיכוי שהתוצאה שתתקבל בניסוי תהיה אי-זוגית.

7) יוצרים מספר בן 8 ספרות מהספרות: $1,2,...,8$. במספר שיוצרים כל ספרה מופיעה בדיוק פעם אחת.

א. מה ההסתברות שבמספר לא מופיעים הרצפים: 12, 34, 56?
ב. מה ההסתברות שבמספר מופיע לפחות אחד מהרצפים: 123, 234, 567?

8) מסדרים בשורה שמונה נעליים שהן ארבעה זוגות. מה ההסתברות שלפחות שתי נעליים שהן זוג יהיו זו לצד זו בשורה?

9) מפזרים באופן מקרי m כדורים ל-n תאים שונים ($m\ge n$). תא יכול להכיל גם יותר מכדור אחד. מצאו ביטוי להסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלתם.

10) בכיתה יש n תלמידים, ולכל תלמיד יומן אישי. המורה אסף את היומנים של כל התלמידים. יום למחרת חילק לכל תלמיד יומן מהיומנים שאסף, אך החלוקה הייתה אקראית (תלמיד לא בהכרח קיבל את היומן האישי שלו).

א. מה ההסתברות שאף תלמיד לא קיבל את היומן האישי שלו?
ב. למה שואפת ההסתברות מהסעיף הקודם אם: $n\to\infty$?

11) על השולחן עשרה מסמכים. מכניסים כל מסמך לאחת משמונה תיקיות ריקות באופן אקראי. לכל תיקייה צבע אחר.
אין הגבלה על מספר המסמכים שיכולים להימצא בכל אחת מהתיקיות.

א. מה ההסתברות שבתיקייה האדומה יהיו בדיוק שני מסמכים?
ב. מה ההסתברות שהתיקייה הצהובה תישאר ריקה וגם בתיקייה הירוקה יהיה לפחות מסמך אחד?
ג. מה ההסתברות שיהיו לפחות שש תיקיות ריקות?
ד. מה ההסתברות שיהיו בדיוק שתי תיקיות ריקות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.65. ב. $\frac{59}{60}$.

2) א. 0.233. ב. $\frac{1}{12}$.

3) א. 0.8533. ב. 0.9565. ג. 0.1467. ד. 0.0096.

4) 0.734.

5) 0.1706.

6) א. 1. ב. 0.015625. ג. $\frac{2}{3}$.

7) א. 0.6756. ב. 0.0496.

8) 0.6571.

9) $1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(n-i)^m\cdot(-1)^{i-1}}{n^m}$.

10) א. $\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$. ב. 0.3679.

11) א. 0.2416. ב. 0.2068. ג. 0.00003. ד. 0.4286.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 11 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו״ל.
בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ב. כמו בסעיף א׳ רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית.
הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות.
כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
ג. מה ההסתברות ש״דומינו״ יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
ד. מה ההסתברות ש״דומינו״ לא יוכנס למגירה העליונה?

5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
א. מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?

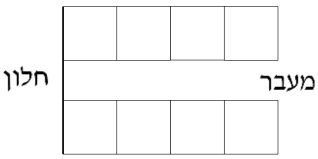
7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת.
חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
א. אין בוועדות תפקידים.
ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
א. ללא הגבלה.
ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10) 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.
כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11) ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.
4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12) סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
א. כמה סיסמאות שונות יש?
ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

13) מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n.
א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

14) שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

15) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):
א. בקוד אין את הספרה 5.
ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

16) זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?

17) בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
א. מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
ב. מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?

18) במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
א. מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
ב. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
ג. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
ד. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?

19) לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים.
לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
א. מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
ב. מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
ג. מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?

20) מסדרים n כדורים שונים ב n תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא i $(1 \le i \le n)$ יהיו בדיוק k כדורים?

21) בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
א. כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
ב. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
ג. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

22) מטילים קובייה הוגנת k פעמים.

א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא j ?

ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא i?

ג. עבור $i \leq j$, מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא j וגם התוצאה הכי קטנה היא i?

תשובות סופיות:

1) א. 102,400,000.   ב. 78,960,960.   ג. 658008.

2) א. 810,000.   ב. 657,720.   ג. 27,405.

3) א. 14,040,000.   ב. 1,404,000   ג. 5,616,000.   ד. 8,424,000.

4) א. 0.00024.   ב. 0.00098.   ג. 0.05933.   ד. 0.75000.

5) א. 0.00098.   ב. 0.17798.   ג. 0.02929.   ד. 0.02197.

6) א. $\frac{1}{4096}$.   ב. $\frac{1}{32,768}$.   ג. 0.205.   ד. 0.795
ה. 0.0105.   ו. 0.5129.   ז. 0.1071.

7) א. 4,200.   ב. 50,400.   ג. 604,800.

8) א. 604,800.   ב. 2,880   ג. 2,880.

9) 0.238.

10) א. 0.1512.   ב. 0.014.   ג. 0.059.   ד. $\frac{62}{10^6}$.

11) א. 40,320.   ב. 0.1071.   ג. 0.2142.   ד. 0.0357.
ה. 0.5714.   ו. 0.1429.   ז. 0.0143.   ח. 0.0095.

12) א. 60,466,176.   ב. 45,239,040.   ג. 48,484,800.

13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$.   ב. $n\cdot(n-1)(n-2)$.   ג. n^3.

14) $\frac{1}{4^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

15) א. 0.9^a.   ב. $1-0.9^a$.   ג. 0.5^a.

16) לפחות 25 פעמים.

17) א. 0.35721.   ב. 0.1759.

18) א. 0.75.   ב. 0.075.   ג. 0.375.   ד. 0.15.

19) א. 0.   ב. $\frac{450}{729}$.   ג. $\frac{90}{729}$.

20) $\frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^n}$.

21) א. 720.   ב. 360.   ג. 432.

22) א. $\frac{j^k-(j-1)^k}{6^k}$.   ב. $\frac{(7-i)^k-(6-i)^k}{6^k}$.

ג. $\frac{(j-i+1)^k-2\cdot(j-i)^k+(j-i-1)^k}{6^k}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 12 - הסתברות מותנית במרחב דגימה אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?

3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.

4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?

5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערן ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

תשובות סופיות:

1) 0.2.

2) $\frac{1}{3}$.

3) 0.5.

4) 0.

5) $\frac{1}{6}$.

6) $\frac{2}{11}$.

7) $\frac{1}{3}$.

8) $\frac{3}{4}$.

9) $\frac{2}{3}$.

10) $\frac{1}{4}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 13 - הסתברות מותנית במרחב לא אחיד

תוכן העניינים

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:

א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?

2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בלי". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בלי", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.

א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בלי"?
ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בלי", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.

א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?
ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21:
40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?
ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?
ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

תשובות סופיות:

1) א. 0.833. ב. 0.9375. ג. 0.0625. ד. 0.5. ה. 0.789.

2) א. 5%. ב. 0.0833. ג. 0.786. ד. 0.6875.

3) א. 0.4. ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.25. ד. $\frac{6}{7}$.

4) א. להלן טבלה:

	אקדמאי	לא אקדמאי	סה"כ
שכיר	20	180	200
עצמאי	30	70	100
סה"כ	50	250	300

ב. $\frac{2}{3}$. ג. 0.6. ד. $\frac{23}{30}$.

ה. 0.3. ו. 0.72.

5) א. 0.625. ב. 0.133. ג. 0.402.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 14 - הערכת כלים אבחנתיים

תוכן העניינים

הערכת כלים אבחנתיים:

רקע:

אנו מנסים לאבחן תכונה מסוימת באמצעות כלי מסוים (למשל, לאבחן האם לאדם יש קורונה באמצעות ערכת אבחון ביתית). נגדיר מדדים סטטיסטיים שונים שנותנים אינדיקציה לאיכות כלי האבחנה.

נסמן ב-A: האדם קיבל תשובה חיובית, כלומר אובחן כבעל התכונה.

נסמן ב-B: האדם הוא בעל התכונה.

רגישות – Sensitivity:

ההסתברות שאדם בעל התכונה יקבל תשובה חיובית, כלומר: $Sensitivity = P(A|B)$.

סגוליות – Specificity:

ההסתברות שאדם ללא התכונה יקבל תשובה שלילית, כלומר: $Specificity = P(\bar{A}|\bar{B})$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

5,000 נשים השתתפו במחקר שבו הן השתמשו בערכה לבדיקת היריון ביתית של חברה מסוימת ביום ה-14 של המחזור החודשי. בדיעבד מתוך 5,000 הנשים 80 היו בהיריון. 70 נשים קיבלו תשובה חיובית מערכת הבדיקה הביתית. 65 מהן אכן היו בהיריון. מה הסגוליות ומה הרגישות של בדיקת ההיריון הביתית?

הערך המנבא החיובי – Positive Predictive Value:

ההסתברות שאדם שקיבל תשובה חיובית הוא אכן בעל התכונה.

הערך המנבא החיובי נקרא גם יכולת אבחון (יכולת דיאגנוסטית): $PPV = P(B|A)$.

הערך המנבא השלילי – Negative Predictive Value:

ההסתברות שאדם שקיבל תשובה שלילית אינו בעל התכונה: $NPV = P(\bar{B}|\bar{A})$.

המשך הדוגמה (פתרון בהקלטה):

מהו הערך המנבא החיובי ומהו הערך המנבא השלילי של ערכת הבדיקה הביתית?

ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה – False Positive:

ההסתברות שאדם שאינו בעל התכונה יקבל תשובה חיובית: $FP = P\left(A \middle| \bar{B}\right)$.

ההסתברות לתוצאה שלילית מדומה – False Negative:

ההסתברות שאדם בעל התכונה יקבל תשובה שלילית: $FN = P\left(\bar{A} \middle| B\right)$.

המשך הדוגמה (פתרון בהקלטה):

מה ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה ומה ההסתברות לתוצאה שלילית מדומה בבדיקה באמצעות ערכת הבדיקה הביתית?

שאלות:

1) 2,000 גברים נבדקו בשיטה חדשה לגילוי סרטן המעי הגס. מתוך 150 גברים שביופסיה הוכיחה בוודאות שהם חולים 100 נמצאו חולים באמצעות הבדיקה החדשה. 80 גברים שהוכח שהם בריאים באמצעות ביופסיה קיבלו תשובה חיובית באמצעות השיטה החדשה.
מצאו את הסגוליות, הרגישות, הערך המנבא החיובי, הערך המנבא השלילי, ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה.

2) הסיכוי של ערכת בדיקה ביתית של חברת קאנז לגלות מחלה מסוימת הוא 98%. לאדם בריא יש סיכוי של 5% לקבל בבדיקה תשובה חיובית. 5% ממשתמשי הערכה חולים במחלה.
א. מה הרגישות של הערכה?
ב. מה הסגוליות של הערכה?
ג. מה יכולת האבחון של הערכה?

3) הסיכוי של תהליך אבחון של הפרעת קשב לזהות סטודנטים בעלי הפרעת קשב הוא 0.95. הסיכוי שלו לזהות בטעות גם סטודנטים ללא הפרעת קשב כבעלי הפרעת קשב הוא 0.01. ידוע ש-7% מהסטודנטים סובלים מהפרעת קשב.
א. מה ההסתברות לתשובה חיובית מדומה?
ב. מה ההסתברות לתשובה שלילית מדומה?

4) נערכה בדיקה בשיטה חדשה לגילוי מלנומה בקרב 800 נבדקים – 400 נבדקים עם ביופסיה מוכחת של מלנומה ויתר הנבדקים ידועים ללא מלנומה. 30 מהנבדקים נמצאו בבדיקה החדשה חולים במלנומה. מתוך ה-30 רק 10 חולים באמת.
א. מה הרגישות של הבדיקה החדשה?
ב. מה הסגוליות של הבדיקה החדשה?
ג. מה היכולת הדיאגנוסטית של הבדיקה החדשה?

5) קבוצה של נבדקים שידוע ש-25% מהם נשאי HIV נבדקה בבדיקה חדשה המאפשרת קבלת תוצאה באופן מיידי. בבדיקה החדשה נמצאו 20% מהנבדקים כנשאי HIV. הסגוליות של הבדיקה החדשה היא 76%.
א. מה הרגישות של הבדיקה החדשה?
ב. מה ה-PPV של הבדיקה החדשה?
ג. מה ה-NPV של הבדיקה החדשה?

תשובות סופיות:

1) סגוליות: 0.9568, רגישות: $\frac{2}{3}$, הערך המנבא החיובי: $\frac{5}{9}$,
הערך המנבא השלילי: 0.9725, ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה: 0.0043.

2) א. 0.98. ב. 0.95. ג. 0.5078.

3) א. 0.01. ב. 0.05.

4) א. 0.25. ב. 0.95. ג. $\frac{1}{3}$.

5) א. 0.08. ב. 0.1. ג. 0.7125.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 15 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

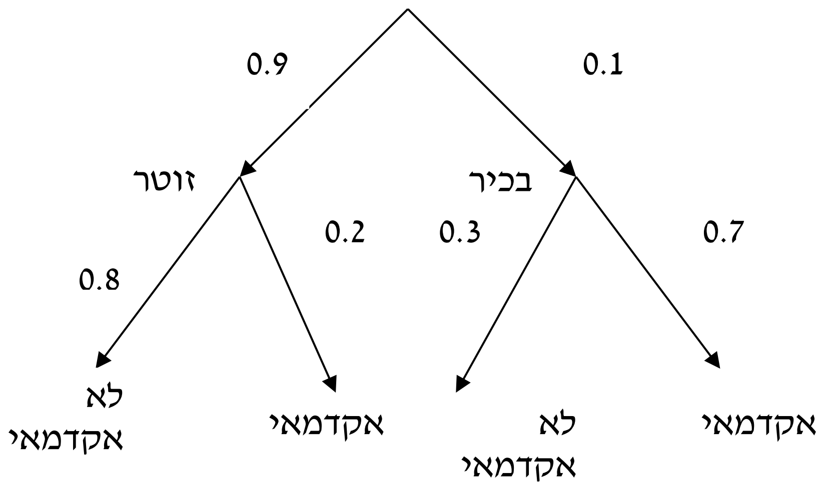
דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי? $0.1\cdot 0.7=0.07$.
2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי? $0.9\cdot 0.8=0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי? $0.1\cdot 0.7+0.9\cdot 0.2=0.25$.
4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?
מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה: $P(zutar\,|\,academay)=\frac{0.9\cdot 0.2}{0.25}=\frac{0.18}{0.25}=0.72$.

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B, מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1,\ldots,A_n$ כך ש-$\Omega = \bigcup_i A_i$,

אזי: $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)$.

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{A_j}{B}\right)=\frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum^{n} P(A_i)\cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}.$$

שאלות:

1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאם סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?

ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?

2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו.
70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D.
אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 בכל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P, ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.
אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
- רונית, דולב, רונית.

בכל משחק מישהו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית.
איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

1)	א. $\frac{2}{7}$.	ב. $\frac{23}{49}$.		
2)	א. 6%.	ב. 58%.	ג. 0.241.	ד. 0.2.
3)	א. 0.544.	ב. 0.5.		
4)	א. 9%.	ב. 0.09375.	ג. 0.9722.	
5)	א. 0.14.	ב. 0.3488.	ג. 0.2442.	
6)	א. 70%.	ב. 0.8125.		
7)	א. 0.57.	ב. 0.3158.	ג. 0.7543.	
8)	א. 0.0886.	ב. 0.2889.	ג. 0.3137.	ד. 0.8778.
9)	$\frac{kp}{1+p(k-1)}$.			
10)	א'.			

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 16 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(A/B)=P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

שאלות:

1) נתון: $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.6$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?

3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6) עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
$P(A|B)=0.6$, $P(A\cap\overline{B})=0.3$, $P(A\cup B)=0.9$.
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים?

7) הוכיח שאם: $P(A/B)=P(B/A)$, אז: $P(A)=P(B)$.

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

א. אם: $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B: $0<P(B)<1$, $P(A)>0$, לכן: $P(A/B)<P(A)$.

ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו- B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיובים לכן A ו- B מאורעות זרים.

ה. $\bar{P}(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

9) זוג מעוניין להביא ילד לעולם, בבדיקה גנטית שהם עשו לאב התגלה שהאב אינו נשא של מחלה Q. מערכים את הסיכוי של האם להיות נשאית למחלץ Q להיות 0.2. אם האם נשאית היא תלד בכל פעם ילד חולה בסיכוי 0.5 באופן בלתי תלוי בין הלידות. האם ילדה שני ילדים. האם המאורעות "הילד הראשון בריא" ו-"הילד השני בריא" הם מאורעות בלתי תלויים?

10) מטילים פעמיים מטבע עם הסתברות p לעץ בכל הטלה, $0<p<1$.

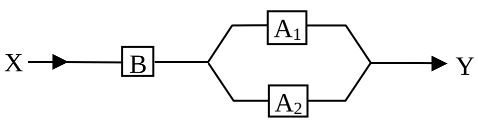
A – יצא עץ בהטלה ראשונה.

B – יצאו תוצאות שונות.

עבור איזה ערכים של p המאורעות A ו- B בלתי תלויים?

11) הוכח אם A ו-B בלתי תלויים, אזי $\bar{A}$, $\bar{B}$ בלתי תלויים.

12) נתונה מערכת חשמלית שבשרטוט, כל מתג יכול להיות פתוח או סגור בהסתברויות שונות, אך באופן בלתי תלוי זה בזה.
להלן ההסתברות של כל מתג להיות סגור:
$P(A_1)=0.7$, $P(A_2)=0.8$, $P(B)=0.9$.



א. מה ההסתברות שיעבור זרם במערכת החשמלית?

ב. אם לא עובר זרם במערכת , מה הסיכוי שמתג B סגור?

13) מטילים שתי קוביות הוגנות. נגדיר שלושה מאורעות:

A – תוצאה של קובייה ראשונה זוגית.

B – תוצאה של קובייה שניה אי זוגית.

C – סכום התוצאות של שתי הקוביות זוגי.

האם המאורעות בלתי-תלויים?

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. המאורעות A ו-B הם מאורעות זרים של ניסוי כלשהו.
חוזרים על אותו ניסוי שוב באופן בלתי תלוי זה בזה.
הוכיחו שהסיכוי שמאורע A יתרחש בניסוי לפני שמאורע B יתרחש בניסוי הוא: $\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$.

ב. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל התוצאה 3?

ג. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתקבל תוצאה גדולה מ-4?

תשובות סופיות:

1) כן.

2) א. 0.28. ב. 0.18.

3) א. 0.0064. ב. 0.1536.

4) א. 0.5904. ב. 0.9984.

5) א. 0.08^5. ב. 0.3409.

6) לא, הם תלויים.

7) שאלת הוכחה.

8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

9) תלויים.

10) 0.5.

11) שאלת הוכחה.

12) א. 0.846. ב. 0.3506.

13) תלויים.

14) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{3}{4}$. ג. $\frac{1}{2}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 17 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?

ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?

ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים.
נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.

א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.

ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון.
מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?

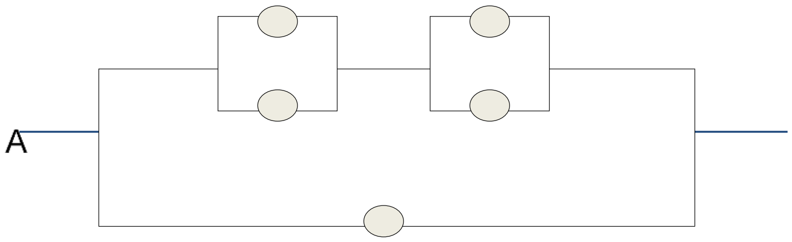
ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?

ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8) נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p.
כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P+(1-P)\left(2P-P^2\right)^2$.

9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.

א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?
ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספר המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?
ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10) נתונים שלושה מאורעות: A, B ו-C. ידוע ש: $P(A|B)=1$, $P(A|C)=1$.
תנו דוגמא ספציפית למאורעות: A, B ו-C שבה המאורעות B ו-C תלויים.

11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:
אם A ו-B בלתי תלויים, אז A ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים.

12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P כאשר: $0<P<1$.
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.
B - המשחק הראשון היה ניצחון.
מה ערכו של P, עבורו A ו-B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

13) טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים שונים של המכחול הוא: $\frac{N+1}{3(N-1)}$.

14) הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.25. ב. 0.75. ג. 0.6. ד. 0.5.

2) א. 0.2. ב.0.267. ג. 0.524. ד. תלויים.

3) א. 0.2. ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06.

4) א. 0.94. ב. 0.255. ג. 0.03. ד. 0.168.

5) א. 15%. ב. 0.692. ג. לא זרים ותלויים.

6) א. 0.65. ב. תלויים. ג. 0.5384.

7) א. 8%. ב. 0.733. ג. תלויים.
ד. i. 0.478. ד. ii. 0.15.

8) שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{19}{480,700}$. ב. $\frac{27,132}{480,700}$. ג. 0.4015.

10) ראו סרטון.

11) שאלת הוכחה.

12) $\frac{1}{2}$.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

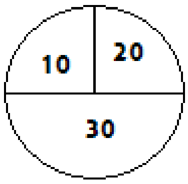
משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקציית הסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.
סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות .
בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2) מהאותיות: A , B , C יוצרים קוד דו תווי.
א. כמה קודים ניתן ליצור?
ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים.
נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2\ldots4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.
מצאו את ערכו של A .

7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות.
בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה.
נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה.
בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X.

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.25	0.35	0.3	0.1

2) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

3) להלן טבלה:

X	0	1	2
$P(X)$	0.05	0.20	0.75

4) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.3	0.21	0.147	0.343

5) להלן טבלה:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.006	0.092	0.398	0.504

6) 10.

7) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

8) להלן טבלה:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.74	0.15	0.1	0.01

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 19 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

מגדירים תוחלת באופן הבא: $E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu$.

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

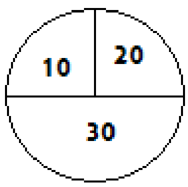
מגדירים שונות באופן הבא: $V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=\sigma^2$.

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD=\sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-₪. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

$$E(X)=10\cdot 0.25+20\cdot 0.25+30\cdot 0.5=22.5=\mu$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=(10-22.5)^2\cdot 0.25+(20-22.5)^2\cdot 0.25+(30-22.5)^2\cdot 0.5=68.75=\sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: $\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{68.75}=8.29$.

שאלות:

1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$P(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2) בישוב מסוים שני סניפי בנק : בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מסי סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את : $E(X)$.

3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

X	2	4	6	8
$E(X)$		0.3		0.2

כמו כן נתון ש : $E(X)=4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את : $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5-0 ו-5.
נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקציית ההסתברות.

7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי :

P	X
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	3
$\frac{1}{4}$	K

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של X?

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2 , שונות: 796.

2) 0.9.

3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36 , סטיית תקן: 1.603.

4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3 , שונות: 2.

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

X	2	4	6	8
$P(X)$	0.4	0.3	0.1	0.2

6) ראו טבלה:

X	-5	0	5
$P(X)$	0.2	0.6	0.2

7) 2.33.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 20 - המשתנה המקרי הבדיד -תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד

תוכן העניינים

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד:

רקע:

יהי X משתנה מקרי, ותהי $g(X)$ פונקציה של X. אז:

$$E(g(X)) = g(x_1)P(X=x_1) + g(x_2)P(X=x_2) + g(x_3)P(X=x_3) + \cdots$$
$$= \sum_i g(x_i) \cdot P(x_i)$$

כאשר $x_1, x_2, x_3, \ldots$ הם הערכים שהמשתנה X מקבל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

מצאו התפלגות ותוחלת של: $Y = X^2$.

שאלות:

1) מסובבים רולטה עליה המספרים 1 עד 4.
יהיה X המספר שהתקבל לאחר סיבוב הרולטה.
התפלגות X היא כדלהלן:

X	4	3	2	1
$P(X)$	0.3	0.4	0.2	0.1

א. חשבו את: $E(X)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

ב. האם: $\frac{1}{E(X)}=E\left(\frac{1}{X}\right)$?

2) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

חשבו את התוחלת של:
א. X^2.
ב. 2^X.

3) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}\ ,k=1,2...4$.

א. מצאו את ערכו של A.

ב. חשבו את: $E\left(\left[X-E(X)\right]^2\right)$.

4) בכל יום משחק ערן משחק יחיד בכל אחת מהאפליקציות הבאות: TWODOTS ו- PIANOTILES. בכל אחד מהמשחקים ישנם שלבים שיש לעבור. משחק בודד מסתיים בהצלחה אם ערן עבר את שלב, ובכישלון אם ערן לא עבר את השלב.
ההסתברות שבאפליקציית TWODOTS ערן יעבור שלב היא 0.6 בכל יום.
ההסתברות שבאפליקציית PIANOTILES ערן יעבור שלב היא 0.35 בכל יום.
נניח שמעבר שלב בכל אחד מהמשחקים בלתי תלוי במשחק אחר.
נסמן ב- W את מספר המשחקים שערן יעבור שלב בהם מחר.

א. חשבו את $E(W)$.

ב. חשבו את $E\left(W^3\right)$.

5) יהי X משתנה מקרי בדיד עם תוחלת ושונות סופיים : $Y=aX+b$, כאשר $a\neq 0$.
a,b הינם פרמטרים. יש להוכיח ש : $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.

6) אלעד צופה בסדרה בת 6 פרקים. 3 פרקים מתוך ה-6 הם פרקים שצולמו בישראל ו-3 פרקים אחרים צולמו בבולגריה. פרק אחד מבין הפרקים שצולמו בבולגריה מצולם כולו ביער. אלעד צופה בפרקי הסדרה בסדר אקראי, עד אשר הוא מגיע לפרק שצולם ביער בבולגריה. נגדיר את W כמספר הפרקים שצולמו בבולגריה שבהם יצפה אלעד.

א. מהי התפלגות W?

ב. חשבו : $E(W^3)$.

7) למיקה יש 20 חולצות ו-3 מגירות. כאשר מיקה מסדרת את 20 החולצות במגירות היא בוחרת עבור כל חולצה, באופן מקרי ובלתי תלוי בחולצות האחרות, את המגירה אליה תכניס את החולצה (כל אחת מהמגירות יכולה להכיל את כל החולצות).
נסמן ב-X את מספר המגירות המכילות בדיוק 10 חולצות.
מצאו את התפלגות X ואת : $E\left(\sqrt{X+2}\right)$.

8) מטבע מוטל 10 פעמים. X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. הרווח במשחק הוא 4^X. מצאו את התוחלת של הרווח במשחק.

רמז : היעזרו בבינום של ניוטון : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

תשובות סופיות:

1) א. $E(X)=2.9$, $E\left(\frac{1}{X}\right)=0.4083$. ב. לא.

2) א. 3.2. ב. 3.45.

3) א. 10. ב.1.

4) א. 0.95. ב. 2.21.

5) הוכחה.

6) א. $X\sim U(1,3)$. ב. 12.

7) $E\left(\sqrt{X+2}\right)=1.4659$.

8) א. $X\sim B(10,0.5)$. ב. 2.5^{10}.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה ליניארית

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע״י משתנה אקראי X כאשר a,b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y) = aE(X) + b$.
2) $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y = |a|\sigma_x$.

שלבי העבודה:

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X) = 68.75 = \sigma^2$, $E(X) = 22.5 = \mu$.

שאלות:

1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X)=4$ ו- $V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

X	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.1	0.2	0.2	0.3		

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k=1,2...4$, $P(X=k)=\frac{k}{A}$.

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 14, שונות: 32.

2) תוחלת: 8, שונות: 12.

3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

4) תוחלת: 3, שונות: 3.

5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

X	100	50	25	0
$P(X)$	0.001	0.02	0.05	0.929

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

6) ב. $V(X)=1.8275$.

7) א. $A=10$. ב. $E(X)=3$, $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$, $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$, $V(Y)=0.25$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 22 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

תוכן העניינים

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקרים אזי:

$E(T)=E(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots\ldots+E(X_n)$.

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u> בזוגות, אזי:

$V(T)=V(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots\ldots+V(X_n)$.

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא -2 עם סטיית תקן 4.

מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10.
הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות.
ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2) X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3.
סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
Y - סכום הזכייה במשחק השני.
נתון:

$$\sigma(X)=3 \quad , \quad E(x)=10$$

$$\sigma(Y)=4 \quad , \quad E(y)=12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪.
מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K=2,3,4,5 \ , \ P(X=K)=\frac{A}{K-1}$$

0 אחר ת

מצאו את ערכו של A.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל.
בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 9, שונות: 15.
2) 5.
3) תוחלת: 22, שונות: 5.
4) תוחלת: 90, שונות: 275.
5) א. $A=\frac{12}{25}=0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.
ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של X:

לכל $k=0,1,2,....,n$ $\quad P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot....\cdot 1$; $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X)=np$

שונות: $V(X)=npq$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של X ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.

א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?

ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?

ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?

ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת״א. מבין הסטודנטים שגרים בת״א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת״א 50% מגיעים ברכבם למכללה.

א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע״י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?

ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה.
לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.

א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?

ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?

ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.

א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?

ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ.
חשבו את: $E\left(X^2\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
ד. 0.0729. ה. 0.40954. ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45.

2) ב. 0.2335. ג. 0.1493. ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449.

3) א. 0.5314. ב. 0.0984. ג. 0.1143.
ד. תוחלת: 18-, סטיית תקן: 14.697.

4) א. 0.1789. ב. 2.

5) א. 0.1956. ב. 0.4253.

6) א. 0.85. ב. 0.182. ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8.

7) א. 0.401. ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193.

8) 7.5.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.
נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
$X \sim G(p)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,...\infty$.

תוחלת: $E(X)=\frac{1}{p}$.

שונות: $V(X)=\frac{q}{p^2}$.

תכונות חשובות:

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,
דהיינו, $P(X=(n+k)/X>k)=P(X=n)$ · $P(X>k)=q^k$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?
ד. אם הוצאו יותר מ-3 כדורים . מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

שאלות:

1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
א. שידגום 3 מוצרים.
ב. שידגום 4 מוצרים.
ג. שידגום 5 מוצרים.
ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים, אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.
א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?
א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.
מה ההסתברות ששיחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.
א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?
ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

תשובות סופיות:

1) א. 0.04512. ב. 0.0428. ג. 0.0407. ד. 0.6983. ה. 0.6983.

2) א. 0.009. ב. 0.0001. ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234.
ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5.

3) א. 0.999. ב. 0.875. ג. 0.03125. ד. 1.

4) א. 0.1029. ב. 9.72.

5) א. 0.06. ב. 0.7176. ג. 0.0729. ד. 9.487.

6) א. 0.015. ב. 0.0215. ג. תוחלת: $63\frac{1}{3}$, שונות: $2777\frac{7}{9}$.
ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 25 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות.
הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.
$X \sim U(a,b)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X=K)=\frac{1}{b-a+1}$, $K= a,a+1,..,b$.

תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

שונות: $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל.
מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

שאלות:

1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45.
נתבונן במשתנה X - המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
א. חשבו את $P(X=2)$.
ב. חשבו את $P(X\le 30)$.
ג. חשבו את $P(X>4 \mid X\le 10)$.
ד. חשבו את $P(X=k)$.

2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.
א. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
i. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
ii. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

3) יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
א. מהי ההתפלגות של X?
ב. מה התוחלת של X?
ג. קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?

4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?

5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.
א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
ג. אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?

6) הוכיחו שאם: $X\sim U(a,b)$, אז מתקיים ש: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{45}$. ב. $\frac{30}{45}$. ג. 0.6.

2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.

ב. i. 0.08192. ב. ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71.

3) א. $X \sim U(1,6)$. ב. 3.5. ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66.

4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25.

5) א. $\frac{1}{50}$. ב. $\frac{30}{50}$. ג. $\frac{7}{30}$.

6) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 26 - הפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.
λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim pois(\lambda)$.
התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$K = 0,1,2,...\infty \quad , \quad P(X=K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}.$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

שאלות:

1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.
מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד.
בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בכול החלק ישנן 15 טעויות?
ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

תשובות סופיות:

1)	א. 0.0337.	ב. 0.9933.	ג. 0.1246.	ד. 5.
2)	א. 0.084.	ב. 0.099.	ג. 0.151.	
3)	א. 4.	ב. 0.407.		
4)	א. 0.1804.	ב. 0.8647.	ג. 0.6767.	ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41.
5)	א. 0.0139.	ב. 0.2196.	ג. 0.6948.	
6)	א. 16.7.	ב. 0.0708.		

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 27 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים , מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.
X מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.
משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N,D,n) יסומן על ידי: $X \sim H(N,D,n)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות: $P(X=k)=\dfrac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

התוחלת של ההתפלגות: $E(X)=n\cdot\dfrac{D}{N}$.

השונות של ההתפלגות: $V(X)=n\cdot\dfrac{D}{N}\cdot\left(1-\dfrac{D}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

שאלות:

1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.

ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.
נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה (לא בטבלה).

ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X?

ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X=2\mid X>1)$.

3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:

א. האוכלוסייה גדולה מאד.

ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.

4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים.
בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.

א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?

ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

תשובות סופיות:

1) א.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{5}{9}$.

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{20}{27}$.

2) א. $\frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$. ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

4) א. 0.0256. ב. 0.8.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 28 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית

תוכן העניינים

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית שלילית:

רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- r. X = מספר החזרות עד שהתקבלו r הצלחות: $X \sim NB(r,p)$.

פונקציית ההסתברות: $k=r,r+1,\ldots\infty$, $P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$.

תוחלת: $E(X)=\frac{r}{p}$.

שונות: $V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קובייה מוטלת עד שמקבלים 3 פעמים תוצאה שגדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

שאלות:

1) בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. כדור מוצא באקראי פעם אחר פעם ומוחזר בין הוצאה להוצאה. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוצאו עד שהתקבלו 2 כדורים לבנים בסך הכול (לא בהכרח ברצף).

א. חשבו את $P\left(X=2\right)$.

ב. חשבו את $P\left(X=3\right)$.

ג. חשבו את $P\left(X=4\right)$.

ד. חשבו את $P\left(X=k\right)$.

2) הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).

א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?

ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?

ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?

ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?

ה. מה הסיכוי שישחק k פעמים?

3) הראו שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

4) מטבע מוטל שוב ושוב עד שמתקבל שלוש פעמים עץ בסך הכול.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.

ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?

ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

5) יהיה X_i מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה, כאשר $i=1,2,...,n$.

הוכיחו שהתוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^{n} X_i$ זהות לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית השלילית $NB\left(n,p\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.36. ב. 0.288. ג. 0.0576. ד. $0.6^2 \cdot 0.4^{k-2}$.

2) א. 0.16. ב. 0.192. ג. 0.1728. ד. 0.13824. ה. $0.4^2 \cdot 0.6^{k-2}$.

3) שאלת הוכחה.

4) ב. תוחלת: 6, שונות: 6. ג. 0.1886.

5) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 29 - קירוב פואסוני להתפלגות הבינומית

תוכן העניינים

קירוב פואסוני להתפלגות הבינומית:

רקע:

אם: $X \sim B(n,p)$ עבור n גדול ו- P קטן ניתן לקרב את ההתפלגות להיות פואסונית כאשר הפרמטר: $\lambda = np$.

כאשר פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית כזכור היא: $p(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$.

הערה: יש הטוענים, כי n 'גדול' ו- P 'קטן' משמעו: $np \geq 10$ ו- $p \leq 0.1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקו ייצור המוני 10% מהמוצרים כחולים. בוחרים באקראי 20 מוצרים מקו הייצור.
חשבו את ההסתברות שמתוך המוצרים שיבחרו בדיוק 1 יהיה כחול.
פעם לפי ההתפלגות הבינומית ופעם לפי הקירוב הפואסוני.

שאלות:

1) במדינת שומקום 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נדגמו 10 תושבים אקראיים מאותה מדינה. חשבו את הסיכוי שבמדגם יהיה לכל היותר מובטל אחד.
השוו את התוצאה לקירוב הפואסוני.

2) מקו ייצור המוני נדגמו 1000 מוצרים. ידוע ש-5% מהמוצרים בקו הייצור פגומים. מה הסיכוי שבמדגם יתקבלו 45 מוצרים פגומים?

3) 1% מהתושבים באוכלוסייה גדולה חולים במחלה מסוימת.
בסניף קופת חולים נרשמו 2000 תושבים אקראיים.
חשבו לפי הקרוב הפואסוני שבדיוק 18 מהם יהיו חולים.

4) בעיר ניו יורק ישנם כתשעה מיליון תושבים, שמתוכם 900 אלף אסיאתיים.
מה בקירוב ההסתברות שמתוך 100 תושבים אקראיים לפחות שני אסיאתיים?

תשובות סופיות:

1) ללא קירוב: 0.7361, עם קירוב: 0.7358.
2) 0.0458.
3) 0.0844.
4) 0.9995.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 30 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתון כי: $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$, $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

א. חשבן את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T.
האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל).
מהי פונקציית ההסתברות של X?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכויי של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות.
מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X)=2$ וכן: $V(X)=1$.

חשבו: $E(X-5)^2$.

10) הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P. בוחרים באקראי ארבעה נבחנים.

ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P.

ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P. ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1-P$ שמאלה ביחידה אחת.
נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים.
רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n.

12) למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P.

ג. לאלו ערכי P המשחק כדאי?

(13 מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ.
רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

(14 נתונות N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N. מתוך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל החולצות.
נגדיר את X_1 - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1.
נגדיר את X_N - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר N.
חשבו את: $V\left(X_1+X_N\right)$.

(15 n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם, האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם.
מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

(16 הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א' הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א' בהכרח ניגש למועד ב' ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב' הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון.
נתון שלמועד א' נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס.
מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

(17 לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה-i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה.
יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.
מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.

(18 לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים.
נסמן ב-X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים.
חשבו את $E\left(\sqrt{x+7}\right)$.

19) בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.

א. מצאו את ההתפלגות של X.

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1. ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

2) א. 0.03. ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

3) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

4) א. 0.9975. ב. 0.0172. ג. 1.0025.

5) א. 0.375. ב. 0.6. ג. 0.282. ד. 0.282.

6) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.092	0.392	0.428	0.084

ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

7) א. 0.4348. ב. 0.0923.

8) א. 2.013. ב. 0.5256. ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

9) 10.

10) א. 0.6. ב. 0.0384. ג. 0.0256.
ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11. ה. 0.24.

11) $P(X=k)=\binom{n}{\frac{k+n}{2}}\cdot p^{\frac{k+n}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$.

12) א. $P(X=k)=\begin{cases} P & k=-1 \\ (1-P)^{K-1}\cdot P & k=2,3,\ldots,\infty \end{cases}$. ב. $\frac{1-2p^2}{p}$.

ג. $0<p<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

13) $k=0,1,\ldots,\infty$, $P(X=k)=\binom{m+k}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}$.

14) $n\cdot\left(\frac{2}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)$.

15) $\frac{2^n}{2n}$.

16) ראו טבלה:

X	1	2	3
$P(X)$	0.0008	0.2893	0.7099

17) $\frac{e^{-6}}{6}\left[e^6-1\right]$.

18) 2.675.

19) א. $k=0,1,\ldots,n-2$, $P(X=k)=\frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}$.   ב. הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 31 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים:

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים
(גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו').

משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.

נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.

פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

בקורס הנוכחי לא נבצע אינטגרציה כדי לחשב את השטחים, אלא נשתמש בצורות הנדסיות מקובלות.

ריענון מתמטי:

<u>נוסחאות לחישוב שטחים</u>:

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2: $S_{triangle}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{rectangle}=a\cdot b$.

<u>משוואת קו ישר</u>:

$y=mx+n$.

m - שיפוע.

n - נקודת החיתוך עם ציר ה- y.

שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$: $m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1,Y_1) ושיפועו ידוע m:

$y-Y_1=m(x-X_1)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

היא פונקציה הנותנת במשתנה רציף את הסיכוי ליפול מתחת לערך מסוים:

$$\boxed{F(t)=p(X\le t)}$$

כמו כן:

$$\boxed{p(X>t)=1-F(t)} \qquad \boxed{p(a<X<b)=F(b)-F(a)}$$

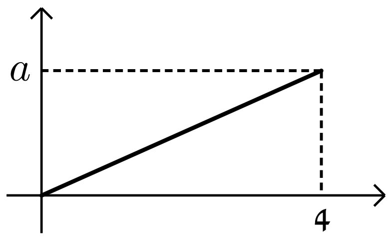
אחוזונים:

האחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו: x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P.

כלומר: $\boxed{p(X\le x_p)=p}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשרטוט שלפניכם נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה X.
X הינו זמן ההמתנה למענה קולי בדקות.



א. מצאו את ערכו של a.

ב. רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ג. חשבו את הסיכוי שזמן ההמתנה נמוך מ-2 דקות.

ד. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ה. מהו האחוזון ה-80 של ההתפלגות?

תשובות:

א.
$$S_{\Delta}=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{4\cdot a}{2}=2a$$
$$2a=1\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

ב.
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}\cdot x & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

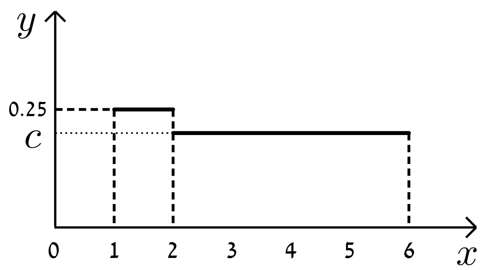
ג. $p(x<2)=\dfrac{2\cdot\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{1}{4}=p(x\le 2)$

ד. $$p(x\le t)=f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{t\cdot\frac{t}{8}}{2}=\dfrac{t^2}{16} & 0\le t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$$

ה. $p(x<2)=f(2)=\dfrac{2^2}{16}=\dfrac{1}{4}$

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של c.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2) נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

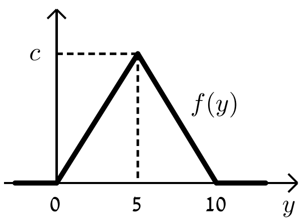
ידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות:

i. $P(Y=7.0)$.

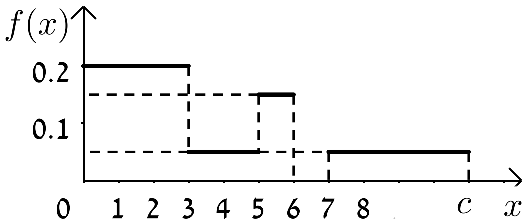
ii. $P(Y\le 3.0)$.

iii. $P(7.5\le Y\le 15.5)$.

iv. $P(Y>4)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y.
הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X:

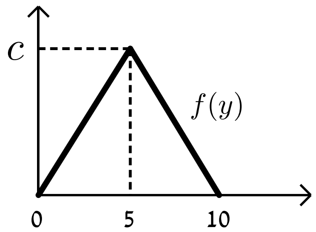


א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:
$P(X \geq 4)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(1.0 < X \leq 5.0)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



א. מה ערכו של c?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו $\frac{1}{2}$.

6) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t) = 1 - e^{-0.2t}$.

א. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ב. אם חיכיתי בתור 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכל פחות מרבע שעה?

ג. מה הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$. ב. $f(t)=\begin{cases}0 & t>1\\ (t-1)\cdot 0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$. ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. ב. 1.41. ג. $\frac{1}{16}$.

3) א. 0.2.

ב. $f(t)=p(y\le t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t\cdot 0.04t}{2}=0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-\frac{(10-t)(-0.04(t-10))}{2}=1\text{-}0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. i. 0. ii. 0.18. iii. 0.125. iv. 0.32.

ד. $Y_{0.5}=5$, $Y_{0.9}=7.76$, $Y_{0.25}=3.54$, $Y_{0.1}=2.24$.

4) א. 10. ב. $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. $P(1<x<5)=0.5$, $P(x\ge -2)=1$, $P(x\ge 4)=0.35$.

5) א. 0.2. ב. 5 ± 1.46.

6) א. 0.0498. ב. 0.6321. ג. 115.13.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 32 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות - שימוש באינטגרלים

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב-$f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף X בעל פונקציית צפיפות $f(x)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא: $F(t)=p(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

כמו כן מתקיים: $p(X>t)=1-F(t)$ ו-$p(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X\cdot f(x)dx=\mu$.

שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X^2\cdot f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$.

תוחלת של פונקציה של X:

תוחלת של פונקציית משתנה רציף X, המסומנת: $g(x)$, תחושב באופן הבא: $E\left(g(x)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)dx$.

אחוזונים:

האחוזון ה- p הוא ערך (נסמן אותו: x_p), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא p.
כלומר: $p\left(X\le x_p\right)=p$.

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2: $S_{\text{triangle}}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{\text{rectangle}}=a\cdot b$.

משוואת קו ישר:

משוואת ישר מפורשת תסומן: $y=mx+n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- n היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (x_1,y_1) ושיפועו הוא m, תחושב באופן הבא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

אינטגרלים מידיים:

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוטו:

א. מצאו את ערכו של c.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

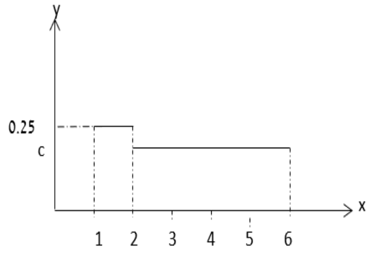
i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

v. מצאו את החציון של המשתנה.



2) נתון משתנה מקרי רציף A שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & else \end{cases}$,

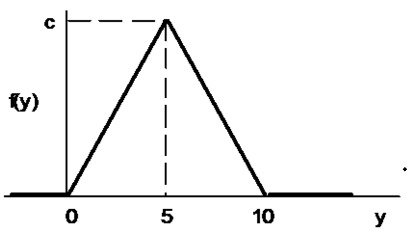
וידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

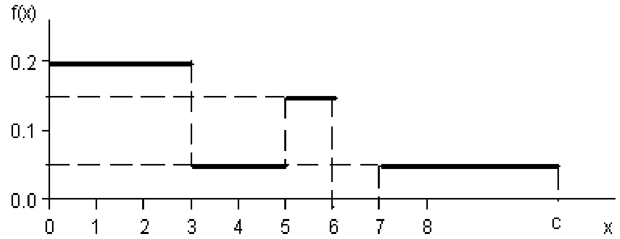
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(Y>4)$, $P(7.5\le Y\le 15.5)$, $P(Y\le 3.0)$, $P(Y=7.0)$.

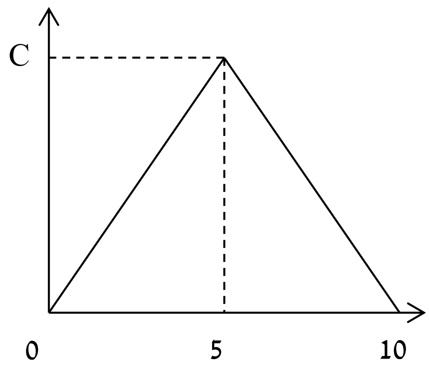
ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y. הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ג. חשבו את ההסתברויות הבאות :
$P(X \ge 4)$, $P(X \ge -2.0)$, $P(1.0 < X \le 5.0)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :



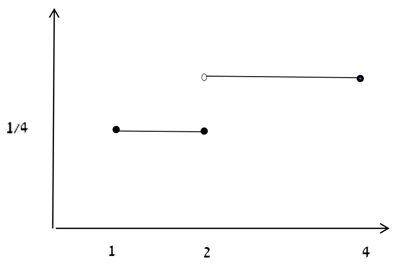
א. מה ערכו של c?
ב. מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

6) נתונה פונקציית צפיפות : $f(X)=\frac{2}{x}$, המוגדרת מ-1 עד K .
א. מצאו את ערכו של K .
ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ג. חשבו את הסיכוי ש-X לפחות 1.5.
ד. מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.
ה. מה התוחלת של X?

7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X)=AX^2(10-X)$, $0<X<10$.
A הינו קבוע חיובי.
א. מצאו את A.
ב. חשב את: $P(x>5|x>2)$.
ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X:
$f(x)=0.5\cdot e^{2x}$, $-\infty\le X\le\ln(c)$.
א. מצאו את ערכו של c.
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
ג. חשב: $P(X>0)$.
ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X:



א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.
ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.
ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.
ה. חשבו את: $E(X^3)$.

10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0\le x\le 1$, $f(x)=6x(1-x)$.
א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?
ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t)=1-e^{-0.2t}$.
א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<4\\ bx-4b & 4\le x\le 5\\ b & 5<x\le 6\\ 0 & x>6\end{cases}.$$

א. מצאו את b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5.
מהי השונות של y?

13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{4} & 1\le x\le 2\\ kx & 2<x\le 3\end{cases}$.

א. מצאו את ערכו של k.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $P(x>2.5)$.

14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה: $a\le x\le b$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.

ג. מצאו את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$. ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $b=2$, $c=0.5$. ב. 1.41. ג. 0.0625.

3) א. 0.2. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32.

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76.

4) א. 10. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$. ג. 0.5.

5) א. $c=0.2$. ב. 5 ± 1.46.

6) א. $e^{\frac{1}{2}}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2\cdot\ln t & 1\le t\le e^{\frac{1}{2}}\\ 1 & t>e^{\frac{1}{2}}\end{cases}$. ג. 0.189.

ד. 1.051. ה. 1.297.

7) א. 0.0012. ב. 0.7067. ג. תוחלת: 6, שונות: 4.

8) א. 2. ב. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{2t} & t\le \ln(2)\\ 1 & t>\ln(2)\end{cases}$. ג. 0.75. ד. 0.549.

9) א. $\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\le x\le 2\\ \frac{3}{8} & 2<x\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{8} & 2<t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$.

ג. $2\frac{2}{3}$. ד. תוחלת: 2.625, שונות: 0.6927. ה. 23.4375.

10) א. $\frac{7}{27}$. ב. 0. ג. 3.704.

11) א. עיין סרטוט בוידאו ב. 0.0498 ג. 0.6321 ד. 11.51.

12) א. $\frac{2}{3}$. ב. 5.22. ג. $\frac{2}{9}$.

13) א. $\frac{1}{6}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ \frac{t^3-1}{12} & 1\le t\le 2\\ \frac{7}{12}+\frac{t^2-4}{12} & 2<t\le 3\\ 1 & t>3\end{cases}$. ג. 0.229.

14) א. $F(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{(t-b)}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$. ב. תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$, שונות: $V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

ג. $\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 33 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות מעריכית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות מעריכית:

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.
λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית): $X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$.
התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ לכל $x \geq 0$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: $F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

התוחלת: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$.

השונות: $V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$.

להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון: $P(X > a + b \setminus X > a) = P(X > b)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):
אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ-9 שעות?

ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

שאלות:

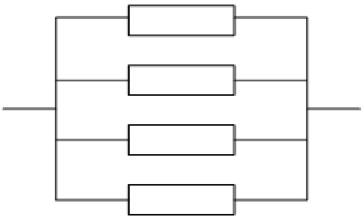
1) הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
   א. מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
   ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
   ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2) הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
   א. מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
   ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
   ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3) משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
   א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
   ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
   ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
   ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

4) בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
   א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
   ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
   ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה שני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמתואר בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת.
עלות הוספת רכיב היא K ₪.
כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

1)	א. 0.368.	ב. 0.865.	ג. 0.347.	
2)	א. 24 שעות.	ב. 0.632.	ג. 0.135.	
3)	א. 0.393.	ב. 0.239.	ג. 0.513.	ד. 69.08
4)	א. 0.264.	ב. 0.368.	ג. 0.233.	
5)	א. 0.8403.	ב. $K < 0.0588A$.		

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 34 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b.

$X \sim U(a,b)$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$.
$$a \le x \le b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=\frac{t-a}{b-a}$$.

התוחלת:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$.

השונות:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

X - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש-X קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של X?

$a=20\ ,\ b=40$

$X\sim U(20,40)$.

א. $P(x<25)=f(25)=\frac{25-20}{40-20}=0.25$.

ב. $E(x)=\frac{20+40}{2}=30$

$V(x)=\frac{(40-20)^2}{12}=33\frac{1}{3}$.

שאלות:

1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X, מתפלג: $U(13,16)$.

א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?

ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?

ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.

א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?

ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).

א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?

ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?

ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

ד. עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{2}{3}$.

2) א. $X \sim U(0,10)$. ב. 0.6. ג. 10.

3) א. 0.2. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 109.

ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

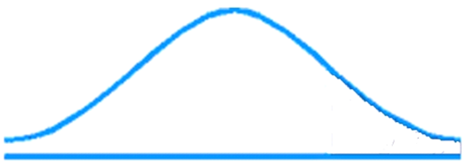
פרק 35 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:

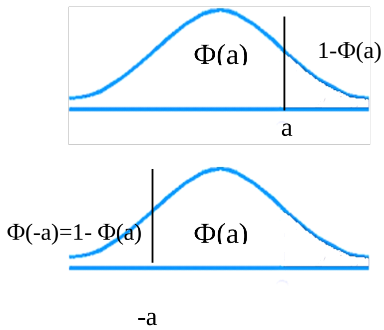
$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$Z \sim N\left(0, 1^2\right)$

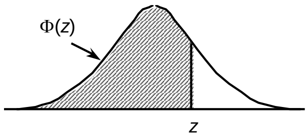
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

בטבלה

P



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
   א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
   ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
   ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
   ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
   ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
   א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
   ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
   ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
   ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
   א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
   ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
   ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
   ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
   ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

4) משקל תינוקות ביום היולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
   א. מצאו את העשירון העליון.
   ב. מצאו את האחוזון ה-95.
   ג. מצאו את העשירון התחתון.

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?
ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
ד. מהו האחוזון ה-20?
ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ״ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ״ל.
א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
i. בעשירון העליון.
ii. בממוצע.
iii. בשונות.
ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
i. 1.
ii. 2.
iii. 3.
iv. אין לדעת.

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1) א. 89.25%. ב. 2.28%. ג. 0. ד. 50%. ה. 50%.

2) א. 0%. ב. 3.76%. ג. 0%. ד. 68.26%.

3) א. 26.43%. ב. 89.44%. ג. 39.44%. ד. 0.383.
ה. 100%.

4) א. 3812.8. ב. 3958. ג. 2787.2.

5) א. 119.2. ב. 80.8. ג. 112.6. ד. 87.4.

6) א. 500. ב. 532.9. ג. 453.48.

7) א. 500. ב. 100. ג. 0.3446. ד. 733.
ה. 267.

8) א. 3. ב. בממוצע. ג. 1.

9) א. 0.1587. ב. 0.0228. ג. 0.8563. ד. 0.3975.

10) א. 1925. ב. 0.2266. ג. 0.1587.

11) א. 0.1359. ב. 0.675. ג. 100. ד. 0.25.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 36 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף

תוכן העניינים

טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף:

רקע:

מצב שבו ידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון משתנה מקרי רציף X המתפלג אחיד בין 0 ל-1 .
מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה Y,
כאשר הקשר בין X ל-Y נתון על ידי הנוסחה: $Y = e^x$.

שאלות:

1) יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1.
הגדירו משתנה חדש: $Y = e^{-W}$.
א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהו את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.

2) נתון: $X \sim U(0,1)$, ויוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R = X^2$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R.

3) ידוע ש-$X \sim \exp(\lambda)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y = \ln(X)$.
הוכיחו שפונקציית הצפיפות של Y נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^{Y}+1}$.

4) ידוע ש-$X \sim \exp(\lambda = 1)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$.
א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהו את ההתפלגות של Y.

5) אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2.
מצאו את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.

6) נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t) = \theta^t - 1$,
עבור התחום: $0 \le t \le 1$.
א. מצאו את ערכו של הפרמטר θ.
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה X.
ג. יהי $Y = 2^X - 1$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של Y וזהו את התפלגותו.

תשובות סופיות:

1) ב. $Y \sim U(0,1)$.

2) $f(R)=\frac{1}{2\sqrt{R}}$ כאשר $1>R>0$.

3) שאלת הוכחה.

4) ב. $Y \sim U(-1,1)$.

5) $f(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ כאשר $1<y<8$.

6) א. 2. ב. $Y \sim U(0,1)$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 37 - התפלגות גמא (ארלנג)

תוכן העניינים

התפלגות גמא:

רקע:

משתנה מקרי בעל התפלגות גמא תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו, t ו- λ.

נהוג לסמן זאת כך: $X \sim Gamma(t,\lambda)$.

פרמטרים אלו מקיימים: $\lambda > 0$ ו- $t > 0$.

התפלגות גמא היא התפלגות רציפה בעלת פונקציית הצפיפות הבאה: $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}.$$

$\Gamma(t)$, המכונה פונקציית גמא, מוגדרת על ידי: $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו את פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי בעל התפלגות: $Gamma(2,3)$.

תשובה:

$t = 2 \ , \ \lambda = 3$

$$f(x) = \frac{3e^{-3x} \cdot (3x)}{\Gamma(2)} \ , \ x > 0$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{t-1} dy = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y \ dy$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int v' \cdot u$$

$v = y \ , \ u' = e^{-y}$

$v' = 1 \ , \ u = -e^{-y}$

$$= -\frac{y}{e^y}\bigg|_0^\infty + (-e^{-y})\Big|_0^\infty = -\frac{y+1}{e^y}\bigg|_0^\infty = 0 - \left[\frac{-(0+1)}{e^0}\right] = 1$$

$f(x) = qx \cdot e^{-3x} \ , \ x > 0$

תוחלת ושונות של התפלגות גמא:

התוחלת של משתנה מקרי X בעל התפלגות גמא היא: $E\left[X\right]=\frac{t}{\lambda}$.

השונות של משתנה מקרי X בעל התפלגות גמא היא: $\operatorname{Var}\left(X\right)=\frac{t}{\lambda^{2}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו את התוחלת והשונות של משתנה מקרי בעל התפלגות: $Gamma(2,3)$.

תשובה:

$$E\left[x\right]=\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{var}\left(x\right)=\frac{2}{3^{2}}=\frac{2}{9}$$

פונקציית גמא מקיימת את התכונה הבאה: $\Gamma\left(t\right)=\left(t-1\right)\Gamma\left(t-1\right)$ לכל $t>1$.

אם X_i הוא משתנה מקרי בעל התפלגות גמא עם הפרמטרים t_i ו-λ
לכל: $i=1,2,\ldots,n$, ואם: $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n}X_i$ הוא משתנה מקרי בעל התפלגות גמא עם

הפרמטרים $\sum_{i=1}^{n}t_i$ ו-λ.

דוגמה:

$X\sim Gamma\left(2,3\right)$, ו- $Y\sim Gamma\left(1,3\right)$.
כמו כן נתון ששני המשתנים בלתי תלויים זה בזה.

מה ההתפלגות של $X+Y$?

תשובה:

$$X+Y\sim Gamma\left(3,3\right)$$

כאשר t הוא מספר שלם וחיובי, נסמן אותו ב- n.
במקרה זה מתקיים: $\Gamma(n)=(n-1)!$.
להתפלגות זו קוראים לעיתים "התפלגות ארלנג": $X \sim Erlang(n,\lambda)$.
אם הזמן עד להתרחשות המופע הראשון מרגע כלשהו מתפלג מעריכית, אז הזמן עד התרחשות המופע ה- n יהיה בעל התפלגות ארלנג עם הפרמטרים: (n,λ).
למעשה, התפלגות מעריכית היא מקרה פרטי של התפלגות גמא.
אפשר לומר ש- $Gamma(1,\lambda)=Erlang(1,\lambda)=Exp(\lambda)$.

אם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שמתפלגים מעריכית כך ש- $X_i \sim exp(\lambda)$ לכל: $1 \le i \le n$, אז: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim erlang(n,\lambda)$.
פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי בעל התפלגות ארלנג היא:
$f(x)=\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$.
פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בעל התפלגות ארלנג היא:
$F_X(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$.

דוגמה:

מספר הפניות למוקד טלפוני מתפלג פואסונית בקצב של 3 פניות לדקה.

א. מה ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפנייה השנייה?

ב. מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-1.5 דקות עד שתתקבל הפנייה השנייה?

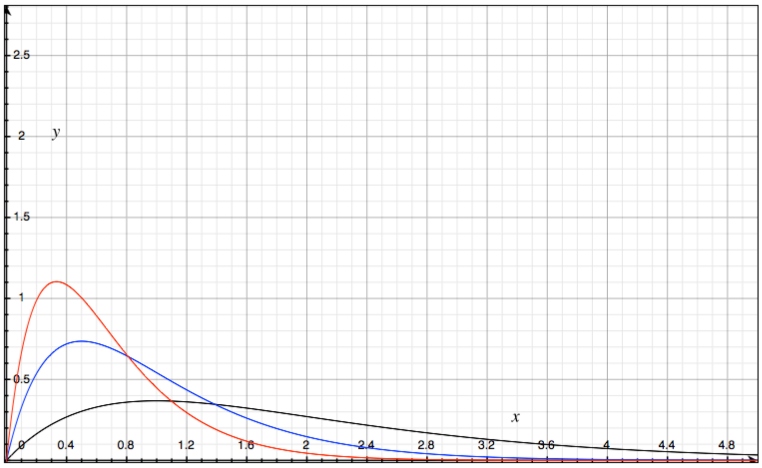
תשובה:

א. $X \sim Erlang(n=2,\lambda=3)$: הזמן בדקות עד קבלת הפניה השנייה.

ב.

$$P(x<1.5)=F_x(1.5)=1-\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{i!}\cdot(3\cdot 1.5)^i\cdot e^{-3\cdot 1.5}=1-\left[\frac{1}{0!}\cdot 4.5^0\cdot e^{-4.5}+\frac{1}{1!}\cdot 4.5^1\cdot e^{-4.5}\right]=0.9389$$

תיאור גרפי של פונקציית הצפיפות בהתפלגות גמא:

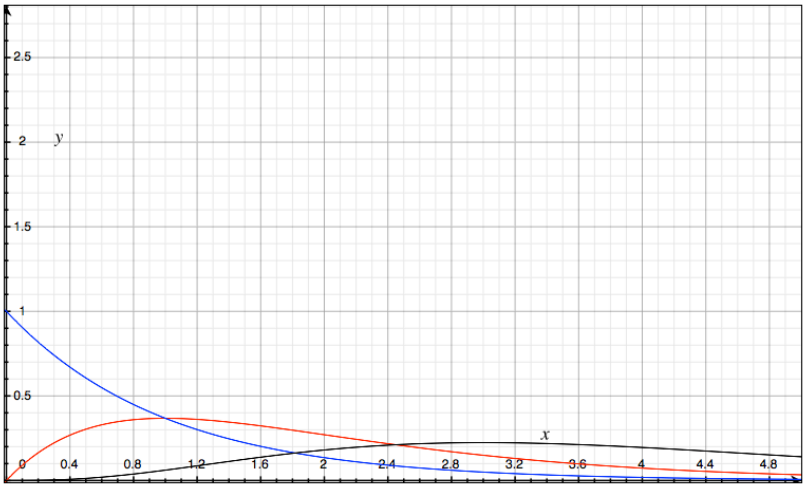


$n=2$

$\lambda=1$ ———— (שחור)

$\lambda=2$ ———— (כחול)

$\lambda=3$ ———— (אדום)



$\lambda=1$

$n=1$ ———— (כחול)

$n=2$ ———— (אדום)

$n=4$ ———— (שחור)

שאלות:

1) נתון ש-$X \sim Erlang(2,5)$.

א. מצאו את: $P(X>3)$.

ב. מצאו את: $P(X>3|X>5)$.

ג. מצאו את: $E(X)$.

2) צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.

א. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תהיה יותר מ-4?

ב. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תהיה יותר מ-2 אך לא יותר מ-5?

ג. החברה עובדת חמישה ימים בשבוע. מה התוחלת של מספר הימים בשבוע שבהם צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?

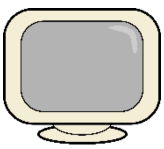
3) אורך חיי סוללה בשעות מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 ואינו תלוי באורך חיי סוללות אחרות. במכשיר מתקינים ארבע סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת מיד בסוללה אחרת, עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.

א. מה התוחלת והשונות של אורך חייה של מערכת הסוללות במכשיר?

ב. מה ההסתברות שאורך חייה של מערכת הסוללות יהיה פחות מיום (יממה)?

ג. מה ההסתברות שאורך חייה של מערכת הסוללות יהיה יותר מיומיים אם ידוע שהוא יותר מיום?

4) מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית בקצב של 3 תקלות בשעה.

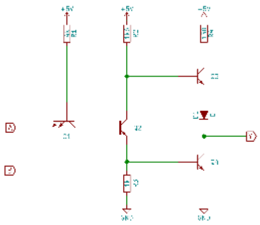


א. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה פחות משעה?

ב. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה פחות משעה?

ג. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה פחות משעה?

ד. הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.



5) פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך החיים (בשעות) של רכיב אלקטרוני מסוים

היא: $F(x)=1-e^{-2x}-2xe^{-2x}\ ,\ x\geq 0$

חשבו את התוחלת והשונות של אורך חיי הרכיב.

6) היעזרו באינטגרציה בחלקים כדי להראות שפונקציית גמא מקיימת את התכונה הבאה: $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t>1$.

7) הוכיחו שאם n הוא מספר שלם וחיובי, אז פונקציית גמא מקיימת: $\Gamma(n)=(n-1)!$. היעזרו בתכונה: $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t>1$.

8) נתון ש- $X\sim Gamma(t,\lambda)$.

הוכיחו בעזרת פונקציית הצפיפות של התפלגות גמא ש:

א. $E[X]=\frac{t}{\lambda}$.

ב. $\text{Var}(X)=\frac{t}{\lambda^2}$.

9) פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג היא: $F_X(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i\cdot e^{-\lambda t}$.

הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא: $f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

10) פתרו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t+1}dx$ (שימו לב: הפתרון מבוטא באמצעות הפרמטר t).

11) X הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ.

$Y=X^k\ ,\ k=1,2,\ldots$ מצאו את התוחלת של Y.

12) נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X: $f_X(x)=\frac{3^{k+1}e^{-3x}x^k}{9!},\ x>0$.

א. מצאו את k.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

13) נתון ש- $X\sim Gamma(t,\lambda)$. מהי ההתפלגות של bX כאשר $b>0$?

תשובות סופיות:

1) א. 0.000005. ב. 1 ג. 0.4.
2) א. 0.0915. ב. 0.36558. ג. 4.5425.
3) א. תוחלת: 16 שעות, שונות: 64. ב. 0.8488. ג. 0.0023.
4) א. 0.9502. ב. 0.8009. ג. 0.5768.
ד. הזמן עד התקלה k , $P(x\le 1)\downarrow \;\Rightarrow\; k\uparrow :P(x\le 1)$.
5) תוחלת: 1, שונות: 0.5.
6) שאלה הוכחה.
7) שאלה הוכחה.
8) שאלה הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $t(t+1)$.
11) $\frac{k!}{\lambda^k}$.
12) א. 9. ב. תוחלת: $3.33\overline{3}$, שונות: $1.11\overline{1}$.
13) $Y \sim Gamma(t,\frac{\lambda}{b})$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 38 - התפלגות ביתא

תוכן העניינים

התפלגות ביתא:

רקע:

משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}\ .$$

משתנה זה תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו a ו- b, כאשר: $b>0$, $a>0$.

$B(a,b)$ היא פונקציה שמכונה "פונקציית ביתא" ומוגדרת באופן הבא:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\ .$$

אם המשתנה X מתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים a ו- b, נכתוב זאת:

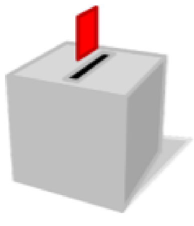
$X\sim Beta(a,b)$.

המשתנה המקרי המתפלג התפלגות ביתא מייצג הסתברות.
כלומר, אנחנו מתייחסים להסתברות עצמה כאל משתנה מקרי.

דוגמה:

נסמן ב-X את שיעור האזרחים שיצביעו למועמד מסוים בבחירות שבהן מתמודדים שני מועמדים.

נניח ש- $X\sim Beta(2,1)$.



א. בנו את פונקציית הצפיפות של X.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. חשבו את הסיכוי שרוב האזרחים יצביעו למועמד מסוים זה בבחירות.

תוחלת ושונות של משתנה מקרי בעל התפלגות ביתא:

התוחלת של X תהיה: $E[X]=\frac{a}{a+b}$.

השונות של X תהיה: $\mathrm{Var}(X)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

דוגמה:

נתון ש- $X\sim Beta(2,1)$. מה תהיה התוחלת ומה תהיה השונות של X?

תכונות של פונקציית ביתא והתפלגות ביתא:

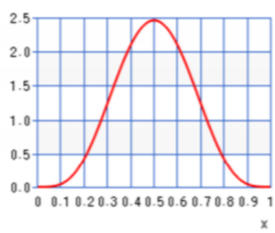
1. $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
2. $B(a,b)=B(b,a)$.
3. $Beta(1,1)=U(0,1)$.

דוגמה:

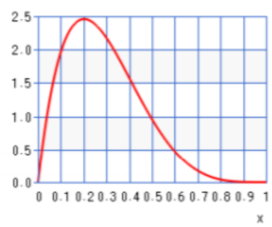
הראו ש- $B(1,2)$ מקיימת את שתי התכונות הראשונות שהוצגו לעיל.

הפרמטרים a ו- b נקראים "פרמטרי הצורה", כיוון שהם משפיעים על הצורה של פונקציית הצפיפות. בגרפים הבאים נראה כיצד הם משפיעים עליה.

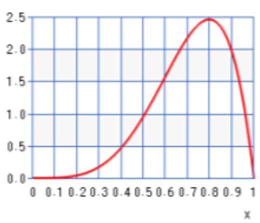
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a=b$



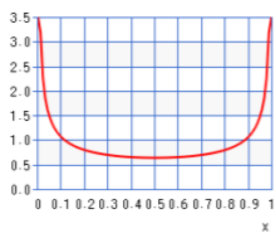
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a>b$



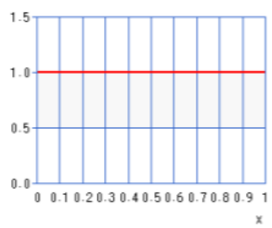
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a<b$



$a<1\ ,\ b<1\ ,\ a=b$



$a=b=1$



שאלות:

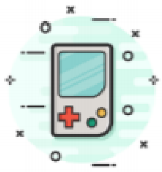
1) מתוכנן תהליך שמטרתו לשנות את שיעור המוצרים הפגומים בקו ייצור מסוים. שיעור המוצרים הפגומים אחרי הטמעת התהליך יהיה משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(3,1)$.

א. מצאו את התוחלת והשונות של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך המתוכנן.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך.

ג. חשבו את הסיכוי ששיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך יהיה קטן מ-10%.

2) משחק מחשב מתוכנת כך שהסיכוי לנצח בסבב אחד הוא משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(2,2)$.



א. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ב. מה ההסתברות שהסיכוי לנצח בסבב כלשהו יהיה יותר מ-0.7?

3) הראו שפונקציית ביתא מקיימת את התכונה: $B(a,b)=B(b,a)$.

4) נתון ש- $X \sim Beta(a,b)$.

א. הוכיחו: $E[X]=\dfrac{a}{a+b}$.

ב. הוכיחו: $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5) הוכיחו את הטענה ש- $Beta(1,1)=U(0,1)$.

6) השכיח של משתנה רציף הוא הערך שעבורו פונקציית הצפיפות של המשתנה היא מקסימלית.
מצאו את השכיח של X, אם: $X \sim Beta(2,3)$.

7) X הוא משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים: $a=5$ ו-$b=6$.
חשבו את: $E\left[\frac{1}{X}\right]$.

8) $X \sim Beta(a,b)$.
נגדיר: $Y=1-X$.
הוכיחו ש-$Y \sim Beta(b,a)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{80}$, $\frac{3}{4}$. ב. $F_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{3x^3}{3}\Big|_0^t=t^3 & 0\le t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$. ג. 0.001.

2) א. 0.5. ב. 0.216.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) $\frac{1}{3}$.

7) 2.5.

8) הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 39 - פונקציה יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות: $M_X(t)=E\left(e^{tx}\right)$.

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_k e^{tk}\cdot P(X=k).$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t)=E\left(e^{tx}\right)=\int_x e^{tx}\cdot f(x)\,dx.$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות: $E\left(X^n\right)$.

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה-n-ית לפי t של פונקציית יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה $t=0$. כלומר: $M_x^{(n)}(t)|_{t=0}=E\left(X^n\right)$.

משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

$$\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(\log_a{}^x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

כלל שרשרת - $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית: $X \sim \exp(\lambda)$,
היא: $\frac{\lambda}{\lambda - t}$. מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

שאלות:

1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית: $X \sim B(n,p)$,
ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית: $X \sim G(P)$,
וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית: $x \sim p(\lambda)$.
מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

5) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x} & 0 \le x \le 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. מצאו את ערכו של A.

ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

6) יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X. Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$,
ונתון: $m_y(t)=t \cdot m_x(t)$.
חשבו את התוחלת והשונות של Y.

תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}$.   ב. $1\frac{2}{3}$.

2) פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(e^{t}\cdot p+1-p\right)^{n}$.

3) פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{t}p}{1-e^{t}\cdot(1-p)}$.

4) פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}$.

5) א. $\frac{1}{1-e^{-7}}$.   ב. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{7(t-1)}-1}{t-1}\cdot\frac{e^{7}}{e^{7}-1}$.

6) תוחלת: 1, שונות: 9.

נספחים:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f(X)t$	פונקציית התפלגות מצטברת $f(X)t$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t)=\{\lambda e^{-\lambda t} \quad t\ge 0$	$f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה. $1-P=q$ ההסתברות לכישלון X - מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,\ldots,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(P)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. X - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.	pq^{x-1} $x=1,2,\ldots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	X - מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,\ldots,\infty$.	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 40 - תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:
  $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$.
- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:
  $M_{X+Y}(t)=E\left(e^{tx}\right)\cdot E\left(e^{ty}\right)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$.

תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_X(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה $1-P=q$ ההסתברות לכישלון x: מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ $x=0,1,\ldots,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x: מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x=1,2,\ldots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x: מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,\ldots,\infty$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim P(\lambda=4)$ $Y\sim P(\lambda=2)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X-3$?

ב. נגדיר את: $T=X+Y$. מה ההתפלגות של T?

שאלות:

1) נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\cdot\lambda)$.

2) נתון: $X \sim P(\lambda=10)$, $Y \sim P(\lambda=2)$.
X ו- Y הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X+Y$.
א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.
ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda=12)$.
ג. הוכיחו ש- $X / T=8 \sim B\left(8,\frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של X,
בהינתן ש- $T=8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n=8$ ו- $p=\frac{5}{6}$.

3) יהי: $X_i \sim \exp(1)$, $i=1,2...n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.
נגדיר את $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.
א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של T.
ג. יהי: $Z=\frac{T-E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T.
מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z.

4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי
הנוסחה הבאה: $M_X(T)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ לכל t, כאשר: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.
א. הוכיחו שאם $Y=2X$ אזי $Y \sim N(2\mu,4\sigma^2)$.
ב. הוכיחו שאם $T=X_1+X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות
נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu,2\sigma^2)$.

תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)\cdot(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: n, שונות: n.

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{-n^{\frac{1}{2}}\cdot t}\cdot\left(\frac{1}{1-\left(n^{-\frac{1}{2}}t\right)}\right)^n$.

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 41 - משתנה דו מימדי בדיד - פונקצית הסתברות משותפת

תוכן העניינים

משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית: X ו- Y.

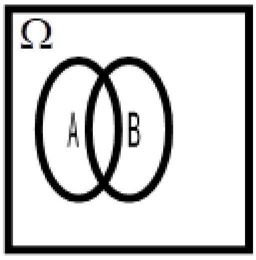
דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:



y/x	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

$$p(x=o,y=0)=0.05$$
$$p(x=o,y=1)=0$$
$$p(x=1,y=0)=0.15$$
$$p(x=1,y=1)=0.05$$
$$p(x=2,y=0)=0$$
$$p(x=2,y=1)=0.75$$

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

Y/X	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

משתנים בלתי תלויים:

X ו- Y יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y אפשריים התקיים הדבר הבא: $p(x=k, y=l)=p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

דוגמה:

$p(x=2, y=1)=0.75 \neq p(x=2)\cdot p(y=1)=0.75\cdot 0.8=0.6$.

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

שאלות:

1) אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים.
נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y כמספר המשחקים שהאדם שיחק.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.

ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?

ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2) להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

Y/X	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

א. השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. האם X ו-Y תלויים?

ג. מצאו את הסתברות ש-$Y=3$, אם ידוע ש-$X=1$.

3) מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $\frac{1}{10}$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות.
יהי X מספר המוצרים בחבילה, ו-Y מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן $x=3$.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

4) מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי X המספר הקטן מבין השניים ו- Y הגדול מביניהם.

א. חשבו את ההתפלגות של (X,Y).

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y=4$. מצאו: $E(X/Y=4)$.

5) ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.
יהי X מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי Y משתנה אינדיקטור:
1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.
0 – אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. 2.4. ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

$x \backslash y$	**0**	**50**	**100**	$P(y)$
1	0	0	0.3	0.3
3	0.343	0.294	0.063	0.7
$P(x)$	0.343	0.294	0.363	1

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.125.

$x \backslash y$	**0**	**1**	**2**	$P(y)$
2	0.2	0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05	0	0.15
4	0.1	0.27	0.08	0.45
$P(x)$	0.4	0.4	0.2	1

3) א. $y/x=3 \sim B\left(n=3,\ p=\frac{1}{10}\right)$. ב. $y/x=k \sim B\left(n=k\,,p=\frac{1}{10}\right)$.

ג. 0.3. ד. להלן טבלה:

$x \backslash y$	**2**	**3**	$P(y)$
0	0.405	0.3645	
1	0.09	0.1215	
2	0.005	0.0135	
3	0	0.0005	
$P(x)$	0.5	0.5	1

4) א. להלן טבלה: ב. 0.5. תוחלת: 2.

$x \backslash y$	**2**	**4**	$P(y)$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

5) א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

$x \backslash y$	**0**	**1**	**2**	$P(y)$
0	0.05	0.35	0	0.4
1	0	0.45	0.15	0.6
$P(x)$	0.05	0.8	0.15	1

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 42 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

תוכן העניינים

משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- ρ.
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.

-1 0 1

מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר ליניארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = ax + b$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר ליניארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם:

הנוסחה של מקדם המתאם היא: $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

השונות המשותפת: $\operatorname{cov}(x,y) = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.

2) $\operatorname{cov}(X,X) = Var(X)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

השפעת טרנספורמצייה ליניארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c>0\\ -\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c<0\end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה ליניארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת.
נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X)=\sum_i x_iP(x_i)=\mu=0\cdot 0.05+1\cdot 0.2+2\cdot 0.75=1.7$$

$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2P(x_i)=\sum_i x_i^2P(x_i)-\mu^2=0^2\cdot 0.05+1^2\cdot 0.2+2^2\cdot 0.75-1.7^2=0.31=\sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.31}=0.557$$

$$E(y)=\sum_i y_iP(y_i)=0+0.8=0.8$$

$$V(y)=\sum_i (y_i-\mu_y)^2P(y_i)=\sum_i y_i^2P(y_i)-\mu_y{}^2=0+0.8-0.8^2=0.16=\sigma_y{}^2$$

$$\sigma_y=\sqrt{0.16}=0.4$$

$$E(xy)=0\cdot 0\cdot 0.05+0\cdot 1\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0.15+1\cdot 1\cdot 0.05+2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 1\cdot 0.75=1.55$$

$$\operatorname{cov}(x,y)=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)=1.55-1.7\cdot 0.8=0.19$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{0.19}{0.557\cdot 0.4}=0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y?

שאלות:

1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?

ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?

ד. האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y.

ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?

2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y. האם המשתנים מתואמים?

ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?

ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הכדורים בתא הראשון.
Y - מספר הכדורים בתא השני.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

ב. האם המשתנים בלתי מתואמים?

4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים.
יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מס׳ ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ב. חשבו את מקדם המתאם של X ו-Y.

ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש-$X = 2$.

5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן.
הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין.
נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין X לבין Y?

ד. מה יהיה מקדם המתאם:

i. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

ii. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x\backslash y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963. ו. מתואמים.

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x\backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25. ה. 0.5.

3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x\backslash y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים. ג. $\frac{2}{3}$.

$x \backslash y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ד. i. $-\frac{2}{3}$. ii. -1. ה. $-\frac{2}{3}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 43 - המשתנה המקרי הדו מימדי - קומבינציות ליניאריות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הדו מימדי – קומבינציות לינאריות:

רקע:

יהיו שני משתנים מקריים X ו- Y.

התוחלת והשונות של סכומם היא:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot\text{cov}(X,Y)$$

התוחלת והשונות של הפרשם היא:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$
$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\cdot\text{cov}(X,Y)$$

קומבינציה ליניארית:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים:
$W=(aX+b)+(cY+d)$. אזי:

$$\text{cov}\left[(aX+b),(cY+d)\right]=a\cdot c\cdot\text{cov}(X,Y)$$
$$E(W)=E\left((aX+b)+(cY+d)\right)=aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W)=V\left((aX+b)+(cY+d)\right)=a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot\text{cov}(X,Y)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתונים שני משתנים מקריים X ו- Y המקיימים:
$\mu_X=80$, $\sigma_X=15$, $\mu_Y=70$, $\sigma_Y=20$, $\text{cov}(X,Y)=200$

א. מצאו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ב. מצאו את התוחלת והשונות של X ו- Y.

ג. מצאו את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W=2X+3Y$.

שאלות:

1) נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y/X	1	2	3	$P(X)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

א. השלימו את ההסתברויות החסרות.
ב. האם המשתנים תלויים?
ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?
ד. חשבו את השונות המשותפת.
ה. חשבו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
ו. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2) מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100, עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי היא 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.
א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.
ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.
ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3) נתון: $\text{var}(X-2Y)=2$, $\text{var}(X+2Y)=3$.
חשבו: $\text{cov}(X,Y)$.

4) מטילים קובייה n פעמים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.
Y = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5
בטאו את השונות המשותפת באמצעות n.

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מתואמים. ד. -0.1.

$x \backslash y$	1	2	3	$P(y)$
2	0.2	0.1	0.3	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
$P(x)$	0.4	0.2	0.4	1

ה. תוחלת: 4.4, שונות: 0.84. ו. תוחלת: -0.4, שונות: 1.24.

2) א. 240. ב. תוחלת: 190, שונות: 1105.

ג. תוחלת: 10 , שונות: 145 ד. תוחלת: 1710, שונות: 2785.

3) -0.125.

4) $-\frac{n}{36}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 44 - המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד – שאלות מסכמות:

רקע:

משתנים בלתי תלויים:

יהיו משתנים X ו- Y. הם יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y אפשריים מתקיים: $p(x=k,y=l)=p(x=k)\cdot p(y=l)$.

מקדם המתאם:

מגדירים את מקדם המתאם: $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

שונות משותפת:

מגדירים את השונות המשותפת:

$\operatorname{cov}(x,y)=E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)$.

תכונות של השונות המשותפת:

1. $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
2. $\operatorname{cov}(X,X)=\operatorname{var}(X)$.
3. $\operatorname{cov}\left[(aX+b),(cY+d)\right]=a\cdot c\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$.

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y) & \text{if} \quad a\cdot c>0\\ -\rho(X,Y) & \text{if} \quad a\cdot c<0\end{cases}$$

תוחלת ושונות של סכום משתנים:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)\; V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

קומבינציות לינאריות:

נגדיר קומבינציה ליניארית כללית באופן הבא: $W=(aX+b)+(cY+d)$.

אזי מתקיים:

$$E(W)=E\left((aX+b)+(cY+d)\right)=aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W)=V\left((aX+b)+(cY+d)\right)=a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

שאלות:

1) יש ליצור סיסמה בת 3 תווים. כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים: A , B , C , 1 , 2 . יהי X מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמה, ויהי Y מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצה הסיסמה (שני הקצוות).

א. זהו את ההתפלגויות השוליות של X ו- Y כהתפלגויות מיוחדות.

ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ושל Y.

ג. מצאו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ד. מהו המתאם בין $2X$ ל- $3Y+5$?

2) במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה:
4 "מכבי", 2 "גולדסטאר" ו-1 "טובורג".
קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח.
נסמן ב- X את מספר בקבוקי "מכבי " שנלקחו על ידי קרן,
ונסמן ב- Y את מספר בקבוקי "טובורג" שנלקחו על ידי קרן.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ושל Y.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X ושל Y .

ג. מצאו את השונות המשותפת של X ושל Y.

ד. נגדיר את W כמספר בקבוקי ה"גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן.
בטאו את W באמצעות X ו- Y, וחשבו את התוחלת והשונות של W על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.

ה. מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?

3) במגירה 6 זוגות נעליים. יהודה הוציא מהמגירה 4 נעליים (לא בהכרח זוגות) באקראי. נסמן ב- W את מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה, ונסמן ב- R את מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.

א. מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו.

ב. האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?

ג. מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.

ד. אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

4) בכד 5 כדורים כחולים, 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול, ו-0 אחרת.
Y - מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.
א. חשבו את $P(X=1)$.
ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
ג. מה התוחלת של Y, אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?
ד. מה השונות של X, אם ידוע שהוצא לכל היותר כדור לבן אחד?

5) ביום ההולדת הרביעי של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל-5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה-5 באופן אקראי ובלתי תלוי בבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים:
X - מספר הפרסים שקיבלה יוליה.
Y - מספר הילדים שלא קיבלו פרס.
א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של X ו- Y.
ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי מתואמים?
ג. מצאו את התוחלת של $X\cdot Y^2$.
ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה, למספר הילדים שקיבלו פרס?

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו.
א. אם שני משתנים הם מתואמים, אזי הם תלויים.
ב. אם שני משתנים הם תלויים, אזי הם מתואמים.
ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.
ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים, אזי הם בלתי תלויים.

7) במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו-25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות, מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
נסמן X_i - מספר הגברים שבחרו במתנה i.
נסמן Y_i- מספר הנשים שבחרו במתנה i.
א. האם X_1 ו- Y_1 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.
ב. האם X_1 ו- X_2 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.
ג. מהי ההתפלגות של X_1+X_2?
ד. האם המתאם בין X_1 ו- X_2 מלא או חלקי? חיובי או שלילי? אין צורך לחשב רק להסביר.

8) הוכיחו את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים: X, Y ו- Z:
$\operatorname{cov}(X+Y,Z)=\operatorname{cov}(X,Z)+\operatorname{cov}(Y,Z)$.

9) מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50 עלים בדקה. נסמן ב- Y את מספר העלים שנושרים מהעץ בין 12:00 ל-12:10, ונסמן ב- Q את מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל-12:30.
א. חשבו את: $\operatorname{cov}(4Y,Q+6)$.
ב. מה המתאם בין Y ל- Q?

10) בסל יש 20 כדורים אדומים, 20 ירוקים ו-20 כחולים. מוציאים באקראי מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

11) נתון ש: $Y\sim B(1,p)$ כאשר $0<P<1$.
הוכיחו שאם מתקיים: $P(X=x|Y=0)=P(X=x|Y=1)$ לכל X,
אז X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים.

12) נתון ש- $X\sim B(n,p)$ וכן: $Y\sim B(m,p)$, שאינם תלויים זה בזה.
הוכיחו שמתקיים: $X\mid X+Y=k\sim HG(n+m,n,k)$.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$, $Y \sim B\left(2,\frac{1}{5}\right)$.

ב. להלן טבלה: ג. 0.816. ד. 0.816.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
0	$\frac{64}{125}$	$\frac{16}{125}$	0	0	$\frac{80}{125}$
1	0	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{125}$	0	$\frac{40}{125}$
2	0	0	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
P_X	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

2) א. להלן טבלה: ב. $V(Y)=\frac{12}{49}$, $E(Y)=\frac{3}{7}$, $V(X)=\frac{24}{49}$, $E(X)=\frac{12}{7}$.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{20}{35}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{15}{35}$
P_X	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

ג. $-\frac{8}{49}$. ד. $V(W)=\frac{20}{49}$, $E(W)=\frac{6}{7}$. ה. 1-.

3) א. להלן טבלה: ב. המשתנים תלויים.

R/W	0	1	2	P_R
0	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
2	$\frac{90}{495}$	$\frac{120}{495}$	$\frac{15}{495}$	$\frac{225}{495}$
3	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
4	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
P_W	$\frac{240}{495}$	$\frac{240}{495}$	$\frac{15}{495}$	1

ג. להלן טבלה:

$R/w=1$	1	2	3
$P(R/w=1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

ד. 1.

4) א. $\frac{185}{220}$.   ב. להלן טבלה: ג. 1.714.   ד. 0.071.

X/Y	0	1	P_Y
0	$\frac{1}{220}$	$\frac{55}{220}$	$\frac{56}{220}$
1	$\frac{12}{220}$	$\frac{100}{220}$	$\frac{112}{220}$
2	$\frac{18}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{48}{220}$
3	$\frac{4}{220}$	0	$\frac{4}{220}$
P_X	$\frac{35}{220}$	$\frac{185}{220}$	1

5) א. להלן טבלה: ב. X ו-Y בלתי מתואמים.

X/Y	0	1	2	3	P_Y
2	$\frac{24}{125}$	$\frac{36}{125}$	0	0	$\frac{60}{125}$
3	$\frac{36}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{12}{125}$	0	$\frac{60}{125}$
4	$\frac{4}{125}$	0	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
P_X	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

ג. 4.128.   ד. 0.

6) א. נכון.   ב. לא נכון.   ג. נכון.   ד. לא נכון.

7) א. בלתי תלויים. ב. תלויים. ג. $x_1 + x_2 \sim B\left(n = 25, p = \frac{2}{5}\right)$.

ד. חלקי ושלילי.

8) שאלת הוכחה.

9) א. 1000. ב. 0.316.

10) -0.5.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 45 - התפלגות מולטינומית

תוכן העניינים

התפלגות מולטינומית:

רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי r תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות הצלחה: $(p_1, p_2, \cdots, p_r)$ כאשר מתקיים ש: $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

עבור: $i = 1, 2 \cdots r$, הרכיבו Y_i של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים בהן נתקבלה התוצאה ה- i, כאשר: $\sum_{i=1}^{r} Y_i = n$.

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:
$Y \sim multi(n, p_1, p_2 ..., p_r)$.

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P(Y_1 = y_1, \cdots, Y_r = y_r) = \binom{n}{y_1, y_2, \cdots, y_r} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdots y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r}.$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

המועמד	% מצביעים
טד סול	62%
בוב שפירו	12%
דורית מון	26%

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.

ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.

ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?

2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.

א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?

ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתתקבל התוצאה 1?

3) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:

$p_1 = 0.5\ ,\ p_2 = 0.3\ ,\ p_3 = 0.2\ ,\ n = 20$.

X_i הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה i כאשר: $i = 1,2,3$.

א. כיצד X_2 מתפלג?

ב. כיצד $X_2 + X_3$ מתפלג?

ג. האם X_2 ו- X_1 הינם משתנים בלתי תלויים?

ד. כיצד $X_2 | X_1 = 5$ מתפלג?

4) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.

א. יש להוכיח שלכל $i \neq j$ מתקיים ש: $COV\left(X_i, X_j\right) = -n \cdot p_i \cdot p_j$.

ב. מהו מקדם המתאם בין X_i, X_j? בטאו התשובה באמצעות n, p_i, p_j.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0581. ב. 0.2362. ג. 0.246.

2) א. 0.0169. ב. תוחלת: $\frac{5}{3}$, שונות: $\frac{25}{18}$.

3) א. בינומי עם $p=0.3$, $n=20$. ב. בינומי עם $p=0.5$, $n=20$.
ג. לא. ד. בינומי עם $p=0.6$, $n=20$.

4) א. הוכחה. ב. $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i)\cdot(1-p_j)}}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 46 - קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית:

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית – מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, וגובהן של הנשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.
מה הסיכוי שגבר אקראי במדינה יהיה גבוה מאישה אקראית?

שאלות:

1) המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק״ג וסטיית תקן של 10 ק״ג, והמשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק״ג וסטיית תקן של 8 ק״ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?

2) ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?

3) צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק״ג וסטיית תקן של 4 ק״ג. נתון שמחיר ק״ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?

4) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ״ל וסטיית תקן של 20 מ״ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

5) לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועיזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמאלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמאלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נמכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נמכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?
מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

תשובות סופיות:

1) 0.2177.

2) א. תוחלת: 7000, סטיית תקן: 2247. ב. 0.3264. ג. 9881.

3) א. תוחלת: 300, שונות: 576. ב. 0.3372. ג. 294.

4) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.

5) א. 0.7549. ב. 0.1875. ג. 0.0314.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 47 - התפלגות לוג נורמלית

תוכן העניינים

התפלגות לוג נורמלית:

רקע:

נניח שלמשתנה Y ישנה התפלגות נורמלית, כלומר: $Y \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נגדיר כעת את $X = e^Y$.

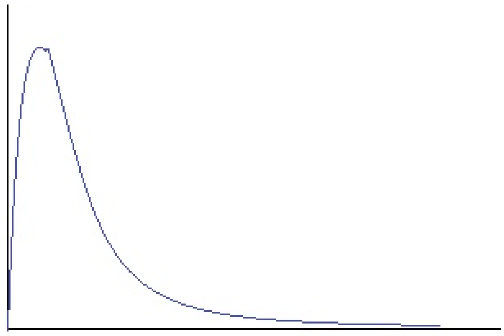
X הינו משתנה המתפלג לוג נורמלית.

הסיבה שקוראים להתפלגות באופן כזה היא ש- $\ln(X) = Y$ מתפלג נורמלית.

תחום ההגדרה של Y הינו $(-\infty,\infty)$ לעומת זאת תחום ההגדרה של X הינו $(0,\infty)$.

נסמן את ההתפלגות של X באופן הבא: $X \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$.

בהתפלגות זו מתקיימים הקשרים הבאים: $E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, $V(X) = \left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$.



דוגמה (פתרון בהקלטה):

$X \sim LOGN\left(10,2^2\right)$.

מצאו את האחוזון התשעים של ההתפלגות.

שאלות:

1) נתון: $X \sim LOGN\left(0,1^2\right)$.

א. מהי ההתפלגות של $\ln\left(X\right)=Y$?

ב. מהו החציון של X?

ג. חשבו את $P\left(X>e\right)$.

2) נתון שהשכר במשק מתפלג לוג נורמלית, התוחלת של השכר היא 10 יחידות כסף עם שונות 2. נתבונן בהתפלגות ln השכר.
כיצד מתפלג ln של השכר ומה התוחלת והשונות שלו?

3) הוכיחו שהחציון של: $X \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$ הינו e^{μ}.

4) נתון ש- $X_i \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$ לכל: $i=1,2,...,n$.
כמו כן ידוע שהתצפיות הן בלתי תלויות זו בזו.
הוכיחו: $\prod_{i=1}^{n} X_i \sim LOGN\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

5) אורך החיים של מכשיר מתפלג לוג נורמלית עם תוחלת של 6 שנים וסטיית תקן של 1.5 שנים.

א. מצא את העשירון העליון של אורך חיי המכשיר.

ב. מה ההסתברות שהמכשיר יחיה יותר מ-3 שנים?

6) שפנים מתרבים פי X_i בכול חודש. נתון ש- X_i מתפלג לוג נורמלית כאשר $E\left(X_i\right)=\sqrt{e}\ ,V\left(X_i\right)=e\left(e-1\right)$.
מה ההסתברות שכעבור שנה כמות השפנים גדלה פי 20?

תשובות סופיות:

1) א. התפלגות נורמלית סטנדרטית. ב. 1. ג. 0.1587.

2) $N\left(\mu=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{100}{1.02}\right),\sigma^2=\ln(1.02)\right)$.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) א. 7.98. ב. 0.9963.

6) 0.1949.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 48 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i=1,2,...,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסונית עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i=1,2,...,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייוצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

תשובה:

א. $P(T=14)=e^{-12}\cdot\frac{12^{14}}{14!}=0.0905$.

ב. $T_j\sim P(12)$ מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה j , $\sum_{j=1}^{60}T_j\sim P(12\cdot 60=720)$.

ג. $P(X_1=4\cap T=8)-P\left(X_1=4\cap\sum_{i=2}^{4}X_i=4\right)=P(X_1=4)\cdot P\left(\sum_{i=2}^{4}X_i=4\right)=\frac{e^{-4}\cdot 4^4}{4!}\cdot\frac{e^{-8}\cdot 8^4}{4!}=0.0112$.

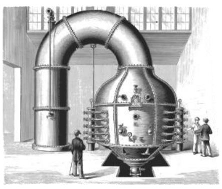
שאלות:

1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?

ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א' מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב' מתפלג פואסונית עם תוחלת של תקלה אחת ביום.
מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.



א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?

ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?

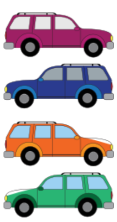
ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א'?

3) נתון ש- $i=1,2,3$, $X_i \sim P(1)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה.
נגדיר את Y באופן הבא: $Y=\sum_{i=1}^{3} X_i$.

א. מהי התוחלת ומהי השונות של Y?

ב. חשבו את: $E|Y-2|$.

4) לצומת נכנסות מכוניות מ-3 כיוונים שונים. מספר המכוניות הנכנסות מכיוון i הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית עם פרמטר i מכוניות לשעה כש- $i=1,2,3$. אין תלות בין מספרי המכוניות המגיעות לצומת מכיוונים שונים. W הוא משתנה מקרי שמייצג את מספר המכוניות המגיעות לצומת בשעה משלושת הכיוונים יחד.



א. חשבו את: $P(W=k|W>0)$, $k=1,2,3,\ldots$.

ב. חשבו את: $E\left(\frac{1}{1+W}\right)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם: $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ו- $X_2 \sim P(\lambda_2)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

ב. הוכיחו שאם: $i = 1, 2, ..., n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.

2) א. פואסונית עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

3) א. תוחלת: 3, שונות: 3. ב. $\frac{10}{e^3} + 1$.

4) א. $\frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k! \cdot \left(1 - e^{-6}\right)}$. ב. $\frac{e^{-6} \cdot \left(e^6 - 1\right)}{6}$.

5) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p.
באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i = 1, 2, \ldots, m$,

והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם

הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$.

דוגמה:

ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים.
מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?
מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה:
ב"ת

$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.

$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4 + 2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$
$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(x) = n \cdot P$$
$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.
א. מה ההתפלגות של X?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון.
סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.
א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?
ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?

3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים.
כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9.
ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.
א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?
ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

4) נתון ש: $Y \sim B(3,0.6)$, $X \sim B(2,0.5)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.
א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.
ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים m ו- p .
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W=X+Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

6) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_X, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_Y ו- p .
הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים: n_x+n_Y ו- p.

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim B(10,0.5)$.   ב. $E(X)=5$, $V(X)=2.5$.
2) א. 0.0178.   ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375.
3) א. 0.0521.   ב. 0.0751.
4) א. עיין בסרטון הוידאו.   ב. 0.2133.
5) המשתנים תלויים.
6) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם אותו פרמטר p, סכום המשתנים יתפלג בינומית שלילית עם פרמטר p. באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,...,m$,

ואם ידוע שהמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m,p).

דוגמה:

עודד משחק בשני שלבים:
בשלב הראשון הוא מטיל קובייה עד אשר הוא מקבל את התוצאה 1.
ברגע שהוא מקבל את התוצאה 1 הוא עובר לשלב השני,
ובו הוא שוב מטיל את הקובייה עד שהוא מקבל את התוצאה 4.

א. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב הראשון?

ב. מהי ההתפלגות ש מספר ההטלות בשלב השני?

ג. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות במשחק?

תשובות (פתרון בהקלטה):

א. $X_1 =$ מספר ההטלות בשלב הראשון, $X_1 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ב. $X_2 =$ מספר ההטלות בשלב השני, $X_2 \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ג. $X_1+X_2 \sim NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$.

שאלות:

1) יוסי מטיל מטבע עד לקבלת "עץ", ודנה מטילה מטבע (באופן לא תלוי ביוסי) עד לקבלת "פָּלִי". X הוא מספר ההטלות של יוסי ודנה יחד.

א. מה ההתפלגות של X?

ב. מה התוחלת ומה השונות של X?

2) אדם מנסה להתקשר למוקד שירות. הוא מתקשר עד אשר יקבל מענה. ההסתברות למענה במוקד השירות היא 0.4 בכל פעם, ללא תלות בניסיונות האחרים. אחרי שסיים את השיחה שבה קיבל מענה, האדם נזכר ששכח לשאול שאלה נוספת. הוא מתקשר שוב למוקד השירות עד לקבלת מענה.

א. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שש פעמים?

ב. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שבע פעמים, אם ידוע שבפעם הראשונה הוא נאלץ להתקשר שלוש פעמים עד לקבלת מענה?

3) X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2 לכל: $i=1,2,...,5$, וכמו כן נתון ש- $X_1, X_2, ..., X_5$. בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות ש: $\sum_{i=1}^{5} X_i = 5$?

ב. חשבו את: $P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 12 \mid X_1 = 2\right)$.

4) נתון ש: $Y \sim G(0.5)$, $X \sim G(0.6)$. X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

א. מצאו את ההתפלגות של $X+Y$.

ב. מצאו את: $P(X+Y=2 \mid X>0)$.

5) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
X מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p ו- Y מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p . הוכיחו ש- $X+Y$ מתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים 2 ו- p .

6) הוכיחו את הטענה: אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i=1,2,...,m$ ואם: $X_1, X_2, ..., X_m$. בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{m} X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m, p) .

תשובות סופיות:

1) א. $X \sim NB\left(2, \frac{1}{2}\right)$. ב. תוחלת: 4, שונות: 4.

2) א. 0.10368. ב. 0.0864.

3) א. 0.00032. ב. 0.0352.

4) א. $k = 2,3,\dots$, $P(X+Y=k) = 6 \cdot 4^k \left(1.25^k - 1.25\right)$. ב. 0.3.

5) שאלה הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X בהינתן $X+Y=n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

דוגמה:

מספר בני האדם הנכנסים לבית קפה מסוים בשעה מתפלג פואסונית עם ממוצע 6. מספר הכלבים הנכנסים לבית הקפה בשעה מתפלג פואסונית עם שונות 1. נניח שאין תלות בין השניים.
מה הסיכוי שבשעה האחרונה נכנסו לבית הקפה בדיוק שני כלבים, אם ידוע שבסך הכול נכנסו שבעה בני אדם וכלבים?

תשובה:

$X \sim P(\lambda_1=1)$ - מספר הכלבים הנכנסים בשעה.

$Y \sim P(\lambda_2=6)$ - מספר בני האדם הנכנסים בשעה.

X,Y ב"ת.

$$X \sim P(\lambda_1)$$
$$Y \sim P(\lambda_2)$$
$$\Downarrow$$
$$X|X+Y=n \sim B\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_1}\right)$$
$$X|X+Y=7 \sim B\left(7,\frac{1}{7}\right)$$
$$P(X=2|X+Y=7)=\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^5=0.1983$$

שאלות:

1) מספר הפסקות החשמל היזומות במפעל זורקס מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 בחודש. מספר הפסקות החשמל הלא-יזומות במפעל מתפלג פואסונית עם תוחלת של 3 בחודש. מספר הימים בחודש כלשהו זניח. אין תלות בין מספר ההפסקות היזומות למספר ההפסקות שאינן יזומות.

א. מה הסיכוי שברבעון הראשון של השנה יהיו בדיוק 5 הפסקות חשמל במפעל וגם שבחודש ינואר של אותה שנה תהיה בדיוק הפסקה אחת?

ב. מהי התוחלת של מספר החודשים שיעברו מינואר 2020 ועד החודש הראשון שבו לא יהיו כלל הפסקות חשמל?

ג. אם בחודש מרץ הבא יהיו בדיוק 6 הפסקות חשמל במפעל זורקס, מה התוחלת של מספר ההפסקות היזומות שיהיו באותו החודש?

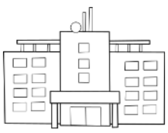
2) מספר המכירות המתרחשות בשעה בחנות הצעצועים טויזים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 6 בשעה. החנות פתוחה בכל יום במשך שמונה שעות, מהשעה 11:00.

א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יהיו לפחות 3 מכירות בחנות הצעצועים טויזים?

ב. מה ההסתברות שבשעה הראשונה שלאחר פתיחת החנות יהיו 4 מכירות, אם באותו היום יהיו בסך הכול 50 מכירות?

ג. בכל יום מנהל החנות מקבל דוח ובו פירוט של מספר הרכישות שהיו בכל שעה שלמה מאז פתיחת החנות. מה ההסתברות שמחר, מתוך שמונה השעות שבהן החנות פתוחה, תהיה בדיוק שעה אחת שבה יהיו בדיוק 5 רכישות?

3) מספר הגברים המגיעים לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה מתפלג פואסונית בקצב של 2 לשעה. מספר הנשים המגיעות לטיפול באותו חדר מיון מתפלג פואסונית בקצב של 1 לשעה. אין תלות בין מספר הגברים המגיעים לחדר המיון ובין מספר הנשים המגיעות אליו.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יגיע לפחות אדם אחד לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה?

ב. אם בשעה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 5 אנשים, מה ההסתברות שמתוכם יש בדיוק 2 נשים?

ג. אם ביממה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 60 אנשים, מהי השונות של מספר הגברים שהגיעו לטיפול בחדר המיון באותה היממה?

4) בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1, 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 3, ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 4.

אין תלות בין מספרי האנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים. כל אדם שנכנס לסניף הדואר פונה בהכרח לאחד מן האשנבים.

א. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?

ב. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?

ג. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך הכול נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?

5) הוכיחו את הטענה שאם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X, בהינתן $X+Y=n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

6) $X_1, X_2, ..., X_{100}$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.
נניח כי לכל: $i=1,...,100$ ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית עם הפרמטר $\frac{i}{50}$.

א. מצאו את ההתפלגות המותנית של $\sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי ש: $X_{100} = n$.

ב. מצאו את ההתפלגות המותנית של X_{100} בתנאי ש: $\sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0946. ב. 148.4. ג. 2.4.

2) א. 0.938. ב. 0.1209. ג. 0.3772.

3) א. 0.9502. ב. $\frac{80}{243}$. ג. $13\frac{1}{3}$.

4) א. 0.1318. ב. 0.2041. ג. 0.149.

5) שאלה הוכחה.

6) א. $k \geq n$ $\frac{e^{-99} \cdot 99^{k-n}}{(k-n)!}$. ב. $B\left(n, \frac{2}{101}\right)$.

התפלגות מותנית בסכום של משתנים המתפלגים בינומית:

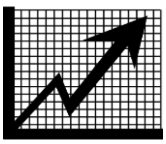
רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שמתפלגים בינומית עם הפרמטרים: (n_X, p) ו- (n_Y, p) בהתאמה, אז בהינתן ש- $X+Y=n$, המשתנה המקרי המותנה X יתפלג היפרגיאומטרית עם הפרמטרים: $N=n_X+n_Y$, $D=n_X$ ו- $n=n$.

כלומר: $X \sim B(n_x, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה $\Leftarrow$ $X \mid X+Y=n \sim HG(n_X+n_Y, n_X, n)$.

דוגמה:

אנליסט בנה תיק השקעות משמונה מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8, באופן בלתי תלוי במניות אחרות. הוא החליט להוסיף לתיק עוד ארבע מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8 באופן בלתי תלוי במניות אחרות, בכלל זה אלה שכבר נמצאות בתיק ההשקעות.



אם עשר מניות מהתיק יעלו השנה, מה הסיכוי ששלוש מהן יהיו מארבע המניות שנוספו לתיק?

תשובה:

$Y \sim B(n_Y=8, P=0.8)$ - מספר המניות המקוריות שיעלו השנה.

$X \sim B(n_X=4, P=0.8)$ - מספר המניות שנוספו שיעלו השנה.

$$X \sim HG(N, D, n)$$

$$X \mid X+Y=10 \sim HG(12, 4, 10)$$

$$P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=3 \mid X+Y=10)=\frac{\binom{4}{3}\binom{8}{7}}{\binom{12}{10}}=0.4848$$

שאלות:

1) חמישה אבירים וארבעה נסיכים מתאמנים בקליעה למטרה. כל אחד מתשעת המתאמנים מנסה לקלוע חץ אחד למטרה. הסיכוי של כל אחד מהאבירים לקלוע למטרה הוא 0.7, והסיכוי של כל אחד מהנסיכים לקלוע למטרה הוא 0.8. ניסיונות הקליעה למטרה בלתי-תלויים זה בזה.

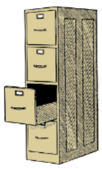
א. מה ההסתברות שארבעה אבירים ושלושה נסיכים יקלעו למטרה?

ב. אם ארבעה אבירים קלעו למטרה, מה הסיכוי ששלושה נסיכים יקלעו למטרה?

ג. אם שמונה מתאמנים קלעו למטרה, מה התוחלת של מספר הנסיכים שקלעו למטרה?

2) מזכיר הכניס ארבע תיקיות לתוך מגירות בארונית. בארונית חמש מגירות. בחירת המגירה לכל תיקייה נעשית באקראי ובאופן בלתי תלוי בתיקיות אחרות. מגירה יכולה להכיל מספר רב של תיקיות.

נגדיר:



X – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה העליונה.

Y – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה התחתונה.

א. מה ההתפלגות של Y ומה ההתפלגות של X?

ב. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן שלמגירה העליונה והתחתונה יחד הוכנסו בדיוק שלוש תיקיות.

3) מטילים מטבע תקין 50 פעמים. אם X הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בכל 50 ההטלות, ו-Y הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" ב-20 ההטלות הראשונות.

א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ב. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן ש: $Y=j$, לכל: $j=0, 1, \ldots, 20$. מה הקשר בין פונקציית ההסתברות שהתקבלה ובין ההתפלגות הבינומית?

ג. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן ש: $X=i$, לכל: $i=0, 1, \ldots, 50$. זהו את ההתפלגות המותנית שהתקבלה.

4) הוכיחו את הטענה הבאה:

אם: $X \sim B(n_x, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$, והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז: $X \mid X+Y=n \sim HG(n_X+n_Y, n_X, n)$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.1475. ב. 0.4096.
ג. תוחלת: 3.6818.

2) א. $Y \sim B\left(n_Y = 4, P_Y = \frac{1}{3}\right)$, $X \sim B\left(n_X = 4, P_X = \frac{1}{5}\right)$ ב. עין בסרטון הוידאו.

3) א. $j \le i \le j+30$, $0 \le j \le 2$, $P(X=i, Y=j) = \binom{20}{j}\cdot\binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{50}$.

ב. $0 \le i-j \le 30$, $P(X=i|Y=j) = \binom{30}{i-j}\cdot 0.5^{30}$.

ג. $Y|Y+W=i \sim HG(50,20,i)$.

4) שאלת הוכחה.

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.

א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=2$$

$Y\sim\exp(\lambda=2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

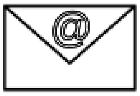
א. $X\sim P(\lambda=2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W\sim P(\lambda=2\cdot 60=120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

ג.
$$P(x<2)=P(x\le 1)=P(x=0)+P(x=1)=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}+\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}$$
$$e^{-2}+2e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}=0.406$$

שאלות:

1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?

ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שעתיים.

א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?

ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?

ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.

א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?

ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.

א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?

ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?

ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 21:20 ל-21:30?

ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

5) הוכיחו שאם מספר המופעים ליחידת זמן מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מזמן 0 עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

תשובות סופיות:

1) א. 0.0948. ב. 0.1.
2) א. 103.7. ב. 240. ג. 0.5.
3) 115.13. ב. 0.0713.
4) א. 0.59399. ב. 0.0821. ג. 0.0200. ד. 0.3679.
5) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 49 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – הקדמה:

רקע:

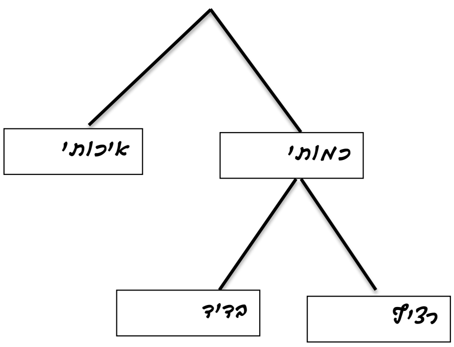
בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת, שיכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.
בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

1) מי הקבוצה הנחקרת?
2) מה גודל הקבוצה?
3) מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:



משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.
כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה) ומצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים, להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.
את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

1. משתנה בדיד – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..) וציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).
2. משתנה רציף – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים. הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. כמו :
גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי), משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

שאלות:

1) סווגו את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
א. מספר הדירות בבניין.
ב. גיל אדם בשנים.
ג. אחוז האבטלה בעיר.
ד. מקצוע לימוד מועדף.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.
א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים, ציינו ליד כל אחד אם הוא רציף או בדיד:
א. שכר עובד ב-₪.
ב. ציון בחינת בגרות.
ג. תוצאה בהטלת קובייה.
ד. מהירות ריצה בתחרות.
ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

1) א. כמותי בדיד. ב. כמותי רציף. ג. כמותי רציף.
ד. איכותי.

2) א. מספר איחורים. ב. כמותי בדיד.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 50 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.
משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות.
   לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרוש), אזור מגורים.
   משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל,דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוולי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים.
   למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים.
למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג.
הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס.
בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

משתנה איכותי

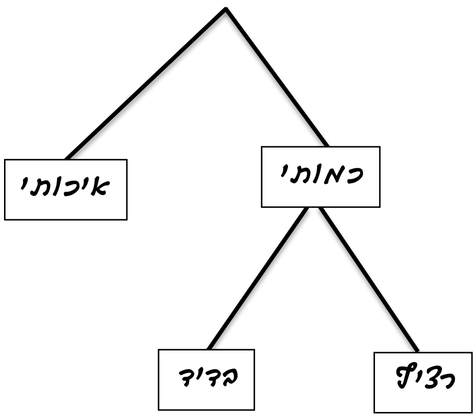
משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים.
דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



שאלות:

1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):
א. גובה (בס"מ).
ב. מספר ילדים למשפחה.
ג. מידת החרדה לפני מבחן.
ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאד)
ה. השכלה.
ו. מספר אוטובוס.
ז. מקום מגורים.
ח. מין (1=גבר ; 2=אישה).
ט. מידת נעליים.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.
א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:
א. שכר ב-₪.
ב. ציון בחינת בגרות.
ג. תוצאה של הטלת קובייה.
ד. מהירות ריצה בתחרות.
ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

1) א. מנה. ב. מנה. ג. סדר.
ד. סדר. ה. מנה/ סדר. ו. שמי.
ז. שמי. ח. שמי. ט. סדר.

2) א. מספר האיחורים. ב. כמותי בדיד בסולם מנה.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 51 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה על סולמות מדידה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה על סולמות מדידה:

רקע:

טרנספורמציה הינה מצב שבו עושים שינוי לערכים במשתנה הנחקר.
להלן נפרט אילו טרנספורמציות מותרות על כל סולם מדידה:

סולם שמי (נומינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הזהות.

סולם סדר (אורדינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הסדר.

סולם רווחים (אינטרוולי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה לינארית חיובית.

סולם מנה/יחס –

הטרנספורמציה המותרת היא הכפלה / חילוק במספר חיובי.

שאלות:

1) ציינו באילו סולמות מדידה מותרות הטרנספורמציות הבאות:
א. הכפלה באפס.
ב. הכפלה ב-2.
ג. הכפלה במינוס 1.
ד. הוספה של 3.
ה. הפחתה של 3.

2) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם המשתנה "הטמפרטורה בחדר הסגלגל"?
א. טרנספורמציה שומרת סדר.
ב. טרנספורמציה לינארית חיובית.
ג. טרנספורמציה שומרת יחס.
ד. תשובות ב' ו-ג' נכונות.

3) באיזה סולם/ות מדידה מותרת החסרה של קבוע מכל מספר?
א. בסולם שמי בלבד.
ב. בסולמות שמי וסדר בלבד.
ג. בסולמות שמי, סדר ורווחים בלבד.
ד. בכל ארבעת סולמות המדידה.

4) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם מספרי האוטובוסים של "אגד"?
א. טרנספורמציה שומרת סדר.
ב. טרנספורמציה לינארית חיובית.
ג. טרנספורמציה שומרת יחס.
ד. כל התשובות נכונות.

תשובות סופיות:

1) א. אף סולם. ב. כל הסולמות. ג. רק על סולם שמי.
ד. רווחים, סדר, שמי. ה. רווחים, סדר, שמי.

2) ד'.

3) ג'.

4) ד'.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 52 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\cdot 100$
⋮	⋮	⋮
X_k	f_k	$\frac{f_x}{N}\cdot 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון- X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	0.08=2/25
6	4	6	0.16=4/25
7	8	14	0.32=8/25
8	5	19	0.2=5/25
9	4	23	0.16=4/25
10	2	25	0.08=2/25

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שווה לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שווות לערך.

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

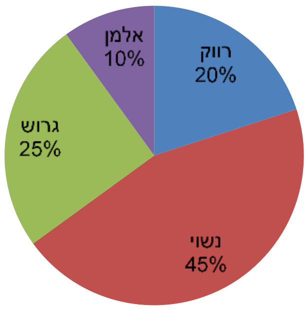
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

התפלגות המצב המשפחתי



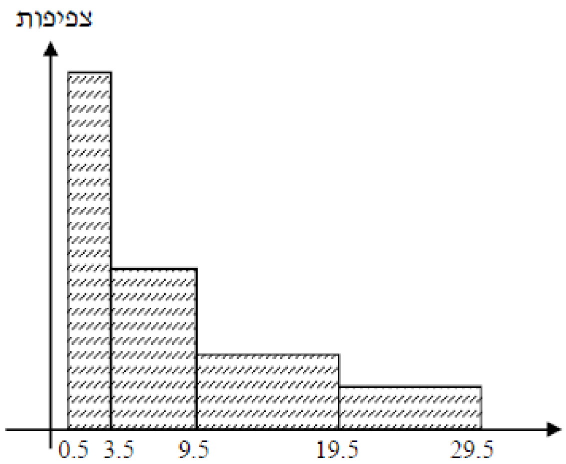
דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



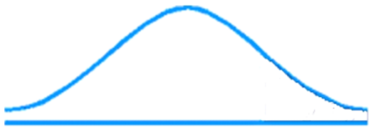
פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

שאלות:

1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

המקצוע	מספר התלמידים
מתמטיקה	44
תנ"ך	20
אנגלית	12
היסטוריה	26

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

השכלה	מספר העובדים
נמוכה	60
תיכונית	120
אקדמאית	20

א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

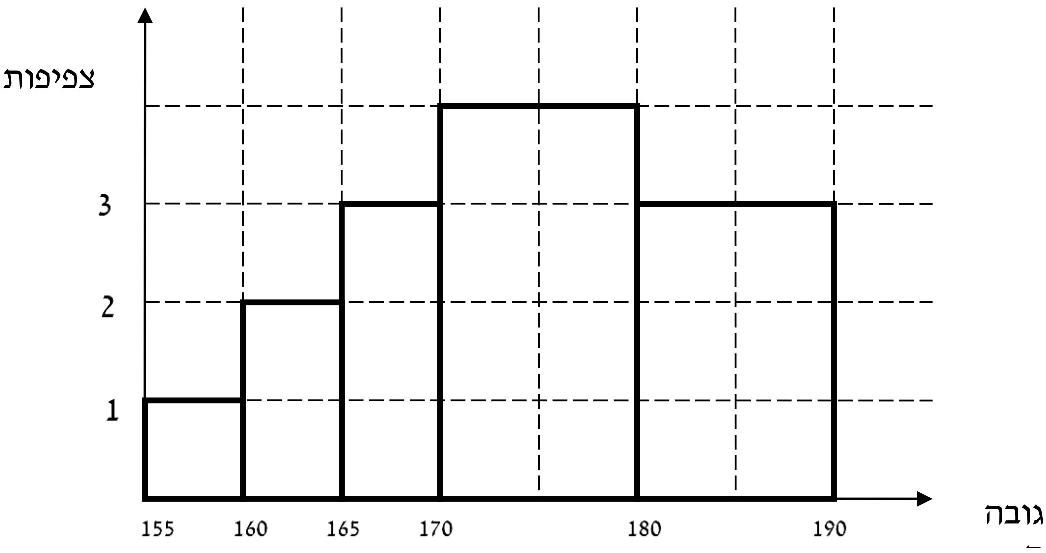
א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



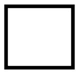
א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

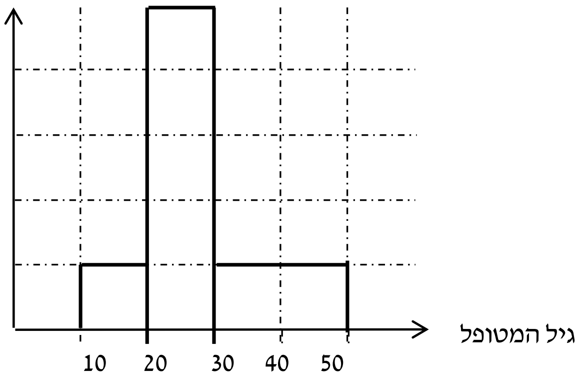
6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד״ר שוורץ בשנים :
קנה מידה :

8 מטופלים= 



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד״ר שוורץ בגילאים 20-30?

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

2) א. מקצוע מועדף.
ב. 19.6%.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.
ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

4) א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו. ב. סימטרית.

7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף. ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
ד. להלן טבלה: ה. 62.5%.

x	$f(x)$
10-20	8
20-30	40
30-50	16

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 53 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמיתיים

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

גבולות מדומים:

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

רמת הדיוק חייבת להיות קבועה - אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר ייתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח':
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

X	$f(x)$
130-139	20
140-149	25
150-159	30
160-169	20
170-189	10

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

X	$f(x)$
500-590	542
600-690	32
700-790	154
800-890	254

2) להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת.
יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

מספר אנשים	משקל בק"ג
18	60-64
24	65-69
52	70-79
19	80-89

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

x	$f(x)$
495-595	542
595-695	32
695-795	154
795-895	254

2) להלן טבלה:

x	$f(x)$
59.5-64.5	18
64.5-69.5	24
69.5-79.5	52
79.5-89.5	19

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 54 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

X_i	i
5	1
0	2
1	3
3	4
2	5

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X),
ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

Y	X	מספר דירה
1	2	1
1	3	2
2	2	3
3	4	4
2	3	5

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.

2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$.

4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$.

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$.

תשובות סופיות:

1)	א. 7.	ב. 9.	ג. 11.	ד. 121.
	ה. 14.	ו. 27.	ז. 126.	
2)	א. 3.	ב. 12.	ג. 7.	
	ד. 12.	ה. 14.		
3)	א. נכונה.	ב. נכונה.	ג. לא נכונה.	
4)	1160.			

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 55 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

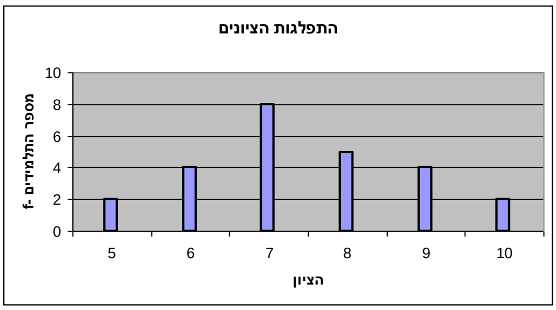
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תוכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

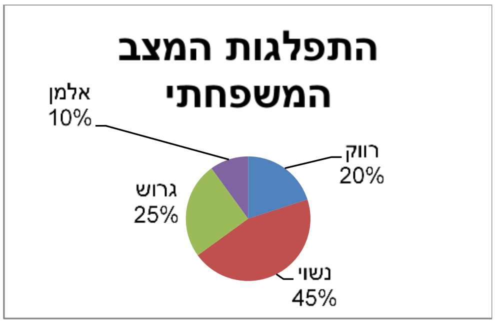
בדיאגרמת מקלות

שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



בטבלת שכיחויות במחלקות

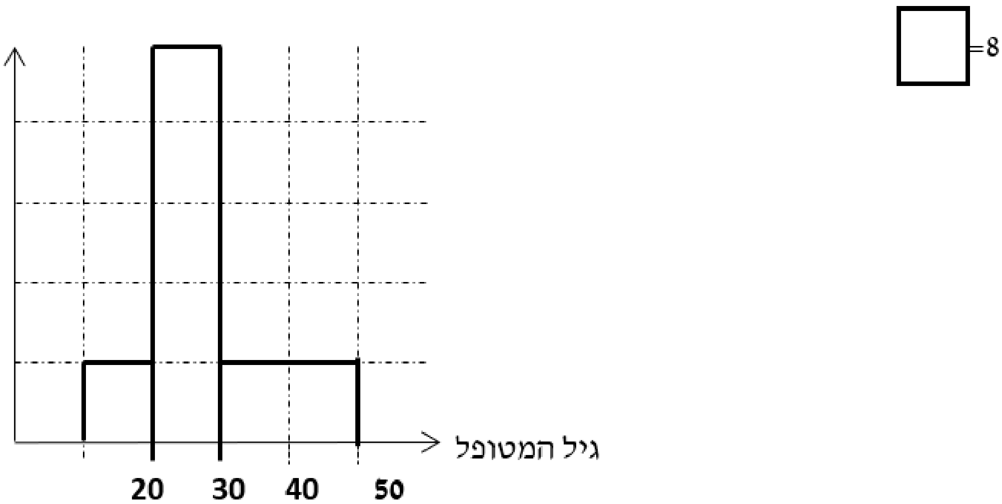
אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$.

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה- $\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$.

$F\left(x_{m-1}\right)$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f\left(x_m\right)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average:

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

בטבלת שכיחויות

$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$.

במחלקות

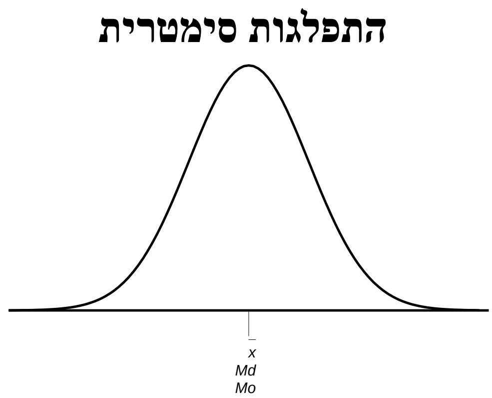
נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- X.
הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

כללי

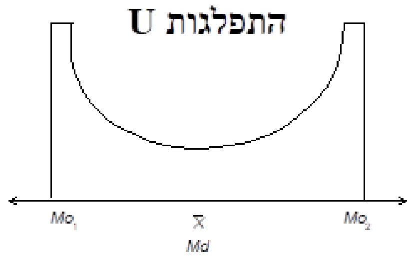
הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:



שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

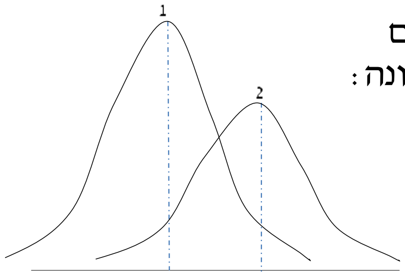
4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.
ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.
ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.
ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

א. השלימו את הטבלה.
ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.
ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

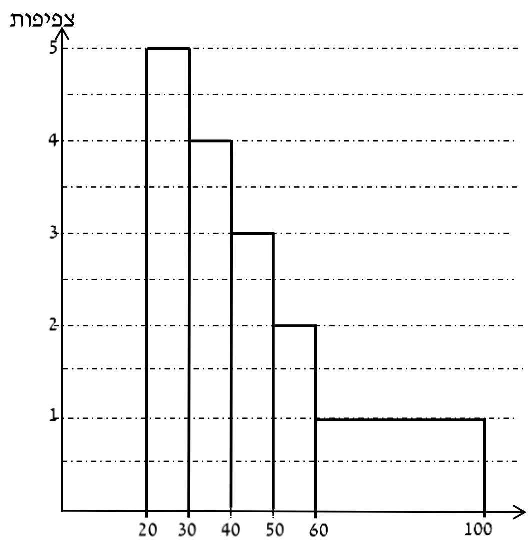
7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג. מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.
חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

שכיחות	גובה בס"מ
30	150-160
40	160-170
60	170-175
70	175-180
40	180-190

9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה.
להלן התוצאות:



א. מצאו את השכיח בהתפלגות.
ב. מצאו את החציון בהתפלגות.
ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החיצון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

תשובות סופיות:

1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.
2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.
3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.
4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.
5) ב'.
6) א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	92
3	18

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.
7) חציון וממוצע: 55.
8) ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.
9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון.
ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 56 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x{}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

דוגמאות:

1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x{}^2 = \dfrac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \dfrac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		**1430**

$$S_x{}^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x{}^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.
ב. חשבו את הטווח של הנתונים.
הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.
א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?
ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

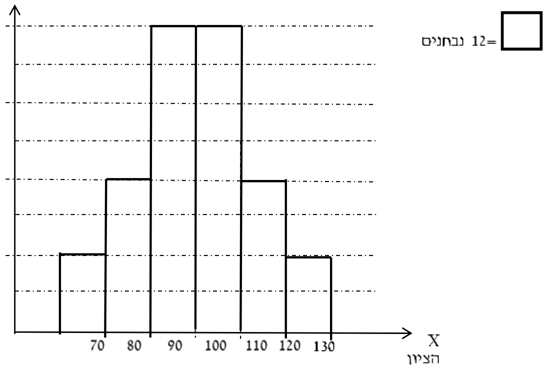
מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?
ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:
מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?
ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.
ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו- 100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

תשובות סופיות:

1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

4) 10.8.

5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

6) 7.73.

7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 57 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

מספר שנות ותק	רוחב $L_1 - L_0$	f מספר עובדים (שכיחות)	F
$0.5-4.5$	4	56	56
$4.5-9.5$	5	50	106
$9.5-11.5$	2	48	154
$11.5-14.5$	3	36	190
$14.5-19.5$	5	10	200

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$. מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$.

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26$ שניות

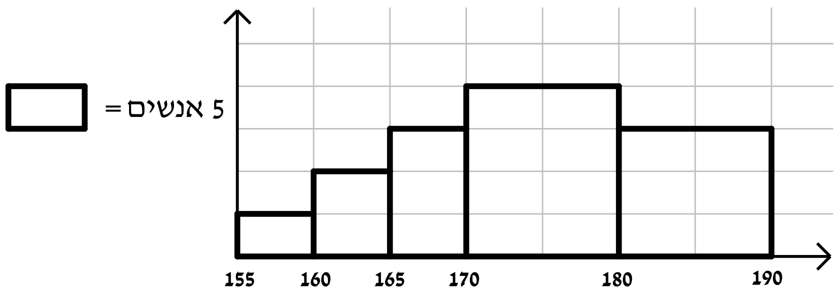
שאלות:

1) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

2) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

תשובות סופיות:

1) 13.75 ק"ג.

2) 13.33 ק"ג.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 58 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון:

רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן. המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון. הרעיון הוא למצוא בכמה התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון, בממוצע.
כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות, הנוסחה לחישוב המדד: $MAD=\frac{\sum_i |X_i-Md|}{n}$.

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד: $MAD=\frac{\sum |X_i-Md|\cdot f\left(X\right)}{n}$.

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור X את אמצע המחלקה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 6, 7, 8, 2.
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

שאלות:

1) נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 5, 6, 9, 12, 8.
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את החציון.
ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.
ג. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחושב היה משתנה, אם 5 משפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

תשובות סופיות:

1) 2.5.

2) א. 1.5. ב. 1.14.
ג. חציון לא ישתנה, ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 59 - סטטיסטיקה תיאורית - ממוצע משוקלל ושונות מצורפת

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – ממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

רקע:

מדובר על מצב שבו ישנן כמה קבוצות שנרצה לאחד לקבוצה אחת.
מתעניינים בממוצע והשונות של הקבוצה הגדולה המתקבלת מאיחוד הקבוצות הקטנות.

n_j - מס' התצפיות בקבוצה ה- j .

j - אינדקס של הקבוצה.

N - מס' התצפיות בכל הקבוצות יחד (סכום כל ה- n_j).

$\overline{x_j}$ - הממוצע בקבוצה ה- j .

S_j^2 - השונות בקבוצה ה- j .

הנוסחאות לממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{x_j} n_j}{N} \; ; \; N = \sum_{j=1}^{k} n_j \; ; \; S^2_c = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j s^2_j}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{x}_j - \overline{\overline{x}}\right)^2}{N}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחברה שני אגפים: אגף א' מונה עשרים עובדים, השכר הממוצע שם הוא 6,000 ₪ וסטיית התקן היא 2,000 ₪. באגף ב' עשרה עובדים, השכר הממוצע הוא 12,000 ₪ וסטיית התקן היא 3,000 ₪.
מהו השכר הממוצע ומהי סטיית התקן של שכר העובדים בחברה?

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את הממוצע המשוקלל בשכבה.

ב. חשבו את השונות המצורפת בשכבה.

2) נתונות שתי קבוצות: בקבוצה I פי שתים תצפיות מאשר בקבוצה II.
הממוצע בשתי הקבוצות הוא 70. השונות בקבוצה I היא 100.
השונות בקבוצה II היא 400.

א. מצאו את הממוצע של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

ב. מצאו את סטיית התקן של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

תשובות סופיות:

1) א. 76.22. ב. 173.5.

2) א. 70. ב. 14.14.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 60 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

שאלות:

1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.
א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
א. התפוקה.
ב. כמות הפועלים.
ג. חריגים באותה מידה.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?
ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

1) א. לשון. ב. 72.
2) ב'.
3) א. משקל. ב. 70.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 61 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש $p\ \%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p.
למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון:
ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$.

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה: $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $x_p = L_0 + \frac{\frac{n\cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)}\cdot(L_1 - L_0)$, את המשתנים:

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה: $P_x = \left[\frac{(x-L_0)}{(L_1-L_0)}\cdot f(x_m) + F(x_{m-1})\right]\cdot\frac{100}{n}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר ב-₪	
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

שאלות:

1) להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

שכר - X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7,000 ₪?

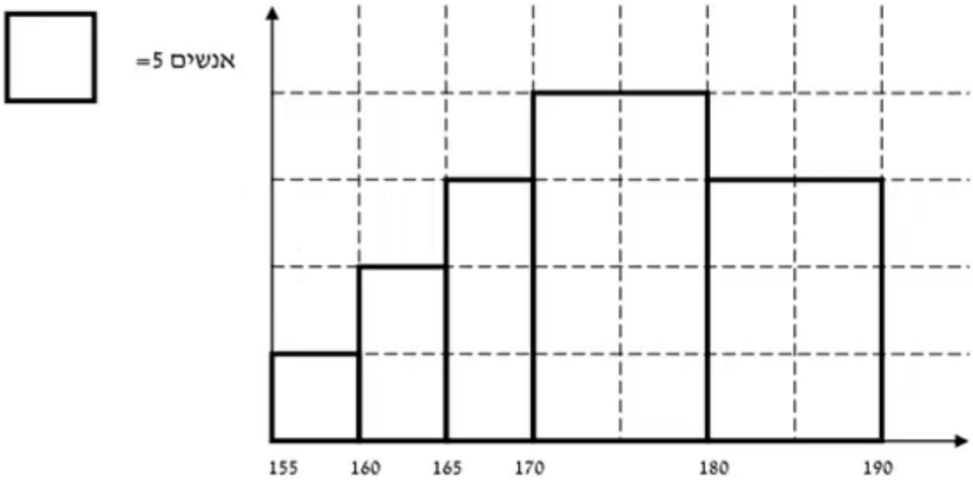
ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?

ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

2) למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחויות החסרות.

ציון- X	$f(x)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



חשבו:

א. העשירון התחתון.
ב. האחוזון ה-30.
ג. הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.
ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.
ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

תשובות סופיות:

1) א. 13.23. ב. 22. ג. 17.2. ד. 8.82%. ה. 7.36%.
ו. 83.82%.

2) להלן טבלה:

ציון- X	$f(x)$
50-60	40
60-70	60
70-80	200
80-90	60
90-100	40

3) א. 162.5. ב. 170. ג. 183.33. ד. 3%. ה. 15%.
ו. 55%.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 62 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים בטבלת שכיחויות בדידה

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש $p\,\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\,\%$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו :

# תוכניות החיסכון	$F(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

X	$F(x)$
0	10
1	40
2	30
3	15
4	5

מצאו להתפלגות את:

א. האחוזון ה-60.

ב. המאון ה-40.

ג. העשירון העליון.

ד. הטווח בין הרבעונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

תשובות סופיות:

1) א. 2. ב. 1. ג. 3. ד. 1.

2) א. 1. ב. 2. ג. 4. ד. 4.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 63 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y{}^2 = a^2 S_x{}^2$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו-b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

שאלות:

1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15, MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נקי' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$,
אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
6) $a^2 \cdot S_x^2$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 64 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – מקדם השתנות:

רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל).
על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע הנתונים נחשב את מקדם ההשתנות – Coefficient of Variation: $CV = \frac{S(X)}{\overline{X}}$.
ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר, כך המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע, וככל שמקדם ההשתנות גבוה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2) נתונות שתי קבוצות: הממוצע בקבוצה א' הוא 100 והשונות 100.
הממוצע בקבוצה ב' הוא 500 והשונות 400.
באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

3) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

לפי קריטריון CV:

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sigma}{\overline{X}}$. ב. כיתה ב'.

2) קבוצה ב'.

3) ב'.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 65 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - boxplot

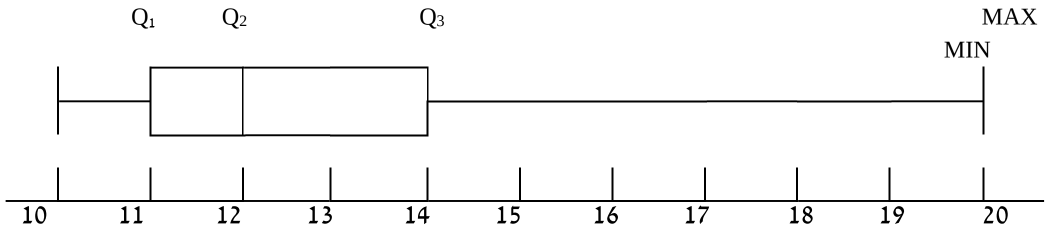
תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – תרשים קופסא (Boxplot):

רקע:

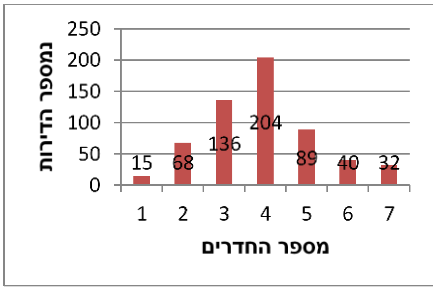
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

1) את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2).
2) את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני).
3) את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית).



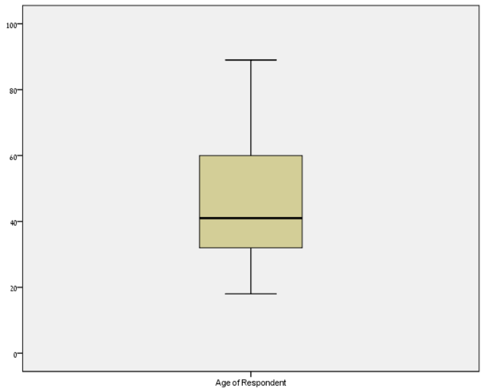
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד:



א. מצאו את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
ב. שרטטו דיאגרמת קופסא להתפלגות.
ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2) להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל (בשנים) באוכלוסייה מסוימת:



א. מה הגיל החציוני?
ב. מה בערך טווח הגילאים?
ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

תשובות סופיות:

1) א. חציון: 4 , רבעון תחתון: 3, רבעון עליון: 5.
ב. ראה גרף מלא בסרטון וידאו. ג. כמעט סימטרית.

2) א. חציון: 40. ב. טווח: 70. ג. התפלגות אסימטרית ימנית.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 66 - סטטיסטיקה תיאורית - ניתוח פלטים

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – ניתוח פלטים:

שאלות:

1) להלן פלט על התפלגות הגילאים באוכלוסייה מסוימת:

		Statistic
Age of Respondent	Mean	45.63
	Median	41.00
	Variance	317.140
	Std. Deviation	a
	Minimum	18
	Maximum	b
	Range	71
	Interquartile Range	28

א. מצאו את הערכים בטבלה המסומנים ב- a ו- b.
ב. נתון שההתפלגות היא אסימטרית, האם היא נוטה ימינה או שמאלה?

2) להלן התפלגות ההשכלה של העובדים בחברת "מתאר":

		Statistic
years of education	Mean	?
	Median	12.0000
	Variance	?
	Std. Deviation	2.54786
	Minimum	?
	Maximum	?
	Range	?
	Interquartile Range	?

מלאו את הערכים המסומנים בסימני שאלה.

תשובות סופיות:

1) א. $b=89$, $a=17.81$. ב. אסימטרית ימנית.

2) ממוצע: 11.909, שונות: 6.492, טווח: 10, טב״ר: 3.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 67 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי אסימטריה

תוכן העניינים

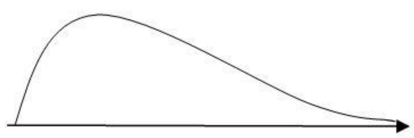
מדד אסימטריה (צידוד) המבוסס על המומנט השלישי של ציוני התקן:

רקע:

המטרה היא למדוד עד כמה ההתפלגות היא אסימטרית.
צידוד (או באנגלית skewness) הוא מידת האסימטריה של ההתפלגות.

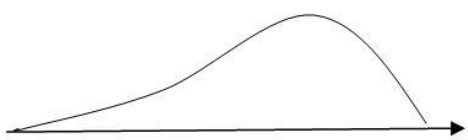
התפלגות אסימטרית חיובית/ימנית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הנמוכים וככל שהערכים גדלים יש פחות ופחות מקרים.



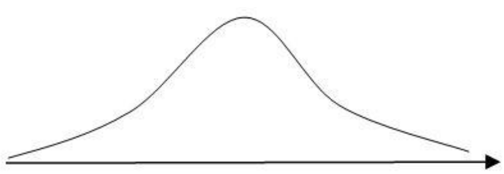
התפלגות אסימטרית שלילית/שמאלית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הגבוהים וככל שהערכים קטנים יש פחות ופחות מקרים.



התפלגות סימטרית פעמונית:

מתקיים שרוב התצפיות במרכז ההתפלגות וככל שהערכים מתרחקים מהמרכז יש פחות מקרים באופן סימטרי.



המדד הבא, נקרא **מדד פישר-פירסון** לאסימטריה.
הוא רלבנטי לבדיקת אסימטריה בהתפלגות חד-שיאית, כלומר עם שכיח אחד, והוא בעצם המומנט השלישי של ציוני התקן.

ציון תקן של תצפית מוגדר להיות לפי הנוסחה הבאה: $Z_i = \frac{X_i - \overline{X}}{S}$.

ציון תקן של תצפית ה- i נותנת בכמה סטיות תקן התצפית סוטה מהממוצע.
המומנט השלישי של ציוני התקן הוא בעצם הממוצע של ציוני התקן שהם מועלים בחזקה שלישית. כלומר, המדד הוא: $SKE = \frac{\sum_i Z_i^3}{n}$.

אם ההתפלגות היא סימטרית פעמונית יתקבל: $SKE = 0$.

אם ההתפלגות היא אסימטרית ימנית יתקבל: $SKE > 0$.

אם ההתפלגות היא אסימטרית שמאלית יתקבל: $SKE < 0$.
ככל שהמדד יותר קרוב בערכו לאפס, נגיד שההתפלגות יותר סימטרית וככל שהמדד מתרחק מהאפס נאמר שההתפלגות היא יותר אסימטרית.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בבניין 10 דירות. ספרו בכל דירה את מספר המחשבים שיש בה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר דירה	מספר מחשבים
1	5
2	7
3	5
4	3
5	2
6	6
7	0
8	5
9	1
10	4

חשבו את מדד האסימטריה על סמך המומנט השלישי של ציוני התקן. האם ההתפלגות היא אסימטרית ולאיזה כיוון הצידוד?

שאלות:

1) במחקר שנערך על 300 נערים ונערות בדקו כמה המילים שהם מקלידים ביום. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר המילים	מספר הנערים והנערות
0-200	90
200-400	88
400-600	50
600-800	40
800-1000	25
1000-1200	7

א. חשבו את הממוצע וסטיית התקן של ההתפלגות (הסתמכו על אמצע כל מחלקה בחישוב).

ב. חשבו לכל מחלקה את ציון התקן שלה.

ג. חשבו את מדד האסימטריה של פישר-פירסון.

2) בשכבה שלוש כיתות לימוד. להלן נתונים לגבי התפלגות הציונים בכל כיתה:

הכיתה	1	2	3
SKE	0.7	0	-1

א. דרגו את הכיתות לפי מידת האסימטריה.

ב. באיזו כיתה רוב הסטודנטים קיבלו ציונים גבוהים יחסית לשאר הכיתה?

3) נתון שעבור נתונים מסוימים התקבל: $SKE = 1$. איזה מהמשפטים הבאים נכון?

א. ההתפלגות היא סימטרית.

ב. ההתפלגות היא אסימטרית שלילית.

ג. ההתפלגות היא עם זנב שמאלי.

ד. ההתפלגות היא עם זנב ימני.

4) בהתפלגות מסוימת התקבל שהטווח הוא 0. מה ניתן להגיד על מדד skewness?

א. 0.

ב. 1.

ג. 0.5.

ד. המדד אינו מוגדר במקרה זה.

5) בהתפלגות מספר ימי האשפוז במחלקה מסוימת התקבל שממוצע ציוני התקן הוא אפס. מהי התשובה הנכונה בהכרח לגבי ההתפלגות?
א. אסימטרית ימנית.
ב. אסימטרית שמאלית.
ג. סימטרית פעמונית.
ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה בהכרח.

תשובות סופיות:

1) א. ממוצע: 395.3, סטיית תקן: 275.4.
ב. להלן טבלה:

מספר המילים	מספר הנערים והנערות	ציון תקן למחלקה
0-200	90	-1.072
200-400	88	-1.060
400-600	50	0.380
600-800	40	1.106
800-1000	25	1.833
1000-1200	7	2.559

ג. 0.375.

2) א. כיתה 3 > כיתה 2 > כיתה 1. ב. כיתה 3.

3) ד'.

4) ד'.

5) ד'.

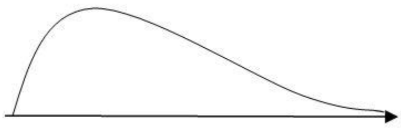
מדד אסימטריה המבוסס על המרחק בין השכיח לממוצע (מקדם פירסון הראשון לצידוד):

רקע:

המטרה היא למדוד עד כמה ההתפלגות היא אסימטרית. צידוד (או באנגלית skewness) הוא מידת האסימטריה של ההתפלגות. המדד שנלמד כאן נקרא מקדם פירסון הראשון לצידוד (Pearson's first coefficient of skewness).
מדד זה רלבנטי רק במדידת אסימטריה בהתפלגות חד-שיאית (שכיח אחד) והוא מתבסס על המרחק בין השכיח לממוצע של הנתונים.

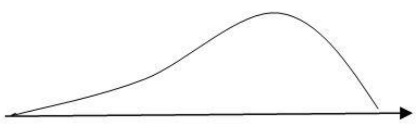
התפלגות אסימטרית חיובית/ימנית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הנמוכים וככל שהערכים גדלים יש פחות ופחות מקרים.
בהתפלגות כזו הממוצע גדול מהשכיח.



התפלגות אסימטרית שלילית/שמאלית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הגבוהים וככל שהערכים קטנים יש פחות ופחות מקרים.
בהתפלגות כזו הממוצע קטן מהשכיח.

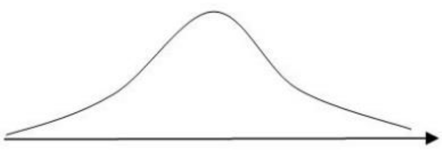


התפלגות סימטרית פעמונית:

מתקיים שרוב התצפיות במרכז ההתפלגות וככל שהערכים מתרחקים מהמרכז יש פחות מקרים באופן סימטרי. בהתפלגות כזו הממוצע שווה לשכיח.

המדד מחושב באופן הבא: $S_{K1} = \dfrac{\bar{X} - MO}{S}$.

החלוקה בסטיית התקן מטרתה לנטרל את היחידות ולהשוות בין התפלגויות שונות.



אם ההתפלגות היא סימטרית פעמונית יתקבל: $S_{K1}=0$.

אם ההתפלגות היא אסימטרית ימנית יתקבל: $S_{K1}>0$.

אם ההתפלגות היא אסימטרית שמאלית יתקבל: $S_{K1}<0$.

ככל שהמדד יותר קרוב בערכו לאפס, נגיד שההתפלגות יותר סימטרית וככל שהמדד מתרחק מהאפס נאמר שההתפלגות היא יותר אסימטרית.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בבניין 10 דירות. ספרו לכל דירה את מספר המחשבים שיש בה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר דירה	מספר מחשבים
1	5
2	7
3	5
4	3
5	2
6	6
7	0
8	5
9	1
10	4

חשבו את מקדם פירסון הראשון לצידוד.
האם ההתפלגות היא אסימטרית ולאיזה כיוון הצידוד?

שאלות:

1) במחקר על 300 נערים ונערות בדקו את מספר המילים שהם מקלידים ביום.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר המילים	מספר הנערים והנערות
0-200	90
200-400	88
400-600	50
600-800	40
800-1000	25
1000-1200	7

א. מצאו את השכיח והממוצע של הנתונים.
ב. חשבו את סטיית התקן של הנתונים (השתמשו באמצע מחלקה).
ג. חשבו את מדד האסימטריה, S_{K1}, ונתחו האם ההתפלגות היא סימטרית או אסימטרית ולאיזה כיוון ההטיה?

2) בשכבה שלוש כיתות לימוד. להלן נתונים לגבי התפלגות הציונים בכל כיתה:

הכיתה	1	2	3
S_{K1}	0.7	0	-1

א. דרגו את הכיתות לפי מידת האסימטריה.
ב. באיזו כיתה רוב הסטודנטים קיבלו ציונים גבוהים יחסית לשאר הכיתה?

3) נתון שעבור נתונים מסוימים התקבל: $S_{K1}=1$. איזה מהמשפטים הבאים נכון?
א. ההתפלגות היא סימטרית.
ב. ההתפלגות היא אסימטרית שלילית.
ג. ההתפלגות היא עם זנב שמאלי.
ד. ההתפלגות היא עם זנב ימני.

4) בהתפלגות מסוימת התקבל שהטווח הוא 0.
מה ניתן להגיד על מדד S_{K1}?
א. 0
ב. 1
ג. 0.5
ד. המדד אינו מוגדר במקרה זה.

5) רוצים להשוות בין מדינה A למדינה B מבחינת אסימטריה בשכר.
באיזו מדינה קיים אסימטריה גדולה יותר בשכר?
א. במדינה שבה מדד הצידוד יותר גדול.
ב. במדינה שבה מדד הצידוד הוא חיובי.
ג. במדינה שבה ערכו של מדד הצידוד יותר רחוק מהאפס.
ד. במדינה שבה מדד הצידוד יותר קרוב לערך 0.5.

6) בהתפלגות מספר ימי האשפוז במחלקה מסוימת התקבל שהשכיח גדול מהממוצע.
מהי התשובה הנכונה בהכרח לגבי מקדם פירסון הראשון לצידוד?
א. 0.
ב. חיובי.
ג. שלילי.
ד. לא ניתן לדעת.

תשובות סופיות:

1) א. ממוצע: 395.3, שכיח: 100. ב. סטיית תקן: 275.4.
ג. 1.072.
2) א. כיתה 3 > כיתה 2 > כיתה 1. ב. כיתה 3.
3) ד'.
4) ד'.
5) ג'.
6) ג'.

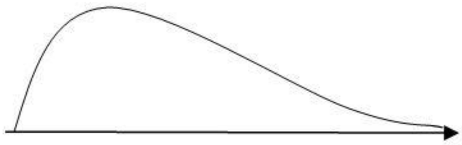
מדד אסימטריה המבוסס על המרחק בין החציון לממוצע (מקדם פירסון השני לצידוד):

רקע:

המטרה היא למדוד עד כמה ההתפלגות היא אסימטרית. צידוד (או באנגלית skewness) הוא מידת האסימטריה של ההתפלגות. המדד שנלמד כאן נקרא מקדם פירסון השני לצידוד (Pearson's second coefficient of skewness).
מדד זה מתבסס על המרחק בין החציון לממוצע של הנתונים.

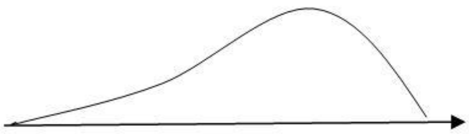
התפלגות אסימטרית חיובית/ימנית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הנמוכים וככל שהערכים גדלים יש פחות ופחות מקרים. בהתפלגות כזו הממוצע גדול מהחציון.



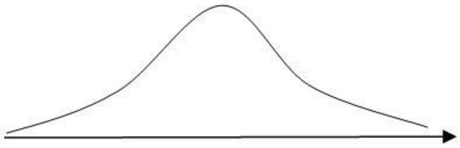
התפלגות אסימטרית שלילית/שמאלית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הגבוהים וככל שהערכים קטנים יש פחות ופחות מקרים. בהתפלגות כזו הממוצע קטן מהחציון



התפלגות סימטרית:

בהתפלגות כזו הממוצע שווה לחציון. המדד מחושב באופן הבא: $S_{K2}=\frac{3\cdot\left(\bar{X}-Md\right)}{S}$.



החלוקה בסטיית התקן מטרתה לנטרל את היחידות ולהשוות בין התפלגויות שונות.
אם ההתפלגות היא סימטרית יתקבל: $S_{K2} = 0$.
אם ההתפלגות היא אסימטרית ימנית יתקבל: $S_{K2} > 0$.
אם ההתפלגות היא אסימטרית שמאלית יתקבל: $S_{K2} < 0$.
ככל שהמדד יותר קרוב בערכו לאפס, נגיד שההתפלגות יותר סימטרית וככל שהמדד מתרחק מהאפס נאמר שההתפלגות היא יותר אסימטרית.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בבניין 10 דירות. ספרו לכל דירה את מספר המחשבים שיש בה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר דירה	מספר מחשבים
1	5
2	7
3	5
4	3
5	2
6	6
7	0
8	5
9	1
10	4

חשבו את מקדם פירסון השני לצידוד.
האם ההתפלגות היא אסימטרית ולאיזה כיוון הצידוד?

שאלות:

1) במשרד התיירות מעוניינים לעודד את תיירות הפנים במדינה, ובמיוחד לעודד יציאה של משפחות לנופשונים קצרים לצימרים. על מנת לקבל מושג ראשוני על הרגלי הנופש של משפחות בארץ החליטו, במשרד התיירות, לדגום משפחות ברחבי הארץ ולשאול אותן לכמה נופשונים יצאו בשנה שעברה.
התפלגות מספר הנופשונים למשפחה בשנה שעברה נתונה בטבלה הבאה:

מספר נופשונים	שכיחות מצטברת
0	50
1	90
2	120
3	140
4	150

א. חשבו את הממוצע והחציון של הנתונים.
ב. חשבו את סטיית התקן של הנתונים.
ג. חשבו את מדד האסימטריה S_{K2} ונתחו האם ההתפלגות היא סימטרית או אסימטרית ולאיזה כיוון ההטיה?

2) בשכבה שלוש כיתות לימוד. להלן נתונים לגבי התפלגות הציונים בכל כיתה:

הכיתה	1	2	3
S_{K2}	0.7	0	-1

א. דרגו את הכיתות לפי מידת האסימטריה.
ב. באיזו כיתה רוב הסטודנטים קיבלו ציונים גבוהים יחסית לשאר הכיתה?

3) נתון שעבור נתונים מסוימים התקבל: $S_{K2} = -1$.
איזה מהמשפטים הבאים הכי נכון?
א. ההתפלגות היא סימטרית.
ב. ההתפלגות היא אסימטרית.
ג. ההתפלגות היא עם זנב שמאלי.
ד. ההתפלגות היא עם זנב ימני.

4) בהתפלגות מסוימת התקבל שהטווח הוא 0. מה ניתן להגיד על מדד skewness?
א. 0.
ב. 1.
ג. 0.5.
ד. המדד אינו מוגדר במקרה זה.

5) ברצוננו להשוות בין מדינה A למדינה B מבחינת אסימטריה של השכר. באיזו מדינה קיים אסימטריה יותר גדולה בשכר?

א. במדינה שבה מדד הצידוד יותר גדול.

ב. במדינה שבה מדד הצידוד הוא חיובי.

ג. במדינה שבה ערכו של מדד הצידוד יותר רחוק מהאפס.

ד. במדינה שבה מדד הצידוד יותר קרוב לערך 0.5.

6) בהתפלגות מספר ימי האשפוז במחלקה מסוימת התקבל שהחציון קטן מהממוצע. מהי התשובה הנכונה בהכרח לגבי מקדם פירסון השני לצידוד?

א. 0.

ב. חיובי.

ג. שלילי.

ד. לא ניתן לדעת.

תשובות סופיות:

1) א. ממוצע: 1.333, חציון: 1. ב. סטיית תקן: 0.85.
ג. 118.

2) א. כיתה 3 > כיתה 2 > כיתה 1. ב. כיתה 3.

3) ג'.

4) ד'.

5) ג'.

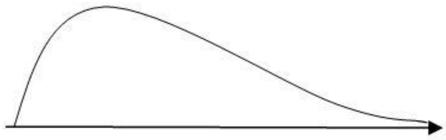
6) ב'.

מדד אסימטריה המבוסס על רבעונים:

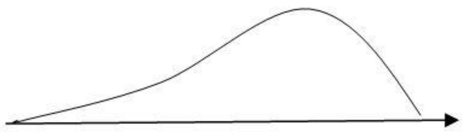
רקע:

המטרה היא למדוד עד כמה ההתפלגות היא אסימטרית על ידי שימוש ברבעונים של ההתפלגות.

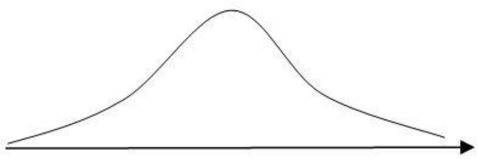
בהתפלגות אסימטרית חיובית/ימנית מתקיים: $(Q_3-Q_2)>(Q_2-Q_1)$.



בהתפלגות אסימטרית שלילית/שמאלית מתקיים: $(Q_3-Q_2)<(Q_2-Q_1)$.



בהתפלגות סימטרית מתקיים: $(Q_3-Q_2)=(Q_2-Q_1)$.



נגדיר את המדד הבא לאסימטריה: $S_q=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}=\frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1}$.

מדד זה נקרא גם צידוד בוולי (Bowley's skewness) או צידוד גלטון (Galton skewness).

המדד מקבל ערכים: $-1\le S_q\le 1$.

המדד בודק את עוצמת האסימטריה ואת כיוון האסימטריה.

העוצמה: באה לידי ביטוי ב- $|S_q|$.

בהתפלגות סימטרית המדד הוא 0 וככל ש- $|S_q|$ קרוב ל-1 ההתפלגות יותר אסימטרית.

כיוון האסימטריה בא לידי ביטוי בסימן של המדד:
בהתפלגות סימטרית: $S_q = 0$.
בהתפלגות היא אסימטרית חיובית (זנב ימני): $S_q > 0$.
בהתפלגות היא אסימטרית שלילית (זנב שמאלי): $S_q < 0$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהתפלגות הציונים בכיתה התקבל: הציון החציוני הוא 75, הרבעון התחתון הוא 65 והרבעון העליון הוא 81.
חשבו את מדד האסימטריה וקבעו את כיוון האסימטריה ועוצמתו.

שאלות:

1) במחקר שנערך נלקחו 300 נערים ונערות ובדקו את מספר המילים שהם מקלידים ביום. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר המילים	מספר הנערים והנערות
0-200	90
200-400	88
400-600	50
600-800	40
800-1000	25
1000 ומעלה	7

א. מצאו את הרבעון התחתון והעליון ואת החציון של מספר המילים שהנערים והנערות מקלידים ביום.
ב. חשבו את מדד האסימטריה. מה ניתן ללמוד ממנו על האסימטריה של הנתונים?

2) בשכבה שלוש כיתות לימוד. להלן נתונים לגבי התפלגות הציונים בכל כיתה:

הכיתה / רבעונים	1	2	3
עליון	82	85	77
שני	80	80	75
תחתון	70	75	71

א. דרגו את הכיתות לפי מידת האסימטריה.
ב. בכיתה אחרת היה החציון כמו התפלגות כיתה מספר 3, הרבעון העליון כמו התפלגות כיתה מספר 1 ו- $S_q = 0.5$.
מהו הרבעון התחתון בכיתה זו?

3) נתון שעבור נתונים מסוימים התקבל: $S_q = 1$.
איזה מהמשפטים הבאים נכון בהכרח?
א. ההתפלגות היא סימטרית.
ב. $Q_3 = Q_2$.
ג. $Q_2 = Q_1$.
ד. $Q_3 = Q_1$.

4) בהתפלגות מסוימת התקבל שהטווח הוא 0.
מה ניתן להגיד על מדד skewness?
א. 0.
ב. 1.
ג. 0.5.
ד. המדד אינו מוגדר במקרה זה.

5) בהתפלגות מספר ימי האשפוז במחלקה מסוימת התקבל: $Q_2 = Q_3$.
מהי התשובה הנכונה לגבי ההתפלגות?
א. $S_q = 1$.
ב. $S_q = -1$.
ג. $S_q = 0$.
ד. $S_q = 0.5$.

תשובות סופיות:

1) א. $Q_1 = 166\frac{2}{3}$, $Q_2 = 336.36$, $Q_3 = 588$. ב. 0.195.

2) א. כיתה 2 > כיתה 3 > כיתה 1. ב. $Q_1 = 72\frac{2}{3}$.

3) ג'.

4) ד'.

5) ב'.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 68 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

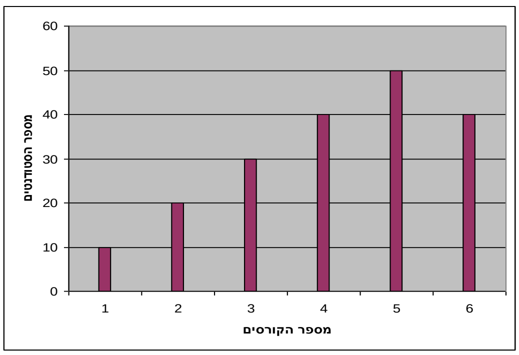
ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\overline{X}=7\frac{1}{15}$.

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.
ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה).
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

שביעות רצון	מספר האנשים
1	40
2	60
3	50
4	30
5	20

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
i. היסטוגרמה.
ii. דיאגרמת מקלות.
iii. דיאגרמת עוגה.
ד. חשבו את המדדים הבאים:
i. טווח.
ii. שכיח.
iii. חציון.

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

א. השלימו את הטבלה.
ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?
ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?
ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:
i. ממוצע.
ii. שכיח.
iii. חציון.
iv. שונות.

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

א. שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?
ג. חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.
ד. הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

הציון	מספר הנבחנים
50-70	
70-90	
90-100	
100-110	
110-130	
130-150	

א. השלימו את הטבלה.
ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?
ג. מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?
ד. הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

תשובות סופיות:

1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.
ב. $\bar{X}=52$, $Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$, שכיח: 58.
ג. $S=10.12$, $R=28$.
ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.
ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.
ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

x	$f(x)$
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	40
סה"כ	**190**

3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.
ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533 , סטיית תקן: 1.592.

4) א. 20%. ב. שביעות רצון (סדר).
ג. ii. ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.

5) א. להלן טבלה: ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

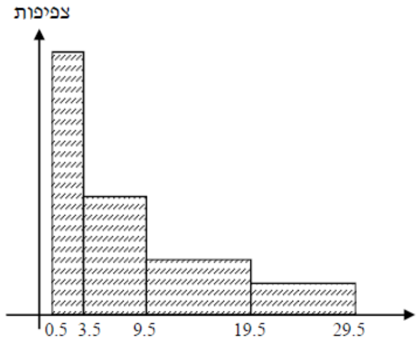
מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	30
20-30	20%	40
30-40	30%	60
40-50	20%	40
50-60	15%	30

ג. סטיית תקן: 12.65. ד. 53.333.
ה. 25%. ו. -0.395.
ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.

6) א. 38% ב. 40% ג. 150 ד. חציון: 100.

7) א. שרטוט:

ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים: $Mo < Md < \bar{X} < MR$.

8) א. ראו טבלה:

ציון	מספר הנבחנים
50-70	50
70-90	75
90-100	125
100-110	125
110-130	75
130-150	50

ב. 100.   ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון.   ב. לא נכון.   ג. לא נכון.   ד. לא נכון.   ה. לא נכון.

ו. נכון.   ז. לא נכון.   ח. לא נכון.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 69 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות אמריקאיות

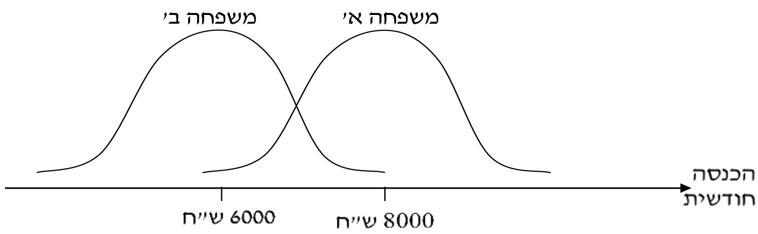
תוכן העניינים

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

שאלות:

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
א. משפחה א'.
ב. משפחה ב'.
ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

x	$F(x)$
0	?
1	10
2	6
3	15
4	?
סה"כ	**50**

4) השכיח של הנתונים הוא:
א. 0.
ב. 15.
ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

5) חציון הנתונים הוא:
א. 2.
ב. 1.5.
ג. 25.5.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

6) הטווח של הנתונים:
א. 11.
ב. 3.
ג. 4.
ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:
א. שלילי.
ב. חיובי.
ג. אפס.
ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה: 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות:
א. תקטן.
ב. תגדל.
ג. לא תשתנה.
ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

9) מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?
א. 2,300.
ב. 6,900.
ג. 4,650.
ד. 4,600.
ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

10) מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?
א. 200.
ב. 300.
ג. 675.
ד. לא ניתן לדעת.

11) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:
א. תגדיל את סטיית התקן.
ב. תקטין את סטיית התקן.
ג. לא תשנה את סטיית התקן.
ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

12) התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:
א. מיטב.
ב. צבי.
ג. לובה.
ד. שרית.
ה. סטף.

13) פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:
א. 80.55.
ב. 65.
ג. 80.
ד. 81.66.

14) איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר. הכיתה של:
א. מיטב.
ב. צבי.
ג. לובה.
ד. שרית.
ה. סטף.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18:

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש :

שוקולד פגום	0	1	2	3	4	5	6	7
מס' קופסאות	35	63	48	12	13	11	10	8

15) מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא :
א. 1.
ב. 2.
ג. 4.
ד. לא ניתן לדעת.

16) מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?
א. 1.
ב. 2.
ג. 3.
ד. 4.
ה. לא ניתן לדעת.

17) מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :
א. סדר.
ב. שמי.
ג. כמותי בדיד.
ד. כמותי רציף.

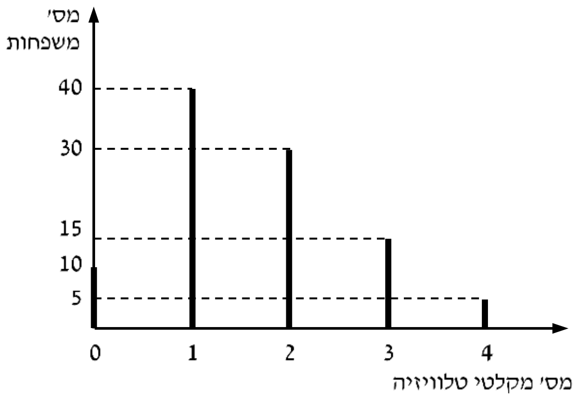
18) השכיח של מספר הפגומים בקופסא :
א. 63.
ב. 1.
ג. 200.
ד. לא ניתן לדעת.

19) ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :
א. בערכים הגבוהים.
ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
ג. בערכים הנמוכים.
ד. לא ניתן לדעת.
ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

20) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8.
איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:
א. השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
ב. השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
ד. שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25:

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.
תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה:



21) המשתנה הנחקר כאן הוא:
א. משתנה שמי.
ב. משתנה מסולם סדר.
ג. משתנה כמותי בדיד.
ד. משתנה כמותי רציף.

22) הטווח של ההתפלגות הוא:
א. 35.
ב. 4.
ג. 3.
ד. 2.

23) ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא:
א. 1.65.
ב. 1.5.
ג. 1.
ד. 2.

24) השכיח של התפלגות זו היא:
א. 40.
ב. 1.5.
ג. 1.
ד. 2.

25) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?
א. יקטין אותו.
ב. יגדיל אותו.
ג. לא ישנה אותו.
ד. אין לדעת.

תשובות סופיות:

1) א'	**2)** ג'	**3)** ג'	**4)** ג'	**5)** ב'
6) ג'	**7)** א'	**8)** ג'	**9)** ב'	**10)** ב'
11) ג'	**12)** ה	**13)** ד'	**14)** ג'	**15)** ב'
16) א'	**17)** ג'	**18)** ב'	**19)** ג'	**20)** ה
21) ג'	**22)** ב'	**23)** א'	**24)** ג'	**25)** ב'

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 70 - מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר

תוכן העניינים

מדדי קשר – מדד הקשר של קרמר:

רקע:

משתמשים במדד זה כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים. שאלו 100 גברים ו-100 נשים על דעתם באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה:

Y/X	בעד	נגד	נמנע	$F(x)$
גבר	50	40	10	100
אישה	30	60	10	100
$F(y)$	80	100	20	$n=200$

הטבלה נקראת טבלת O (observe):

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלבים בחישוב r_c:

שלב א': נבנה את טבלת E (Expected).

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז לכל: $E_i=\left(F(x)\cdot F(y)\right)/n$.

$Y \backslash X$	בעד	נגד	נמנע	$f(x)$
גבר				100
אישה				100
$f(y)$	80	100	20	$n=200$

שלב ב': נחשב $\chi^2=\sum_i \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$.

שלב ג': נחשב: $r_c=\sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2}$,

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

שאלות:

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה.
לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.
האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

מין/ השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.
ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?
חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות:

1) ישנו קשר בעוצמה בינונית, מקדם המתאם של קרמר: 0.595.
2) א. להלן טבלה: ב. 0.19.

y/x	תקין	לא תקין	$f(x)$
כן	50	10	60
לא	90	50	140
$f(y)$	140	60	$n=200$

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 71 - מדדי קשר - מדד הקשר פי

תוכן העניינים

מדדי קשר – מדד הקשר פי:

רקע:

מדד הקשר פי הינו דרך קיצור על מנת לחשב את מדד הקשר של קרמר. המדד רלבנטי רק כשטבלת השכיחות המשותפת היא מסוג 2/2 כלומר שני משתנים שהם דיכוטומיים.

הנוסחה: $\phi = \sqrt{\dfrac{(a \cdot d - b \cdot c)^2}{e \cdot f \cdot r \cdot k}}$.

	a	b
	c	d

דוגמה:

מפעל עובד בשתי משמרות, משמרת יום ומשמרת ליל, דגמו 300 מוצרים ממשמרת היום ו-200 ממשמרת הלילה, מתוך המוצרים שנדגמו ביום 10 היו פגומים, מתוך המוצרים שנדגמו בלילה 150 היו תקינים.
האם יש קשר בין סוג המשמרת לטיב המוצר?

שאלות:

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין לדעה מסוימת. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו ודעתו האישית בדבר סוגיה מסוימת. הנחקרים היו צריכים לענות האם הם בעד, נמנעים או נגד הדעה שהוצגה להם. להלן התוצאות:

מין/ דעה	בעד	נמנע	נגד
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

האם אפשר לחשב במקרה זה את מדד הקשר פי? אם כן חשבו.

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
האם ניתן לחשב את מדד הקשר של ϕ? אם כן חשבו והסבירו את המשמעות.

תשובות סופיות:

1) לא ניתן לחשב את מדד הקשר פי.
2) ניתן לחשב, מדד הקשר פי: 0.19.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 72 - מדדי קשר - מדד הקשר למדא

תוכן העניינים

מדדי קשר – מדד הקשר למדא:

רקע:

משתמשים במדד זה כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אחר.
מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1 ככל שהוא קרוב יותר ל-1 הקשר יותר עוצמתי וככל שהוא קרוב ל-0 הוא יותר רופף וחלש.

מדד הקשר של למדא הוא מדד קשר א-סימטרי, כלומר אם נחליף בין X ל-Y נקבל תוצאה אחרת.
לכן בעצם יש שני מדדי למדא.

שלבים בחישוב מדד הקשר למדא X לפי Y:

שלב א': נתבונן בעמודה הקיצונית ביותר ונפחית מ- n את $F(x)$ הכי גבוה והוא יקרא L_x.

שלב ב': נעבור כל ערך של Y (כל עמודה) ונסכום עבור כל העמודות את $F(y)$ פחות השכיחות הכי גבוהה באותה עמודה. יקרא: $L_{x/y}$.

שלב ג': נציב: $\lambda_{x/y}=\dfrac{L_x-L_{x/y}}{L_x}$.

המדד ההפוך לפי אותו עקרון יהיה: $\lambda_{y/x}=\dfrac{L_y-L_{y/x}}{L_y}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 120 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא.
להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה:

מין X / דעה Y	בעד	נגד	נמנע	$f(x)$
גבר	50	40	30	120
אישה	30	60	10	100
$f(y)$	80	100	40	$n=220$

שאלות:

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה.
לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו. להלן התוצאות.
א. חשב את מדד הקשר של למדא לניבוי השכלה על סמך מין.
ב. חשב את מדד הקשר של למדא לניבוי מין על סמך השכלה.

מין / השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

2) בעיר 4 שכונות. בכל שכונה נבדק המצב הכלכלי של כל משפחה.
להלן טבלת השכיחות המשותפת שהתקבלה.
חשב את מדדי הקשר של למדא והסבר את הממצאים.

שכונה / מצב כלכלי	נמוך	בינוני	גבוה
A	40		
B		70	
C		80	
D			40

תשובות סופיות:

1) א. 0.375. ב. 0.5.
2) א. 1. ב. 0.533.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 73 - מדדי קשר - מדד הקשר של ספירמן

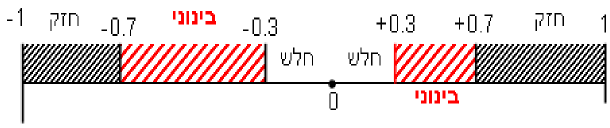
תוכן העניינים

מדדי קשר – מדד הקשר של ספירמן:

רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן?
כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.
הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.
מדד הקשר בודק את:

1. כיוון הקשר.
2. עצמת הקשר.



המדד מקבל ערכים בסקלה מ-(-1) ועד 1.

קשר דירוגי חיובי מלא:
מדד הקשר של ספירמן יוצא 1.
ככל שמשתנה אחד עולה, השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי חיובי חלקי:
מקדם המתאם בין 0 ל-1.
ככל שמשתנה אחד עולה, לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

קשר דירוגי שלילי מלא:
מדד הקשר של ספירמן יוצא -1.
ככל שמשתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי שלילי חלקי:
מקדם המתאים הוא בין 0 ל-(-1).
ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.
על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK).
כאשר מדרגים, אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

הנוסחה של מדד הקשר: $r_s = 1 - \dfrac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\left(n^2-1\right)}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר הזוג	ציון שופט א׳	R_x	ציון שופט ב׳	R_y	$d = r_x - r_y$	d^2
1	4		5			
2	5		5			
3	6		7			
4	5		7			
5	8		9			
6	7		9			
7	3		7			

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

X - ציון שופט א (סולם סדר).

Y - ציון שופט ב (סולם סדר).

שאלות:

1) בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

מספר מועמדת	1	2	3	4	5	6	7
ציון שופט א'	7	8	6	8	9	5	6
ציון שופט ב'	8	8	7	8	9	5	7

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמקו והסבירו!

2) משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חיסורים	מידת מוטיבציה
0	גבוהה
4	נמוכה
2	בינונית
5	נמוכה
1	גבוהה

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו? חשבו באמצעות מדד הקשר המתאים והסבירו.

3) אם: $r_S = 1$, הדבר אומר שערכי X תמיד שווים לערכי Y.
האם הטענה נכונה? הסבר.

תשובות סופיות:

1) קיים קשר דירוג חיובי חזק בין הערכת שופט א' להערכת שופט ב'.
מדד הקשר: 0.973.

2) קיים קשר שלילי בעוצמה חזקה בין רמת המוטיבציה של העובד למס' החיסורים שלו.
מדד הקשר: -0.85.

3) לא נכון.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 74 - מדדי קשר - מדד הקשר הליניארי - פירסון

תוכן העניינים

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון):

רקע:

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).
למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.
בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

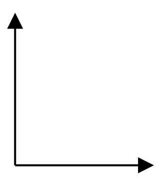
דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:

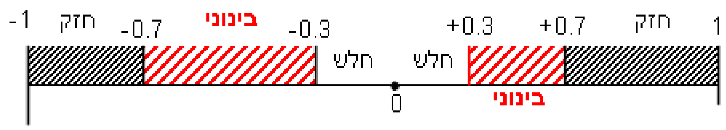
X - מס' חדרים בדירה.
Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור:



בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר ליניארי בין שני המשתנים.
המדד (נקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.
מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).
מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.
ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.
מקדם המתאם יסומן באות r.



כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV_{(x,y)} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}$.

שונות של המשתנה X**:** $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$.

שונות המשתנה Y**:** $S_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}}{n} - \bar{y}^2$.

מקדם המתאם הליניארי: $r_{xy} = \frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$.

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן.
בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס
וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

ציון	מספר חיסורים
80	2
90	1
90	0
70	2
70	3
50	4

א. שרטט דיאגראמת פיזור לנתונים.
מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשב את מדד הקשר של פירסון.
האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו.
לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים הללו עבור חמישה חולים.
להלן התוצאות שהתקבלו:

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים?
ומה משמעות התוצאה?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \;,\; \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \;,\; \sum_{i-1}^{20}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 76 \;,\; \sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 76 \;,$$

$$\sum_{i-1}^{20}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = 60.8 \,.$$

א. חשב את מדד הקשר הליניארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_iY_i = 2464 \;,\; \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \;,\; \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960 \;,\; \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \;,\; \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \,.$$

חשב את מדד הקשר הליניארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב- 3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות. לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל: $\bar{X} = \bar{Y} = 6 \,,\, S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

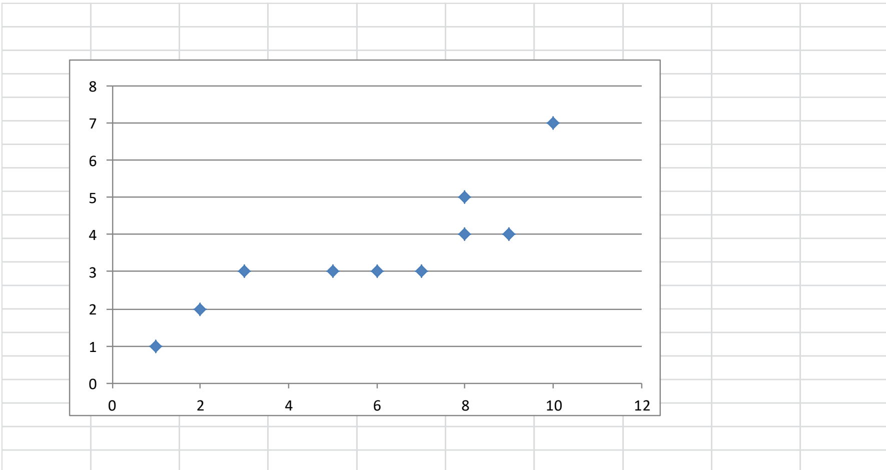
ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה 4.2 ₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר ב-₪?

א. 1.
ב. 0.
ג. 4.2.
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1.
ב. 0.85.
ג. 0.15.
ד. 0.

תשובות סופיות:

1) ב. ‎-0.9325‎.

2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$. ב. $r_{xy}=0.96$.

3) א. 0.8.

4) 0.8.

5) 1.

6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

7) ג'.

8) א'.

9) ב'.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 75 - מדדי קשר - השפעת הטרנספורמציה הלינארית על מדד הקשר של פירסון

תוכן העניינים

מדדי קשר – השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון:

רקע:

טרנספורמציה לינארית, בין אם נעשית על X , בין אם נעשית על Y , ובין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר. היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

$$r_{[(aX+b),(cY+d)]} = \begin{cases} r_{x,y} \_\_\_\_\_ if \_\_\_ a \cdot c > 0 \\ -r_{x,y} \_\_\_\_\_ if \_\_\_ a \cdot c < 0 \end{cases}.$$

שאלות:

1) מבחן בנוי משני חלקים: חלק כמותי וחלק מילולי. מקדם המתאם בין שני הציונים של שני החלקים הוא 0.9.

א. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?

ב. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי בבחינה-150. מצאו את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W לציון הכמותי.

2) מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7. אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, מה יהיה מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה להוצאה החדשה?

3) חברת "לקי" המייצרת גלידה החליטה לערוך מחקר לבדיקת הקשר בין מספר חבילות הגלידה הנמכרות ביום לבין הטמפרטורה באותו יום. נבדקו 10 ימים והתקבל מתאם לינארי 0.85. חברת "לקי" דואגת להתחיל כל יום עם מלאי של 150 חבילות גלידה. בנוסף, מעוניינים כי הטמפרטורה תבוטא במעלות פרנהייט במקום במעלות צלסיוס. מה ערכו של מקדם המתאם בין מספר חבילות הגלידה שנשארות בסוף היום לבין הטמפרטורה במעלות פרנהייט?

הקשר בין מעלות צלסיוס ($C°$) למעלות פרנהייט ($F°$) נתון ע"י: $F=\frac{9}{5}C+32$.

בחרו בתשובה הנכונה:

א. 0.85.

ב. 0.85-.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

4) מקדם המתאם בין X ל- Y הנו 0.4. כל ערכי ה- X הוכפלו ב-2. מה יהיה מקדם המתאם החדש בין שני המשתנים?

א. 0.8.

ב. 0.4.

ג. 0.4-.

ד. לא ניתן לדעת.

תשובות סופיות:

1) א. בין הציון המילולי הישן לחדש: 1. בין הציון המילולי החדש לכמותי: 0.9.
ב. בין W לציון המילולי: 1-, בין W לציון הכמותי: 0.9-.

2) 0.7.

3) ב'.

4) ב'.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 76 - מדדי קשר - רגרסיה ליניארית

תוכן העניינים

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X.
השיטה למציאת הקו הנ״ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$, $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20}\left(Y_i-\overline{Y}\right) = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.

ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_X=2 \ , \ S_Y=5 \ , \ \overline{X}=14 \ , \ \overline{Y}=8 \ , \ \mathrm{COV}(X,Y)=7.5 \ .$$

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.

ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?

ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?

ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?

ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y. כמו כן נתון: $\overline{X}=1.5$, $S_x=S_y=4$,
וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y=-0.2X+0.5$.
חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y.

תשובות סופיות:

1) א. 0.8. ב. $Y=0.8X+0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

2) א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

3) א. 1.2. ב. 29. ג. $Y=1.2X+29$.

4) -0.2.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 77 - מדדי קשר - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

שאלות:

1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2=0.64$, לכן:

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

4) אם מגדילים את r^2, ניתן לומר כי:

א. אחוז השונות המוסברת יקטן.

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל.

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה.

ה. לא ניתן לדעת.

5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים: מבחן בסוף סמסטר א׳ X ומבחן בסוף סמסטר ב׳ Y. כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב׳ לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א׳ לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב׳ הוא:

א. 0.44.
ב. - 0.44.
ג. עוצמת הקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.
ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.
ה. 0.35.

תשובות סופיות:

1) א. 49%. ב. 51%.
ג. שונות מוסברת: 19,600, שונות לא מוסברת: 20,400.

2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.

3) ב׳.

4) ב׳.

5) ג׳.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 78 - מדדי קשר- מדד הקשר אתא

תוכן העניינים

מדד הקשר אתא:

רקע:

מדד הקשר אתא הינו מדד קשר אסימטרי. כלומר, יש שני מדדי קשר מסוג זה:
$\eta_{y|x}$ - אתא Y לפי X. אפשרי לחישוב כאשר Y מסולם רווחים או מנה ו- X מכל סולם.
$\eta_{x|y}$ - אתא X לפי Y. אפשרי לחישוב כאשר X מסולם רווחים או מנה ו- Y מכל סולם.
מדד הקשר לא בודק כיוון קשר אלא רק את העוצמה, לכן מקבל ערכים בין 0 ל-1.

שלבים בחישוב המדד: $\eta_{y|x}$ (ניבוי Y בהינתן X):

שלב א: נחשב את הממוצע הכללי של Y שיסומן $\bar{\bar{Y}}$.
נחשב לכל ערך של X את הממוצע של Y.

שלב ב: חישוב השונות הכללית של Y, כלומר השונות של ההתפלגות השולית
של Y: $S_y{}^2=\frac{\sum_y y^2\cdot f(y)}{n}-\bar{\bar{y}}^2$.

שלב ג: חישוב שונות הניבויים של Y, כלומר השונות של הממוצעים הקבוצתיים
של Y: $S_{\bar{y}}{}^2=\frac{\sum_y \bar{y}_x{}^2\cdot f(x)}{n}-\bar{\bar{y}}^2$.

שלב ד: נחשב: $\eta^2{}_{y|x}=\frac{S^2{}_{\bar{y}}}{S^2{}_y}$.

שלב ה: נוציא שורש: $\eta_{\ y|x}=\sqrt{\eta^2{}_{y|x}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן טבלת שכיחות משותפת עבור קבוצת סטודנטים, כאשר:

Y / X	1	2	3
גבר	5	5	5
אישה	10	5	0

X - מגדר.
Y - מספר הקורסים שנרשם הסטודנט הסמסטר.

א. איזה מדד קשר של אתא ניתן לחשב כאן?
ב. חשבו את המדד האפשרי.

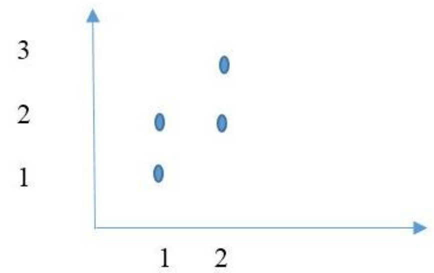
שאלות:

1) להלן נתונים על משפחות בישראל. בדקו לגבי כל משפחה באיזה אזור היא גרה בארץ - Y, וכמו כן כמה מקלטי טלוויזיה יש להם בבית - X.
להלן התוצאות שהתקבלו:

אזור/ מספר טלוויזיות	מרכז	צפון	דרום
0	5	15	0
1	5	5	20
2	5	0	0

א. איזה מדד קשר של אתא ניתן לחשב?
ב. חשבו את מדד הקשר של אתא שניתן לחישוב.

2) להלן דיאגרמת פיזור של 4 תצפיות:



א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
ב. חשבו את $\eta_{y/x}$ ואת $\eta_{x/y}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\eta_{x/y}$.   ב. 0.585.

2) א. להלן טבלה: ב. $\eta_{x/y} = \eta_{y/x} = 0.707$.

$x \backslash y$	**1**	**2**	**3**	$f(x)$
1	1	1	0	2
2	0	1	1	2
$f(y)$	1	2	1	$n=4$

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 79 - מדדי קשר - בחירת מדד מתאים

תוכן העניינים

מדדי קשר – בחירת מדד מתאים:

רקע:

בפרק זה נתרגל את התהליך של בחירת מדד הקשר (מקדם המתאם) המתאים.
נתרכז בשלושת מדדי הקשר הנפוצים ביותר:

- מדד הקשר של קרמר.
- מדד הקשר של ספירמן.
- מדד הקשר של פירסון (מדד הקשר הלינארי).

בחירת מדד הקשר נעשה לפי סולמות המדידה של שני המשתנים שאנחנו רוצים לבדוק את הקשר בינם. הנושא של סולמות מדידה נלמד כבר בפרק אחר, כמו כן כל מדד קשר נלמד בפרק נפרד. אנו מתרכזים ב 3 סולמות מדידה:

- סולם שמי/ זהות (nominal).
- סולם סדר (ordinal).
- סולם כמותי (scale): לכאן אנו מאחדים את סולם רווחים ומנה יחד.

שלושת מדדי הקשר שלעיל דנים בקשר בין שני משתנים. מדדי הקשר הם סימטריים, כלומר אין זה משנה איזה משתנה נגדיר בתור משתנה X ואיזה יוגדר בתור משתנה Y.

להלן טבלה שמסכמת את בחירת המדד המתאים:

X / Y	שמי	סדר	כמותי
שמי	קרמר	קרמר	קרמר
סדר	קרמר	ספירמן	ספירמן
כמותי	קרמר	ספירמן	פירסון

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
איזה מדד קשר מתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין התפוקה היומית לכמות עובדים באותו היום במפעל?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

שאלות:

1) בקרב תלמידי כיתות א' בבית הספר גבריאלי אשר בתל אביב בדקו לכל תלמיד את גובהו בס"מ ואת משקלו בק"ג. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין גובה התלמיד למשקלו?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

2) בסקר שנעשה על אזרחים במדינה בדקו לכל אזרח את השכלתו ואת שכרו. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין השכלה לשכר?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

3) בגן הילדים של שולה אספו נתונים על 25 הילדים שבגן. על כל ילד בדקו את רמת הביטחון העצמי שלו (X = מדד שמקבל ערכים בין 1 - נמוך ועד 5 - גבוה), ואת אוצר המילים שלו (Y = לפי מבחן שנעשה לכל ילד בו ספרו את מספר המילים שידע מתוך רשימה של 20 מילים). איסוף הנתונים נעשה על ידי איש מקצוע שצפה בילדים ובחן אותן.
מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת התלות בין X לבין Y?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

4) הועלתה השערה בבית הספר למדעי ההתנהגות שיש קשר בין המרצה להצלחת הסטודנט. לצורך בדיקת הטענה בדקו לגבי כל סטודנט שלמד סטטיסטיקה אצל איזה מרצה הוא למד (היו 3 מרצים שונים) והאם הוא עבר את הבחינה. מהו מדד הקשר המתאים במקרה זה?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

5) בבורסה בתל אביב רצו לבדוק את הקשר בין גובה הריבית במשק בסוף החודש (באחוזים), לבין תשואת מניית אקטר (באחוזים) בסוף החודש.
מהו מדד הקשר המתאים?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

6) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר:
- מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
- מה גילו של הלקוח בשנים.
- מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם חיובי בין מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות לבין גובה התשר שהוא נתן למלצר?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

7) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר:
- מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
- מה גילו של הלקוח בשנים.
- מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם בין גיל הלקוח לגובה התשר שהעניק לשירות?
א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

הנתונים הבאים מתאימים ל-3 השאלות הבאות:

חוקרים ערכו מדגם של ילדים מכיתות ב׳ ו-ג׳ מ-4 בתי ספר שונים. הועבר לילדים שאלון בו תואר מצב מסוים והילדים התבקשו לציין את רמת החרדה שלהם באשר לאותו מצב. המשתנים שלגביהם נאספו נתונים:

- מגדר (1 - בן, 2 - בת).
- כיתה (0 - ג׳, 1 - ב׳).
- בית ספר (A, B, C, D).
- רמת חרדה (ציון שהילד היה צריך לתת בסקלה של 1 עד 10).
- גיל התלמיד בחודשים.

8) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין גיל התלמיד לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

9) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

10) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין בית הספר?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

11) בטבלה שלהלן נתונות שכיחויות ההצלחה והכישלון של 150 חולים:

תוצאה/ התרופה	A	B	C
נרפא	35	13	45
לא נרפא	15	37	5

החולים קיבלו 3 תרופות שונות ובדקו עבור כל חולה אם התרופה הצליחה בריפוי. מהו מדד הקשר המתאים?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

12) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ראליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש קורלציה בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

	1	2	3	4	5	6	7	8
מוסיקאי א'	6	5	7	4	3	1	1	4
מוסיקאי ב'	5	7	5	2	3	3	2	7

מהו מדד הקשר המתאים?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

13) להלן טבלה המסכמת את השכר באלפי ₪ של עובדים בחברה ואת רמת המוטיבציה שלהם מ-1 עד 5:

שכר	12	18	20	15	30
מוטיבציה	4	4	5	3	5

מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת רמת ההתאמה בין המוטיבציה לשכר של העובד?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

14) להלן טבלה על נתונים שנאספו על מספר תצפיות:

X	1	2	3	4	5
Y	12	14	17	17	20

אם מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר לנארי בין שני המשתנים.
מהו המדד המתאים?

א. פירסון.
ב. ספירמן.
ג. קרמר.
ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

תשובות סופיות:

1) א'	**2)** ד'	**3)** ב'	**4)** ג'	**5)** א'
6) ב'	**7)** א'	**8)** ב'	**9)** ג'	**10)** ג'
11) ג'	**12)** ב'	**13)** ב'	**14)** א'	

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 80 - תרגול טענות

תוכן העניינים

תרגול טענות:

שאלות:

להלן מספר טענות.
ציינו לגבי כל טענה נכון/לא נכון ונמקו (תשובה ללא נימוק לא תתקבל).

1) בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו, השונות הינה 0.

2) ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

3) ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

4) אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

5) בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות, אחת 79 ואחת 100, לכן החציון יגדל.

6) אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

7) אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

8) אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

9) מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל.
נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

10) לסדרה של נתונים התקבל: $\overline{X}=\overline{Y}=6$, $S_x=S_y=1$, לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

11) אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

12) אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

13) בסדרה המונה 13 תצפיות, ידוע כי הממוצע הוא 40 והשונות היא 100. מוסיפים שתי תצפיות חדשות, שהן 35 ו-45. כתוצאה מכך, הממוצע בסדרה החדשה (הכוללת 15 תצפיות) יקטן והשונות תקטן.

14) לסדרה סטטיסטית בת 61 תצפיות הממוצע 120 והחציון 110.
לסדרה זו הוסיפו עוד שתי תצפיות: 100, 140.
בעקבות כך, הממוצע והחציון של הסדרה בת 63 התצפיות אינם משתנים.

15) לסדרה סטטיסטית בת 100 תצפיות הממוצע 75 וסטיית התקן 10.
נוספו לסדרה זו עוד 2 תצפיות: 75 ; 75. כתוצאה מכך, הממוצע החדש (של 103 התצפיות) לא ישתנה, אך סטיית התקן תקטן.

16) לסדרת נתונים המונה 10 תצפיות ממוצע 25 וסטיית תקן 2.
נתון כי הסדרה סימטרית סביב הממוצע. בשלב מאוחר יותר נוספו שלוש תצפיות לסדרה: 23, 25 ו-27. לכן סטיית התקן של 13 התצפיות לא תשתנה.

17) בהתפלגות אסימטרית חיובית, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו בהכרח שלילי.

18) סטיית התקן של סדרת נתונים תמיד תגדל אם נוסיף גודל קבוע לכל נתוני הסדרה.

19) נתונים המאורעות A ו-B במרחב מדגם Ω. ידוע כי: $P(A)=P(B)=0.3$.
ההסתברות לכך שיקרה בדיוק מאורע אחד אם המאורעות זרים היא: $2\cdot 0.7\cdot 0.3=0.42$.

20) בהטלת קובייה הוגנת 4 פעמים, ההסתברות שיתקבלו לפחות 2 תוצאות זהות היא: $\frac{936}{1296}$.

21) המאורעות A ו-B הם מאורעות בלתי-תלויים שהסתברויותיהם הן 0.5 ו-0.3 בהתאמה. לכן ההסתברות שיקרה לפחות אחד מהם היא 0.8.

22) A ו- B מאורעות כלשהם במרחב מדגם Ω. ידוע כי: $P(A)=P(B)=0.2$.
אם A ו- B מאורעות בלתי תלויים, ההסתברות שיתרחש בדיוק מאורע אחד מביניהם היא 0.4.

23) לסביבון 4 פאות. הסיכוי שבהטלת הסביבון שלוש פעמים נקבל את אותה תוצאה בכל פעם הוא: $\frac{1}{16}$.

24) אם: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, אז X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

25) מספר הדרכים השונות לסדר שלושה חיילים בשלשה הוא 9.

26) יש לחלק שישה צעצועים שונים ל-4 בנות ו-2 בנים. מספר הדרכים לחלק את הצעצועים הוא 48.

27) קוד של כספומט מורכב מ-4 ספרות, מתוך 9-0. ההסתברות שארבע הספרות יהיו שונות הוא 0.504.

28) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג.
בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה.
בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג הוא 0.3.

29) בכיתה ישנם 3 תלמידים. הסיכוי שתלמיד כלשהו בכיתה יעבור את הבחינה הינו 0.8. כל התלמידים לא תלויים אחד בשני.
הסיכוי שלפחות אחד יעבור את הבחינה הוא 0.992.

30) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. לכן גם השכיח שווה בין שתי החברות.

31) לפי מחקר שנעשה הטמפרטורה בחודשי החורף באזור מסוים בארץ מתפלגת נורמאלית עם תוחלת 14 וסטיית תקן 4.
ההסתברות שהטמפרטורה באזור גבוהה מ-17 מעלות בחורף קטנה מ-0.5.

32) בחדר אוכל של קיבוץ מגישים תפריט ובו :
- 3 מנות ראשונות.
- 4 מנות עיקריות.
- 2 מנות אחרונות.

מספר המנות שאפשר להרכיב ושייכללו מנה ראשונה + מנה עיקרית + מנה אחרונה הוא 9.

33) התקיימה תחרות קליעה למטרה. אפשר לשחק עד שיש פגיעה, אך בכל מקרה לא יותר מ-4 פעמים. הסיכוי של ירון ,אחד מחברי הנבחרת ,לפגוע במטרה הוא 0.6. הסיכוי שירון זרק 4 פעמים למטרה בלבד הוא 0.064.

34) הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים – אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים – נקבל כי : הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים.

35) נתונה סדרה של 4 תצפיות. להלן הסטיות שלהן מהממוצע עבור 3 תצפיות מתוך ה-4 : 4, 3, 2-. לכן השונות של 4 התצפיות היא 7.25.

36) הסיכוי שירון יכין שיעורים ביום מסוים הוא 0.7 אם אימא ביקשה ממנו, ו-0.4 אם אימא שלו לא בקשה ממנו. ב-60% מהימים אימא של ירון מבקשת ממנו להכין את השיעורים. הגעת לבקר את ירון והבחנת שהוא מכין שיעורים, לכן ההסתברות שאימא שלו ביקשה ממנו להכין אותם באותו היום הוא : 0.742.

37) 70% מבתי האב גרים בבתים אשר בבעלותם מתוכם 50% משלמים משכנתא על בית זה. נבחרו 20 בתי אב אקראיים. תוחלת מספר הבתים אשר גרים בהם בעליהם ומשלמים בהם משכנתא הוא 7.

38) מספר ראשי התיבות שניתן ליצור בעברית (22 אותיות) עבור שם פרטי ומשפחה הוא 44.

39) מספר המספרים התלת ספרתיים בהם הספרות שונות זו מזו הוא 648.

40) בהתפלגות נורמלית ככל שסטיית התקן יותר גבוהה אחוז המקרים שמתחת לממוצע קטן.

41) הציון הממוצע של 5 סטודנטים הוא 78. 4 סטודנטים מתוכם קיבלו את הציונים הבאים : 74, 72, 86, 70. הציון של הסטודנט החמישי הוא : 76.

42) בתיק השקעות של משקיע מתחיל 10 מניות. הסיכוי שביום מסוים מניה תעלה הוא 0.6. נניח כי המניות אינן תלויות זו בזו. סטית התקן של מספר המניות, מתוך תיק ההשקעות, שתעלינה ביום מסוים היא 2.4.

43) ישנן שני מאורעות ונתון ששני המאורעות זרים הסיכוי שכל אחד מהם יקרה הוא 0.3 ולכן הסיכוי שלפחות אחד מהם יקרה הוא 0.6.

44) יהיו A,B,C שלושה מאורעות במרחב מדגם Ω.
ידוע כי: $P(A)=P(B)=P(C)=0.2$.
ההסתברות שיקרה רק מאורע B אם המאורעות בלתי תלויים היא 0.2 .

45) אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי 4 סוגי הדם כדלקמן:

סוג דם	אחוז מהאוכלוסייה
A	40%
O	30%
B	20%
AB	10%

נבחרו ארבעה אנשים אקראיים מאותה אוכלוסייה.
ההסתברות שבדיוק אחד מהם בעל סוג דם A הוא 0.4.

46) חושב מקדם המתאם של ספירמן בין שני משתנים והתקבל 1 לכן אם יחושב מדד הקשר של פירסון יתקבל גם כן 1.

47) חושב מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים והתקבל 1 אם יחושב מדד הקשר של ספירמן יתקבל גם 1.

48) שונות של סכום משתנים שווה תמיד לסכום השונויות של המשתנים.

49) נגדיר את A להיות התוצאה 4 בהטלת קובייה, ואת B להיות ראש בהטלת מטבע, ולכן המאורעות הללו הם מאורעות זרים.

תשובות סופיות:

1) נכון.	**2)** לא נכון.	**3)** לא נכון.	**4)** לא נכון.	**5)** לא נכון
6) נכון.	**7)** לא נכון.	**8)** לא נכון.	**9)** נכון.	**10)** לא נכון.
11) לא נכון.	**12)** נכון.	**13)** לא נכון.	**14)** נכון.	**15)** נכון.
16) לא נכון.	**17)** נכון.	**18)** לא נכון.	**19)** לא נכון.	**20)** נכון.
21) לא נכון.	**22)** לא נכון.	**23)** נכון.	**24)** לא נכון.	**25)** לא נכון.
26) לא נכון.	**27)** נכון.	**28)** לא נכון.	**29)** נכון.	**30)** לא נכון.
31) נכון.	**32)** לא נכון.	**33)** נכון.	**34)** נכון.	**35)** לא נכון.
36) נכון.	**37)** נכון.	**38)** לא נכון.	**39)** נכון.	**40)** לא נכון.
41) לא נכון.	**42)** לא נכון.	**43)** נכון.	**44)** לא נכון.	**45)** לא נכון.
46) לא נכון.	**47)** נכון.	**48)** לא נכון.	**49)** לא נכון.	

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 81 - תרגול שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

תרגול שאלות אמריקאיות:

שאלות:

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 1-4:

פסיכולוגים צפו במשך שבוע שלם בהתנהגותם של 28 ילדים בגן חובה. לאחר מכן נאלצו לדווח על רמת הביטחון העצמי של כל ילד בסקלה של 1 עד 5. כאשר 5 נחשב לרמת בטחון עצמי גבוהה ו-1 לרמת בטחון עצמי נמוכה. להלן סיכום התוצאות:

בטחון עצמי	מספר הילדים
1	6
2	7
3	10
4	4
5	1

1) מהו סולם המדידה של המשתנה הנחקר?
א. שמי.
ב. סדר.
ג. רווח.
ד. מנה.

2) מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר כדי לתאר את הנתונים?
א. טבלת שכיחויות.
ב. דיאגרמת מקלות.
ג. היסטוגרמה.
ד. דיאגרמת עוגה.

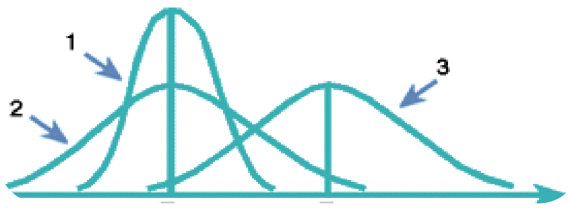
3) מהו השכיח של התפלגות הנתונים שנאספו?
א. 2.
ב. 1.
ג. 3.
ד. 10.

4) התווסף עוד ילד עם רמת בטחון עצמי נמוכה לכן סטיית התקן של המשתנה הנחקר כתוצאה מההוספה:
א. תגדל.
ב. תקטן.
ג. לא תשתנה.
ד. אין לדעת.

5) אם נרצה לבדוק האם המוצא (אסיה, אירופה, אפריקה, אמריקה) משפיע על השכלה בשנים של העובדים נעשה זאת על ידי:
א. מדד הקשר הלינארי.
ב. טבלת שכיחות משותפת.
ג. תרשימי קופסא.
ד. דיאגרמת פיזור.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 6-10:

להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל בניהן.



6) לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
א. 1.
ב. 2.
ג. 3.
ד. אין לדעת.

7) לאיזו התפלגות השכיח הגדול ביותר?
א. 1.
ב. 2.
ג. 3.
ד. אין לדעת.

8) במה התפלגות 1 ו-2 זהות?
א. בעשירון העליון.
ב. בממוצע.
ג. בשונות.
ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

9) איזה מהמשפטים הבאים נכון לגבי התפלגות מספר 3?
א. הממוצע שווה לחציון בהתפלגות.
ב. הטווח שווה לטווח הבין-רבעוני.
ג. העשירון התחתון שווה לעשירון העליון.
ד. סטיית התקן היא אפס.

10) לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
א. 1.
ב. 2.
ג. 3.
ד. אין לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 11-15:

מוכר החליט לתת 20% הנחה לכל המוצרים שבחנות שלו.
נסמן ב- X את המחיר של מוצר לפני ההנחה ב-₪ וב- Y את המחיר של המוצר אחרי ההנחה ב-₪.
המוכר חישב את המדדים הבאים לפני ההנחה:
כמו כן, הוא חישב גם את כל הנתונים לגבי המשתנה Y.

ממוצע	80
חציון	70
שונות	300
טווח	48

11) מה יהיה הממוצע של המחירים ב-₪ אחרי ההנחה?
א. 16.
ב. 64.
ג. 80.
ד. 70.

12) מה יהיה טווח המחירים ב-₪ אחרי ההנחה?

א. 9.6.
ב. 38.4.
ג. 48.
ד. 70.

13) מה תהיה השונות של המחירים אחרי ההנחה?

א. 300.
ב. 60.
ג. 240.
ד. 192.

14) מהו מקדם ההשתנות (CV) של המחירים לפני ההנחה?

א. 3.75.
ב. 0.267.
ג. 0.2165.
ד. 4.619.

15) אם המוכר יחשב את מקדם המתאם על X ו-Y התוצאה שתתקבל תהיה?

א. 0.
ב. 1.
ג. -1.
ד. אין לדעת.

16) בהתפלגות אסימטרית ימנית סטיית התקן יותר גדולה מאשר בהתפלגות אסימטרית שמאלית.

א. הטענה תמיד נכונה.
ב. הטענה תמיד אינה נכונה בהכרח.
ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

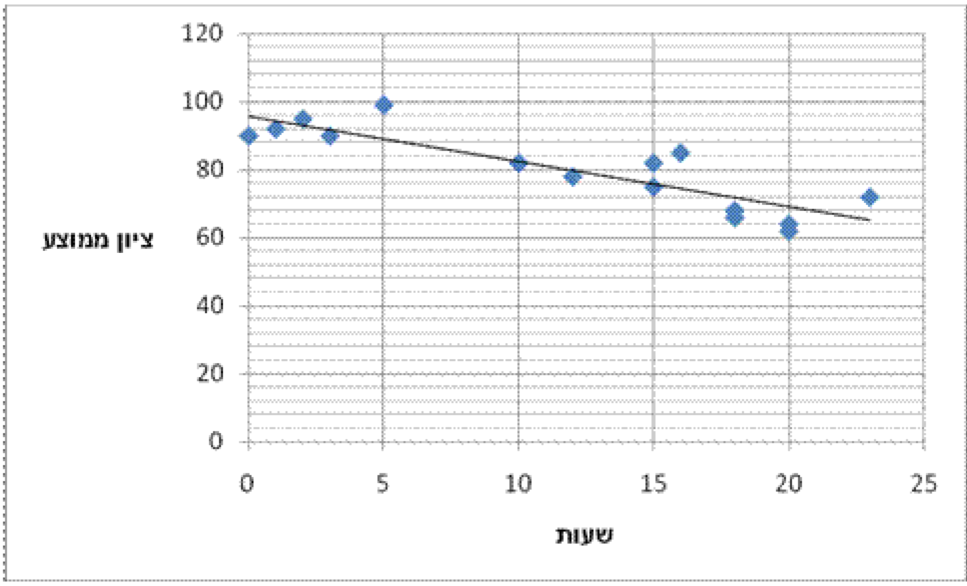
17) ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:

א. בערכים הגבוהים.
ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
ג. בערכים הנמוכים.
ד. לא ניתן לדעת.

18) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:
א. תגדיל את סטיית התקן.
ב. תקטין את סטיית התקן.
ג. לא תשנה את סטיית התקן.
ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 19-21:

חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר בעזרת האקסל דיאגרמת פיזור. החוקר אף הוסיף לדיאגרמה את קו המגמה המתאים לנתונים.



19) מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
א. ציון ממוצע.
ב. מספר שעות לבילוי.
ג. מספר הסטודנטים.

20) מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? (הסתמכו על הנתונים ולא על דעתכם האישית)
א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון יורד הסטודנט מבלה פחות.

21) איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?
א. 0.85.
ב. 0.15.
ג. -0.85.
ד. -0.15.

22) סטיית התקן של משתנה מסוים X הייתה 2. הוחלט לבצע טרנספורמציה למשתנה לפי הקשר הבא: $Y = 3X - 2$. שונות Y אחרי הטרנספורמציה היא:
א. 4.
ב. 6.
ג. 10.
ד. 12.
ה. 36.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 23-25:

בכיתה 30 סטודנטים אותם 30 נבחנו במבחן באנגלית ובמבחן בסטטיסטיקה.
להלן פלט לגבי ציונים:

	אנגלית	סטטיסטיקה
ממוצע	90	80
שונות	121	100

23) באיזה מקצוע להתפלגות הציונים פיזור יחסית יותר גבוה?
א. אנגלית.
ב. סטטיסטיקה.
ג. אותו פיזור בשני המקצועות באופן יחסי.
ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

24) יערה קיבלה 92 באנגלית ו-82 בסטטיסטיקה.
באיזה מקצוע היא יותר טובה יחסית לכיתתה?
א. אנגלית.
ב. סטטיסטיקה
ג. אותו דבר יחסית.
ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

25) עודד, שקיבל 80 בסטטיסטיקה, העתיק בבחינה. הוחלט לחשב מחדש את השונות של הציונים בסטטיסטיקה בלעדיו. השונות החדשה:

א. תקטן.

ב. תגדל.

ג. לא תשתנה.

ד. אין לדעת.

26) חושב הטווח הבין רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס, לכן:

א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.

ב. סטיית התקן היא אפס.

ג. ההתפלגות היא סימטרית.

ד. מצב זה כלל לא יתכן.

27) נתונה התפלגות של משתנה כלשהו.

א. הטווח של 20% התצפיות הגבוהות ביותר שווה לטווח של 20% התצפיות הנמוכות ביותר.

ב. הטווח של 50% התצפיות המרכזיות הינו הטווח הבין רבעוני.

ג. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון.

ד. הטווח הבין רבעוני הוא מחצית מהטווח.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 28-29:

חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון במבחן הרשות בסטטיסטיקה ומימון לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן.
במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות:
הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27.
מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18.
מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

28) על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב:

א. 1.5 נקודות.

ב. 0.53 נקודות.

ג. 0.66 נקודות.

ד. 1.20 נקודות.

ה. 0.96 נקודה.

29) על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון:

א. 29.
ב. 0.
ג. 33.
ד. 24.
ה. 26.

30) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא שלילי אזי:

א. הערכים של המשתנים הם שליליים.
ב. ככל שמשתנה אחד עולה השני עולה.
ג. ככל שמשתנה אחד יורד השני יורד.
ד. קיימת טרנספורמציה לינארית שלילית בין שני המשתנים.
ה. אף טענה אינה נכונה.

31) בתיק 10 מניות. בהנחה שהמניות לא תלויות זו בזו והסיכוי שביום מסוים מניה תעלה 0.6. מה סטיית התקן של מספר המניות שייעלו ביום מסוים?

א. 6.
ב. 2.4.
ג. 1.55.
ד. 2.46.

32) הסטטיסטיקאית המפורסמת זהבה טוענת כי כאשר מאורעות E ו- F זרים, ניתן לומר כי הסתברות שמאורע E וגם מאורע F יתקיימו, שווה למכפלת ההסתברות כי מאורע E לבדו יתקיים בהסתברות כי מאורע F לבדו יתקיים (או בכתיב מתמטי: $\left(P\left(E\cap F\right)=P\left(E\right)\times P\left(E\right)\right)$. האם זהבה צודקת בטענתה?

א. לא ניתן לדעת.
ב. לא.
ג. כן.
ד. המונח "מאורעות זרים" לא קיים בסטטיסטיקה.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

33) ככל שההתפלגות הנורמאלית חדה וצרה יותר במרכזה אזי:
א. השונות שלה יותר גבוהה.
ב. הממוצע שלה יותר גבוה.
ג. היא מייצגת אנשים גבוהים יותר.
ד. השונות שלה נמוכה יותר.
ה. החציון שלה גבוה יותר.

34) נתונה סדרה של N מדידות שלא כולן זהות.
נניח ששתי מדידות נוספות צורפו לסדרה ושתיהן זהות לממוצע הסדרה.
האם וכיצד תשנה הוספת שני הערכים החדשים את שונות הסדרה?
א. שונות הסדרה תקטן.
ב. שונות הסדרה תגדל.
ג. לא ניתן לדעת, זה תלוי במספר התצפיות.
ד. לא ניתן לדעת, זה תלוי בערכו של הממוצע.

35) הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים, אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים, נקבל כי:
א. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים.
ב. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 11 שנים.
ג. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 11 שנים.
ד. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 8 שנים.

36) שני סטודנטים עזבו את החוג לכלכלה. הציון של כל אחד מהם היה שווה לציון הממוצע. כיצד תשפיע עזיבתם על הממוצע ושונות ציוני התלמידים הנותרים? אם הממוצע לפני העזיבה היה 80 והשונות 100.
א. הממוצע לא ישתנה והשונות תגדל.
ב. הממוצע לא ישתנה והשונות תקטן.
ג. הממוצע לא ישתנה והשונות לא תשתנה.
ד. הממוצע יקטן והשונות תגדל.
ה. הממוצע יגדל והשונות תקטן.

37) החציון של סדרת נתונים מסוימת הוא 90.
הוסיפו שתי תצפיות נוספות: 100 ו-20, לכן החציון:
א. יקטן.
ב. יגדל.
ג. לא ישתנה.
ד. לא ניתן לדעת.

38) סטיית התקן של המשכורות בחברה הנה 3000 ₪ אם נוסיף לכל עובדי החברה 200 ₪ לשכר אז:
א. סטיית התקן תגדל אך אין לדעת בכמה.
ב. סטיית התקן תגדל בהכרח ב-200 ₪.
ג. סטיית התקן לא תשתנה.
ד. סטיית התקן תקטן.
ה. לא ניתן לדעת.

39) בתיק השקעות 5 מניות. נגדיר את המאורע: אף מניה לא תעלה מחר מבין מניות התיק. המאורע המשלים למאורע זה הוא (הנח שמניה יכולה או לעלות או לרדת בלבד).
א. לפחות מניה אחת תעלה.
ב. לפחות מניה אחת תרד.
ג. כל המניות יעלו.
ד. בדיוק מניה אחת תעלה.

40) ממוצע של סידרת נתונים הנה 50 וסטיית התקן 10.
אם נוסיף עוד שתי תצפיות שערכן 50 סטיית התקן:
א. תקטן.
ב. תגדל.
ג. לא תשתנה.
ד. אין לדעת.

41) בהתפלגות אסימטרית עם זנב ימני ציון התקן של הרבעון התחתון:
א. בהכרח שלילי.
ב. בהכרח חיובי.
ג. אפס.
ד. לא ניתן לדעת.

42) אם השונות של המשתנה שווה אפס. מה ניתן לומר על המשתנה?
א. עולה.
ב. יורד.
ג. קבוע.
ד. נורמלי.
ה. לא ניתן לדעת.

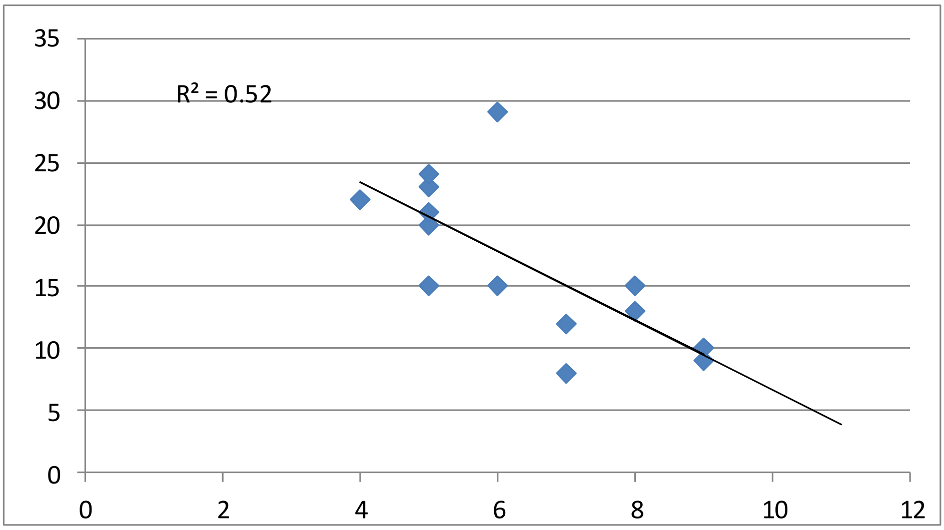
43) נתון משתנה מקרי W עם שונות 10.
מה תהיה השונות אם נכפיל את ערכי המשתנה W פי 2?
א. 20.
ב. 10.
ג. 400.
ד. 40.
ה. 0.

44) נמצא שקיים מקדם מתאם חיובי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו חיוביים.
ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

45) נתונים שני מאורעות המקיימים:
$P(A)=0.45$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.95$.
איזו טענה נכונה לגבי המאורעות הללו?
א. המאורעות בלתי תלויים.
ב. המאורעות זרים.
ג. המאורע B מכיל את המאורע A.
ד. המאורעות משלימים.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 46-48:

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים X (משתנה בלתי תלוי-בציר האופקי) ו- Y (משתנה תלוי), כמו כן הועבר קו הרגרסיה וחושב ריבוע מקדם המתאם.



46) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של מקדם המתאם שתופעל על הנתונים?

א. 0.52.
ב. ‎-0.52.
ג. ‎-0.72.
ד. 0.72.

47) מה תהיה התוצאה הכי מתאימה לפרמטר b ברגרסיה?

א. 0.52.
ב. 2.79.
ג. ‎-2.79.
ד. ‎-0.52.

48) מהו טווח התפלגות התצפיות של המשתנה הבלתי תלוי X?

א. 5.
ב. 12.
ג. 6.5.
ד. 7.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 49-51:

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

49) איזו טענה מהטענות הבאות נכונה?
א. המספר המקסימלי של העובדים במפעל הוא 17 עובדים.
ב. התפוקה הכוללת במשך 40 הימים הללו הייתה 192,000 מצברים.
ג. הטווח של התפלגות תפוקת המצברים הוא 20 מאות.
ד. אף אחת מהטענות לא נכונה.

50) לפי קריטריון CV (מקדם ההשתנות):
א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.
ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.
ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.
ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

51) באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים. מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו, נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
א. חריגים באותה מידה.
ב. כמות הפועלים.
ג. התפוקה.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

52) התפלגות הציונים במבחן מסוים היא סימטרית, לכן:
א. סטיית התקן של הציונים היא אפס.
ב. הציון החציוני שווה לציון הממוצע.
ג. העשירון העליון שווה לעשירון התחתון של הציונים.
ד. כל הטענות בשאר הסעיפים לא נכונות.

53) מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7.
אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה,
אזי מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה של 10 המשפחות הנ״ל:

א. לא ישתנה ויישאר 0.7.

ב. יהפוך להיות 0.7-.

ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת מה יהיה מקדם המתאם.

ד. אפשר לדעת רק מה יהיה מקדם המתאם באוכלוסייה כולה.

ה. בין 0.7 ל-(0.7-).

54) איזה מהמשפטים הבאים אינו נכון?

א. אם מוסיפים קבוע לתצפיות הדבר לא משפיע על פיזור הנתונים.

ב. בהתפלגות סימטרית הממוצע שווה לשכיח.

ג. אם כל התצפיות זהות סטיית התקן בהכרח אפס.

ד. הכפלה בקבוע משנה את סטיית התקן.

55) איזה מהמשפטים הבאים נכון?

א. הטווח הבין רבעוני הוא אפס רק אם כל הצפיות זהות.

ב. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון בהתפלגות סימטרית.

ג. בהתפלגות סימטרית החציון שווה לממוצע.

ד. 90% מהתצפיות נמצאות מעל האחוזון התשעים.

56) מעוניינים למצוא את הסיכוי לאיחוד שני מאורעות.
מותר לחבר הסתברויות אלה לשם כך, רק אם המאורעות:

א. זרים.

ב. לא זרים.

ג. תלויים.

ד. בלתי תלויים.

57) במכון לשטיפת מכוניות, זמן שטיפת המכונית מתפלג נורמלית עם תוחלת של 25 דקות וסטיית תקן של 5 דקות. מחיר שטיפת מכונית הוא 40 שקלים אם זמן שטיפת המכונית הוא עד 25 דקות. אם זמן שטיפת המכונית עובר את 25 הדקות משלמים 20 שקלים בלבד. עידן הכניס את המכונית לשטיפה.
מהי תוחלת התשלום של השטיפה (ב-₪)?

א. 30

ב. 32.5

ג. 35

ד. 25

ה. לא ניתן לחשב ללא נתונים נוספים.

58) הכפלה בגודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:
א. תגדיל את סטיית התקן.
ב. תקטין את סטיית התקן.
ג. לא תשנה את סטיית התקן.
ד. לא ניתן לדעת.

59) בעיר "חולית", בקיץ, כמות הגשם היורד בחודש מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית תקן 2, ובחורף עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית התקן 3.
איפה יש יותר סיכוי שירד יותר מ-12 מ"מ גשם?
א. בקיץ
ב. בחורף
ג. סיכוי שווה.
ד. לא ניתן לדעת.

60) בהתפלגות שבה המאון ה-40 שווה לממוצע, ציון התקן של הממוצע יהיה:
א. חיובי.
ב. שלילי.
ג. אפס.
ד. לא ניתן לדעת.

תשובות סופיות:

1) ב'	**2)** ב'	**3)** ג'	**4)** א'	**5)** ג'
6) ג'	**7)** ג'	**8)** ב'	**9)** א'	**10)** א'
11) ב'	**12)** ב'	**13)** ד'	**14)** ג'	**15)** ב'
16) ג'	**17)** ג'	**18)** ג'	**19)** ב'	**20)** א'
21) ג'	**22)** ה	**23)** ב'	**24)** ב'	**25)** ב'
26) א'	**27)** ב'	**28)** ד'	**29)** א'	**30)** ה
31) ג'	**32)** ב'	**33)** ד'	**34)** א'	**35)** א'
36) א'	**37)** ג'	**38)** ג'	**39)** א'	**40)** א'
41) א'	**42)** ג'	**43)** ד'	**44)** ב'	**45)** ב'
46) ג'	**47)** ג'	**48)** א'	**49)** ב'	**50)** ב'
51) ב'	**52)** ב'	**53)** א'	**54)** ב'	**55)** ג'
56) א'	**57)** א'	**58)** ד'	**59)** ב'	**60)** ג'

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 82 - נוסחת התוחלת השלמה

תוכן העניינים

נוסחת התוחלת השלמה:

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y, מתקיים: $E(X)=E\left[E(X/Y)\right]$.

עבור משתנה Y בדיד כלשהו: $E(X)=\sum_{y} E(X|Y=y)\cdot P(Y=y)$.

עבור משתנה Y רציף כלשהו: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y)\cdot f(y)dy$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.
בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.
בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.
המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.
יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.
יש לחשב את $E(X)$.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי.
אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1.
אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5.
אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית.
חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

2) מטילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש.
כעת מטילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.

3) בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב15₪. אחרת זוכים ב-50₪.
חשבו את תוחלת סכום הזכיה.

4) נתון ש- $Y/X \sim U(0,X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X
הינה: $f(x)=\begin{cases}0.1 & 2\le x\le 6\\ 0.2 & 6<x\le 9\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.
חשבו את $E(Y)$.

5) בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A - שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B - שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא ונקודה C - המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- X את זמן ההגעה לנקודת הסיום.
חשבו את $E(Y)$.

תשובות סופיות:

1) 4.4.

2) $\frac{n}{4}$.

3) 46.4.

4) 3.05.

5) 5.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 83 - נוסחת השונות השלמה (שונות של משתנה מותנה)

תוכן העניינים

נוסחת השונות השלמה (המותנית):

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y, מתקיים: $E(X)=E\left[E(X|Y)\right]$.

כמו כן, מתקיים לגבי השונות: $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(E[X|Y]\right)+E\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right]$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.
בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.
בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.
המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.
יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.
יש לחשב את $V(X)$.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי.
אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1.
אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5.
אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית.
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

2) נטיל קובייה: $Y+4$ פעמים. נתון ש- $Y \sim P(4)$.
נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 2.
א. מצאו את התוחלת של X.
ב. מצאו את השונות של X.

3) נתון ש- $Y \mid X \sim U(0, X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X
הינה: $f(x)=\begin{cases} 0.1 & 2\le x\le 6 \\ 0.2 & 6<x\le 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$.
חשבו את $V(Y)$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 4.4, שונות: 22.64.

2) תוחלת: $\frac{4}{3}$ 'שונות: $\frac{11}{9}$.

3) 4.4.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 84 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

תוכן העניינים

חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

X	1	0
$P(X)$	P	$1-P$

נגיד ש- X_i הינו משתנה אינדיקטור כאשר: $i=1,2,\dots,n$ ו- $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של X.

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)+2\cdot\sum_{i<j} COV\left(X_{i,}X_j\right)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i)=P(X_i=1)$$

$$V(X_i)=P(X_i=1)\cdot P(X_i=0)$$

$$COV(X_i,X_j)=P(X_i=1,X_j=1)-P(X_i=1)P(X_j=1)$$

דוגמא (פתרון בהקלטה):

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- X את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון.

חשבו את $E(X)$ ואת $V(X)$.

שאלות:

1) יהיו X ו- Y משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:

א. $E(X)=P(X=1)$.

ב. $V(X)=P(X=1)\cdot[1-P(X=1)]$.

ג. $COV(X,Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)$.

2) 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.

א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.

ב. נגדיר את X_i משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום i בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום.
חשבו את התוחלת והשונות של X_i.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.

3) 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד.
נסמן ב- W את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד.
חשבו את התוחלת והשונות של W על ידי פירוק לאינדיקטורים.

4) A, B ו-C הם שלושה מאורעות כך ש: $P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$, $P(C)=0.1$.
נגדיר את Y להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים.
חשבו את התוחלת והשונות של Y כאשר:

א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.

ב. $C\subset B\subset A$.

ג. A, B ו-C זרים זה לזה.

5) נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- W את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.

א. מצאו את $E(W)$.

ב. מצאו את $V(W)$.

6) נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'ינק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- X את מספר הרצפים מסוג "ג'ינק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
קולה, מים, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה, קולה, $X=2$.
חשבו את התוחלת והשונות של X.

7) נסדר בשורה n זוגות גרביים באקראי (בסך הכול $2n$ גרבים).
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך n הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.

8) בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- X את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- Y את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.
א. חשבו את התוחלת והשונות של X.
ב. בטאו את Y כפונקציה של X וחשבו את התוחלת והשונות של Y.
ג. מהי השונות המשותפת של X ו- Y?

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.

3) תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.

4) א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.

5) א. 5.03. ב. 0.568.

6) תוחלת: 3, שונות: $\frac{2}{3}$.

7) תוחלת: $n-1$, שונות: $1-\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2(2n-1)}$.

8) א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
ב. $Y=-0.5X+50$. ג. -12.563.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 85 - סכום מקרי

תוכן העניינים

סכום מקרי:

רקע:

N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים ואי-שליליים.
$X_1, X_2...$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N.
$\sum_{i=1}^{N} X_i$ הוא סכום מספר מקרי של אותם משתנים מקריים, הנקרא סכום מקרי.
התוחלת והשונות של הסכום יחושבו על ידי הנוסחאות הבאות:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X_1].$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\mathrm{Var}(X_1) + \left(E[X_1]\right)^2 \mathrm{Var}(N).$$

אם $N = 0$ אז גם סכום המשתנים שווה ל-0.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מספר הפניות למוקד תשלומים במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100. מספר התשלומים, המתבצעים בכל פנייה למוקד, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 4 ו-0.15.
אין תלות בין פניות שונות שמתקבלות במוקד, ואין תלות בין מספרי התשלומים שנעשים בפניות השונות סך-כל הפניות שמתקבלות במוקד במשך שעה.

א. מהי התוחלת של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

ב. מהי השונות של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

שאלות:

1) N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד המתפלג מ-10 ועד 99. $X_1, X_2 ...$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב-N המתפלגים נורמלית עם תוחלת 50 ושונות 10. מצאו את התוחלת והשונות של: $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

2) נתון ניסוי דו שלבי: בשלב הראשון מטילים קובייה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 4. בשלב השני מטילים קובייה הוגנת כמספר הפעמים שהוטלה הקובייה בשלב הראשון. מהי התוחלת ומהי השונות של סכום כלל התוצאות של הטלות הקובייה בשלב השני של הניסוי?

3) מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000. הקונה ה-i-י, שמגיע ביום ראשון לסניף זה ממחזר X_i בקבוקים, לכל $i = 1, 2, ...$, כאשר המשתנים המקריים X_i, מוגדרים על ידי: $X_i = Y_i - 1$, עבור Y_i שהתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר 0.2. כמו כן, נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וכי גם אין תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל אחד מהם ממחזר.
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון על ידי הקונים בסניף הסופרמרקט.

4) X הוא משתנה מקרי רציף בעל פונקציית הצפיפות הבאה:
$$f(X) = \begin{cases} KX & 2 < X < 3 \\ 0 & else \end{cases}.$$
ביצעו מדגם מקרי בגודל Y מהתפלגותו של X. נתון ש-Y הוא משתנה מקרי המתפלג גאומטרית עם סיכוי להצלחה בניסוי בודד של 0.2. מצאו את התוחלת של: $\sum_{i=1}^{Y} X_i$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 2,725, שונות: 1,687,837.

2) תוחלת: 210, שונות: 385.

3) תוחלת: 4,000, שונות: 36,000.

4) תוחלת: $12\frac{2}{3}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

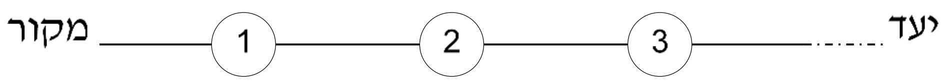
פרק 86 - מערכות חשמליות

תוכן העניינים

מערכות חשמליות:

רקע:

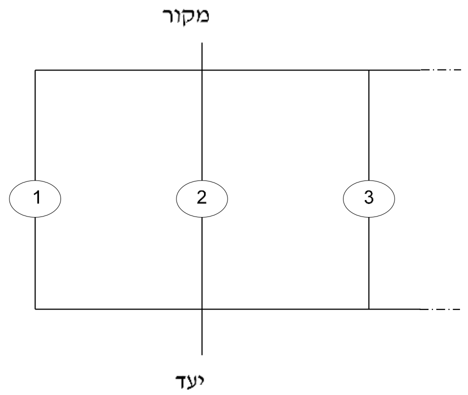
מערכת חשמלית בטור הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:



נסמן ב- A_i את המאורע: רכיב i פועל.

כדי שהמערכת כולה תפעל צריך להתקיים ש: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

מערכת חשמלית במקביל הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:



כדי שהמערכת החשמלית כולה תפעל צריך להתקיים ש: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

במערכת חשמלית 4 רכיבים בלתי תלויים שלכל אחד מהם סיכוי P לפעול.
בטאו באמצעות P את הסיכוי שהמערכת תפעל.

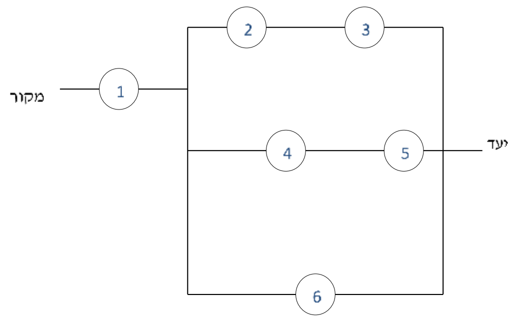
א. כל הרכיבים מחוברים בטור זה לזה.

ב. כל הרכיבים מחוברים במקביל זה לזה.

שאלות:

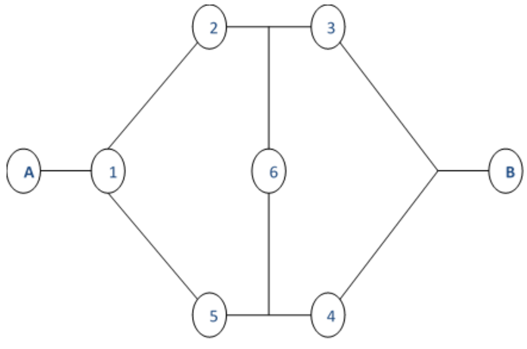
1) נתונים שלושה רכיבים חשמליים המחוברים בטור.
אורך החיים של כל מכשיר מתפלג באופן הבא:
. $X_1 \sim U(2,4)$
. $X_2 \sim N(3,1)$
. $X_3 \sim \exp(1)$
כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. כל הרכיבים הופעלו כעת. מה הסיכוי שבעוד 3 שעות המערכת תפעל?

2) המערכת החשמלית הבאה מכילה 6 רכיבים כמוראה בשרטוט:

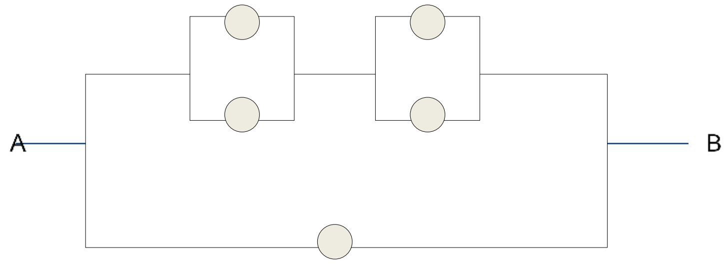


כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. רכיבים מספר 1, 2, 6 פועלים בסיכוי 0.9. רכיב מספר 3 פועל בסיכוי 0.8. רכיבים מספר 4, 5 פועלים בסיכוי P.
מצאו את P, אם הסיכוי שהמערכת תפעל הוא 0.887148.

3) בין שני המחשבים A ו-B נמצאים 6 שרתים כמוראה בשרטוט. כל אחד מהשרתים תקין בסיכוי 0.9. על מנת שהודעה תצליח לעבור ממחשב A ל-B צריך להיות לפחות מסלול אחד שבו כל השרתים תקינים.
א. מה ההסתברות לכך שההודעה תעבור בהצלחה ממחשב A ל-B?
ב. ההודעה לא הצליחה לעבור ממחשב A למחשב B.
מה הסיכוי ששרת מספר 1 לא תקין?

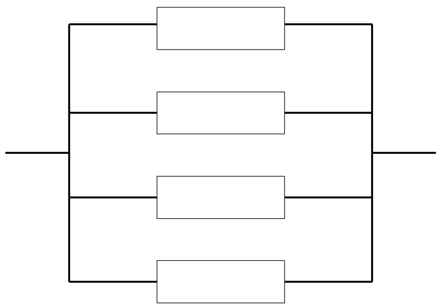


4) נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות P.
כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P+(1-P)\left(2P-P^2\right)^2$.

5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין. אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. נרצה להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪.
כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

1) 0.1245.

2) 0.7.

3) א. 0.880632 ב. 0.837745.

4) שאלת הוכחה.

5) א. 0.8403 ב. $0.0588A > K$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 87 - התפלגות מינימום ומקסימום

תוכן העניינים

התפלגות מינימום ומקסימום:

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $U=\max(x_1,x_2,\dots x_n)$. מתקיים ש: $F_U(t)=(F_X(t))^n$,

ולכן: $f(u)=n\cdot(F_x(u))^{n-1}\cdot f_x(u)$.

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $Z=\min(X_1,X_2\dots,X_n)$. מתקיים ש: $F_Z(t)=1-(1-F_X(t))^n$,

ולכן: $f(z)=n\cdot[1-F_x(z)]^{n-1}\cdot f_x(z)$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

$X_i\sim\exp(\lambda)$.

הוכיחו כי: $\min(x_i)\sim\exp(n\lambda)$, $i=1,2,\dots n$.

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $Z=\min(X_1,X_2...X_n)$, מתקיים ש: $f(z)=n\left[1-F_X(z)\right]^{n-1}\cdot f_x(z)$.

ב. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $U=\max(x_1,x_2,...x_n)$, מתקיים ש: $f(u)=n\cdot(F_x(u))^{n-1}\cdot f_x(u)$.

2) אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.

א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.

ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.

ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב'?

3) בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.

א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?

ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?

4) 3 אנשים משתתפים בתחרות ריצה ל-100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.

א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?

ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?

ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצאו את התוחלת והשונות שלו?

5) X_1,X_2 מתפלגים נורמאלית סטנדרטית.

נגדיר את: $Z=\min(X_1,X_2)$ ואת: $Y=\max(X_1,X_2)$.

א. חשבו $P(z>1)$.

ב. חשבו $P(Y>1)$.

ג. חשבו $P(Y>1/Y>0)$.

6) רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית.
משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.

א. מצאו את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.

ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

7) נתון ש: $X\sim\exp(\lambda)$ ו-$Y\sim\exp(\mu)$. $U=\min(x,y)$ כמו x,y בלתי תלויים.
הוכיחו כי: $U\sim\exp(\mu+\lambda)$.

8) X_1 ו-X_2 שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1.
נגדיר: $Y=\max(x_1,x_2)$.
חשבו את: $P(Y>0.5)$.

9) נתון ש- $X_i\sim U(0,2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר: $i=1,2,\dots,5$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T=\max(X_i)$.

10) נתון משתנה מקרי X בעל פונקציית הצפיפות הבאה:
$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & o\le x\le 1\\ 0 & \text{אחר}\end{cases}$$
נגדיר את: $W=\max(X_i)$ כאשר: $i=1,2,\dots,10$.
חשבו את $E(W)$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $F_u(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{30}t}\right)^3$. ב. $Z\sim \exp\left(\lambda=\frac{1}{10}\right)$.

ג. תוחלת: 10, שונות: 100.

3) א. 0.9817. ב. 0.

4) א. 0.421875. ב. 0.216. ג. תוחלת: 11.5, שונות: 0.15.

5) א. 0.02518. ב. 0.2922. ג. 0.3896.

6) א. 0.9328. ב. 0.2898.

7) הוכחה.

8) 0.75.

9) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^4$.

10) $\frac{30}{31}$.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 88 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

משתנה מקרי דו ממדי רציף:

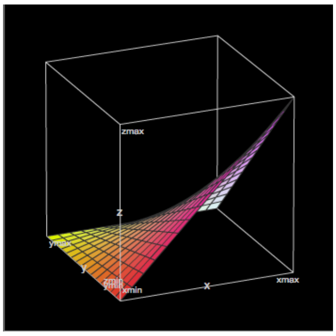
רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1) $f(x,y)\ge 0$ לכל $(x,y)\in R$.

2) $\iint\limits_{R} f(x,y)\,dxdy = 1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):



נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases} 4x(1-y) & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$.

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא: $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$.

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא: $f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו לפונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases} 4x(1-y) & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$

את פונקציית הצפיפות השולית של X, וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y, המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases},$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X ו- Y יהיו בתחום הזה: $P[(x,y)\in A]=\iint_A f(x,y)dxdy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f(x,y)dxdy.$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש- $Y=y$ לכל ערכי y המקיימים: $f(y)>0$ על ידי: $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f(y)}$.

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש- $X=x$ לכל ערכי x המקיימים: $f(x)>0$ על ידי: $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $f(x|y)$.

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של X בהינתן ש- $Y=y$ תהיה: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{-\infty} x\cdot f(x|y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X=x$ תהיה:

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{-\infty} y\cdot f(y|x)dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $E(X|Y)$.

שאלות:

1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.

2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 2$ וגם: $-x\le y\le x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A.

3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$.

א. מצאו את ערכו של C.

ב. מצאו את $f(y)$.

ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60\le x\le y$ וגם: $60\le y\le 100$.

א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

ג. חשבו את $V(X)$, $E(X)$.

ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X+10)$.

5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:
$f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y?

ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X)$.

6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2,4]$.
בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \le x \le y$, $f(x|y) = \frac{2x}{y^2}$.
מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y.

7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y. פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא: $f(x,y) = \begin{cases} x & 0<y<1 \quad 1-y \le x \le 1+y \\ 0 & else \end{cases}$.

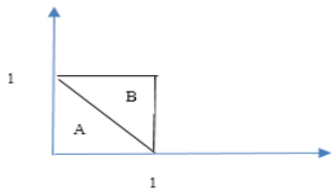
א. מצאו את $f(x)$.
ב. מצאו את $f(y|x)$.
ג. מצאו את $E(Y|X)$.

8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y.
ג. חשבו את התוחלת של X ו- Y.
ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?
ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:
הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?

א. מצאו את $f(x)$.
ב. מצאו את $f(x|y)$.



10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y) = cx$. פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו: $0 \le x \le 1$ וכן: $0 \le y \le x^2$.

א. מצאו את הקבוע C.
ב. חשבו את ההסתברות ש- $6Y < 1 - X$.

11) נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y\sim U(0,1)$
ו- $X\mid Y=y\sim U\left(0,\sqrt{y}\right)$. חשבו את: $E(Y\mid X=0.5)$.

12) נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=2e^{-x}\cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x,y\geq 0$.
חשבו את הסיכוי: $P(X<Y)$.

13) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y)=\dfrac{e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את: $P(X>1\mid Y=2)$.

14) יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין $8:00$ ל-$9:00$.
נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

15) נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X\sim N(Y,1)$ ו- $Y\sim U(0,2)$.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y.
ב. מצאו את $E\left(X^2\mid Y\right)$.
ג. מצאו את $E(X)$.

16) פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x,y)=1$.
פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0\leq x,y\leq 1$.
הוכיחו ש: $E\left(|X-Y|^n\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

17) $X\sim \exp(1)$ וכן: $Y\sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.
נגדיר את: $Z=\dfrac{X}{X+Y}$.
הוכיחו: $Z\sim U(0,1)$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) $A=\frac{1}{8}$.

3) א. $\frac{5}{16}$. ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$. ג. תלויים.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$. ג. $V(X)=88\frac{8}{9}$, $E(X)=73\frac{1}{3}$.
ד. לא. ה. 0.5. ו. 0.5625.

5) א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $f(y)=\mu e^{-\mu y}$. ב. לא.
ג. 0. ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

6) $\frac{2}{9}$.

7) א. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1 \\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1 \\ 0 & else \end{cases}$. ג. $E(y|x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

8) א. $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 1+x<y<1-x \quad -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$, $f(y)=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ 2-y & 1\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ג. $E(Y)=1$, $E(X)=-\frac{2}{3}$. ד. כן.
ה. לא.

9) א. כן.
ב. $f(x)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $f(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \dfrac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

10) א. 4.
ב. 0.0947.

11) $\frac{7}{12}$.

12) $\frac{1}{3}$.

13) $e^{-\frac{1}{2}}$.

14) $\frac{25}{72}$.

15) א. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$.
ב. y^2+1.
ג. 1.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א

פרק 89 - קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים

תוכן העניינים

קונבולוציה – התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים:

רקע:

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם:
$T = X + Y$ - שגם הוא משתנה מקרי.
אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y, פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y)\,dy .$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(2)$. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = X + Y$.

שאלות:

1) נתון ש- $X,Y \sim \exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

2) נתון ש- X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית.
הוכיחו ש- $T=X+Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3) סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל-3 שעות.
כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות של Z.
ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ-4 שעות?

4) X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות: $-2 \le x \le 2 \quad f_X(x)=\frac{1}{4}$, $f_Y(y)=\begin{cases} y+1 & -1 \le y \le 0 \\ 1-y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

5) יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X \sim U(2,3)$ $Y \sim U(1,5)$.
א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?
ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6) יהיו X, Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל- 1.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $X+Y+Z$.

7) הוכיחו את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף.
(רמז: היעזרו בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

תשובות סופיות:

1) $f_T(t)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda t}\cdot t \qquad t\ge 0$.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $f_z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-e^{1-z}\right) & 1\le z\le 3\\ \frac{1}{2}\left(e^{3-z}-e^{1-z}\right) & z>3\\ 0 & else\end{cases}$.   ב. 0.841.

4) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{8}(t+3)^2 & -3\le t\le -2\\ \frac{1}{8}\left(2-(t+1)^2\right) & -2<t<-1\\ \frac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ \frac{1}{8}\left(2-(t-1)^2\right) & 1<t<2\\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2\le t\le 3\\ 0 & else\end{cases}$.

5) א. $f_T(t)=\begin{cases}\frac{t-3}{4} & 3\le t\le 4\\ \frac{1}{4} & 4<t>7\\ \frac{8-t}{4} & 7\le t\le 8\end{cases}$ ב. 4.5.

6) $f_W(w)=\begin{cases}\frac{w^2}{2} & 0\le w\le 1\\ -w^2+3w-1.5 & 1<w<2\\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2\le w\le 3\end{cases}$.

7) שאלת הוכחה.