

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

|    |  |
|----|--|
| 1  | 1. חוקי החזקות והשורשים                              |
| 13 | 2. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים   |
| 21 | 3. חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט            |
| 31 | 4. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות |
| 50 | 5. שאלות אמריקאיות לתרגול בנושא פונקציות             |
| 62 | 6. וקטורים גיאומטרים                                 |
| 69 | 7. מטריצות   |
| 74 | 8. דטרמיננטות  |

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 1 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות ..... 1
2. חוקי השורשים ..... 5
3. משוואות מעריכיות ..... 8
4. משוואות עם חיבור וחסור איברים ..... 9
5. משוואות עם קבוע אוילר ..... 11
6. אי שוויונים מעריכיים ..... 12

## חוקי החזקות

### סיכום כללי

### סיכום חוקי החזקות

$$\begin{array}{lll}
 a^0 = 1 & .1 & a^1 = a & .2 \\
 \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 \\
 \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 \\
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & & 
 \end{array}$$

### שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 a^2 a^6 & .א & t^3 t^5 t^7 & .ב \\
 \frac{k^8}{k^3} & .ד & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה \\
 \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח \\
 3^2 3^3 3^4 & .י & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא \\
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & & \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & & \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & & \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & & 
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב \\
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & & 
 \end{array}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} & .א & \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} & .ב \\
 \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} & .ג & 2^3 + 2^5 & .ד
 \end{array}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

|  |   |  |
|--|---|--|
| א. $(a^2)^4$                             | ב. $(c^3)^{10}$                             | ג. $(x^3 x^{10})^2$                        |
| ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$             | ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$                | ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$ |
| ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ | ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$ | ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$  |

(5) פשט את הביטויים הבאים:

|   |                                      |  |
|---|--------------------------------------|--|
| א. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ | ב. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ | ג. $\frac{((3^4)^4)^5}{81^3 27^4 3^5}$ |
|---|--------------------------------------|--|

(6) פשט את הביטויים הבאים:

|  |   |
|--|---|
| א. $\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$ | ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$ |
| ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$   | ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$                  |

(7) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ .

|   |   |  |
|---|---|--|
| א. $(a^2 b)^3$                                      | ב. $(m^4 n^3)^5$  | ג. $(x^{12} y^3)^3$  |
| ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$                 | ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$                       | ו. $\left(\frac{a^{14} b^4}{a^6 ab^3}\right)^3$                  |
| ז. $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$ | ח. $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$ | ט. $\left(\frac{(b^{12} c)^2 c^{14}}{c(c^3 b^5)^4 b^3}\right)^2$ |

8) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

|                       |                    |                    |
|-----------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{1}{2^{10}}$ .ג | $\frac{1}{5^3}$ .ב | $\frac{1}{4^6}$ .א |
| $\frac{1}{125}$ .ו    | $\frac{1}{81}$ .ה  | $\frac{1}{8}$ .ד   |

9) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

|                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\frac{1}{5^{-3}}$ .ג | $\frac{1}{3^{-2}}$ .ב | $\frac{1}{4^{-3}}$ .א |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

10) חשב את הביטויים הבאים:

|  |  |
|--|--|
| $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$ .ב | $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$ .א |
|--|--|

11) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

|  |  |   |
|--|--|---|
| $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$ .ג | $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2}4^3)^{-6}}$ .ב | $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$ .א |
|--|--|---|

12) פשט את הביטויים הבאים:

|   |   |   |
|---|---|---|
| $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$ .ג | $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$ .ב | $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$ .א |
|---|---|---|

## תשובות סופיות

- (1) א.  $a^8$     ב.  $t^{15}$     ג.  $b^{22}$     ד.  $k^5$     ה.  $n^5$     ו.  $c^4$
- ז.  $a^7$     ח.  $x^3$     ט. 1    י.  $3^9$     יא.  $2^8$     יב.  $5^5$
- (2) א. 18    ב.  $ab$     ג.  $x^6 y^{10}$
- (3) א. 2    ב.  $\frac{1}{3}$     ג.  $\frac{5}{8}$     ד. 40
- (4) א.  $a^8$     ב.  $c^{30}$     ג.  $x^{26}$     ד.  $b$     ה.  $n^3$     ו.  $d^{10}$
- ז. 2    ח. 9    ט.  $8^{18}$
- (5) א.  $2^{12}$     ב.  $2^7$     ג.  $3^{51}$
- (6) א.  $\frac{2b^3}{a}$     ב.  $k$     ג.  $3\frac{1}{5}$     ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (7) א.  $a^6 b^3$     ב.  $m^{20} n^{15}$     ג.  $x^{36} y^9$     ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$     ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$     ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$     ח.  $t^4 r^{12}$     ט.  $b^2 c^6$
- (8) א.  $4^{-6}$     ב.  $5^{-3}$     ג.  $2^{-10}$     ד.  $2^{-3}$     ה.  $3^{-4}$     ו.  $5^{-3}$
- (9) א. 64    ב. 9    ג. 125
- (10) א. 1000    ב. 3
- (11) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$     ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$     ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (12) א.  $a^{1-5n}$     ב.  $k$     ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים

### סיכום כללי

### סיכום חוקי השורשים

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

### שאלות

(1) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

3) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

|  |  |   |
|--|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$                         | ב. $32^{\frac{3}{5}}$                          | ג. $128^{\frac{2}{7}}$  |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$        | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$          | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$                    |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$ |

4) פשט את הביטויים הבאים :

|   |  |  |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$                            | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$  | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$                   |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$                         | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$                                      | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$                          |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

5) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

|                   |                |                          |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$    | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ |                          |

6) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

|                          |                             |                                 |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$           | ב. $4\sqrt[3]{2}$           | ג. $2\sqrt[5]{3}$               |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$       | ח. $-5\sqrt[4]{2}$          | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$             |

7) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

|                   |                 |                |
|-------------------|-----------------|----------------|
| א. $\sqrt{12}$    | ב. $\sqrt{48}$  | ג. $\sqrt{63}$ |
| ד. $\sqrt[3]{54}$ | ה. $\sqrt{x^5}$ |                |

8) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

|                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| א. $\sqrt{40}$     | ב. $\sqrt{50}$     | ג. $\sqrt{320}$    |
| ד. $\sqrt[3]{108}$ | ה. $\sqrt[3]{56}$  | ו. $\sqrt[5]{160}$ |
| ז. $\sqrt[4]{162}$ | ח. $\sqrt[5]{972}$ | ט. $\sqrt[6]{192}$ |

### תשובות סופיות

|                                     |  |  |                            |                     |                    |
|-------------------------------------|--|--|----------------------------|---------------------|--------------------|
| 1) א. $\sqrt[4]{3}$                 | ב. $\sqrt[5]{2^3}$                           | ג. $\sqrt[6]{6^5}$                               | ד. $-\sqrt[7]{12^2}$       | ה. $-\sqrt[3]{-4}$  | ו. $\phi$          |
| ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$          | ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ | ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$ |                            |                     |                    |
| 2) א. 7                             | ב. -5  | ג. 2   | ד. -2                      | ה. 4                | ו. 16              |
| ז. -27                              | ח. $\phi$                                    | ט. $\phi$  | י. 5                       |                     |                    |
| 3) א. 4                             | ב. $\frac{1}{8}$                             | ג. $\frac{1}{4}$                                 | ד. 125                     | ה. $\frac{32}{243}$ | ו. $\frac{49}{16}$ |
| ז. $\frac{27}{4}$                   | ח. $\frac{10}{49}$                           | ט. $\frac{1}{2}$                                 |                            |                     |                    |
| 4) א. 4                             | ב. 9   | ג. 20  | ד. 6                       | ה. 3                | ו. 2               |
| ז. $\sqrt{2}$                       | ח. $\sqrt{5}$                                | ט. $\sqrt{2}$                                    |                            |                     |                    |
| 5) א. $\sqrt{18}$                   | ב. $\sqrt{75}$                               | ג. $\sqrt{9}$                                    | ד. $\sqrt[3]{24}$          | ה. $\sqrt{x^3}$     |                    |
| 6) א. $\sqrt{20}$                   | ב. $\sqrt[3]{128}$                           | ג. $\sqrt[5]{96}$                                | ד. $\sqrt{6}$              | ה. $\sqrt[3]{3}$    |                    |
| ז. $\sqrt[4]{40 \cdot \frac{1}{2}}$ | ז. $\sqrt[3]{-250}$                          | ח. $-\sqrt[4]{1250}$                             | ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$ |                     |                    |
| 7) א. $2\sqrt{3}$                   | ב. $4\sqrt{3}$                               | ג. $3\sqrt{7}$                                   | ד. $3\sqrt[3]{2}$          | ה. $x^2\sqrt{x}$    |                    |
| 8) א. $2\sqrt{10}$                  | ב. $5\sqrt{2}$                               | ג. $8\sqrt{5}$                                   | ד. $3\sqrt[3]{4}$          | ה. $2\sqrt[3]{7}$   | ו. $2\sqrt[5]{5}$  |
| ז. $3\sqrt[4]{2}$                   | ח. $3\sqrt[3]{4}$                            | ט. $2\sqrt[6]{3}$                                |                            |                     |                    |

## משוואות מעריכיות יסודיות

### סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ב.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$

ג.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

(2) פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר):  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ג.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

### תשובות סופיות

(1) א.  $x = -\frac{1}{3}$     ב.  $x = -4$     ג.  $x = 1, -\frac{1}{5}$

(2)  $x = \frac{1}{5}$

(3) א.  $x = -\frac{1}{2}$     ב.  $x = -8$     ג.  $x = 2, -\frac{2}{3}$

## משוואות עם חיבור וחסור איברים

### סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$       ב.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$       ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$       ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

(4) פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות):  $\frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א.  $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$       ב.  $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$

**תשובות סופיות**

(1) א.  $x=3$  ב.  $x=4$

(2) א.  $x=\frac{1}{2}$  ב.  $x=0$

(3) א.  $x=2,3$  ב.  $x=1,-2$

(4)  $x=1,-\frac{1}{2}$

(5) א.  $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$  ב.  $x=1,3$

## משוואות עם קבוע אוילר

### סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א.  $e^{3x} = e^{2x-1}$

ב.  $e^{x-5} = (e^{1-x})^3$

(2) פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחסור):  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ .

(3) פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס):  $xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x$ .

### תשובות סופיות

(1) א.  $x = -1$  ב.  $x = 2$

(2)  $x = 0$

(3)  $x = 0, \frac{1}{4}$

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (2)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (3)$$

### הערה

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (2)$$

$$0 < x < 1 \quad (3)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (4)$$

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 2 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... 13
2. חוקי הלוגריתמים ..... 15
3. הלוגריתם הטבעי ..... 17
4. משוואות עם בסיסים שונים ..... 19
5. אי-שוויונים לוגריתמים ..... 20

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

### סיכום כללי

#### הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ , כאשר:  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .

#### הסבר

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$ , על מנת שיהיה שווה ל- $b$ . ערך חזקה זו הוא  $x$ .  
 ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.  
 נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

#### כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$ , לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

#### שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x + 4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

ב.  $\log_8(x^4 - 73) = 1$

א.  $\log_6(4x - 2) = 1$

ג.  $\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$

4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה:  $\log_4(\log_3 x) = 1$ .  
(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה:  $\log_2(3^x + 37) = 6$ .  
(מתקבלת משוואה מעריכית)

6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה):  $(\log_2 x)^4 = 10000$ .

### תשובות סופיות

1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2

ו. -1.5    ז. 4

2) א.  $\frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$

ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$

3) א.  $x = 2$     ב.  $x = \pm 3$     ג.  $x = -2$

4)  $x = 81$

5)  $x = 3$

6)  $x = 1024, \frac{1}{1024}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

- (1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א.  $\log_3 12 + \log_3 2.25$   
 ב.  $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$   
 ג.  $\log_2 200 - \log_2 100$

- (2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):
- א.  $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$   
 ב.  $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$

#### משוואות לוגריתמיות:

- (3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):
- א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$   
 ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

- (4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):
- א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$   
 ב.  $2 \log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3(3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3(5^x - 3)$

### תשובות סופיות:

(1) א. 3      ב. -3      ג. 1

(2) א.  $\frac{4}{3}$       ב. -3

(3) א.  $x = 8$       ב.  $x = 3, \frac{1}{27}$

(4) א.  $x = 2.5$       ב.  $x = 6$

(5)  $x = 1$

## הלוגריתם הטבעי

### סיכום כללי

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ , כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים.

### שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות

$$\text{(1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5}$$

$$\text{(2) א. } x = e^2 \text{ ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{(3) א. } x = 0 \text{ ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \text{ ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$\text{(4) א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \text{ ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$\text{(5) א. 3 ב. 9}$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):  $e^{3x} = 3$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

(2)  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$

## אי-שוויונים לוגריתמים

### סיכום כללי

פתרון אי-השוויון  $\log_a x > \log_a y$  הוא  $x > y$ , עבור  $a > 1$ , ו- $x < y$  עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (2)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (4)$$

$$\log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad (1)$$

$$\ln x < 3 \quad (3)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (4)$$

$$x > 5 \quad (1)$$

$$0 < x < e^3 \quad (3)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (5)$$

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 3 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט

תוכן העניינים

1. כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט. 21
2. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט. 26
3. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט. 27
4. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט. 28

## כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : פונקציה הערך המוחלט מוגדרת:}$$

כדי לסרטוט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

- יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
- יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
- עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטוט אותה במערכת צירים.

### הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון:  $f(x) = x^2|x| - 3|x| = |x|(x^2 - 3)$ .

### שאלות:

1) לפי הפונקציה הבאה:  $f(x) = |x+4| - |4x| + 1$ . כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

2) לפי הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x - |x+3-x|$ . כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטוט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

$$f(x) = |x+2| \quad (4) \qquad f(x) = |x| - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 \cdot |x+1| + x \quad (6) \qquad f(x) = |2x+1| + |x-3| \quad (5)$$

$$f(x) = x|x| \quad (8) \qquad f(x) = 2|x| + x \quad (7)$$

$$f(x) = |x^2 + 6x - 8| \quad (10) \qquad f(x) = x^2 + 2|x| - 3 \quad (9)$$



$$f(x) = (x-3)|x+1| \quad (12)$$

$$f(x) = -2x|x| + |7x| - 5 \quad (11)$$

$$f(x) = x^3 - |x| \quad (14)$$

$$f(x) = |9x - x^3| \quad (13)$$

$$f(x) = 2x^2|x| - 7x|x| + 3|x| \quad (16)$$

$$f(x) = |x|^3 - 4x^2 \quad (15)$$

$$(17) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 6x - 2x^2.$$

א. סרטט את  $f(x)$  במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את  $g(x) = 6|x| - 2x^2$ .

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה:  $h(x) = |6|x| - 2x^2|$ .

$$(18) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 9x^2 - 8x - 1.$$

מגדירים:  $g(x) = 9x|x| - 8x - 1$  ו-  $h(x) = 9x^2 - 8|x| - 1$ .

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות  $g(x)$  ו-  $h(x)$ .

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה  $|h(x)|$ .

$$(19) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?  
אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

$$(20) \text{ מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: } f(x) = |x^2 - 4|, g(x) = |x+1| + |x-2|.$$

$$(21) \text{ לפי הפונקציות הבאות: } f(x) = |(x-2)(x+4)|, g(x) = |(x-5)(x+4)|.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום  $g(x)$  ניקח:  $h(x) = |(x-5)(x-4)|$ ?

$$(22) \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = |x|x+3 \text{ ו- } g(x) = ax^2, (a \neq 0).$$

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

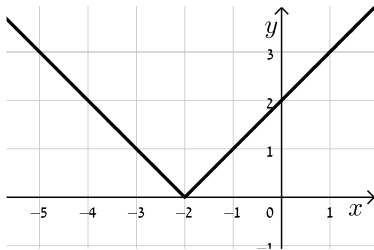
## תשובות סופיות:

$$f(x) = |x+4| - |4x| + 1 = \begin{cases} -3x+5 & x \geq 0 \\ 5x+5 & -4 \leq x < 0 \\ 3x-3 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

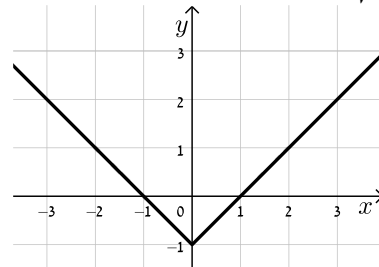
$$f(x) = 3x - |x+|3-x|| = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ 3x-3 & x < 3 \end{cases} \quad (2)$$

## להלן סקיצות של הפונקציות:

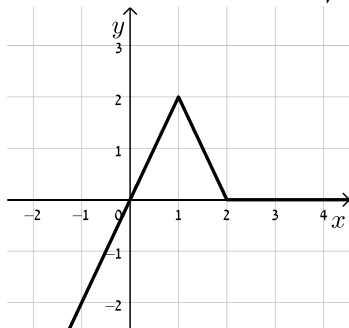
(4) סקיצה:



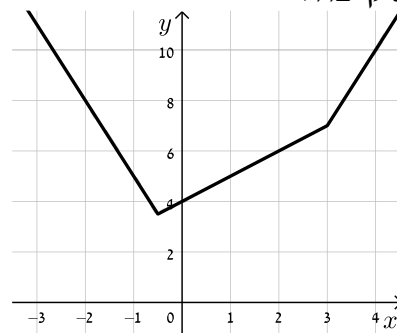
(3) סקיצה:



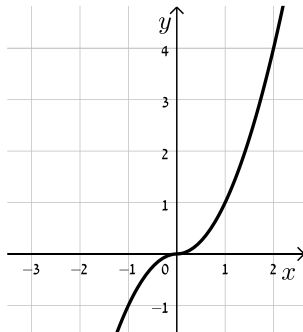
(6) סקיצה:



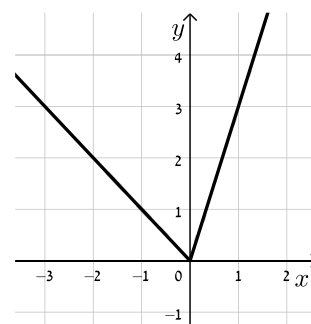
(5) סקיצה:



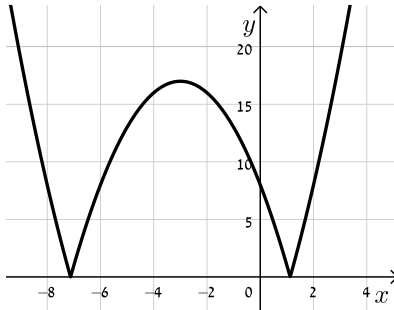
(8) סקיצה:



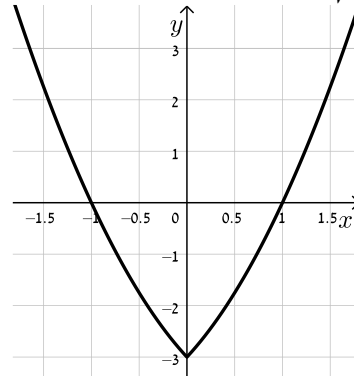
(7) סקיצה:



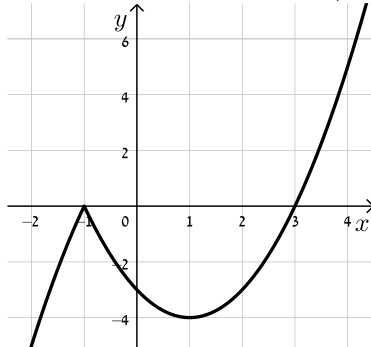
10) סקיצה:



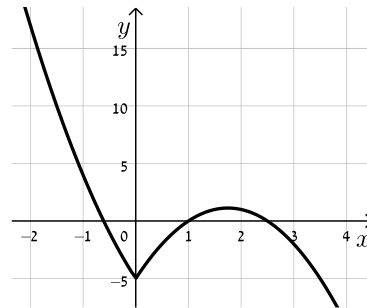
9) סקיצה:



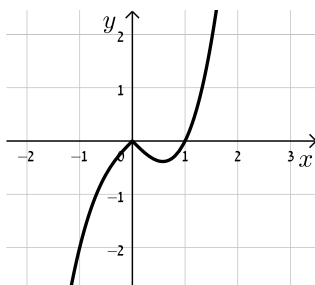
12) סקיצה:



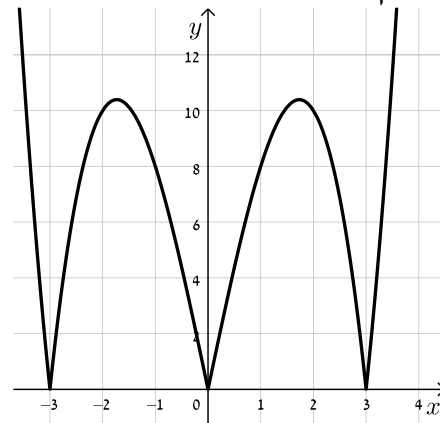
11) סקיצה:



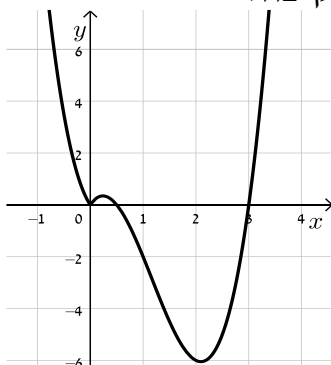
14) סקיצה:



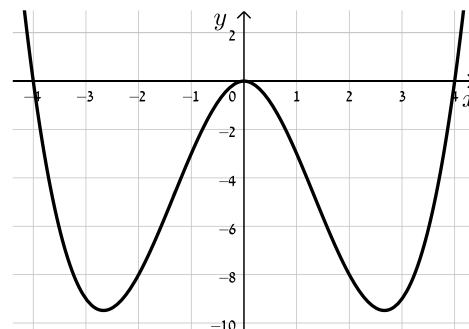
13) סקיצה:



16) סקיצה:



15) סקיצה:





- (17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (19) כן, מדובר באותה הפונקציה.
- (20)  $(-3.45, 7.9)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(-1, 3)$ ,  $(1, 3)$ .
- (21) א.  $(-4, 0)$ ,  $(3.5, 11.25)$ . ב. יהיה רק פתרון אחד והוא:  $(2.55, 3.57)$ .
- (22) שני פתרונות:  $a > 1$ , פתרון יחיד:  $-1 < a < 1$  וגם  $a \neq 0$  מת.ה., אף פתרון:  $a \leq -1$ .

## פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטויים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

### שאלות:

(1) עבור אילו ערכים של  $m$  יש למשוואה  $|x^2 - 2x - 3| = m - 1$  שלושה פתרונות?

(2) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = |x^2 - x - 2| + x|x|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי  $k$  יש למשוואה  $|x^2 - 2x - 3| + k = x - x|x| - 1$  פתרון אחד בלבד.

(3) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של  $a$  יהיה למשוואה  $f(x) = a$  פתרון אחד בלבד.

(4) לפניך הפונקציה:  $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$  והישר:  $y = m$ .

א. סרטט גרף של  $f(x)$  במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של  $m$  עבורם לישר  $y = m$  יהיו יותר משתי נקודות

חיתוך שונות עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $m = 5$

(2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב.  $k = -1$

(3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב.  $a < -\frac{7}{6}$ ,  $-1 < a \leq 1$ ,  $a \geq \frac{7}{6}$

(4)  $3 \leq m \leq 5$

## תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

### שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{|3-x|}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{|x|-2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{2|\sin x|-1} \quad (6)$$

$$f(x) = |x^2 - 1| + x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{|x|-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{כל } x$$

$$(2) \quad x \neq 1$$

$$(3) \quad x \neq 0, \pm 4$$

$$(4) \quad x \geq 2, x \leq -2$$

$$(5) \quad -4 < x < 4$$

$$(6) \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

## גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

נגזרת של פונקציות הערך המוחלט:  $f(x) = |x|$  היא:  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

עבור פונקציה פנימית  $f(x) = |g(x)|$  נעזר בכלל השרשרת:  $f'(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) > 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$

### הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- $x_0$  ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה גזירה בנקודה  $x_0$ , אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

### דוגמא:

לפונקציה:  $f(x) = |x|$  יש נקודת אפס  $x_0 = 0$  והנגזרת:  $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

ערך הנגזרת הימני הוא  $f'(x=0^+) = 1$  והשמאלי הוא  $f'(x=0^-) = -1$ .

היות ו- $f'(x=0^+) \neq f'(x=0^-)$  נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$ .

### שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + \frac{2}{3}|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{3|x| - \cos x} + 1 \quad (8)$$

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{3x - |3-x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (7)$$



9 מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x \cdot |x+2| + 3$  בנקודות:

א.  $x = -3$

ב.  $y = 3$

10 לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+|x|}{x+1}$ .

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת:  $0 \leq f(x) < 2$  לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 3$ .

11 לפניך הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$ .

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך

של הישר  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$  וגרף הפונקציה ברביע השני.

### תשובות סופיות:

1  $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1, x > 2 \\ -2x+3 & 1 < x < 2 \end{cases}$ , בנקודות  $(1,0)$ ,  $(2,0)$  הנגזרת לא קיימת.

2  $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{2}{3} & x > 0 \\ 3x^2 - \frac{2}{3} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0,1)$  הנגזרת לא קיימת.

3  $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0,0)$  הנגזרת לא קיימת.

4  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x > 0 \\ -\frac{x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$ , בנקודה  $(0, \frac{1}{2})$  הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4} < x < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x > 3 \end{cases} \quad (5)$$

בנקודה (3,3) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-17}{2(\sqrt{x+6})^3} & x > 0 \\ \frac{-x-7}{2(\sqrt{-x+6})^3} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

בנקודה  $(0, \frac{5}{\sqrt{6}})$  הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x > 0 \\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

(9) א.  $y = 4x + 12$  ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה (0,3) ולכן נמצא את

משוואת המשיק רק שם ונקבל:  $y = 2x + 3$ .

(10) א. הוכחה. ב.  $y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{8}$ .

(11) א. הוכחה. ב. 6. ג.  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3\sqrt{2}$ .

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 4 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... 31
3. הפונקציה הריבועית ..... 41
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)

## הפונקציה הליניארית

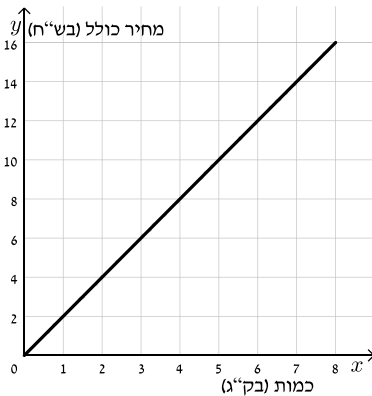
### סיכום כללי

ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה:  $\frac{y}{x} = m$  או  $y = mx$ .

הפונקציה מהצורה:  $y = mx$  מתאר יחס ישר בין  $x$  ל- $y$ .

### שאלות



- 1) המחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 2 ₪.  
 הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.  
 א. מה המחיר של 3 ק"ג עגבניות?  
 ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?  
 ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק"ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?  
 ד. כתוב ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.

### שיפוע ישר – סיכום

ישר שמשוואתו היא  $y = mx$  הוא בעל שיפוע  $m$  כאשר:

- אם  $m > 0$  הישר עולה.
- אם  $m < 0$  הישר יורד.
- אם  $m = 0$  הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

### חישוב שיפוע בשיטת המדרגות

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר  $x$  נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר  $y$ . שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- $y$ .

### שיפוע בין שתי נקודות

ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

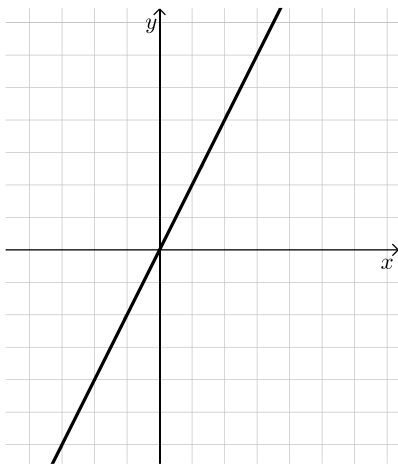
נניח ישר העובר דרך שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$ .

$$\text{שיפוע הישר יחושב: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{כאשר } \Delta x \neq 0).$$

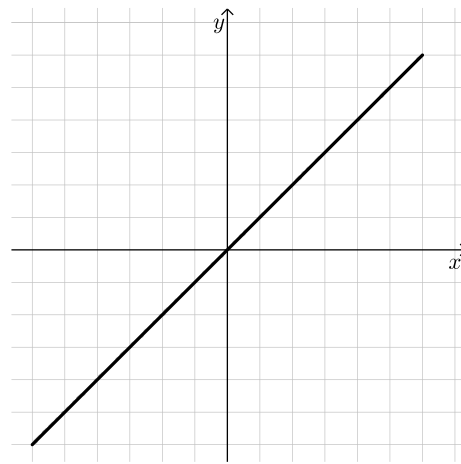
חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

(2) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

ii.



i.

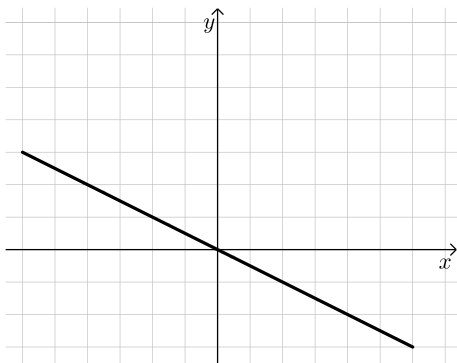


א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

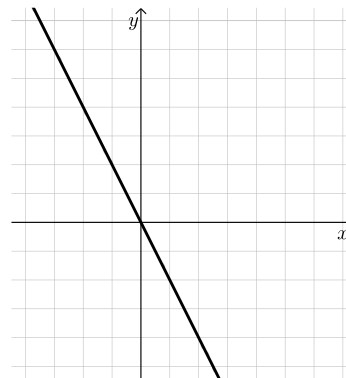
ב. רשום פונקציה מהצורה:  $y = mx$  לכל אחד מהישרים.

(3) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

ii.

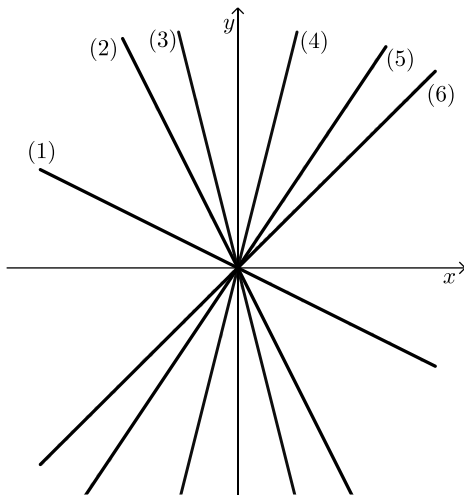


i.



א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשום פונקציה מהצורה:  $y = mx$  לכל אחד מהישרים.



4) לפי 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים:

$$. 4, -4, 1.2, -2, 2, -\frac{2}{3}$$

התאם כל שיפוע לכל ישר.

### הקו הישר הכללי – סיכום

- משוואת הקו הישר הכללי היא מהצורה:  $y = mx + b$  כאשר  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $b$  הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$  אשר תמיד תהיה  $(0, b)$ .
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו  $m$ ) ואיברים חופשיים שונים ( $b$  שונה), למשל:  $y = 4x + 1, y = 4x - 5$ .
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות:
  - ישר המקביל לציר ה- $x$ :  $y = n$ .
  - ישר המקביל לציר ה- $y$ :  $x = k$ .

5) כתוב מהו  $m$  ומהו  $b$  במשוואות הישרים הבאות:

א.  $y = 3x - 2$       ב.  $y = x + 6$

ג.  $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$       ד.  $y = \frac{x-3}{2}$

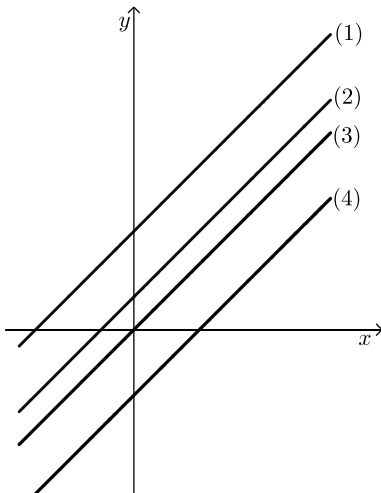
ה.  $y = 3 + 2(x-1)$       ו.  $3y - 2x + 1 = 0$

6) כתוב את משוואות הישרים הבאות:

א. ישר בעל שיפוע  $m = 3$  אשר חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -1$ .

ב. ישר בעל שיפוע -5 שפוגש את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 6$ .

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- $y$  ב-4.



7) התאם בין הגרפים למשוואות הישרים:

א.  $y = x + 3$

ב.  $y = x + 1$

ג.  $y = x$

ד.  $y = x - 2$

### מציאת משוואת ישר – סיכום

#### שיפוע ישר לפי שתי נקודות

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (כאשר  $\Delta x \neq 0$ ).

#### משוואת ישר

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה  $y = mx + b$  כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר  $m$  (שיפוע הישר) לפי:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

- מציאת הפרמטר  $b$  (האיבר החופשי) ע"י הצבת  $m$  ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

#### חישוב שיפוע בין שתי נקודות

8) חשב את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

א.  $(0, 4)$ ,  $(8, 0)$       ב.  $(0, 0)$ ,  $(3, -4)$

ג.  $(1, 8)$ ,  $(7, -9)$       ד.  $(\frac{2}{3}, 2)$ ,  $(1\frac{1}{3}, 5)$

### מציאת משוואת ישר באמצעות נקודה ושיפוע

9) מצא את משוואת הישרים הבאות :

- א. שיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה  $(2, 8)$  .  
 ב. שיפועו  $-0.5$  והוא עובר דרך הנקודה  $(0, -7)$  .  
 ג. שיפועו 0 והוא עובר דרך הנקודה  $(-1, -3)$  .  
 ד. שיפועו  $-\frac{5}{8}$  והוא עובר דרך הנקודה  $(-8, 2)$  .  
 ה. שיפועו 1 והוא עובר דרך ראשית הצירים.

10) מצא משוואת ישר המקביל לישר  $y = 3x - 1$  וחותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, 4)$  .

11) מצא משוואת ישר המקביל לישר  $y = -4x + 9$  ועובר דרך הנקודה  $(-5, 7)$  .

12) מצא משוואת ישר המקביל לישר  $5y - 4x + 9 = 0$  ועובר דרך ראשית הצירים.

### מציאת משוואת ישר באמצעות שתי נקודות

13) מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות :

- א.  $(1, 8)$  ,  $(3, 6)$  .  
 ב.  $(-4, -6)$  ,  $(0, 6)$  .

14) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות  $(2, -6)$  ו- $(5, 3)$  .  
 ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה  $(-1, 10)$  .

### חיוביות ושליליות של קו ישר – סיכום

#### חיתוך של פונקציה קווית עם הצירים

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית  $y = mx + b$  עם ציר ה- $y$  יש להציב  $x = 0$  במשוואתה. מתקבל:  $y = b$  , כלומר:  $(0, b)$  היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה- $y$  .  
 - כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה- $x$  יש להציב  $y = 0$  . זו היא נקודת האפס של הפונקציה.

### חיתוך בין פונקציות קוויות

כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שתי פונקציות קוויות  $f(x)$  ו- $g(x)$  יש להשוות את משוואותיהם:  $f(x) = g(x)$  ולהציב את ערך ה- $x$  המתקבל כפתרון באחת המשוואות כדי לקבל את ערך ה- $y$  של נקודת החיתוך.

### תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה

- תחום החיוביות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- $x$  המקיימים:  $f(x) > 0$ .
  - תחום השליליות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- $x$  המקיימים:  $f(x) < 0$ .
- ניתן למצוא תחומי חיוביות ושליליות ע"י ידיעת נקודת האפס של הפונקציה תחילה.

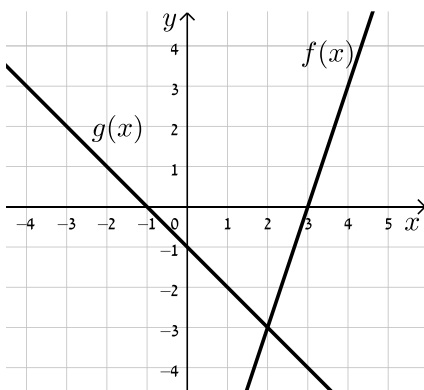
**15** מצא את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א.  $y = 2x + 5$

ב.  $y = 3x - 1$

**16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x - 4$ .

- א. מצא את הנקודה שבה:  $f(x) = 0$ .
- ב. מצא את התחום שבו  $f(x) > 0$  ואת התחום שבו  $f(x) < 0$ .
- ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ד. סרטט את הפונקציה במערכת צירים והראה את התחומים שמצאת.



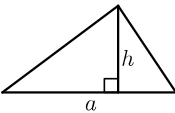
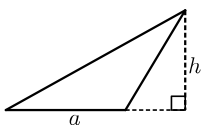
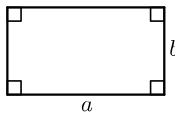
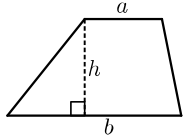
**17** לפניך שני גרפים של פונקציות קוויות.

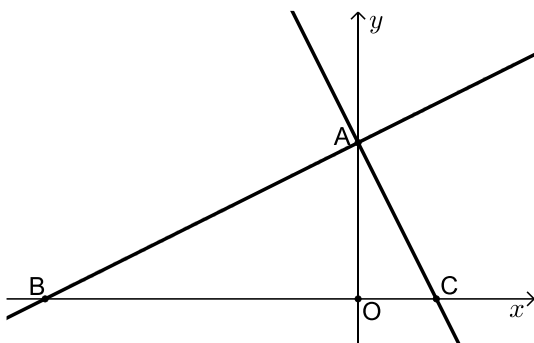
(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).

- א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?
- ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ ?
- ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $g(x)$ ?
- ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?
- ה. מהו התחום בו  $f(x) > g(x)$  ומהו התחום בו  $f(x) < g(x)$ .

חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית – סיכום

שטחים של משולשים ומרובעים

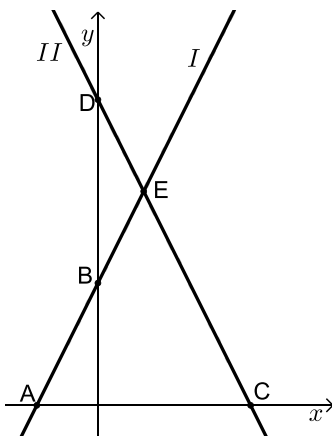
| שם הצורה        | איור   | אופן החישוב               |
|-----------------|--|---------------------------|
| משולש           |   | $S = \frac{a \cdot h}{2}$ |
| משולש קהה זווית |   | $S = \frac{a \cdot h}{2}$ |
| מלבן            |   | $S = a \cdot b$           |
| טרפז            |  | $S = \frac{(a+b)h}{2}$    |



18 בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים

של הפונקציות:  $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$  ו-  $g(x) = -2x + 4$ .

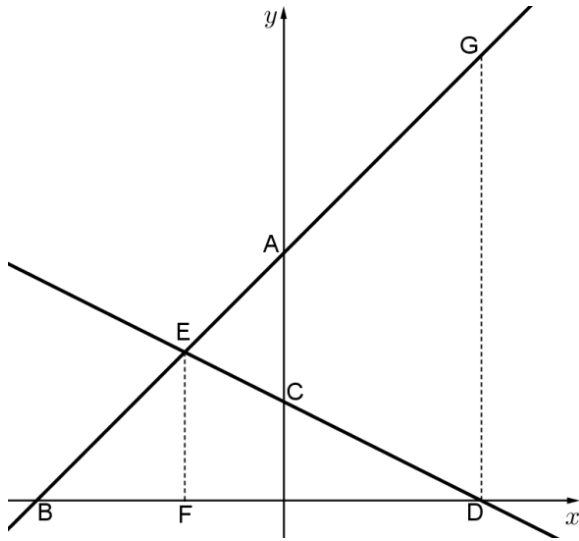
- מצא את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).
- מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $x$  (הנקודות B ו-C).
- מצא את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.
- חשב את  $S_{\triangle ABC}$ .



19 נתונים הישרים:  $y = 2x + 4$  ו-  $y = -2x + 10$

המתוארים באיור הבא:

- התאם לכל משוואה את הישר המתאים ונמק.
- מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, D, E.
- מצא את שטחי המשולשים ACE ו-BDE.



20 בסרטוט שלפניך מתוארים הישרים AE ו-DE.

משוואת הישר DE היא  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ .

נתון כי: 3 יחידות אורך  $EF =$

(מקביל לציר ה-y) וכן:  $A(0,5)$ .

א. חשב את שיעורי הנקודה E.

ב. מצא את משוואת הישר AE.

ג. חשב את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. נתון כי DG מקביל לציר ה-y.

חשב את שטח הטרפז EFDG.

## תשובות סופיות

- (1) א. 6 טו ב. 6 ק"ג ג. 2:1 ד.  $y = 2x$
- (2) א. i.  $m = 1$  ב.  $y = x$  א. ii.  $m = 2$  ב.  $y = 2x$
- (3) א. i.  $m = -2$  ב.  $y = -2x$  א. ii.  $m = -\frac{1}{2}$  ב.  $y = -\frac{1}{2}x$
- (4)  $m_{(1)} = -\frac{2}{3}$ ,  $m_{(2)} = -2$ ,  $m_{(3)} = -4$ ,  $m_{(4)} = 4$ ,  $m_{(5)} = 2$ ,  $m_{(6)} = 1$
- (5) א.  $m = 3, b = -2$  ב.  $m = 1, b = 6$  ג.  $m = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{5}$
- (6) א.  $y = 3x - 1$  ב.  $y = -5x + 6$  ג.  $y = 4$
- (7) א. (1) ב. (2) ג. (3) ד. (4)
- (8) א.  $-0.5$  ב.  $-\frac{4}{3}$  ג.  $4.5$  ד.  $-2\frac{5}{6}$
- (9) א.  $y = 3x + 2$  ב.  $y = -\frac{1}{2}x - 7$  ג.  $y = -3$  ד.  $y = -\frac{5}{8}x - 3$
- (10) א.  $y = 3x + 4$  ב.  $y = x$
- (11) א.  $y = -4x - 13$
- (12) א.  $y = \frac{4}{5}x$
- (13) א.  $y = -x + 9$  ב.  $y = 3x + 6$
- (14) א.  $y = 3x - 12$  ב.  $y = 3x + 13$
- (15) א.  $(0, 5), (-2.5, 0)$  ב.  $(0, -1), (\frac{1}{3}, 0)$
- (16) א.  $(\frac{4}{3}, 0)$  ב.  $f(x) > 0: x > \frac{4}{3}$ ,  $f(x) < 0: x < \frac{4}{3}$  ג.  $(0, -4)$  ד. לאיור מלא עיין בסרטון.
- (17) א.  $f(x): (3, 0)$ ;  $g(x): (-1, 0)$  ב. חיובית:  $x > 3$ , שלילית:  $x < 3$  ג. חיובית:  $x < -1$ , שלילית:  $x > -1$  ד.  $(2, -3)$  ה.  $f(x) > g(x)$  עבור:  $x > 2$ , ו-  $f(x) < g(x)$  עבור:  $x < 2$
- (18) א.  $(0, 4)$  ב.  $B(-8, 0), C(2, 0)$  ג.  $AO = 4, BC = 10$  ה. 20 יח"ש.



19 א.  $I: y = 2x + 4$ ,  $II: y = -2x + 10$

ב.  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 4)$ ,  $C(5, 0)$ ,  $D(0, 10)$ ,  $E(1.5, 7)$

ג.  $S_{ACE} = 24.5$  יח"ש,  $S_{BDE} = 4.5$  יח"ש.

20 א.  $E(-2, 3)$  ב.  $y = x + 5$  ג.  $B(-5, 0)$ ,  $D(4, 0)$

ד. 36 יחידות שטח.

## הפונקציה הריבועית

### סיכום כללי

ניתן להציג את משוואת הפונקציה הריבועית במספר צורות:

הצגה סטנדרטית:  $y = ax^2 + bx + c$  (כאשר:  $a, b, c$  הם פרמטרים ו- $a \neq 0$ ).

הצגה קודקודית:  $y = a(x - p)^2 + k$  (כאשר:  $a, p, k$  הם פרמטרים ו- $a \neq 0$ ).

הצגה כמכפלה:  $y = a(x - m)(x - n)$  (כאשר:  $a, m, n$  הם פרמטרים ו- $a \neq 0$ ).

### הערה

הצגה כמכפלה אפשרית רק כאשר יש לפחות נקודת אפס אחת לגרף הפרבולה.

### שאלות

(1) כתוב פונקציה ריבועית המתאימה לערכי המקדמים הבאים:

ב.  $a = -1, b = 2, c = 5$

א.  $a = 1, b = 0, c = -4$

ד.  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = 0$

ג.  $a = b = 3, c = -5$

ו.  $a = 7, b = \frac{1}{4}, c = -1$

ה.  $a = -\frac{1}{5}, b = 0, c = \frac{1}{20}$

(2) נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2 + bx - 3$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(1, -1)$ .

א. מצא את ערך המקדם  $b$ .

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת שיעורי נקודת הקדקוד שלה.

ג. תאר אלו פעולות הזזה/מתיחה נעשו על גרף הפונקציה  $y = x^2$  לקבלת גרף הפונקציה הנתונה.

### סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית – סיכום

בפונקציה הריבועית הנתונה בהצגתה הסטנדרטית:  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $(a \neq 0)$ :

- הפרמטר  $a$  קובע האם הפרבולה היא ישרה או הפוכה וכן את מידת המתיחה שלה.
- הפרמטר  $c$  קובע את שיעור ה- $y$  של נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- $y$ .
- נוסחה למציאת ציר הסימטריה:  $x = -\frac{b}{2a}$ .
- שיעורי נקודת הקדקוד עבור פונקציה הנתונה בהצגה סטנדרטית הם:  $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ .

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- i. חשב את שיעורי נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה.
  - ii. רשום את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה המתאימה.
  - iii. סרטט סרטוט סכמתי (מקורב) של הפרבולה המתאימה.
- א.  $y = -2x^2 + 10$       ב.  $y = -x^2 + 3x$
- ג.  $y = 3x^2 - 6x + 7$       ד.  $y = -8x^2 - 4x + 1$
- ה.  $y = 4x^2 + 20x + 25$

### מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם $a$ כללי – סיכום

#### פונקציות ריבועיות חלקיות

- פונקציה חסרת  $b$  היא מהצורה:  $y = ax^2 + c$ ,  $(a \neq 0)$ .
- אם  $a$  ו- $c$  אם שוני סימן אז לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן:  $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$ .
- פונקציה חסרת  $c$  היא מהצורה:  $y = ax^2 + bx$ ,  $(a \neq 0)$ .
- לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן:  $(0, 0)$ ,  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ .

## שיטות לפתרון משוואה ריבועית

- פירוק טרינום (במידה וישנם שני שורשים או שורש כפול).
- השלמה לריבוע.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{- נוסחת השורשים:}$$

## שאלות עם פונקציות

(4) מצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  של הפונקציות הריבועיות הבאות:

א.  $y = x^2 + 4x - 5$       ב.  $y = x^2 + 6x + 10$

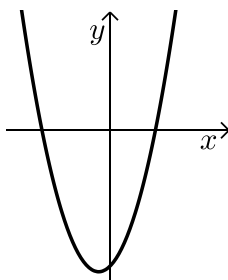
(5) בכל אחד מהמקרים שלפניך נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצא את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א.  $(5, 0)$ ;  $x = 4$       ב.  $(7, 0)$ ;  $x = -1$

(6) נתונה הפונקציה:  $y = x^2 - 2x - 15$ .

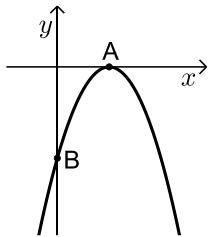
- א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- $y$ ?
- ב. רשום פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ .
- ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?
- ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:
  - i.  $y = -15$
  - ii.  $y = 15$
  - iii.  $y = -25$

ה. רשום פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.



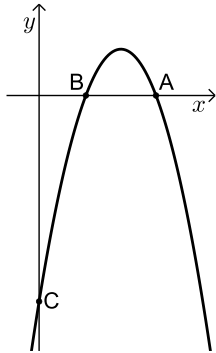
(7) לפניך הפרבולה:  $y = x^2 + x - 6$ .

- א. חשב את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.
- ב. חשב את המרחק של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $y$  מראשית הצירים.
- ג. חשב את המרחק שבין שתי נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ .



8) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה:  $y = -x^2 + 4x - 4$ .

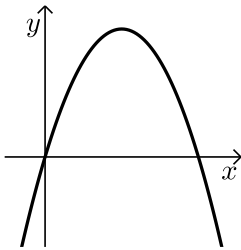
- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.
- ג. מצא את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.



9) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה:  $y = -x^2 + 7x - 10$ .

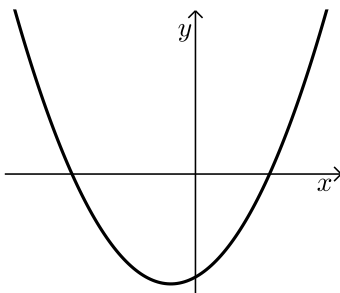
- א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ג. מהו המרחק בין הנקודה C לראשית הצירים?
- ד. מצא את המרחק בין נקודה A לנקודה B (ראה סרטוט).
- ה. מצא את המרחק בין נקודה A לראשית הצירים.

10) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה:  $y = -x^2 + 4x$ .



11) נתונה הפרבולה:  $y = -2x^2 + 12x$ .

- א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



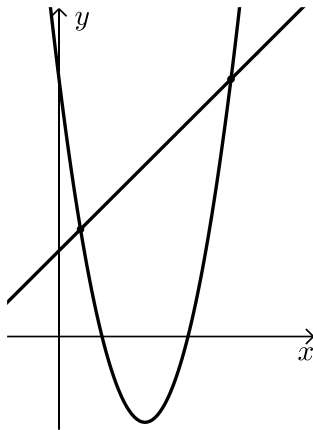
12) נתונה הפרבולה:  $y = x^2 + 2x - 15$ .

- א. לאלו ערכים של  $x$  הפונקציה חיובית?
- ב. לאלו ערכים של  $x$  הפונקציה שלילית?

### חיתוך בין ישר ופרבולה – סיכום

כדי למצוא חיתוך בין ישר  $y = mx + b$  ופרבולה:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  אנו נשווה בין משוואותיהם ונפתור עבור  $x$ . לאחר מכן נמצא את שיעורי ה- $y$  ע"י הצבה באחת המשוואות (של הישר או הפרבולה). יתכנו 3 מקרים:

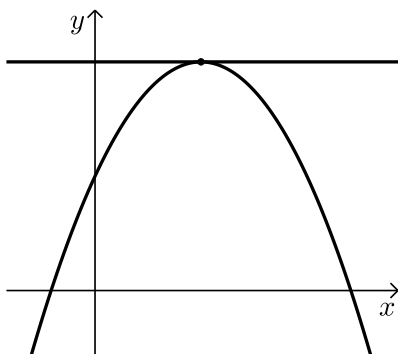
- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.
- הישר חותך (משיק) לגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד.
- הישר והפרבולה לא חותכים זה את זה כלל.



**13** לפניך הגרפים של שתי הפונקציות:

$$g(x) = x + 4 \text{ ו- } f(x) = x^2 - 8x + 12$$

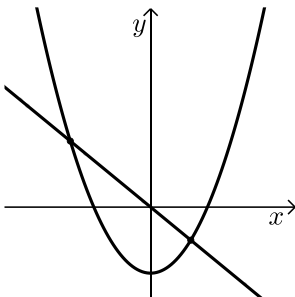
מצא את נקודות החיתוך שבין שני הגרפים.



**14** מצא את שיעורי הנקודה המשותפת

$$f(x) = -x^2 + 10x + 25$$

$$\text{ו- } y = 50.$$



**15** נתונים פרבולה  $y = x^2 - 8$  וישר  $y = -2x$ .

א. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפרבולה והישר.

ב. מצא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $y$ .

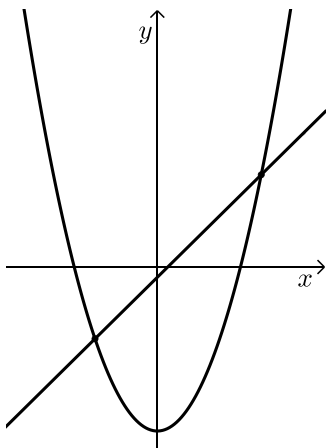
ו. ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .

ג. מצא את המרחק שבין נקודת החיתוך של גרף הפרבולה

עם ציר ה- $y$  לבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .

ד. מצא את קדקוד הפרבולה.

ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



**16** נתונים פרבולה וישר שהמשוואות שלהם:  $y = x^2 - 16$  ו-  $y = 2x - 1$ .

א. מצא את נקודות החיתוך שבין הישר והפרבולה.

ב. תן דוגמא ל- $x$  עבורו הישר נמצא מעל לפרבולה.

ג. תן דוגמא ל- $x$  עבורו הפרבולה נמצאת מעל לישר.

ד. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- $y$  שלה חיובי.

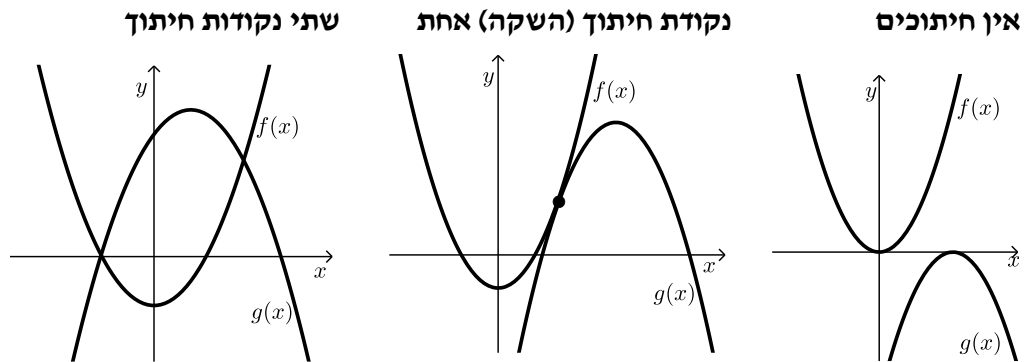
ה. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- $y$  שלה שלילי.

ו. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $x$ .

ז. מצא את תחום השליליות של הישר.

**חיתוך בין שתי פרבולות – סיכום**

הגרפים של שתי פרבולות  $f(x)$  ו- $g(x)$  יכולים להיות באחד משלושה מצבים:



כדי למצוא את נקודות החיתוך עצמן נשווה בין משוואותיהם:  $f(x) = g(x)$ . לפי מספר הפתרונות של המשוואה המתקבלת נוכל להסיק באיזה מקרה מדובר.

**17** מצא את נקודות החיתוך בין זוגות הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  ו-  $g(x) = -2x^2 + x + 11$

ב.  $f(x) = x^2 - 3x + 6$  ו-  $g(x) = -x^2 + 5x - 2$

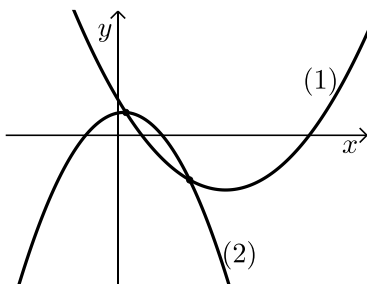
**18** לפניך סרטוט של שתי פונקציות ריבועיות:

$f(x) = x^2 - 9x + 8$  ו-  $g(x) = -2x^2 + x + 5$

א. התאם לכל גרף (1) ו-(2) את הפונקציה המתאימה לו.

ב. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של גרף (1)?

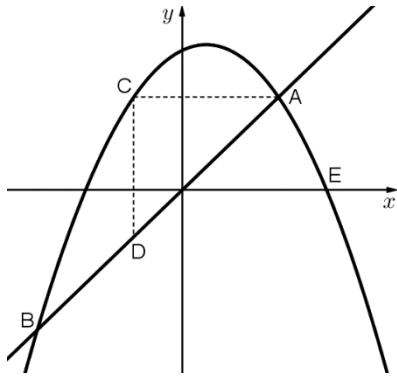
ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.



**שאלות מסכמות שונות**

**הערה כללית**

בנושא זה ישנן שאלות מסכמות העוסקות בכל הנושאים שנלמדו בפרקים על הישר, הפרבולה וחישובי שטחים של צורות הנדסיות. שאלות אלו ברמה הגבוהה משאלות בגרות ומטרתן היא תרגול העשרה של כל החומר הנלמד בפונקציות וגרפים.

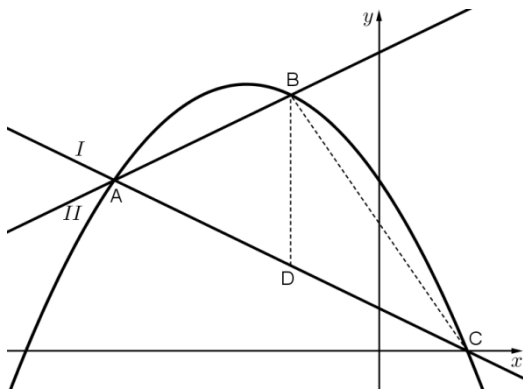


**19) בסרטוט שלפניך מתוארים**

הישר:  $y = 2x$  והפרבולה:  $y = -x^2 + x + 6$ .

- א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של הישר והפרבולה, A ו-B.
- ב. הישר AC מקביל לציר ה- $x$  והישר CD מקביל לציר ה- $y$ .
- ג. חשב את שטח המשולש ACD. מצא את משוואת הישר המקביל

לישר הנתון ועובר דרך הנקודה E, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- $x$  הנמצאת מימין לראשית הצירים.



**20) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים**

של שני ישרים I ו-II.

ושל הפרבולה  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$ .

- א. שני הישרים והפרבולה נחתכים בנקודה A. משוואת הישר II היא:  $y = x + 14$ .
- ב. חשב את שיעורי הנקודה A.
- ג. חשב את שיעורי הנקודה C, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- $x$  הנמצאת מימין לראשית הצירים.
- ד. מצא את משוואת הישר I.
- ה. חשב את שיעורי הנקודה B.
- ו. חשב את שטח המשולש BCD.

**21) נתונות שתי הפרבולות:  $y = x^2 - x + 6$  ו- $y = ax^2 - 6x - 8$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.**

ט. לשתי הפרבולות נקודת חיתוך משותפת:  $(-2, 12)$ .

י. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

יא. מצא את נקודת החיתוך שנייה של שתי הפרבולות.

יב. סרטט סקיצה של גרף הפרבולה:  $y = x^2 - x + 6$ .

(היעזר בנקודות החיתוך עם הצירים ובקדקוד הפרבולה).

**תשובות סופיות**

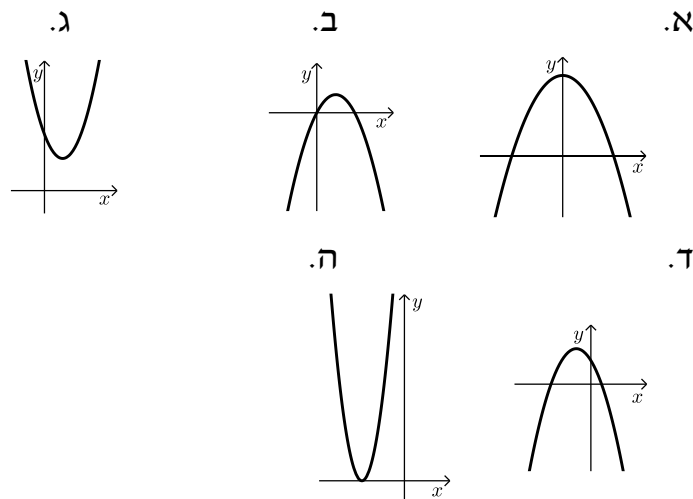
- (1) א.  $y = x^2 - 4$       ב.  $y = -x^2 + 2x + 5$   
 ג.  $y = 3x^2 + 3x - 5$       ד.  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$   
 ה.  $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{20}$       ו.  $y = 7x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

- (2) א.  $b = 0$       ב.  $x = 0, (0, -3)$       ג. כיווץ פי 2 והזזה 3 יחידות למטה.

- (3) א.  $(0, 10), x = 0$       ב.  $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right), x = 1\frac{1}{2}$       ג.  $(1, 4), x = 1$

- ד.  $x = -\frac{1}{4}, \left(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)$       ה.  $x = -2.5, (-2.5, 0)$

איורים לסעיפים:



- (4) א.  $(-5, 0), (1, 0)$       ב. אין חיתוכים.  
 (5) א.  $(3, 0)$       ב.  $(-9, 0)$       ג.  $(8, 0)$       ד.  $\left(-15\frac{1}{2}, 0\right)$

- (6) א.  $(0, -15)$       ב.  $y = x^2 - 15$       ג.  $(5, 0), (-3, 0)$   
 ד. i. שתיים.      ii. שתיים.      iii. אפס.      ה.  $y = 2x^2 - 4x - 30$

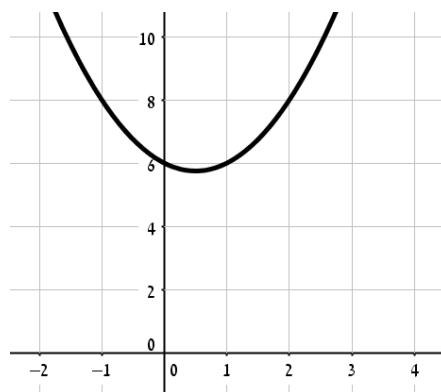
- (7) א.  $(-3, 0), (2, 0)$       ב. 6 יחידות.      ג. 5 יחידות.

- (8) א.  $(2, 0), (0, -4)$       ב. 2 יחידות.      ג. 4 יחידות.

- (9) א.  $(2, 0), (5, 0)$       ב.  $(0, -10)$       ג. 10 יחידות.      ד. 3 יחידות.  
 ה. 5 יחידות.

- (10) עולה:  $x < 2$ , יורדת:  $x > 2$ .

- 11 א.  $(3,18)$  ב. עולה:  $x < 3$ , יורדת:  $x > 3$ .
- 12 א.  $x < -5, x > 3$  ב.  $-5 < x < 3$ .
- 13  $(8,12), (1,5)$
- 14  $(5,50)$ .
- 15 א.  $(2,-4), (-4,8)$  ב.  $(0,0), (0,-8)$  ג. 8 יחידות.
- ד.  $(0,-8)$  ה. עולה:  $x > 0$ , יורדת:  $x < 0$ .
- 16 א.  $(5,9), (-3,-7)$  ב. כל  $x$  הגדול מ-5 או קטן מ-3.
- ג. כל  $x$  שבין 3 ל-5. ד. כל נקודה שערך ה- $x$  שלה גדול מ-4 או קטן מ-4.
- ה. כל נקודה שערך ה- $x$  שלה בין 4 ל-4. ו.  $(0.5,0)$  ז.  $x < 0.5$ .
- 17 א.  $(1,10), (-2,1)$  ב.  $(2,4)$
- 18 א.  $(1) \rightarrow f(x), (2) \rightarrow g(x)$
- ב. חיובית:  $x < 1, x > 8$ , שלילית:  $1 < x < 8$  ג.  $(\frac{1}{3}, 5\frac{1}{9}), (3, -10)$ .
- 19 א.  $A(2,4), B(-3,-6)$  ב. 4.5 יחידות שטח. ג.  $y = 2x - 6$
- 20 א.  $A(-6,8)$  ב.  $C(2,0)$  ג.  $y = -x + 2$
- ד.  $B(-2,12)$  ה. 16 יחידות שטח.
- 21 א.  $a = 2$  ב.  $(7,48)$  ג. להלן סקיצה:



# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 5 - שאלות אמריקאיות לתרגול בנושא פונקציות

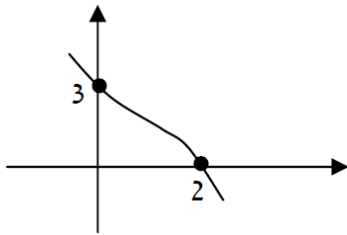
תוכן העניינים

|    |  |
|----|--|
| 50 | 1. תרגול כללי בפונקציות                      |
| 51 | 2. תרגול בפונקציה לינארית                    |
| 54 | 3. תרגול בפונקציה ריבועית                    |
| 58 | 4. תרגול בפונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית |

## תרגול כללי בפונקציות

### שאלות

1) להלן גרף הפונקציה  $f(x)$ , ומספר טענות:



$$f(3) = 0 \quad -$$

$$0 < f(1) < 3 \quad -$$

$$f(x) < 3 \quad \text{אם } x < 0 \quad -$$

כמה טענות נכונות יש?

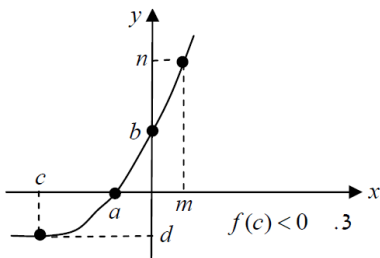
א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

2) להלן גרף הפונקציה  $f(x)$ , ומספר טענות:



$$f(0) = d \quad 1.$$

$$f(a) = 0 \quad 2.$$

$$f(c) < 0 \quad 3.$$

$$f(x) > n \quad \text{אם } x > m \quad 4.$$

$$d \leq f(x) \leq b \quad \text{אם } c \leq x \leq 0 \quad 5.$$

כמה טענות נכונות יש?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. 4

ה. 5

### תשובות סופיות

1) ב

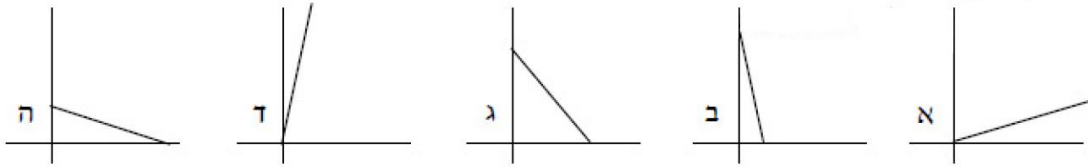
2) ד

## תרגול בפונקציה לינארית

### שאלות

(1) הקבועים  $a, b$  מקיימים  $0 < a < b$ .

איזה איור מהבאים מתאר הכי טוב את הישר  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ברביע הראשון?



(2) ישר עובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_1+1, y_1+1)$ .

להלן מספר טענות:

1. הישר עולה.

2. הישר הוא  $y = x$ .

3. הנקודה  $(x_1-2, y_1-3)$  נמצאת על הישר.

הטענות הנכונות הן:

א. 2, 1

ב. 3, 2, 1

ג. 3, 1

ד. 3, 2

ה. 1

(3) נקודת החיתוך בין ישר לציר ה- $x$  היא  $(4, 0)$ .

סימנו את גודל האנכים כפי שאפשר לראות באיור.

מהי משוואת הישר?

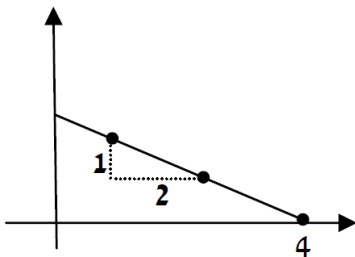
א.  $x + 2y = 4$

ב.  $x + y = 4$

ג.  $y = 4 + 0.5x$

ד.  $4x - y = 2$

ה.  $y = 4 - 0.5x$

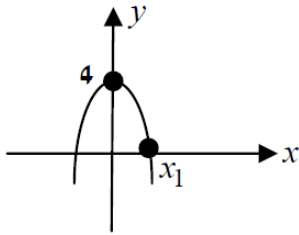


4 נתונה הפרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . הקודקוד מונח בנקודה וסימנו ב- $x_1$  את אחת מנקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ . להלן מספר טענות:

1.  $c = 4, b = 0$  .2  $f(x_1) = f(-x_1) = 0$

3. משוואה אפשרית לפרבולה שבאזור היא  $f(x) = x^2 - x_1^2 + 4$ .

מה הן הטענות הנכונות:



א. 2

ב. 1

ג. 3, 2

ד. 2, 1

ה. 3, 2, 1

5 קרן יוצאת מראשית הצירים ועוברת דרך הנקודה  $(x_0, y_0)$ , כאשר  $y_0 > x_0 > 0$ . להלן מספר טענות (הזרחה: כדאי לצייר את הישר):

1. הישר עובר בנקודה  $\left(\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0\right)$ .

2. הישר עובר בנקודה  $(x_0 + 1, y_0 + 1)$ .

3. הישר עובר בנקודה  $(1, y_1)$ , כאשר  $y_1 > 1$ .

4. הישר עובר בנקודה  $(x_1, 1)$ , כאשר  $x_1 > 1$ .

5. הישר עובר בנקודה  $(1, 1)$ .

הטענות הנכונות הן:

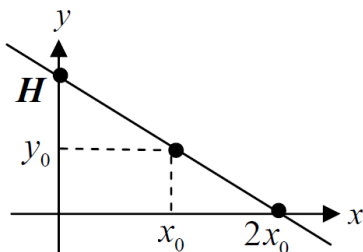
א. 3, 1

ב. 5, 4, 1

ג. 5, 3, 2

ד. 4, 3

ה. 4, 2, 1



6 להלן ישר ועליו מסומנות נקודות, ראו איור. איזו משוואה מתארת את הגובה  $H$ ?

א.  $H = \frac{2y_0}{x_0}$

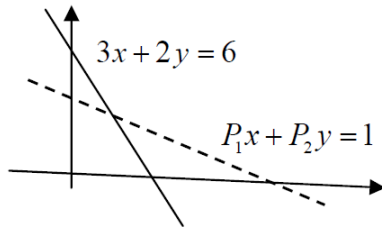
ב.  $H = 2 + x_0 + y_0$

ג.  $H = 2x_0$

ד.  $H = 2 + y_0$

ה.  $H = 2y_0$

(7) נתונים שני ישרים: הישר המקווקו  $P_1x + P_2y = 1$ , כאשר  $P_1, P_2 > 0$ , והישר המלא  $3x + 2y = 6$  (ראו איור).



להלן מספר טענות:

1.  $P_1 = 3, P_2 = 2$

2.  $P_1 < 0.5$

3.  $2P_1 < 3P_2$

הטענות הנכונות הן:

א. 3, 2

ב. 2, 1

ג. 3, 2, 1

ד. 3, 1

ה. כל הטענות שגויות

(8) להלן ישר ועליו נקודות, ראו איור, ומספר טענות:  
1. הישר עולה.

2. החיתוך של הישר עם ציר ה- $x$  הוא בנקודה  $(-2, 0)$ , ועם ציר ה- $y$  ב- $y = 1$ .

3. אם הנקודה  $(x_1 - 1, Y)$  על הישר, אז  $Y = y_1 - 2$ .

הטענות הנכונות הן:

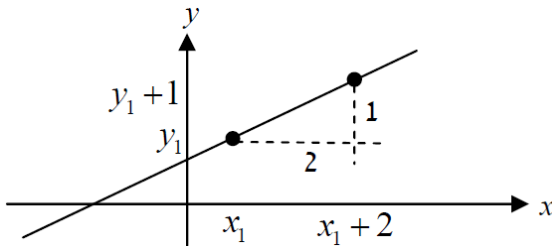
א. 2, 1

ב. 3, 2, 1

ג. 3, 1

ד. 3, 2

ה. 1



### תשובות סופיות

(1) ב

(2) ה

(3) א

(4) ד

(5) א

(6) ה

(7) א

(8) א

## תרגול בפונקציה ריבועית

### שאלות

(1) פרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  עוברת בנקודות  $(8, y_0)$  ו- $(2, y_0)$ . ידוע כי  $f(10) > y_0 > 0$ , ולהלן מספר טענות:

1.  $c > y_0$

2.  $b^2 > 4ac$

3.  $\frac{a}{b} = -0.1$

הטענות הנכונות הן:

א. 1, 3

ב. 1, 2, 3

ג. 2, 3

ד. 1

ה. 1, 2

(2) פרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  מקיימת  $0 < f(2) < f(3)$  וגם  $a < 0$ . להלן מספר טענות:

1.  $b > 0$

2.  $b^2 - 4ac > 0$

3.  $c < 0$

הטענות הנכונות הן:

א. 1, 3

ב. 2, 3

ג. 1, 2

ד. 1, 2, 3

ה. 1

3) הקודקוד של הפרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  מונח בנקודה  $K = (2, 3)$ .

להלן מספר טענות:

1.  $c > 0$

2.  $f(4) = c$

3.  $4a + 2b + c = 3$

הטענות הנכונות הן:

א. 2, 1

ב. 3, 2

ג. 3, 2, 1

ד. 3, 1

ה. 3

4) הקודקוד של הפרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  מונח על ציר ה- $x$  (ראו איור).

להלן מספר טענות:

1.  $a > 0, b = 0, c > 0$

2.  $b^2 = 4ac$

3.  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = c$

הטענות הנכונות הן:

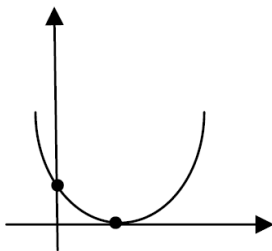
א. 2, 1

ב. 3, 2

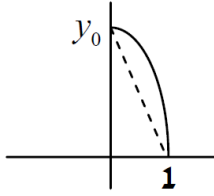
ג. 3, 2, 1

ד. 3, 1

ה. 2



5) תהי  $f(x)$  פרבולה שקודקודה בנקודה, כאשר  $y_0 > 1$ . הפרבולה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1,0)$ . באיור מצוירת מחצית הפרבולה והועבר קו עזר. להלן מספר טענות:



1.  $f'\left(\frac{1}{2}\right) > f'\left(\frac{2}{3}\right)$

2.  $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{y_0}{2}$

3.  $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{2}{3}\right)$

הטענות הנכונות הן:

א. 3, 2

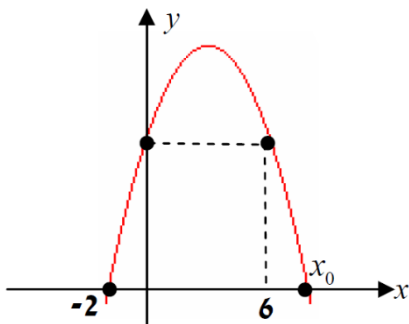
ב. 3, 1

ג. 2, 1

ד. 3, 2, 1

ה. 2

6) להלן גרף הפרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , בנוסף למספר נתונים (ראו איור).



להלן מספר טענות:

1.  $x_0 = 8$

2.  $f(7) = f(1)$

3.  $b > 0$

הטענות הנכונות הן:

א. 1

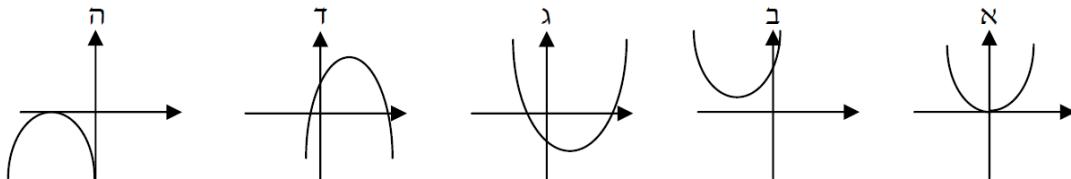
ב. 2, 1

ג. 3, 1

ד. 3, 2, 1

ה. 3, 2

7) איזה איור מהבאים מתאר את הפרבולה  $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x+4)^2$ ?



8) פרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  מקיימת  $f(3) < 0$  וגם  $f(-2) = f(4)$ .  
להלן מספר טענות:

1.  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

2.  $f(2) = c$

3.  $f'(3) < 0$

הטענות הנכונות הן:

א. 3, 1

ב. 3, 2

ג. 2

ד. 3, 2, 1

ה. 3

### תשובות סופיות

א (1)

ג (2)

ב (3)

ב (4)

ד (5)

ג (6)

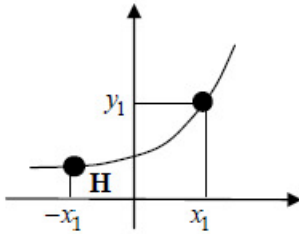
ב (7)

ג (8)

## תרגול בפונקציה מעריכית ופונקציה לוגריתמית

### שאלות

- 1) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $y = 8^x$  ונקודה  $(x_1, y_1)$ . מצאו את הגובה H, המתאים לנקודה  $-x_1$ .



א.  $\sqrt{y_1}$

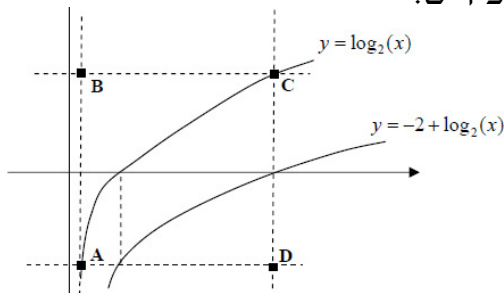
ב.  $\frac{1}{8y_1}$

ג.  $\frac{y_1}{8}$

ד.  $\sqrt[8]{y_1}$

ה.  $\frac{1}{y_1}$

- 2) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $y = \log_2(x)$  ו-  $y = -2 + \log_2(x)$ . כמו כן, העברנו מספר ישרים מקבילים לצירים. מה שטח המלבן ABCD?



א. 16

ב. 15

ג. 14

ד. 13

ה. 12

- 3) הקבוע  $w$  מקיים  $27 \cdot 81^w = 3^w$ .

מצאו את הערך של  $\left(\frac{1}{3}\right)^w$ .

א. 1

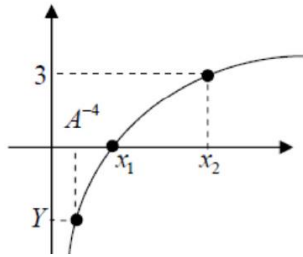
ב. -3

ג.  $-\frac{1}{3}$

ד. 3

ה.  $\frac{1}{3}$

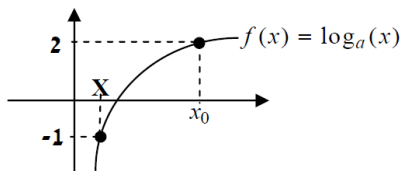
4) באיור מתוארות נקודות על גרף הפונקציה  $f(x) = 1 + \log_A(x)$ .



מהו ערך המכפלה  $Y \cdot x_1 \cdot x_2$ ?

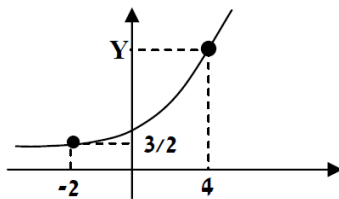
- א.  $-A$
- ב.  $-2A$
- ג.  $-3A$
- ד.  $-4A$
- ה.  $-5A$

5) מצאו את  $X$  במונחי  $x_0$ , לפי נתוני האיור.



- א.  $X = \frac{1}{x_0}$
- ב.  $X = \frac{1}{x_0^2}$
- ג.  $X = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$
- ד.  $X = \frac{2}{x_0}$
- ה.  $X = \frac{2}{x_0^2}$

6) להלן גרף הפונקציה  $f(x) = 3 \cdot A^x$ , עליו סומנו הנקודות  $(-2, \frac{3}{2})$  ו- $(4, Y)$ .



- מצאו את  $Y$ .
- א.  $Y = 6$
  - ב.  $Y = 12$
  - ג.  $Y = 8$
  - ד.  $Y = 16$
  - ה.  $Y = 24$

(7) יהי  $X$  הפתרון של  $\frac{1}{(1-\ln x)} = 2$ .

מהו הערך של  $Y = \ln(e \cdot X)$ ?

א.  $Y = \frac{1}{2}$

ב.  $Y = \frac{3}{2}$

ג.  $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ד.  $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ה.  $Y = \frac{1}{4}$

(8) נסמן ב- $w$  את  $w = \log_{\sqrt{3}} 2$ .

מהו ערך הביטוי  $9^w$ ?

א. 16

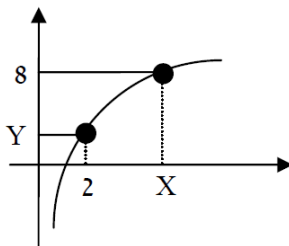
ב. 27

ג. 81

ד.  $\sqrt{32}$

ה.  $4\sqrt{2}$

(9) להלן גרף הפונקציה  $f(x) = 4\log_2(x)$ , ועליו סומנו נקודות.



מצאו את  $X^2 + Y^2$ .

א. 16

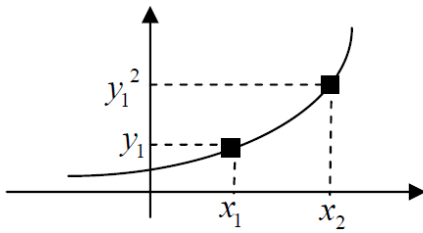
ב. 24

ג. 32

ד. 36

ה. 40

10) להלן גרף הפונקציה  $f(x) = A^{\frac{x}{2}}$ , ועליו סומנו נקודות.



מצאו את  $\frac{x_2}{x_1}$ .

א.  $\sqrt{A}$

ב.  $\frac{1}{2}$

ג. 4

ד.  $\sqrt{2}$

ה. 2

11) נסמן ב- $w$  את  $w = \log_4 32$ .

מהו ערך הביטוי  $8^w$ ?

א.  $128\sqrt{2}$

ב.  $8\sqrt{32}$

ג.  $32\sqrt{6}$

ד.  $64\sqrt{2}$

ה.  $16\sqrt{8}$

### תשובות סופיות

1) ה

2) ב

3) ד

4) ג

5) ג

6) ב

7) ב

8) א

9) ג

10) ה

11) א

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 6 - וקטורים גיאומטרים

תוכן העניינים

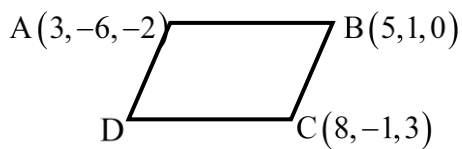
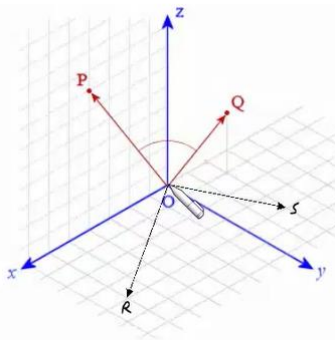
62 .....1. וקטורים

## וקטורים

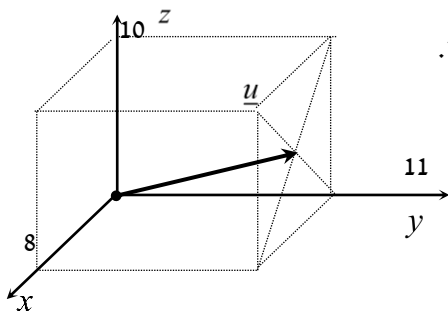
**הערת סימון:** נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}, \underline{\underline{u}}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

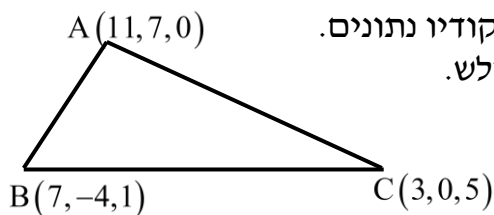
(1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



(2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



(3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



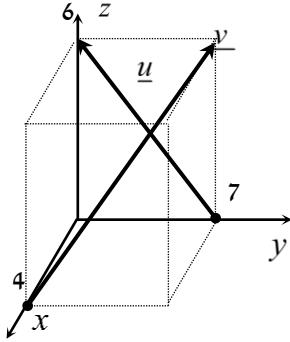
(4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור  $\overline{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

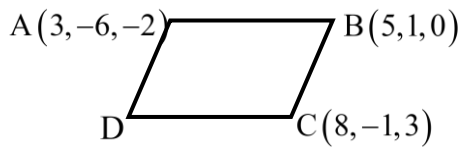
(7) מצאו את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,  $\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראו כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד  $D$ . \* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים:  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

- (21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$   
 א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.  
 ב. האם הטרפז שווה שוקיים?
- (22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  , כאשר :  
 א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$   
 ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$   
 ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$
- (23)** מצאו את שטחו של משולש ABC , שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$
- (24)** נתונים הווקטורים :  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$   
 מצאו וקטור  $\underline{w}$  , שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0 ,  
 אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$  .
- (25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים  $(3, 2, 1)$  ו- $(1, -1, 2)$  ,  
 ושמרחקו מהווקטור  $(1, 1, 0)$  הוא  $\sqrt{3}$  .
- (26)** ענו על שני הסעיפים הבאים :  
 א. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$   
 הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.  
 ב. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$   
 הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
- (27)** ענו על חמשת הסעיפים הבאים :  
 א. הוכיחו כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$   
 ב. הוכיחו כי  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$   
 ג. הוכיחו כי  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$   
 ד. הוכיחו כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$   
 תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.  
 ה. הוכיחו כי  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

**(28)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר  $a = u - 2v$ ,  $b = 3u + v$ .  
 אם  $\alpha$  היא הזווית בין  $a$  ל- $b$ , אז  $\cos \alpha$  שווה ל-?

**(29)** יהיו  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה  $k$ . יהי  $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$  וקטור שמרחקו מ- $2w_2$  שווה למרחקו מ- $w_1$ .  
 מהו המרחק של  $v$  מ- $w_1$ ?

**(30)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורי יחידה המקיימים  $\|u - v\| = 2$ .  
 הוכיחו ש- $u$  ו- $v$  הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\text{א.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 180^\circ \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 7 - מטריצות

תוכן העניינים

69 ..... 1. מטריצות

## מטריצות

## שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

- (9) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
נתון כי  $(A-I)(A+I) = 0$ .  
הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

(10) אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

(11) הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .  
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

- (13) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

נתון כי  $AA^T = 0$ . הוכיחו כי  $A = 0$ .

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?  
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון  $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$ , כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

**16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

**17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

**18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$     ב. לא    ג.  $4 \times 2$     ד. לא    ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$     ח. לא    ט.  $6 \times 4$     י.  $6 \times 6$

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$     ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n \binom{n}{n}I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

# מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 8 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג ..... (ללא ספר)
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n ..... 74
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות ..... 79
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 81
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה ..... (ללא ספר)

## חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של  $n$  עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?

(3) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:  $a_{ij} = |i - j|$ .

(5) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 1$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$ .

(9) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$  ומצאו עבור אילו ערכים של  $k$  המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 3$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

ב. הניחו כי  $a=3, b=1, c=2$  וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור  $n=20$ .

(13) נתונה מטריצה  $A_{n \times n}$ .

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:  
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה  
הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה  $B$ .

חשבו את  $|B|$  במונחי  $|A|$ .

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 2$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

## חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4$ ,  $|B|=2$ .  
חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \text{ הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \text{ חשבו את } |B|.$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} A+3B=0, B^2-2A^{-1}=0. \text{ חשבו את } |A|, |B|.$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n.$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|.$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי  $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 4      ב.  $2^{13}$

(2) א. -8      ב.  $-2^{11}$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $\frac{81}{32}$

(5)  $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9)  $4^n$

(10) שאלת הוכחה.

## כלל קרמר

## שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} kx+y+z+t+r=1 \\ x+ky+z+t+r=1 \\ x+y+kz+t+r=1 \\ x+y+z+kt+r=1 \\ x+y+z+t+kr=1 \end{array} \quad (4)$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$x=y=z=t=r$$

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$ .

## תשובות סופיות

$$x=1, y=2 \quad (1)$$

$$x=1, y=1, z=2 \quad (2)$$

$$x=y=z=t=1 \quad (3)$$

$$k \neq 1, k \neq -4 \quad (4)$$

$$\begin{array}{ll} \text{א. לא נכונה.} & \text{ב. } k=-2 \\ \text{ב. לא נכונה.} & \text{ג. לא.} \\ \text{ג. לא נכונה.} & \text{ד. הוכחה.} \end{array}$$