

# מבוא לחדו"א



## תוכן העניינים

|     |                                                             |     |
|-----|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1.  | משוואות אלגבריות                                            | 1   |
| 2.  | אי שוויונים אלגבריים                                        | 18  |
| 3.  | חוקי החזקות והשורשים                                        | 32  |
| 4.  | משוואות ואי-שוויונים מעריכיים                               | 42  |
| 5.  | חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים             | 52  |
| 6.  | טריגונומטריה במשולש ישר זווית                               | 69  |
| 7.  | זהויות טריגונומטריות                                        | 74  |
| 8.  | משוואות טריגונומטריות                                       | 95  |
| 9.  | טריגונומטריה במישור                                         | 116 |
| 10. | הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר) | 149 |
| 11. | הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות                            | 171 |
| 12. | גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר                              | 196 |
| 13. | גיאומטריה אנליטית - המעגל                                   | 215 |
| 14. | גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה                        | 225 |
| 15. | קווים ותחומים במישור                                        |     |

# מבוא לחדו"א

## פרק 1 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה..... 1
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה..... 3
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון..... 6
4. משוואה ממעלה שנייה..... 7
5. משוואות דו-ריבועיות..... 9
6. משוואות עם פרמטרים..... 11
7. משוואות עם שורשים..... 13
8. משוואות עם ערך מוחלט..... 15
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה..... 16

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4</math></p> <p>ב. <math>\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1</math></p> <p>ג. <math>\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1</math></p> <p>ה. <math>\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2</math></p> <p>ו. <math>5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1</math></p> | <p>ז. <math>\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4</math></p> <p>ח. <math>\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}</math></p> <p>ט. <math>\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1</math></p> <p>י. <math>\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2</math></p> <p>יא. <math>5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

|                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}</math></p> <p>ג. <math>\frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}</math></p> | <p>ד. <math>\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0</math></p> <p>ה. <math>\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}</math></p> <p>ו. <math>\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}</math></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

|                                                                                                                                 |                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12</math></p> | <p>ג. <math>\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}</math></p> <p>ד. <math>\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0</math></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### תשובות סופיות:

- |                    |                    |                     |                    |            |                    |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$           | ב. $x=0$           | ג. $x=8$            | ד. $x=2$           | ה. $x=2$   | ו. $x=-3$          |
| ז. $x=\frac{1}{2}$ | ח. $x=4$           |                     |                    |            |                    |
| א. $x=3$           | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$           | ה. $x=4$   | ו. $x=-1$          |
| א. $x=-18$         | ב. $x=-30$         | ג. $x=-1$           | ד. $x=1$           | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$         |
| א. $x=8$           | ב. $x=-1$          | ג. $x=-3$           | ד. $x=-2$          | ה. $x=2$   | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$          | ב. $x=-7$          | ג. $x=-7$           | ד. $x=6, x \neq 3$ |            |                    |

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו-  $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

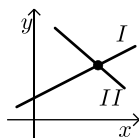
#### פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

#### הצגה גרפית של מערכת משוואות:

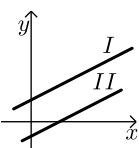
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



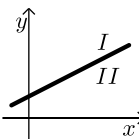
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים :  
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.  
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.  
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### (1) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} & \text{ב.} \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} & \text{ג.} \begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \\
 \text{ד.} \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} & \text{ה.} \begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} & \text{ו.} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}
 \end{array}$$

#### (2) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} & \text{ב.} \begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \\
 \text{ג.} \begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} & \text{ד.} \begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}
 \end{array}$$

#### (3) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} & \text{ב.} \begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

## תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג.  $-7x - 1$  ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית.  
פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 2, x_2 = -5$     ב.  $x_1 = 2, x_2 = 8$     ג.  $x = \frac{2}{5}$     ד. אין פתרון.
- (2) א.  $x_1 = 2, x_2 = -1$     ב.  $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$     ג.  $x_1 = 1, x_2 = -10$     ד.  $x_1 = 0.6, x_2 = -2$
- (3) א.  $x = \pm 6$     ב.  $x = \pm \frac{3}{4}$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = \pm 1$
- (4) א.  $x_1 = 0, x_2 = -2$     ב.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$     ג.  $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$     ד.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$
- (5) א.  $x_1 = 2, x_2 = -1.2$     ב.  $x = 5, x \neq -3$     ג.  $x_1 = 0, x_2 = -5$     ד.  $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4  
כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1)  $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3)  $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4)  $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5)  $x^6 + x^3 = 56$
- (6)  $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7)  $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8)  $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9)  $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10)  $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11)  $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12)  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13)  $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14)  $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15)  $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16)  $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17)  $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18)  $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19)  $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20)  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

## תשובות סופיות:

(1)  $x = \pm 1$

(2)  $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3)  $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4)  $x = \pm 2, \pm 5$

(5)  $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6)  $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7)  $x_1 = 4, x_2 = 49$

(8)  $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9)  $x = 5, -1$

(10)  $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11)  $x = -1$

(12)  $x_{1,2} = 1, 3$

(13)  $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14)  $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16)  $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17)  $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18)  $x = -1, 2$

(19)  $x = 3, -1$

(20)  $x = \pm 1, 4, 6$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx = 4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

### (3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                                |                                                     |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$                           | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$                               |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$                      | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$                          |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$                     | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$                            |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$                     | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$                           |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$                   | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$                          |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$      | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$                    |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$           | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$            | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$               |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$        |
|                                                | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$      |

**תשובות סופיות:**

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

### משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $ 3x - 24  = x$ (2)                   | $ 3x + 14  = 7$ (1)                 |
| $2x -  8 - x  = 10$ (4)               | $ 12 - x  = 3x$ (3)                 |
| $ 14 - 3x  = 2 x + 5 $ (6)            | $ 4x - 5  =  2x + 13 $ (5)          |
| $ x + 2  + 6 =  2x - 4 $ (8)          | $ x  + 7 =  2x $ (7)                |
| $ 10 - 3x  -  x + 4  =  2x - 6 $ (10) | $ x + 2  +  2x - 6  =  4x + 8 $ (9) |

### תשובות סופיות:

- |                             |                 |                           |                            |
|-----------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------------|
| $x = 6$ (4)                 | $x = 3$ (3)     | $x = 6, 12$ (2)           | $x = -\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x = \pm 7$ (7) | $x = 24, \frac{4}{5}$ (6) | $x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
|                             |                 | $x = 0$ (10)              | $x = 0, -12$ (9)           |

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1)  $(2,4), (4,2)$
- (2)  $(\pm 4, -2)$
- (3)  $(\pm 2, \pm 1)$
- (4)  $(5, -2), (-5, 2)$
- (5)  $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6)  $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7)  $(7, 4)$
- (8)  $(5, -3)$
- (9)  $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10)  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12)  $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13)  $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14)  $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

# מבוא לחדו"א

## פרק 2 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

|    |                                      |
|----|--------------------------------------|
| 18 | 1. אי שוויונים ממעלה ראשונה          |
| 20 | 2. אי שוויונים ממעלה שנייה           |
| 21 | 3. אי שוויונים ממעלה שלישית          |
| 22 | 4. אי שוויונים עם מנה                |
| 24 | 5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו |
| 25 | 6. שאלות מסכמות                      |
| 27 | 7. מציאת תחום הגדרה                  |
| 29 | 8. אי שוויונים עם ערך מוחלט          |

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                                                 |                                                     |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $6x > 2(3x - 1)$ (2)                                            | $45x - 26 > 109$ (1)                                |
| $(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20$ (4)                            | $2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6)$ (3)             |
| $4(6x - 8) < 8(3x - 4)$ (6)                                     | $\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3}$ (5)         |
| $\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x$ (7) |

**תשובות סופיות:**

**(1)**  $x > 3$

**(2)** כל  $x$

**(3)** אף  $x$

**(4)**  $x > -2$

**(5)**  $x < 5$

**(6)** אף  $x$

**(7)**  $x \geq 12$

**(8)**  $x > -13$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                              |                                        |
|------------------------------|----------------------------------------|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)        | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)        | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6)  | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)    | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ ,  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$  וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2)             | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4)               | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5)    |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8)         | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7)     |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10)           | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9)           |

### תשובות סופיות:

- |                                  |                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------------|
| $x > 0$ (2)                      | $1 < x < 2, x > 3$ (1)                      |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6)        | $x > 2$ (5)                                 |
| $x \leq 0, x = 3$ (8)            | $x < -2, 1 < x < 3$ (7)                     |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10)          | $x > -3$ (9)                                |

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

|                                   |                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)    | $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)             |
| $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4) | $\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)              |
| $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)       | $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)           |
| $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)      | $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)            |
| $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10) | $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9) |

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

## תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$-4 \leq x < 2, 3 \leq x \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

## תחום הגדרה:

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

| מקרה  | $ x  < a$    | $ x  > a$           |
|-------|--------------|---------------------|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$
- ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x^2+6x-4| < 12$       ב.  $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג.  $|x^2-3x| < 4$       ד.  $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה.  $x^2-6|x|+5 \leq 0$       ו.  $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\text{א. } |x-3|+|2x+2|>7 \quad \text{ב. } |x+8|<11-|1-3x|$$

$$\text{ג. } |3-2x|-11>4-|6+x| \quad \text{ד. } |2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$$

$$\text{ה. } |5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\leq 22 \quad \text{ו. } |x+3|+|x^2-5x+4|<19$$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\text{א. } \left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\geq 3 \quad \text{ב. } 1\leq\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\leq 2$$

$$\text{ג. } \frac{|x-6|+8x}{x-12}\leq 12 \quad \text{ד. } \left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

$$\text{א. } \sqrt{x^2-|x-12|}<x \quad \text{ב. } 2-\sqrt{1-x}\leq|x+2|-3$$

$$\text{ג. } \sqrt{|2x+1|-x-1}\leq 4-|3x| \quad \text{ד. } \frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$       ב.  $x < -4$  או  $3 < x$   
 ג.  $2 < x < 6$       ד.  $x < -1$
- (2) א.  $-1 < x < 1$  או  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$       ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$       ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ג.  $-1 < x < 4$       ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$   
 ה.  $-5 \leq x \leq -1$  או  $1 \leq x \leq 5$       ו.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- (4) א.  $x < -2$  או  $2 < x$       ב.  $-1 < x < 1$   
 ג.  $x < -6$  או  $4 < x$       ד.  $x < -1$  או  $4 < x$   
 ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$       ו.  $-2 < x < 6$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$       ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$       ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$       ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$       ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

# מבוא לחדו"א

פרק 3 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 32 | 1. חוקי החזקות.....           |
| 37 | 2. חוקי השורשים.....          |
| 41 | 3. כתיבה מדעית של מספרים..... |

## חוקי החזקות:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

|                                                            |                                          |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$                   | ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ |
| ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ | ד. $2^3 + 2^5$                           |

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק :  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

|                                                   |                                                           |                                                 |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $(a^2)^4$                                      | ב. $(c^3)^{10}$                                           | ג. $(x^3 x^{10})^2$                             |
| ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$                      | ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$                              | ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$      |
| ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$          | ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$               | ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$       |
| י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ | יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ | יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ |

(6) לפניך הביטויים הבאים :  $\left((3^2)^3\right)^4$  ו-  $\left((3^6)^n\right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

|                              |                                                  |                                          |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ | ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ | ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|

(8) פשט את הביטויים הבאים :

|                                         |                                      |                                                   |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------|
| א. $3^2 9 \cdot 81^2$                   | ב. $64^2 2^3 8^2$                    | ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$                       |
| ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ | ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ | ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ |

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\
 \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\
 \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}
 \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים :  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ 

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\
 \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\
 \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2
 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3
 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125}
 \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}}
 \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

### שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- |                                               |                                                 |                                                                     |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$                          | ב. $32^{\frac{3}{5}}$                           | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$                                             |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$         | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$           | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$                     |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                         |                                                                            |                                                                |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$                            | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$                                              | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$                   |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$                         | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$                                      | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$                          |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- |                   |                |                          |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$    | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ |                          |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- |                          |                             |                                 |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$           | ב. $4\sqrt[3]{2}$           | ג. $2\sqrt[5]{3}$               |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$       | ח. $-5\sqrt[4]{2}$          | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$             |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[5]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$  ב.  $\sqrt[5]{2^3}$  ג.  $\sqrt[6]{6^5}$  ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$  ה.  $-\sqrt[3]{-4}$  ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$  ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$  ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח.  $\phi$  ט.  $\phi$  י. 5
- (19) א. 4 ב.  $\frac{1}{8}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד. 125 ה.  $\frac{32}{243}$  ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$  ח.  $\frac{10}{49}$  ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$  ח.  $\sqrt{5}$  ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$  ב.  $\sqrt{75}$  ג.  $\sqrt{9}$  ד.  $\sqrt[3]{24}$  ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$  ב.  $\sqrt[3]{128}$  ג.  $\sqrt[5]{96}$  ד.  $\sqrt{6}$  ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$  ז.  $\sqrt[3]{-250}$  ח.  $-\sqrt[4]{1250}$  ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$  ב.  $4\sqrt{3}$  ג.  $3\sqrt{7}$  ד.  $3\sqrt[3]{2}$  ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$  ב.  $5\sqrt{2}$  ג.  $8\sqrt{5}$  ד.  $3\sqrt[3]{4}$  ה.  $2\sqrt[3]{7}$  ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$  ח.  $3\sqrt[5]{4}$  ט.  $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$  ב.  $4\sqrt{7}$  ג.  $6\sqrt[3]{2}$  ד.  $\sqrt[4]{5}$  ה.  $4\sqrt{5}$  ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$  ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$  ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$  ד. 27 ה.  $\frac{1}{7}$  ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| א. 15,000,000      | ב. 1,500,000     |
| ג. 150,000,000,000 | ד. 23,400,000    |
| ה. 0.0003          | ו. 0.00000042    |
| ז. 0.000000042     | ח. 0.00000000042 |

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $(3,000,000)^2$ | ב. $(2,000,000)^2$   |
| ג. $(5,000)^3$     | ד. $(50,000)^3$      |
| ה. $(0.0002)^4$    | ו. $(0.00004)^3$     |
| ז. $(0.000005)^3$  | ח. $(0.000000007)^3$ |

### תשובות סופיות:

|                           |                          |                          |                         |                         |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (28) א. $1.5 \cdot 10^7$  | ב. $1.5 \cdot 10^6$      | ג. $1.5 \cdot 10^{11}$   | ד. $2.34 \cdot 10^7$    | ה. $3 \cdot 10^{-4}$    |
| ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$    | ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$   | ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$  |                         |                         |
| (29) א. $9 \cdot 10^{12}$ | ב. $4 \cdot 10^{12}$     | ג. $1.25 \cdot 10^{11}$  | ד. $1.25 \cdot 10^{14}$ | ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$ |
| ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$   | ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$ | ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$ |                         |                         |

# מבוא לחדו"א

## פרק 4 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

|    |                                       |
|----|---------------------------------------|
| 42 | 1. משוואות מעריכיות יסודיות           |
| 44 | 2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים     |
| 46 | 3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס        |
| 47 | 4. משוואות מסכמות שונות               |
| 48 | 5. משוואות עם קבוע אוילר              |
| 49 | 6. מערכת משוואות מעריכיות             |
| 50 | 7. אי שוויונים מעריכיים               |
| 51 | 8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך |

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

|                                                           |                                                           |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $2^x = 7^x$                                            | ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$               |
| ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$                        | ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$                |
| ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$ | ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$ |
| ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$           |                                                           |

תשובות סופיות:

|                          |                       |                        |                          |               |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|--------------------------|---------------|
| א. $x = 4$               | ב. $x = -\frac{1}{3}$ | ג. $x = -2$            | ד. $x = 2, 8$            | ה. $x = -4$   |
| ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$ | ז. $x = 9$            | ח. $x = 1$             |                          |               |
| א. $x = -1$              | ב. $x = -2$           | ג. $x = 3, -2$         |                          |               |
| א. $x = -\frac{1}{2}$    | ב. $x = 1$            | ג. $x = -\frac{8}{19}$ | ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$ | ה. $x = 4, 9$ |
| א. $x = 0$               | ב. $x = 4$            | ג. $x = 2$             | ד. $x = 2$               | ה. $x = 5$    |
| ו. $x = 1.5$             | ז. $x = \frac{2}{3}$  |                        |                          |               |

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד.  $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג.  $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו.  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה.  $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 186$

ח.  $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז.  $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד.  $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו.  $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב.  $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

|                                                     |                                                   |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$ | ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$           |
| ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$     | ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ |
| ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$      | ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$          |
| ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$                 | ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$              |

### תשובות סופיות:

|                                    |                 |                         |                      |
|------------------------------------|-----------------|-------------------------|----------------------|
| א. $x = 3$                         | ב. $x = 2$      | ג. $x = 4$              | ד. $x = 1$           |
| א. $x = \frac{1}{2}$               | ב. $x = 0$      | ג. $x = \frac{1}{3}$    | ד. $x = \frac{1}{4}$ |
| ה. $x = -3$                        | ו. $x = -2$     | ז. $x = -3$             | ח. $x = -2$          |
| א. $x = 2, 3$                      | ב. $x = 1, -2$  | ג. $x = 0$              | ד. $x = 0$           |
| ה. $x = 0, 1$                      | ו. $x = -6, -9$ |                         |                      |
| א. $x = 1, -\frac{1}{2}$           | ב. $x = 1$      |                         |                      |
| א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ | ב. $x = 1, 3$   | ג. $x = 1, 2$           | ד. $x = 1, 0$        |
| ה. $x = -2$                        | ו. $x = 1, -1$  | ז. $x = 0, \frac{1}{2}$ | ח. $x = 0, 2$        |

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.  
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\sqrt{x}10 = 4 \cdot \sqrt[2]{x}10 + 60 \quad (5)$$

$$\sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}2)^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}32 \quad (6)$$

$$10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x = 1, 2 \quad (1)$$

$$x = 3 \quad (2)$$

$$x = 1.5 \quad (3)$$

$$x = 1, -1 \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$x = -3 \quad (6)$$

$$x = 1, -2 \quad (7)$$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

### שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

### תשובות סופיות:

|                   |            |                  |          |
|-------------------|------------|------------------|----------|
| (1,3) (4          | (1,2) (3   | (0,2) , (2,4) (2 | (2,9) (1 |
| (1,2) , (-1,0) (7 | (-1,-2) (6 | (3,2) (5         |          |

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם:  $f(x) > 1$  אז:  $g(x) > h(x)$ .

אם:  $0 < f(x) < 1$  אז:  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (2) \quad (x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$$

$$(3) \quad x^{2x-6} < 1 \quad (4) \quad x^{2x^2+2} < x^{5x}$$

$$(5) \quad (x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3 \quad (6) \quad (x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0 < x < 1, x > 3$$

$$(2) \quad 3 < x < 6$$

$$(3) \quad 1 < x < 3$$

$$(4) \quad 0 < x < 0.5, 1 < x < 2$$

$$(5) \quad x \leq -1, x \geq 3$$

$$(6) \quad 0 < x < 2$$

# מבוא לחדו"א

פרק 5 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

|    |                                                    |
|----|----------------------------------------------------|
| 52 | 1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות                 |
| 55 | 2. חוקי הלוגריתמים                                 |
| 59 | 3. חישובים עם חזקה לוגריתמית                       |
| 60 | 4. מעבר בין בסיסים                                 |
| 62 | 5. הלוגריתם הטבעי                                  |
| 64 | 6. משוואות עם בסיסים שונים                         |
| 65 | 7. משוואות לוגריתמיות מסכמות                       |
| 66 | 8. מערכת משוואות לוגריתמיות                        |
| 67 | 9. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות              |
| 68 | 10. אי-שוויונים לוגריתמים                          |
|    | 11. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס (ללא ספר) |

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4=10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2  
 ו. 4    ז. -1.5
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$   
 ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$   
 ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |                                                                                                  |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$                                                                     | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$                                                                     | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$                                                           |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$                                                             | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$                                               |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$                                                                     | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |                                                             |                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \log_2 x + \log_2 (x-6) = 4 & \text{ב. } \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1 \\
 \text{ג. } \log_2 (x+30) - \log_2 x = 4 & \text{ד. } \log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2 \\
 \text{ה. } 2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1 & \\
 \text{ו. } 2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x &
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

$$\begin{array}{l}
 \text{א. } \log_5 (4x-3) = \log_5 7 \\
 \text{ב. } 2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1
 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\begin{array}{l}
 \text{א. } \log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3) \\
 \text{ב. } \log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x
 \end{array}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{l}
 \text{א. } \log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8 \\
 \text{ב. } \log_2 \left( \frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11 \\
 \text{ג. } \log_2 x^2 \log_2 \left( \frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x) \\
 \text{ד. } (\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1 \\
 \text{ה. } \log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left( \frac{81}{x} \right) + 2 \\
 \text{ו. } \frac{\log_2 \left( \frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}
 \end{array}$$

**שאלות הבעה:**

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10)  $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11)  $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12)  $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13)  $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2  
ו. -2    ז. 1    ח. 6    ט. 1.5    י. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$
- ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[6]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$   
ג.  $x = 2\log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$   
ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{6}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad \text{יתבצע באופן הבא:}$$

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_4 7 \cdot \log_7 4 \\ \text{ב.} & \log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000 \\ \text{ג.} & \log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9 \\ \text{ד.} & \log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625 \end{array}$$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1 \\ \text{ב.} & \log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1 \end{array}$$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 x + \log_{32} x = 6 \\ \text{ב.} & \log_3 x \cdot \log_{27} x = 3 \\ \text{ג.} & \log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3} \\ \text{ד.} & \log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1 \end{array}$$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_2 3 \quad \text{ב.} \log_{32} 36 \quad \text{ג.} \log_{216} 96$$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_3 50 \quad \text{ב.} \log_2 \sqrt{30} \quad \text{ג.} \log_5 22.5$$

(6) נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

### שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7)  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8)  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

### תשובות סופיות:

(1) א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12.

(2) א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

(3) א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

(4) א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

(5) א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$ .

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) א. 2      ב. -4      ג. -1.5
- (2) א.  $x = e^2$       ב.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א.  $x = 0$       ב.  $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$       ג.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א.  $x = e^3, \frac{1}{e^2}$       ב.  $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3      ב. 9

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## משוואות לוגריתמיות מסכמות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & 6\sqrt{\log_5 \sqrt[4]{x}} - \log_5 x = 2 \\ (2) \quad & (2\log_x \sqrt{2})^2 = 4\log_x (2\sqrt{2}) - 5 \\ (3) \quad & \log_7 \left( 10^{\log(x^2+10)} \right) - 1 = 2\log_7 \sqrt{x} \\ (4) \quad & \log_4 (\log x^2) + \log_4 (\log x - 4) = \log_4 10 \\ (5) \quad & 4\log_{2x} 4 = (1 + \log_2 x)^2 \\ (6) \quad & \log_x (x^2 + 4) - \log_{0.5} 0.5 = \log_{x^2} 16 \\ (7) \quad & \log_{4x} 25 + \log_{3x+1} 25 = 0 \\ (8) \quad & \sqrt{1 - \log_3 x} \cdot \log_x 27 = 2 \\ (9) \quad & \log_2 (2^{2x-2} + 1) - \log_2 (2^{x+1} - 3) = x - 2 \\ (10) \quad & \log_2 (\log_2 (4 \cdot 2^x + 5)) - 1 = 2\log_2 \sqrt{x} \\ (11) \quad & 2\log_{x^2} |5x + 2| = 1 + \log_{x^4} 81 \\ (12) \quad & 2^{2+\log_7 x} \cdot x = 784 \\ (13) \quad & (x^2)^{\log_2 x^2} = 16 \\ (14) \quad & 5^{1+\log_4 x} \cdot \pi^{\log_\pi x} = 40000 \end{aligned}$$

### תשובות סופיות:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & 625, 5 \\ (2) \quad & \sqrt[5]{2}, 2 \\ (3) \quad & 2, 5 \\ (4) \quad & 10^5 \\ (5) \quad & 2 \\ (6) \quad & \frac{1}{6} \\ (7) \quad & 2 \\ (8) \quad & \sqrt[4]{27} \\ (9) \quad & 2 \\ (10) \quad & \log_2 5 \\ (11) \quad & -\frac{1}{4} \\ (12) \quad & 49 \\ (13) \quad & \pm 0.5, \pm 2 \\ (14) \quad & 64 \end{aligned}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array}$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                                                   |                                   |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$ (2)                                       | $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6)                                                   | $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$ (5)   |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)                  | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)       |

### תשובות סופיות:

- |                                                           |                             |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)                               | $x > 5$ (1)                 |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)                          | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)  |
| $0 < x < e^3$ (6)                                         | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)  |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

# מבוא לחדו"א

פרק 6 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

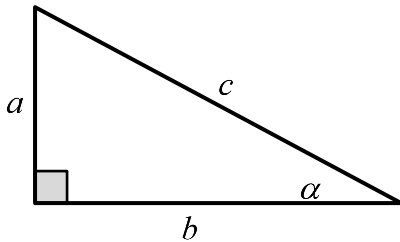
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 69

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

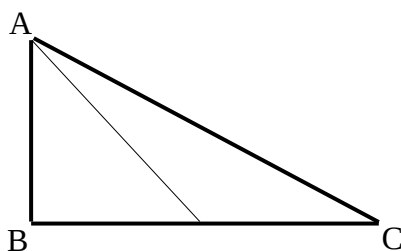
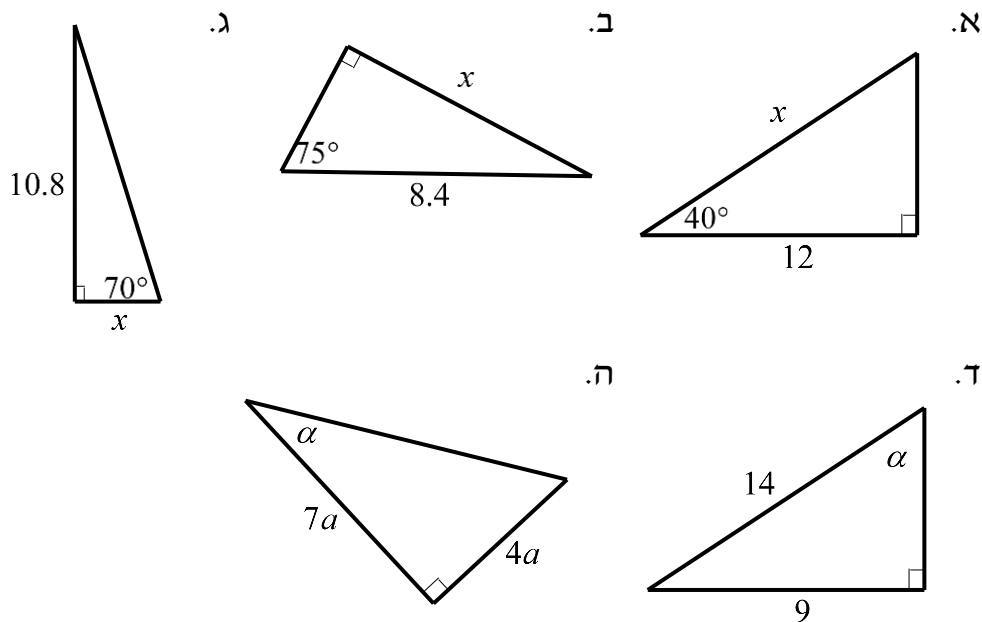
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha / x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



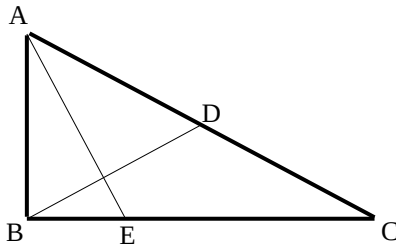
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

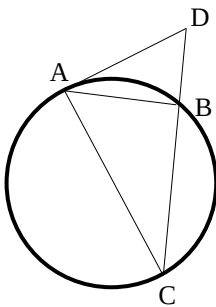
נתון:  $\angle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\angle BAD$ .



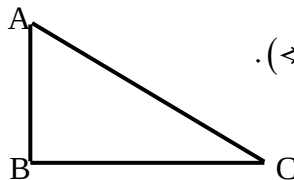
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר AC והוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BD = 5.6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויתיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

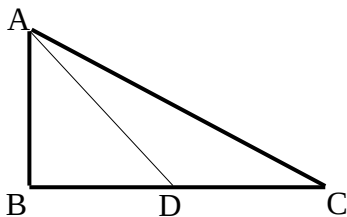


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $BD = 4$  ס"מ,  $\angle DAB = 32^\circ$ . מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

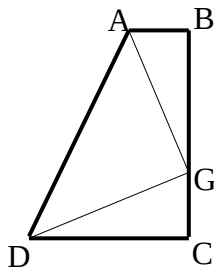


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.

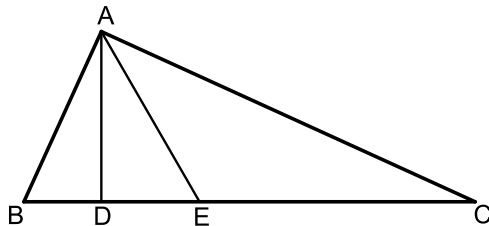


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים BD ו-AD.

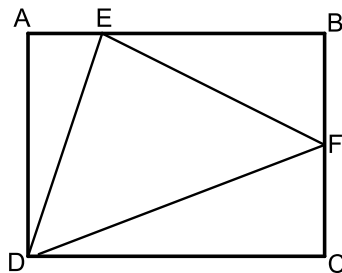
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה זווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש-  $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $m$  את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו-  $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו-  $k = 2$ .

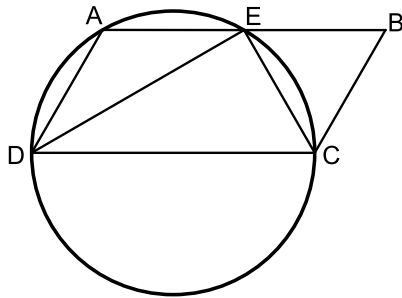


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש-  $AE = BE$ . מקיימת:  $3AE = BE$  ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.  
א. סמן ב-  $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

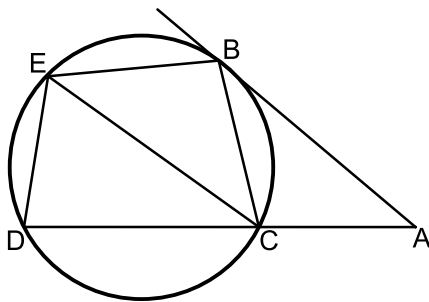
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $k$  את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E,  $(AE = BE)$ . נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
  - רדיוס המעגל יסומן ב-R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
  - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
  - הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
  - נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}}{}, S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# מבוא לחדו"א

## פרק 7 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

|    |                                                      |
|----|------------------------------------------------------|
| 74 | 1. זהויות יסוד                                       |
| 78 | 2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות |
| 80 | 3. מעגל היחידה                                       |
| 83 | 4. סכום והפרש זוויות                                 |
| 87 | 5. זווית כפולה                                       |
| 90 | 6. סכום והפרש פונקציות                               |
| 93 | 7. מכפלת פונקציות                                    |

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  |                              |
|                                                                                    |                                                                                                | קשרים בין פונקציות           |

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 & \text{(2)} & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha & \text{(1)} \\
 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha & \text{(4)} & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha & \text{(3)} \\
 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 & \text{(6)} & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 & \text{(5)} \\
 \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 & \text{(8)} & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha & \text{(7)} \\
 \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha & \text{(10)} & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha & \text{(9)} \\
 \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 & \text{(12)} & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha & \text{(11)} \\
 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha & \text{(14)} & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha & \text{(13)} \\
 \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha & \text{(16)} & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha & \text{(15)}
 \end{array}$$

## הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad : \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad : \text{נתון כי}$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad : \text{נתון כי}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

### תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

### סיכום כללי:

| $\alpha = 90^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$  | $\alpha = 45^\circ$  | $\alpha = 30^\circ$  | $\alpha = 0^\circ$ |               |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|---------------|
| 1                   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0                  | $\sin \alpha$ |
| 0                   | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1                  | $\cos \alpha$ |
| $\phi$              | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0                  | $\tan \alpha$ |
| 0                   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\phi$             | $\cot \alpha$ |

### הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

### שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

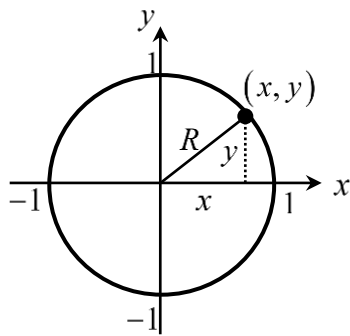
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קונוי שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע   | סינוס                                     | קוסינוס                                   | טנגנס                                     |
|--------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| II     | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ |
| III    | $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$  |
| VI     | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$            | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$             | $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$            |
| סימנים |                                           |                                           |                                           |

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

### שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.  
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| א. $\sin 120^\circ$ | ב. $\cos 150^\circ$ |
| ג. $\tan 160^\circ$ | ד. $\cot 130^\circ$ |
| ה. $\sin 215^\circ$ | ו. $\cos 245^\circ$ |
| ז. $\tan 230^\circ$ | ח. $\cot 200^\circ$ |
| ט. $\sin 300^\circ$ | י. $\cos 310^\circ$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

|                     |                      |                        |
|---------------------|----------------------|------------------------|
| א. $\sin 150^\circ$ | ב. $\cos 210^\circ$  | ג. $\tan 120^\circ$    |
| ד. $\sin 330^\circ$ | ה. $\tan 225^\circ$  | ו. $\sin 315^\circ$    |
| ז. $\cos 120^\circ$ | ח. $\tan(-30^\circ)$ | ט. $\cos(-45^\circ)$   |
| י. $\sin 510^\circ$ | יא. $\cos 930^\circ$ | יב. $\tan(-225^\circ)$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} &\text{א. } (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ &\text{ב. } 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ &\text{ג. } \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם  $\alpha, \beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} &\text{א. } \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ &\text{ב. } \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{י. } \frac{1}{2} & \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{יב. } -1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

|                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$    | ב. $\sin 15^\circ$  | ג. $\sin 105^\circ$   |
| ד. $\sin(-15^\circ)$  | ה. $\cos 75^\circ$  | ו. $\cos 15^\circ$    |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב.  $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד.  $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(4) נתון:  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\tan(\alpha + \beta)$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$

(6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$

(7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$

(8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(11) הוכח כי מתקיים:  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$ .

(12) הוכח כי מתקיים:  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$ .

(13) נתון כי:  $\sin 76^\circ = m$ . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$ .

(14) הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי:  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$  ו-  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ .

הראה כי מתקיים:  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

(15) היעזר בנוסחה:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$ .

אם ידוע כי:  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ . הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} & \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א.  $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$   
 ב.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$   
 ג.  $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$   
 ד.  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$   
 ה.  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$   
 ו.  $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$   
 ז.  $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$   
 ח.  $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$ .

ב.  $\cos \alpha$ .

ג.  $\sin 2\alpha$ .

ד.  $\cos 2\alpha$ .

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו-  $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו-  $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$ .

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$ .

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$ .

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$ .

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$ .

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$ .

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$ .

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) 0.44

(8)  $\cos 4\alpha$ 

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

(10) 1

(11) -1.25

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה :  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי: } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad \text{ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות: } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\text{הראה כי: } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) 1.

(18)  $\frac{1}{8}$ .(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$$

$$(2) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2} (\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$$

$$(3) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} (\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$$

$$(4) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$$

$$(5) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$$

$$(6) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$$

$$(7) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$$

$$(8) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$$

$$(9) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

# מבוא לחדו"א

## פרק 8 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| 95  | 1. משוואות טריגונומטריות כלליות                         |
| 98  | 2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית                    |
| 100 | 3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד                   |
| 102 | 4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה         |
| 103 | 5. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות   |
| 104 | 6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה         |
| 105 | 7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות |
| 107 | 8. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס                |
| 108 | 9. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$           |
| 109 | 10. משוואות עם תחום נתון                                |
| 110 | 11. משוואות עם זוויות ברדיאנים                          |
| 114 | 12. אי שוויונים טריגונומטריים                           |

## משוואות טריגונומטריות כלליות:

### סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות  
כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה                | הפתרון                                                                  |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$                                    |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\text{א. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$   
 ג.  $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$  ד.  $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א.  $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א.  $x = 30^\circ + 180^\circ k$  ב.  $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א.  $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$  ג.  $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$  ב.  $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$   
 ג.  $x = -9^\circ + 36^\circ k$  ד.  $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$   
 ה.  $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$  ו.  $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א.  $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$  ב.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$  ג.  $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א.  $x_1 = 180^\circ k$ ,  $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$  ב.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$  ג.  $x = 60^\circ + 180^\circ k$  ד.  $x = 90^\circ k$   
 ה.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$  ו.  $x = 180^\circ k$  ז.  $x = 20^\circ + 60^\circ k$  ח.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$  ט.  $x = 90^\circ + 360^\circ k$  י.  $x = 180^\circ k$   
 יא.  $x = 90^\circ + 180^\circ k$  יב.  $x = 360^\circ k$  יג.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$  יד.  $x = 45^\circ + 180^\circ k$  טו.  $x = 180^\circ k$

## משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

### סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

### טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4)$$

$$\tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6)$$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8)$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10)$$

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12)$$

$$\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14)$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

## תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  |                              |
|                                                                                    |                                                                                                | קשרים בין פונקציות           |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

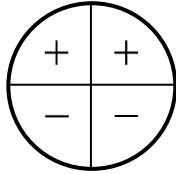
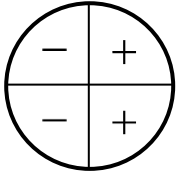
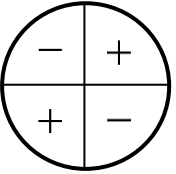
$$\cdot x = 180^\circ k \quad (8)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

| רביע           | סינוס                                                                                 | קוסינוס                                                                                                                 | טנגנס                                                                                                                   |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I<br>II<br>III | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$<br>$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ |
| סימנים         |  |                                      |                                      |

### זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}, \quad \begin{array}{|l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}$$

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

## משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

|                                                                                                                                                                                       |                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$                             | סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס |
| $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$ | סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

|                                                                                            |                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$                                                 | סינוס זווית כפולה   |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ | קוסינוס זווית כפולה |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- |                                     |                              |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1)   |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4)       | $4 \cos x = \sin 2x$ (3)     |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6)            | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8)      | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7)   |

### תשובות סופיות:

- |                                                                                                                                 |                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2)                                                                  | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4)                                                                | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3)                      |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6)                                                           | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5)       |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7)                                            |                                                       |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) |                                                       |

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

|                                                                                                                                                                                        |                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  | סכום והפרש פונקציות<br>עבור סינוס   |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | סכום והפרש פונקציות<br>עבור קוסינוס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

### תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

## משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

### סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה:  $\sin x = a \cos x$  לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$  (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$ ). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

### הערה:

יש לבדוק האם ערכי  $x$  שמקיימים  $\cos x = 0$  מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

## משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

### סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה:  $a \sin x + b \cos x = c$  לצורה:  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ .

מציאת זווית  $\alpha$  המקיימת:  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  תאפשר לכתוב:  $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ .

שימוש בזהות:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  וזהות:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן:  $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$  נקבל את המשוואה:  $\sin(x + \alpha) = k$  כאשר  $\alpha$  ו- $k$  ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

## משוואות עם תחום נתון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

### שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $8\sin x - 4 = 0$
- (2)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4)  $[0^\circ:360^\circ]$ ,  $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5)  $[-30^\circ:30^\circ]$ ,  $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

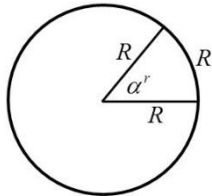
### תשובות סופיות:

- (1)  $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2)  $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3)  $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4)  $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5)  $x = 22.733^\circ$
- (6)  $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7)  $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8)  $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

## משוואות עם זוויות ברדיאנים:

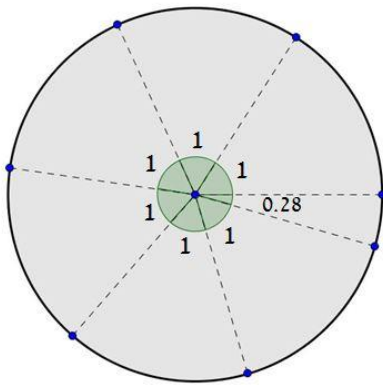
### סיכום כללי:

#### הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

#### קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

#### פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה                | הפתרון                                                  |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$                         |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |

כאשר  $k$  מספר שלם.

## שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

|                |                |                 |                  |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. $30^\circ$  | ב. $90^\circ$  | ג. $75^\circ$   | ד. $120^\circ$   |
| ה. $210^\circ$ | ו. $315^\circ$ | ז. $18^\circ$   | ח. $285^\circ$   |
| ט. $-15^\circ$ | י. $-80^\circ$ | יא. $510^\circ$ | יב. $-390^\circ$ |

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

|                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. $\pi$              | ב. $2\pi$             | ג. $4\pi$             | ד. $1.5\pi$           |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$   | ו. $\frac{\pi}{4}$    | ז. $\frac{\pi}{6}$    | ח. $\frac{1}{18}\pi$  |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

|                                                                                     |                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $2\sin 3x = 1$ , $\left[0; \frac{1}{3}\pi\right]$                                | ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$ , $[0; \pi]$                                                              |
| ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$ , $[0; 2\pi]$                                        | ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0; \pi]$                            |
| ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ , $\left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$ | ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}\right]$ |
| ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$ , $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$                   | ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$         |

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

|                                                                                   |                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ , $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$                     | ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$          |
| ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$ , $[0; \pi]$                                              | ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ |
| ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ , $[-\pi; \pi]$                                 |
| ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ , $[-\pi; 0]$                             | ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$ , $[0; 2\pi]$                                   |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א.  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{\pi}{6}$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג.  $\frac{5\pi}{12}$  ד.  $\frac{2\pi}{3}$  ה.  $\frac{7\pi}{6}$   
ו.  $\frac{7\pi}{4}$  ז.  $\frac{\pi}{10}$  ח.  $\frac{19\pi}{12}$  ט.  $-\frac{\pi}{12}$  י.  $-\frac{4\pi}{9}$   
יא.  $\frac{17\pi}{6}$  יב.  $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א.  $180^\circ$  ב.  $360^\circ$  ג.  $720^\circ$  ד.  $270^\circ$  ה.  $90^\circ$   
ו.  $45^\circ$  ז.  $30^\circ$  ח.  $10^\circ$  ט.  $130^\circ$  י.  $285^\circ$   
יא.  $210^\circ$  יב.  $405^\circ$
- (3) א.  $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$  ב.  $x = \frac{5\pi}{6}$  ג.  $x = \frac{\pi}{2}$  ד.  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
ה.  $x = 0$  ו.  $x = \frac{2\pi}{9}$  ז.  $x = 0.0875\pi$  ח.  $x = 0.224\pi$
- (4) א.  $x = \frac{\pi}{3}$  ב.  $\phi$  ג.  $x = 0.398\pi, 0.602\pi$  ד.  $\phi$   
ה.  $x = 0, 0.437\pi$  ו.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$   
ז.  $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$  ח.  $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א.  $x = \frac{\pi}{8}$  ב.  $x = 0, 0.42\pi, \pi$  ג.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$  ב.  $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א.  $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$  ב.  $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$   
ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3}$  ד.  $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$   
ה.  $x = \pm \frac{\pi}{3}, 0$  ו.  $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$

## אי שוויונים טריגונומטריים:

### סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
  2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
  3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
    - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
    - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
  4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

### הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- |                                                               |                                                       |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| (1) $[0, 180^\circ] \sin x < \frac{1}{2}$                     | (2) $[0, 1.5\pi] 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$           |
| (3) $(-90^\circ, 90^\circ) 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$         | (4) $[0, \pi] \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$         |
| (5) $[0^\circ, 180^\circ] 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ | (6) $(0 < x < \pi) \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$    |
| (7) $[0, 2\pi] \tan x + \cot x > 0$                           | (8) $(-\pi < x < \pi)  \tan(x)  > \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

# מבוא לחדו"א

פרק 9 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 116
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 124
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 133
4. שאלות מסכמות ..... 137

## שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

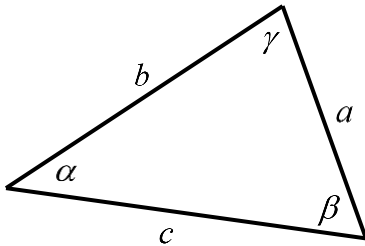
### סיכום כללי:

#### משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:



#### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

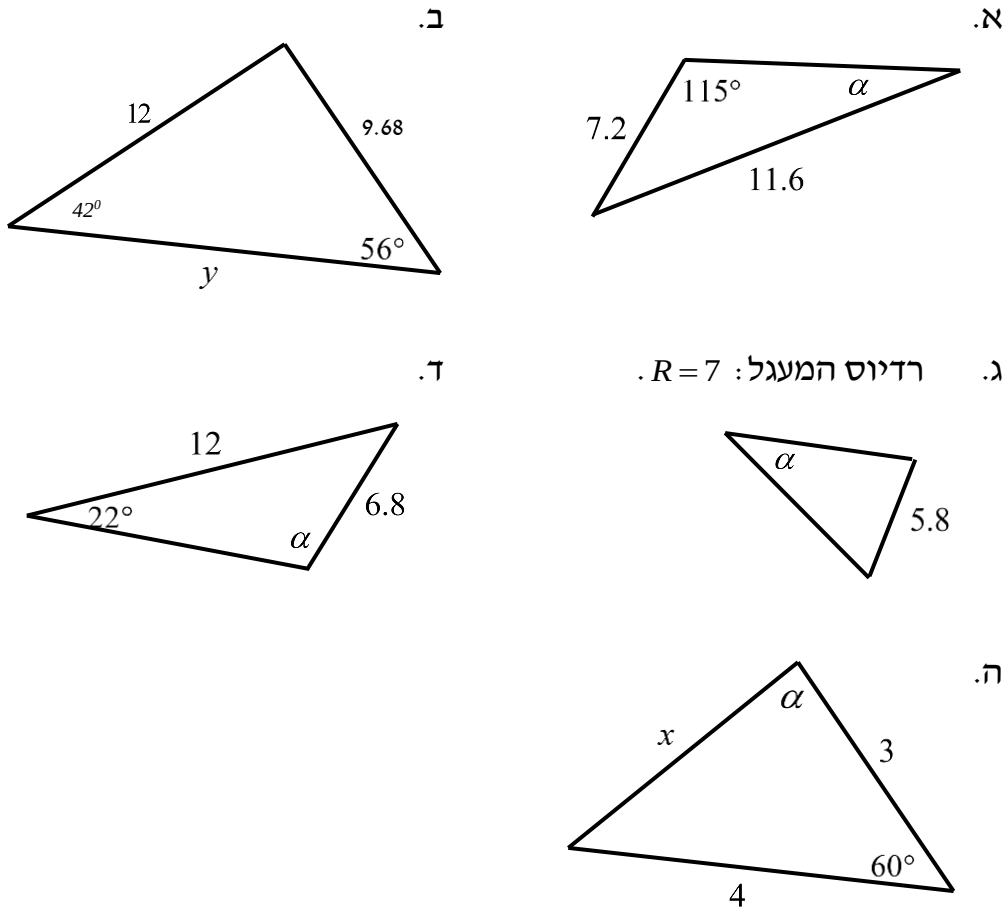
בקוסינוס הזווית שבניהן:

#### מתי נשתמש בכל משפט:

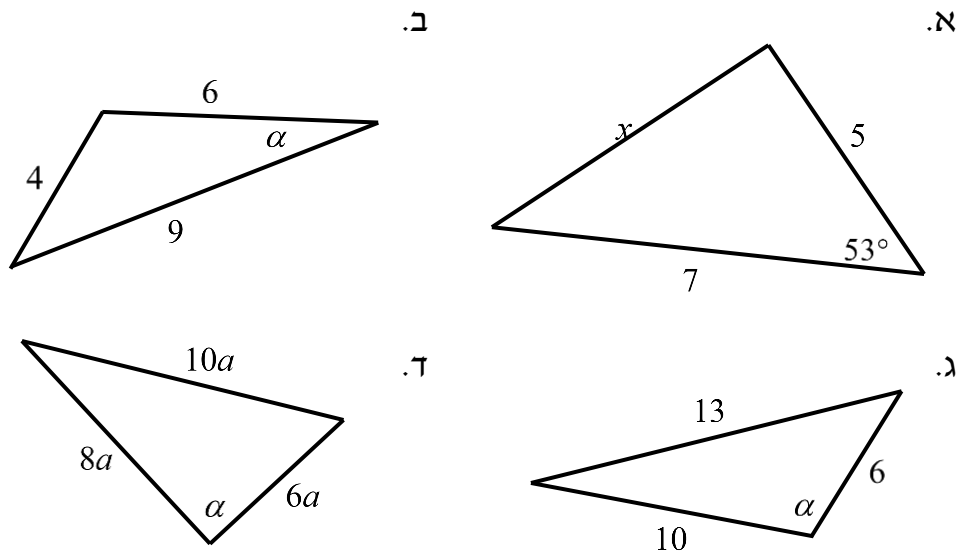
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי זוויות וצלע.
  - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

## שאלות:

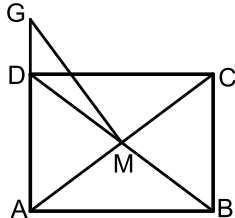
(1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים  
( $R$  הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



(2 מצא את ערכו של  $a/x$  במשולשים הבאים:

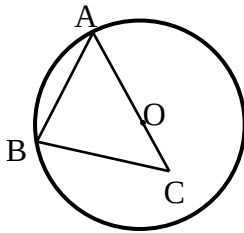


- (3) נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .  $CD$  הוא חוצה זווית הבסיס  $\angle C$ . מצא את אורכו של הקטע  $AD$ .



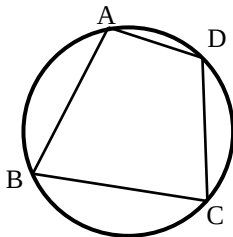
- (4) אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $M$ . הנקודה  $G$  נמצאת על המשך הצלע  $AD$ . נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ. מצא את גודלו של הקטע  $GM$ .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

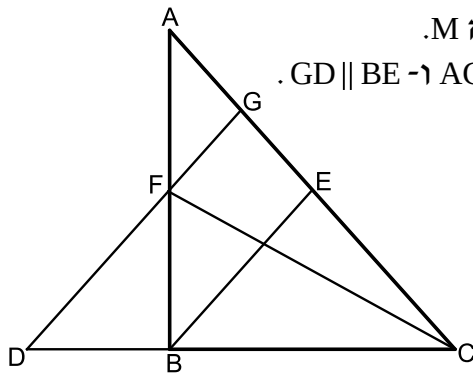


- (6) הצלע  $AB$  במשולש  $ABC$  היא מיתר במעגל שמרכזו  $O$ . הצלע  $AC$  עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע  $AB$ .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע  $ABCD$  חסום במעגל. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ, ו- $AD = 4$  ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון  $AC$  ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

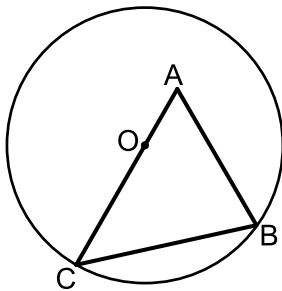
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים:  $AC = DC$  ו- $GD \parallel BE$ .

א. הוכח:  $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$ .

ב. נתון כי:  $ME = 4$  ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי:  $\angle ACD = 48.189^\circ$ . הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

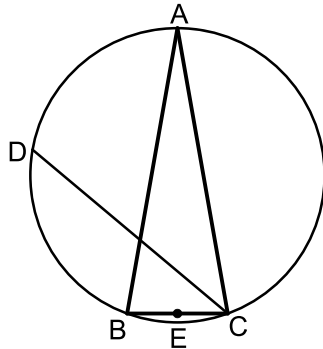
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא  $60^\circ$ .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

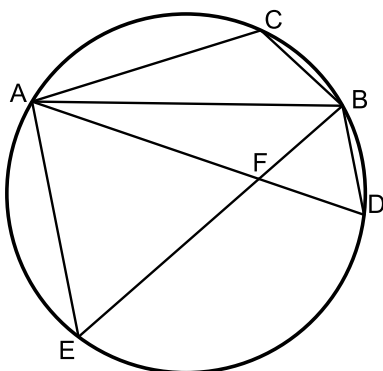
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$ . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא  $80^\circ$ .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב.  $r$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את  $r$ .

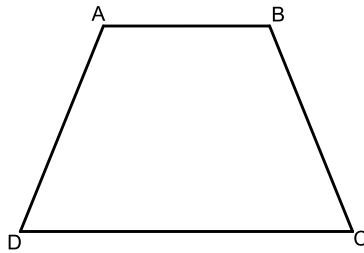
12)  $AB$ ,  $AC$  ו- $AD$  הם מיתרים במעגל המקיימים:  $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ . מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים BE ו-AE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי:  $AC = AF = EF$ .



א. הוכח:  $\triangle ABF \cong \triangle ABC$ .

ב. נתון גם:  $3 \cdot \angle CAB = \angle DAE$ . הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).



מידות הטרפז הן:

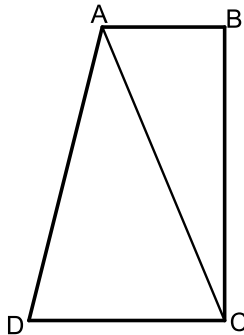
$AB = 6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,  $CD = 12$  ס"מ.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).



מסמנים את הבסיס:  $AB = t$  וידוע כי:  $AD = 3t$ ,  $DC = 1.6t$ .

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

א. הבע באמצעות  $t$  את אורך האלכסון AC.

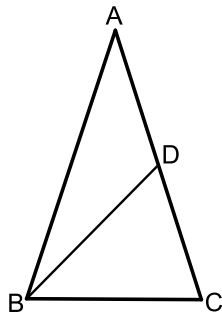
ב. ידוע גם כי:  $\angle D = 60^\circ$ .

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

**15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) בעל זווית

ראש  $36^\circ$  החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

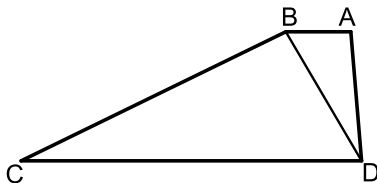
ג. מסמנים:

$r_1$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא:  $\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$ .

**16** המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).



מעבירים את האלכסון BD המקיים:  $\angle BCD = \angle ADB$ .

נתון כי:  $AB = 5$  ס"מ,  $AD = 10$  ס"מ,  $CD = 20$  ס"מ.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי:  $\angle D = 90^\circ$ .

נסמן את הצלעות באופן הבא:  $AB = 6x$ ,  $BC = 5x$ ,  $CD = 8x$ ,  $AD = 3x$ .

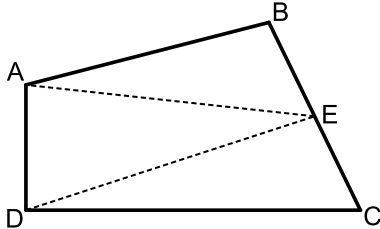
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא:  $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$ .



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$ .

המשולש COD הוא ישר זווית  $\angle CDO = 90^\circ$ .

נתונים האורכים:  $BO = 9$ ,  $DO = 10$ .

מסמנים:  $BC = 1.4m$ ,  $CD = 1.5m$ .

א. הבע באמצעות  $m$  את  $\sin \alpha$ .

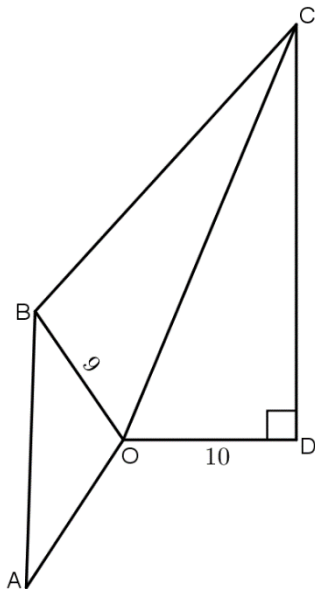
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי:  $AB = m$ .

מצא את  $m$  אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא  $8\frac{2}{3}$ .

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת  $60^\circ$ .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית:  $\angle ADB = 60^\circ$ .

ידוע כי  $AB = \sqrt{28}$  וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

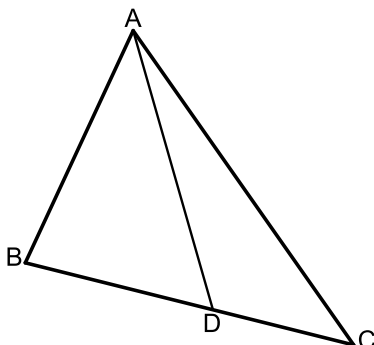
ב. היקף המשולש ABC הוא:  $P = 5\sqrt{7} + 7$ .

i. סמן:  $DC = t$  והבע באמצעות  $t$

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את  $t$ .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E, C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

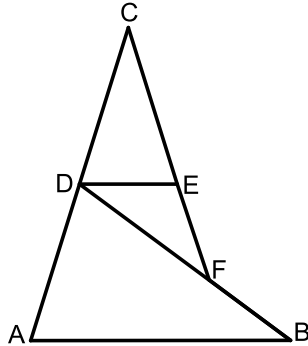
שווי שוקיים ( $AB = BD$ ,  $DC = CE$ ,  $EF = DE$ ).

נתון כי:  $AD = 8$ .

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

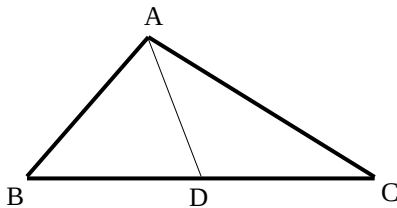
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $AC = 8$  ס"מ,

$AD = 5$  ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



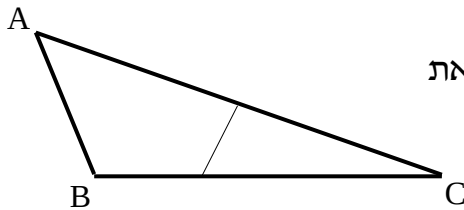
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים  $DC = 2BD$ .

נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ .

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

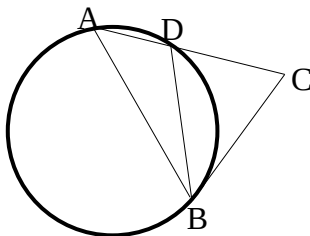


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle ADB = \beta$ .

הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

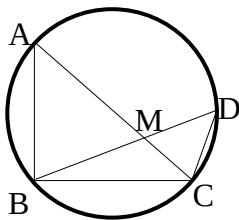


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה.

נתון:  $AB = k$ ,  $DM = p$ ,  $DC = q$ .

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



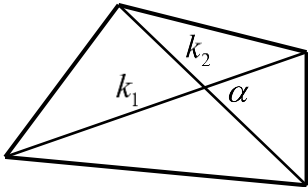
## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\alpha = 34.231^\circ$  ב.  $y = 14.33$  ס"מ ג.  $\alpha = 155.526^\circ$  או  $\alpha = 24.474^\circ$
- (2) א.  $x = 5.646$  ס"מ ב.  $\alpha = 20.742^\circ$  ג.  $\alpha = 105.962^\circ$  ד.  $\alpha = 90^\circ$
- (3)  $AD = 13.064$  ס"מ
- (4)  $GM = 3.360$  ס"מ
- (5)  $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$
- (6)  $R = 9.242$  ס"מ,  $AB = 14.56$  ס"מ
- (7)  $P = 22$  ס"מ
- (8)  $R = 5.395$  ס"מ,  $AC = 10.790$  ס"מ
- (9)  $DG = 18$
- (10)  $R = 10.5$  ס"מ ב.  $24.32^\circ$
- (11) א.  $DE = 1.48R, CD = R\sqrt{3}$  ב.  $r = 1.15R$
- (12) א.  $68^\circ$  ב.  $11.66$  ס"מ ג.  $R = 6.29$  ס"מ
- (13) א.  $9.4$  ס"מ ב.  $10$  ס"מ
- (14) א.  $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$  ב.  $i. 13$  ס"מ ii.  $78$  סמ"ר
- (15) א.  $9.4$  ס"מ ב.  $10$  ס"מ
- (16) א.  $\angle C = 28.9^\circ$  ג.  $R = 13.77$
- (17) א.  $64.04^\circ$  ב.  $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$
- (18) א.  $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$  ב.  $m = 16$  ג.  $56.94^\circ$
- (19) א.  $4$  ב.  $i. 1.5\sqrt{28} + 3 - t$  ii.  $3$  ג.  $S = 18.18$
- (20) א.  $4.94$  ס"מ ב.  $17.19$  ס"מ
- (21)  $BC = 10$  ס"מ
- (22)  $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$
- (23)  $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$
- (24)  $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

## שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

### סיכום כללי:

#### שטחים של משולשים ומרובעים:

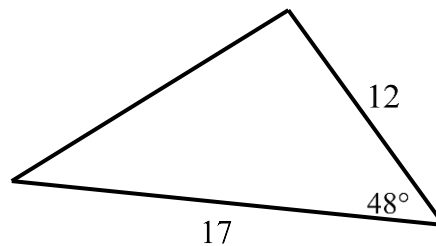


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

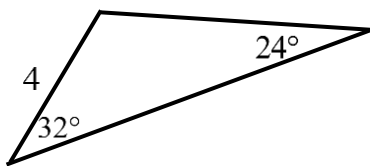
### שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של  $15^\circ$  עם הבסיסים.

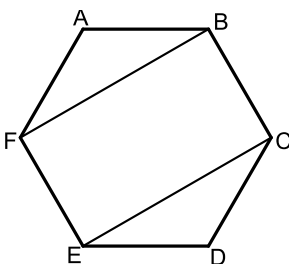
27) אורכו של מלבן הוא  $m$  ורוחבו  $n$ . הזווית שבין אלכסוני המלבן היא  $\theta$ .

$$\text{הוכח כי מתקיים: } \sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

28) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $BD$  חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש  $BCD$ .



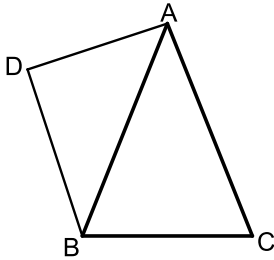
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא  $S$ .

א. הבע באמצעות  $S$  את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן  $BFEC$ .

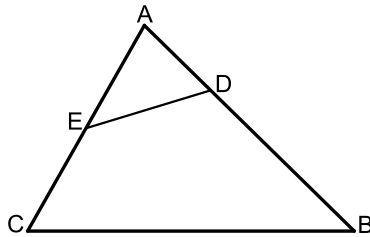
הבע באמצעות  $S$  את שטח המלבן.

**30** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש  $\alpha$ ,  $(AB = AC)$ . אורך הבסיס BC הוא  $k$ .



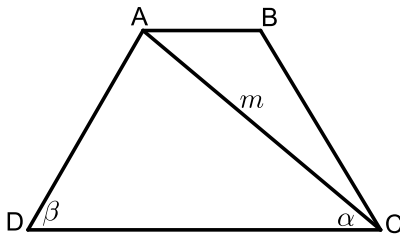
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו  $\angle D = 90^\circ$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך שוק המשולש ABC.
  - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ .
  - וכי:  $\angle ABD = 40^\circ$ . מצא את זוויות המשולש ABC.
  - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי  $k = 6$ .

**31** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת:  $AD = 3$  ס"מ.



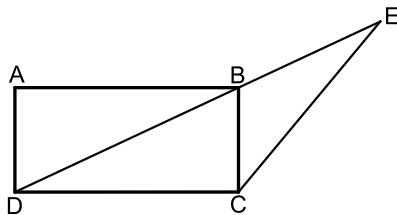
- ידוע כי:  $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ .
- מצא את אורך הקטע DE.
  - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
  - חשב את שטח המרובע BCED.

**32** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

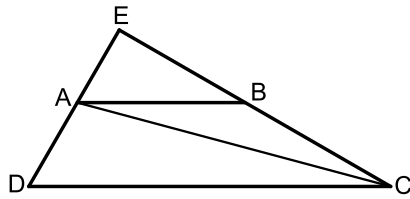


- מסמנים:  $AC = m$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ .
- הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את אורך הבסיס הגדול DC.
  - נתון כי האלכסון AC מקיים:  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$ .
  - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את הבסיס AB.
  - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  ו- $m = 8$ .

**33** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



- מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C. ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא  $115^\circ$ .
- מצא את אורך הקטע CE.
  - מצא את אורך האלכסון BD.
  - חשב את שטח המשולש DCE.



34) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).

ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם

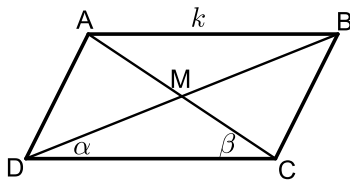
בנקודה E. ידוע כי:  $DE \perp CE$ .

מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C. מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$  ואת:  $\angle ACD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $12 \text{ ס"מ} = k$ .



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים

את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים:  $AB = k$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ .

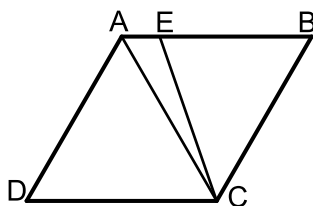
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:  $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי:  $\frac{AC}{BD} = 2$ . הראה כי שטח המקבילית הוא:  $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו  $\angle D = 60^\circ$ .

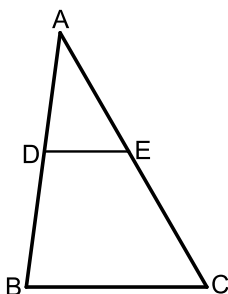
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס:  $\frac{BE}{AE} = 4$ .

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

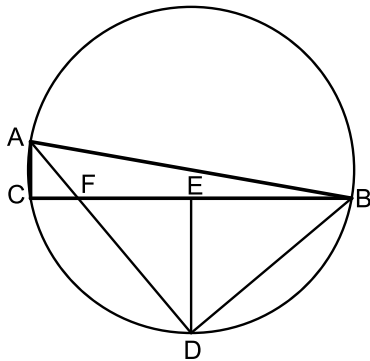
נתון כי:  $BC = 15$ ,  $CE = 13$ ,  $BD = \sqrt{129}$ .

ידוע כי זווית AED היא  $60^\circ$ .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.



**(38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

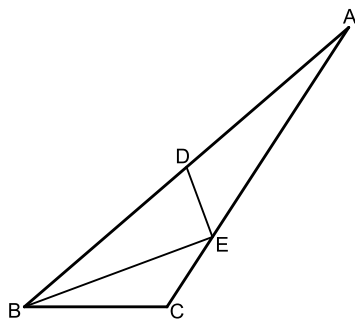
מסמנים:  $DE = k$  ונתון כי:  $\angle ABC = 10^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות  $k$  את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את  $k$  אם ידוע כי שטח המשולש ABF

הוא 15.363 סמ"ר.



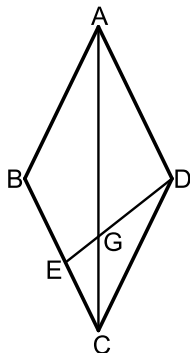
**(39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת:  $DE = CE$ .

ידוע כי:  $BC = 6$ ,  $BE = 8$ ,  $BD = 9$ .

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



**(40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

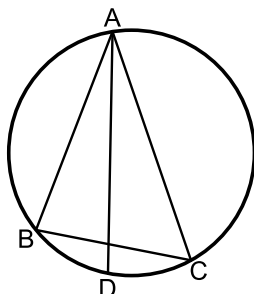
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא  $m$ .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .

i. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש EGC.



**(41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

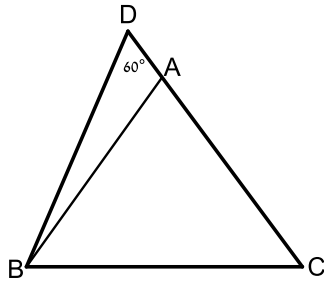
ידוע כי:  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ .

מסמנים:  $AD = k$ .

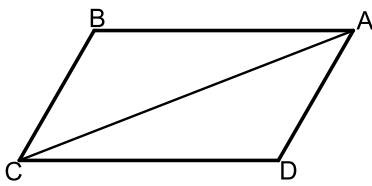
א. הבע באמצעות  $k$  את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

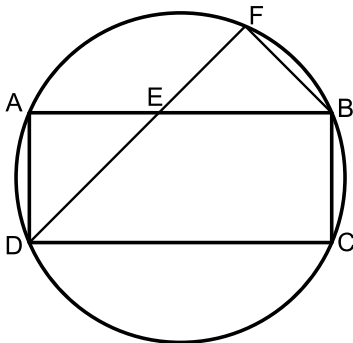
מצא את  $k$  (עגל למספר שלם).



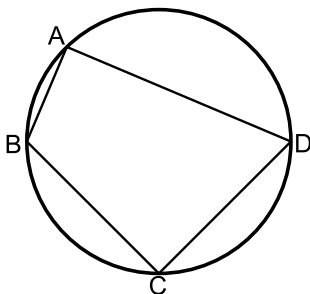
- 42** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי:  $\angle D = 60^\circ$ . אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ. א. מצא את אורך הקטע AD. ב. חשב את שטח המשולש ABC.



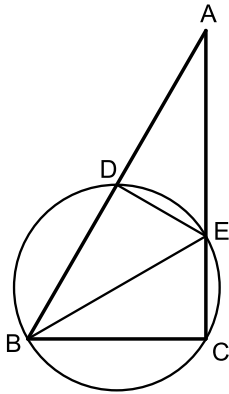
- 43** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא  $\sqrt{79}$  ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי:  $\angle B = 120^\circ$ . א. מצא את אורכי צלעות המקבילית. ב. חשב את שטח המקבילית. ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- 44** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהנקודה D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ . הצלע AD של המלבן תסומן ב-a. א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים. ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ . i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל. ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות:  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  (אין צורך לסרטט אותן).



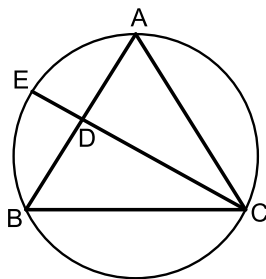
- 45** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי:  $AB = b$ ,  $BC = a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3b$ . א. הבע באמצעות a ו-b את  $\cos \angle BCD$ . ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים:  $a = b\sqrt{5}$ . ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



- (46) המשולש ABC הוא ישר זווית  $\angle C = 90^\circ$  ובו:  $\angle B = 2\alpha$ .  
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C  
 אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.  
 המיתר BE חוצה את זווית B.  
 א. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABE.  
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים  
 וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש ABE.

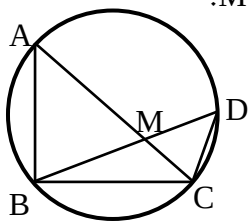
- (47) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$ , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}} : \text{הוכח כי שטח המשולש ADE הוא}$$



- (48) נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) החסום במעגל.  
 מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.  
 ידוע כי E היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$  והיחס בין  
 הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.  
 מסמנים:  $\angle ACD = \alpha$ .

- א. מצא את זוויות המשולש ABC  
 (עגל למספרים שלמים).  
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי  
 רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49) BD ו-AC הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.  
 זווית B היא זווית ישרה.  
 נתון:  $\angle MCB = \beta$ ,  $\angle MBC = \alpha$ .

- א. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש BDC.

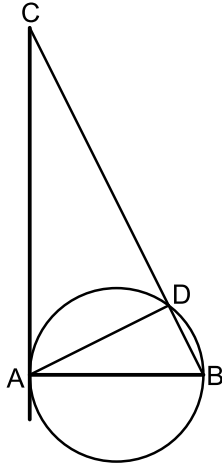
$$S_{BDC} = \frac{1}{2} R^2, \beta = 2\alpha : \text{נתון}$$

- ב. חשב את  $\alpha$ .

(50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא  $b$  והזווית שליד הבסיס הגדול היא  $\gamma$  נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות  $\gamma$  ו- $b$  את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את  $\gamma$  אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי  $\sqrt{3}$  מהבסיס הקטן.



(51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו  $R$  ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

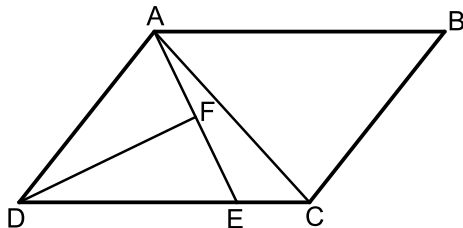
מסמנים:  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



(52) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים:  $3CE = DE$ .

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי:  $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$ .

מסמנים:  $CE = k$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא  $4.5k$ . מצא את  $\alpha$ .

### תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(27) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 67.78^\circ, 67.78^\circ, 44.4^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad AB = 3 \text{ ס"מ} \quad BC = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ג.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

$$R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a \quad \text{ב.י. (43)}$$

$$\text{ב.ii. } 45^\circ, 135^\circ$$

$$\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2} \quad \text{א. (44)}$$

$$\text{ג. } 14.4 \text{ סמ"ר} = S$$

$$S = R^2 \tan 2\alpha \quad \text{א. (45)}$$

$$\text{ב. } 36\sqrt{3} \text{ סמ"ר} = S$$

$$58^\circ, 58^\circ, 64^\circ \quad \text{א. (48)}$$

$$\text{ב. } BE = 7.75$$

$$S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta) \quad \text{א. (49)}$$

$$\text{ב. } \alpha = 22.5^\circ$$

$$\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} \quad \text{א. (50)}$$

$$\text{ב. } \gamma = 75^\circ$$

$$S = R^2 \sin 2\alpha \quad \text{א. (51)}$$

$$\text{ב. } S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{ג. } \alpha = 26.56^\circ$$

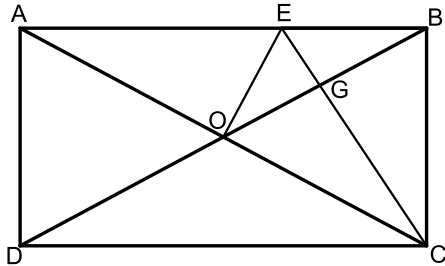
$$AE = 6k \sin \alpha \quad \text{א. (52)}$$

$$\text{ב. } P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$$

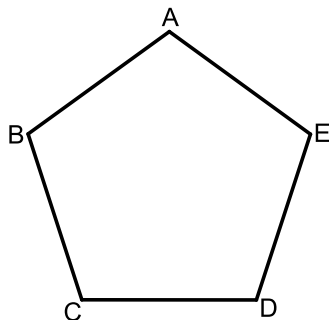
$$\text{ג. } \alpha = 14.47^\circ$$

## שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

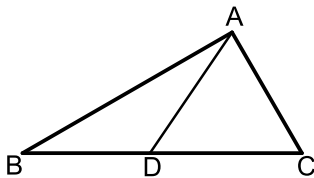
### שאלות:



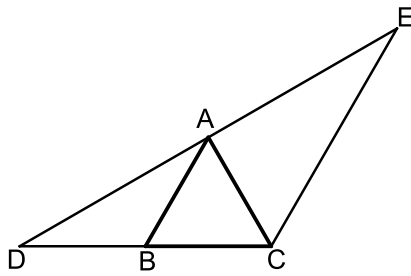
- 53) המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש-  $2BE = AE$ .  
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.  
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.  
 ב. הוכח כי מתקיים:  $4GE = AE$ .  
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.  
 חשב את שטח המלבן ABCD.



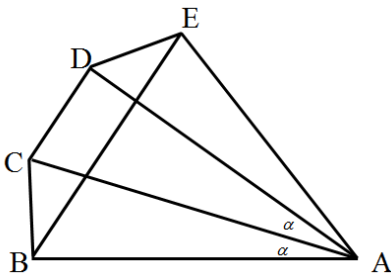
- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן  $108^\circ$ ) בעל אורך צלע  $\alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את אלכסון המחומש AD.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המחומש.  
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המחומש.



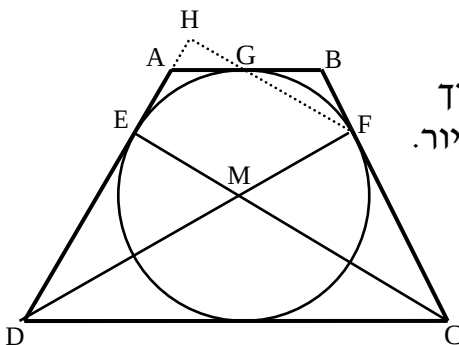
- 55) במשולש ABC הזווית C היא  $60^\circ$ .  
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.  
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא:  $R_1 = \sqrt{3}$  ס"מ.  
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא:  $R_2 = 3$  ס"מ.  
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
 ב. היקף המשולש ABC הוא:  $12 + 4\sqrt{3}$  ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש.



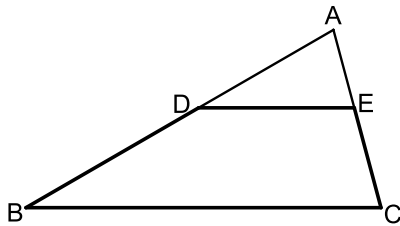
- 56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.  
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים  
 שני משולשים ABD ו-ACE.  
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.  
 א. הוכח:  $AB \parallel CE$ .  
 ב. הוכח:  $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .  
 ג. נתון:  $DC = 8$  ס"מ.  
 וכי:  $AC \perp DE$ .  
 i. חשב את שטח המשולש DCE.  
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.



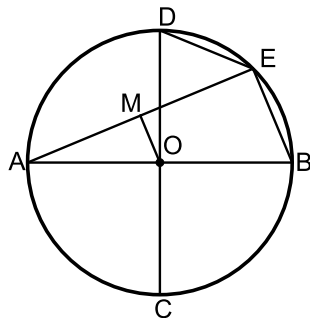
- 57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE.  
 כך שמתקיים:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  ו- $AB = AE$ .  
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.  
 מתקיים:  $BE \parallel CD$ .  
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.  
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.  
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ( $AC = AD$ ).  
 הוכח כי:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .  
 ג. ידוע כי:  $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$  ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$ .  
 הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.  
 ד. נסמן:  $AB = m$ .  
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.  
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.  
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).



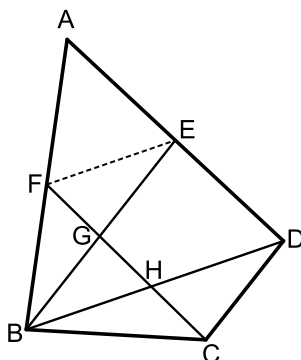
- 58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו-H כמתואר באיור.  
 הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.  
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.  
 ב. חשב את זוויות הטרפז.  
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.  
 חשב את היחס  $\frac{EM}{FH}$ .



- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז  $BC \parallel DE$ . המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ ). נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .  
 א. סמן את אורך הבסיס DE ב- $x$  ואת שטח הטרפז BDEC ב- $S$ .  
 הבע את  $S$  באמצעות  $x$ .  
 ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.  
 חשב את היחס:  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ .



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת:  $BE + DE = 15$  ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.  
 א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.  
 ב. מצא את אורך המיתר BE.  
 ג. מצא את רדיוס המעגל.  
 ד. חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$ . נתון כי הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle BFE$  משלימות ל- $180^\circ$ .  
 א. הוכח:  $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$ .  
 ב. נתון כי:  $BE = 7.5$  וכי:  $GE - HD = 17\frac{1}{15}$ . חשב את אורך הקטע FE.  
 ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא:  $R = 4.001$  ס"מ. מצא את זווית  $\angle EBD$ .

## תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א.  $1.618\alpha$

ב.  $0.85\alpha$  ג.  $1.72\alpha^2$  ד.  $S = 85.57$

(55) ב.  $S = 8\sqrt{3}$

(56) ג. i.  $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$  ii.  $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד. i.  $BC = 0.4663m$ ,  $DE = 0.4663m$ ,  $CD = 0.4776m$ ,  $BE = 1.2175m$

(62) ד. ii.  $0.7232m^2$  iii.  $m = 8$  ס"מ

(58) ב.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  ג.  $\frac{2}{3}$

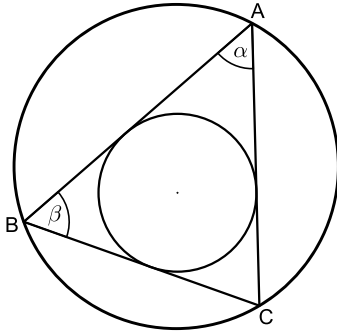
(59) א.  $S = 81 - 0.25x^2$  ב.  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(60) ב.  $BE = 10$  ג.  $R = 13$  ד.  $\angle B = 67.38^\circ$

(61) ב.  $FE = 4$  ג.  $16.73^\circ$

## שאלות מסכמות:

### שאלות:



(1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו  $R$ .

נתון כי  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .

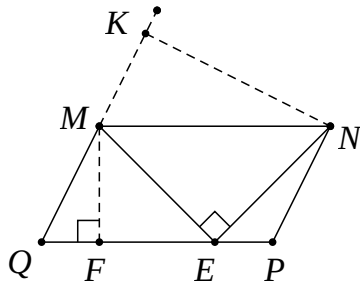
א. הבע את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ .

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $R$ .

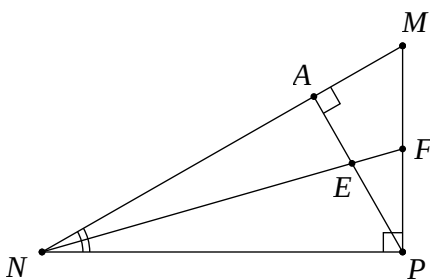


(2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על

הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור).

נתון:  $12$  ס"מ  $MQ$ ,  $\angle MNE = 40^\circ$ ,  $\angle MQP = 70^\circ$ .

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



(3) במשולש ישר-זווית MNP, ( $\angle P = 90^\circ$ )

PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה

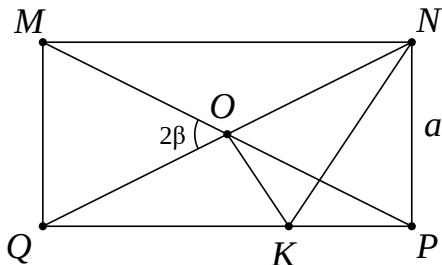
את הזווית  $\angle MNP$ .

PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון:  $24$  ס"מ  $NP$ ,  $\angle MNP = 40^\circ$ .

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



(4) אלכסוני המלבן MNQP נחתכים בנקודה O.

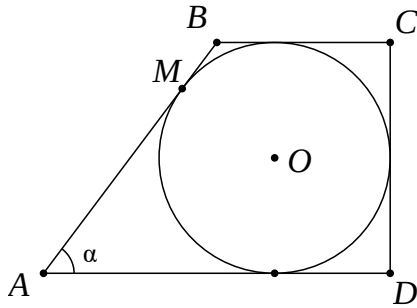
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך

את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון:  $\angle MOQ = 2\beta$ ,  $NP = a$ .

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .



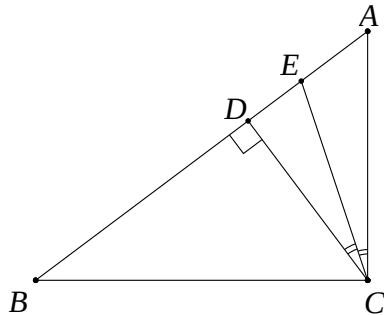
(5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון:  $AM = 12$  ס"מ,  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .



(6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 8$  ס"מ

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית  $\angle ACD$ .

הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

(7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

(8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

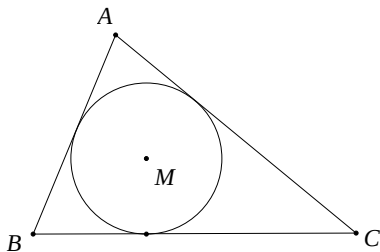
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).

א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



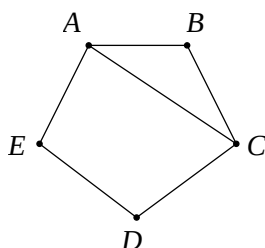
(9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון:  $\angle B = 62^\circ$ ,  $\angle C = 46^\circ$ .

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

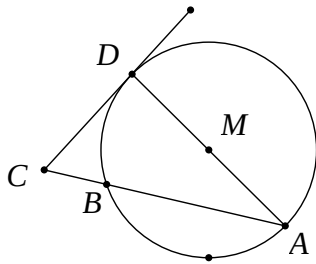
ב. נתון:  $BC = 16$  ס"מ. מצא את r.



(10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

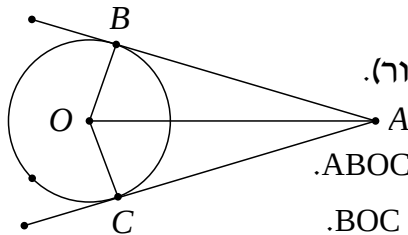
חשב את שטח המחומש.



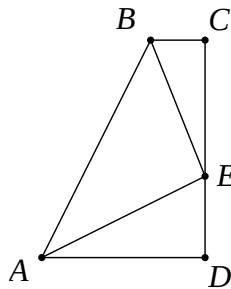
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.  
 ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



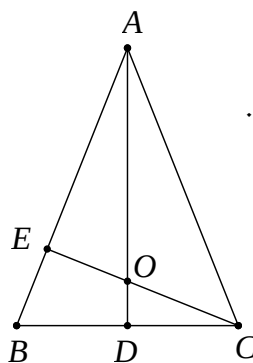
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.  
 ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ).  
 נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$ , ו- $\angle CBE = \beta$ .  
 הבע באמצעות  $k$  ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

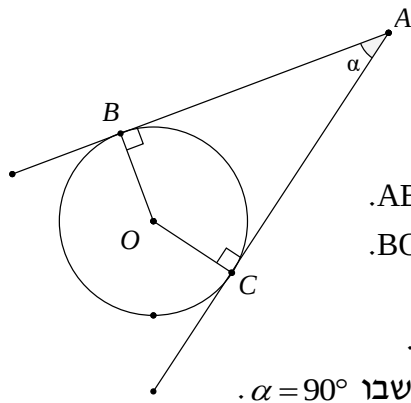
- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.  
 מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.  
 ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.  
 מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

- א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CO ו-CE.  
 ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ , והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



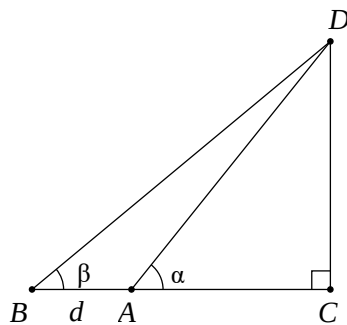
**16** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם  $m$  (כלומר:  $AB = AC = m$ ). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$  (ראה ציור).

א. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



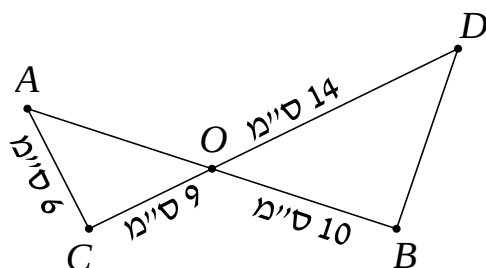
**17** במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ .

מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ .

נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור).

סמן:  $AC = x$ .

הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



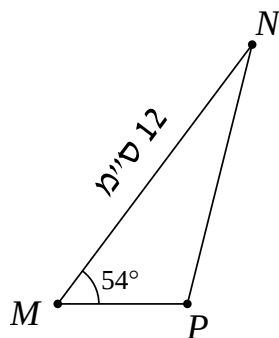
**18** הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.

נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,

$AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,

$OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ.

חשב את  $\angle ODB$ .



**19** במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ .

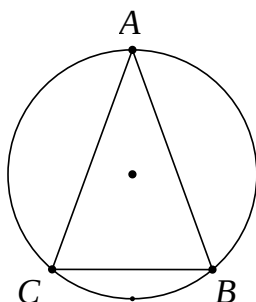
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.



**20** המשולש השווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ )

חסום במעגל (ראה ציור).

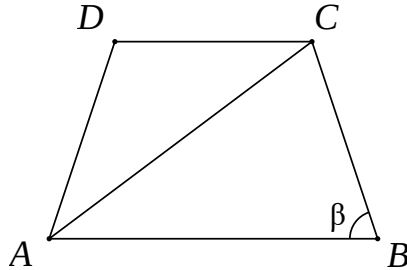
נתון:  $\angle ABC = \beta$ .

כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

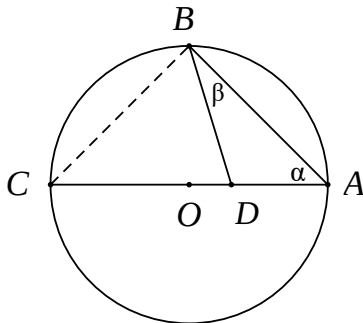
א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

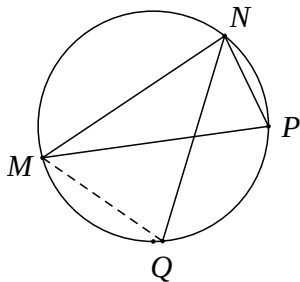
- (21) במשולש ABC הזווית  $\angle C$  היא  $60^\circ$ , אורך הצלע AB הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



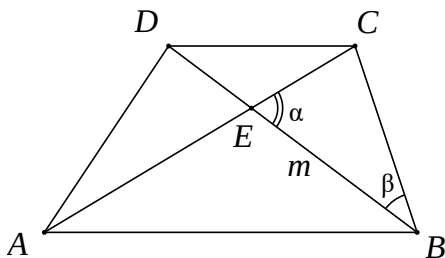
- (22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ), (ראה ציור). הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



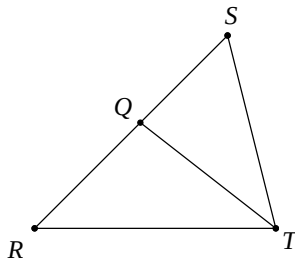
- (23) הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



- (24) משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית  $\angle MNP$ . נתון:  $\angle MPN = 70^\circ$ ,  $\angle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



- (25) נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  $\angle CBD = \beta$ ,  $\angle CEB = \alpha$  (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  $\angle RTS$

(ראה ציור),  $RQ = \sqrt{2}$ ,  $QS = m$ ,

$\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .

א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .

ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

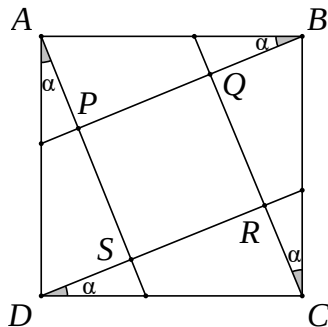
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$ .

א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

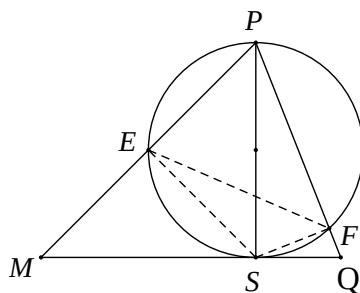
קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

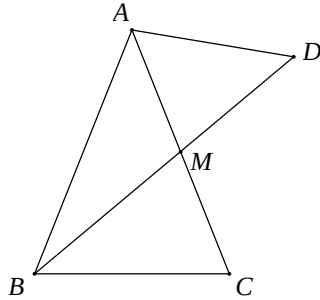
ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**(31)** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**(32)** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

**(33)** משולש שווה שוקיים BCE ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא  $\alpha$ .

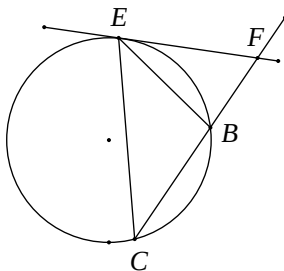
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

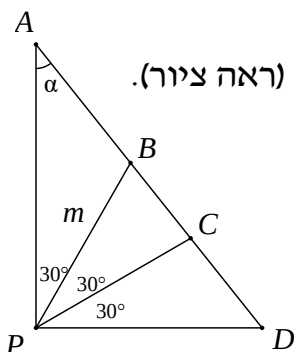


**(34)** בטרפז BCDE ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא  $80^\circ$ .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .

חשב את היקף הטרפז.



**(35)** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$

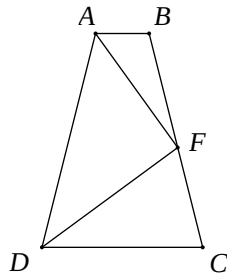
לשלוש זוויות שוות, כלומר  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$  (ראה ציור).

נתון כי:  $PB = m$ ,  $\angle PAD = \alpha$ .

א. היעזר במשפט הסינוסים,

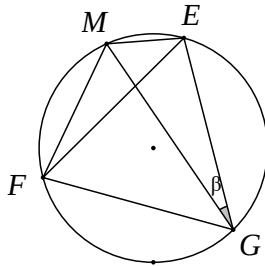
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- $\alpha$ .

ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$ .



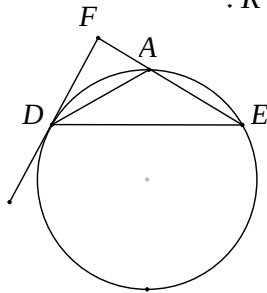
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),

F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את הזווית  $\angle CDA$  ו-AF חוצה את הזווית  $\angle DAB$  (ראה ציור). נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $AB = b$ . הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס DC.



37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל. נתון:  $\angle MGE = \beta$  (ראה ציור).

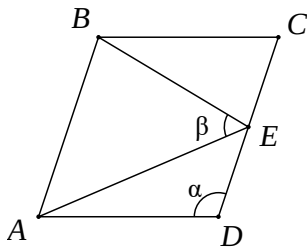
א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$ .  
 ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על  $\angle MGE$ ?



38) משולש שווה שוקיים ADE ( $AD = AE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון:  $\angle ADE = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

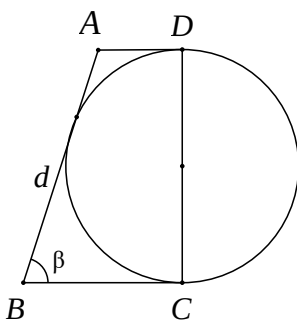
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- $\alpha$ .  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.  
 ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון:  $\angle AEB = \beta$ ,  $\angle ADC = \alpha$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$ .



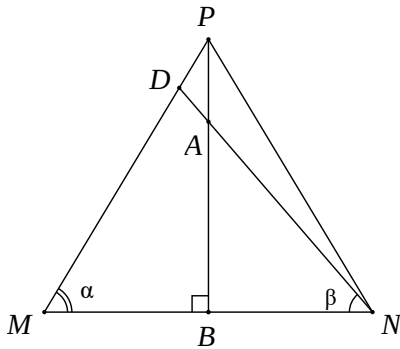
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי:  $AB = d$ ,  $\angle B = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $d$  את סכום בסיסיו של הטרפז.  
 ב. הבע באמצעות  $d$  ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



41) במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),

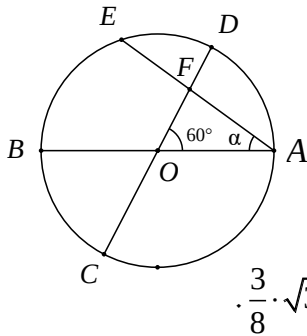
A היא נקודה על הגובה  $PB$ , כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .

הישר  $NA$  חותך את השוק  $PM$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle DNM = \alpha$ ,  $\angle DNB = \beta$  ו-  $BN = \alpha$ .

א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .

ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני

קטרים  $AB$  ו-  $CD$  הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .

מיתר  $AE$ , היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר  $AB$ ,

חותך את הקוטר  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש  $ACF$  באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .

ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש  $ACF$  הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

## תשובות סופיות:

$$\text{א. } r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (1)$$

$$\text{ב. } \frac{1}{2} R$$

$$\text{א. } 11.28 \text{ ס"מ}, \text{ ב. } 21.52 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$\text{א. } 18.385 \text{ ס"מ}, \text{ ב. } 5.975 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$\text{א. } OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad (4)$$

$$\text{ב. } \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$$

$$\text{א. } 12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

$$\text{ב. } 24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$\text{א. } AE = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$\text{א. } -2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad (8)$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$\text{א. } BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad (9)$$

$$\text{ב. } r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$\text{א. } \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ \quad (11)$$

$$\text{ב. } S \approx 0.0495 \cdot R^2$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad (12)$$

$$\text{ב. } S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\text{א. } S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad (13)$$

$$\text{ב. } 27 \text{ יח"ש.}$$

$$\text{א. } r \approx 5.548 \text{ ס"מ}, \text{ ב. } S \approx 90.45 \text{ סמ"ר} \quad (14)$$

$$\text{א. } CE = 2a \cdot \sin \beta, \text{ ב. } CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad (15)$$

$$\text{ב. } \frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\triangle ABOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} : \text{יחס השטחים}$$

ד. במקרה זה  $\triangle ABOC$  הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\angle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א.} \quad (20) \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta : \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א.} \quad (23) \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א.} \quad (26) \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \quad \text{או} \quad \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א.} \quad (30) \quad \text{ב. i. } \angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.} \quad (31)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad (31) \quad \text{א.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad (32) \quad \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad (34)$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad (36)$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$. S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$

# מבוא לחדו"א

## פרק 10 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות ..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה ..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום ..... (ללא ספר)

# מבוא לחדו"א

## פרק 11 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

### תוכן העניינים

|     |                                     |
|-----|-------------------------------------|
| 149 | 1. תחום הגדרה של פונקציה            |
| 151 | 2. הרכבת פונקציות                   |
| 154 | 3. הפונקציה ההפוכה                  |
| 158 | 4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית  |
| 163 | 5. פונקציה מחזורית                  |
| 166 | 6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית |
| 167 | 7. תרגילים משולבים                  |

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

## תשובות סופיות

(1) כל  $x$ .

(2)  $x \neq \pm 2$

(3) כל  $x$ .

(4)  $x \neq 0, 1, -1$

(5)  $x \neq 2, -1$

(6)  $x \geq 4$

(7)  $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל  $x$ .

(9)  $-1 < x < 1$

(10)  $x < -2, x > 1$

(11)  $x > 0, x \neq 1$

(12) כל  $x$ .

(13)  $x > 0, x \neq 1$

(14)  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15)  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל  $x$ .

(17)  $3 < x < 5$

(18)  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות:  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

2) נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x = 3$ .

3) נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x = 8$ .

4) נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

5) נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = 2$ .

6) נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

7) נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ו-  $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג.  $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על. הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

- 16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  חח"ע. הוכיחו או הפריכו:
- $g$  על.
  - $f$  על.
  - $g$  חח"ע.
  - $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיימת  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

**(13) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**(14) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**(15) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.**

- נגדיר  $z(x) = (f(x))^n$  כאשר  $n > 1$  טבעי.  
קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**(16) נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .**

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי  $f_{\text{odd}}(x)$  היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי  $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :**

- א. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- ב. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב-  $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**(18)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.
- ב. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.
- ג. הפונקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.
- ד. הפונקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**(19)** נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

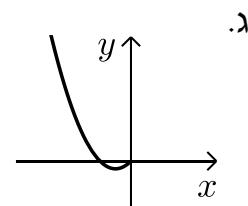
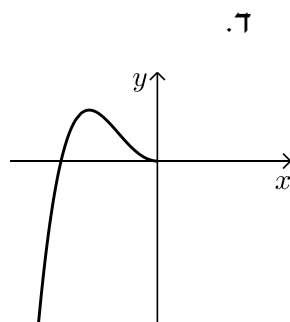
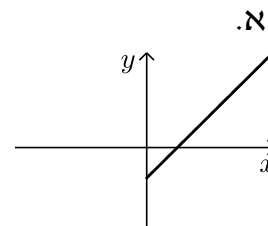
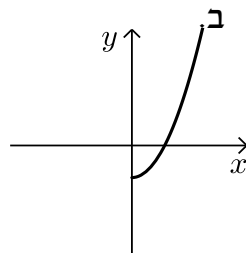
הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.

**(20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

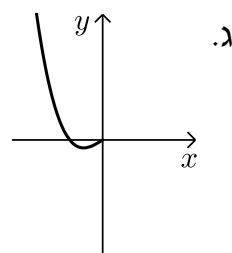
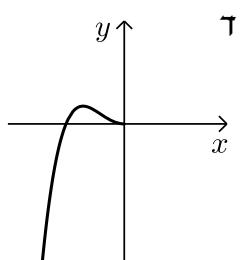
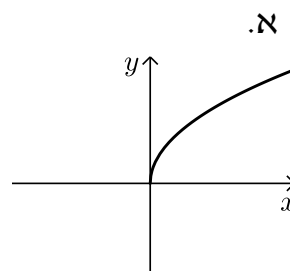
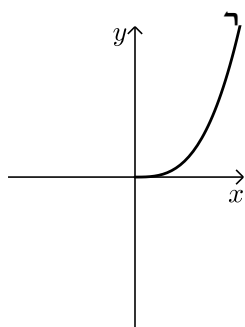
א.  $y = \arctan x$

ב.  $y = \arcsin x$

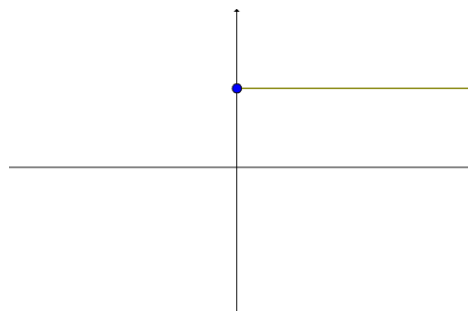
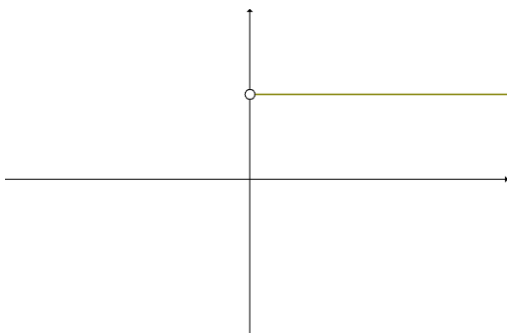
**(21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



**22** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



**23** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



## תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר  $n$  זוגי – זוגית, וכאשר  $n$  אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג.  $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

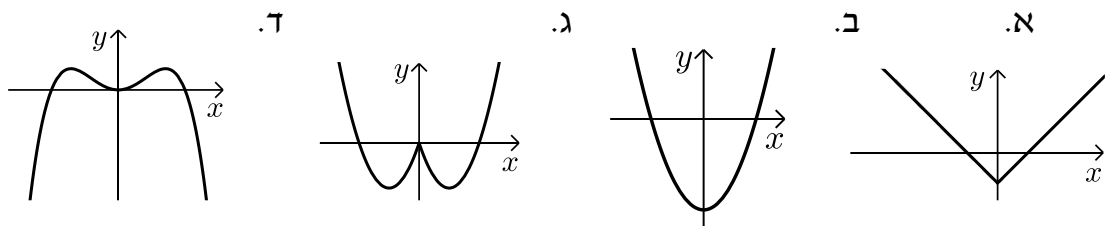
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

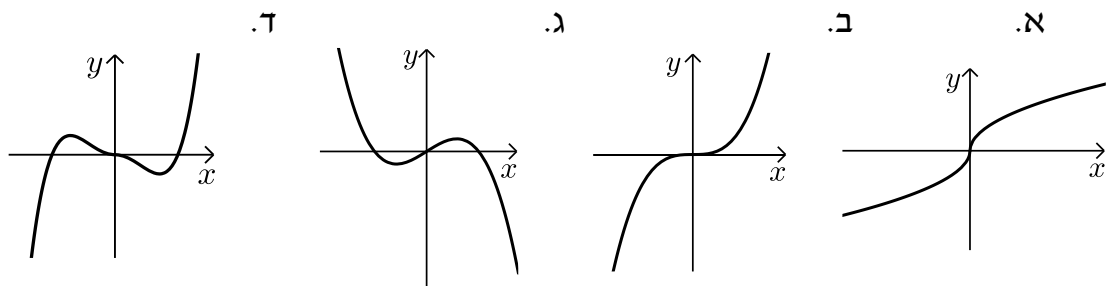
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $y = a + b \cdot f(cx + d)$  מחזורית בעלת מחזור  $\frac{p}{c}$ .

(28) הוכיחו : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$  שלם  $f(x + nT) = f(x)$ .

**(29)** נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלת מחזור  $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) הן מחזוריות.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $f$ .

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0,1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0,1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $g$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $4\pi$     (2)  $\frac{\pi}{10}$     (3)  $\frac{\pi}{4}$     (4)  $\pi$     (5)  $\frac{\pi}{4}$
- (6)  $\frac{\pi}{2}$     (7)  $\pi$     (8)  $\pi$     (9)  $\frac{\pi}{2}$     (10)  $\pi$
- (11)  $40\pi$     (12)  $\pi$     (13)  $2\pi$     (14)  $2\pi$     (15)  $2\pi$
- (16)  $\pi$     (17)  $\pi$     (18)  $\pi$

(19) הפונקציה היא למעשה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.  
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20)  $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

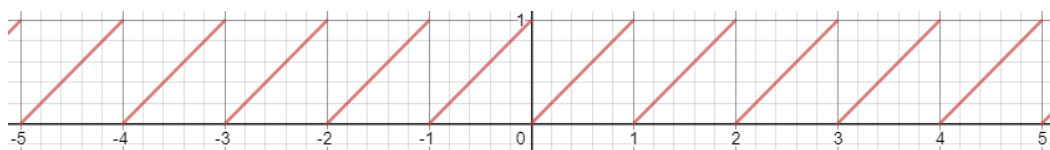
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

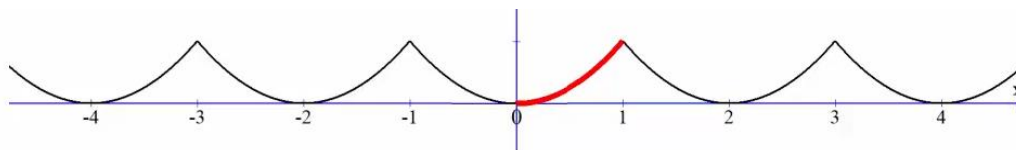
(30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

(31)  $g(x) = x - k$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.

(32)  $g(x) = (x - k)^2$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.



## פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

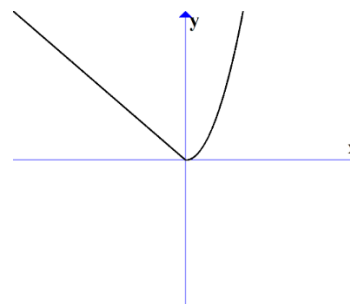
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1)=1$ ,  $f(4)=16$ ,  $f(-4)=4$ ,  $f(0)=0$ ,  $f(7)=\text{undefind}$   
 ב. ג. כללית.



## תרגילים משולבים

## שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

$$(6) \text{ נתונות פונקציות המוגדרות על כל } \mathbb{R}: f(x) = x^3, g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ , אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$ ,  
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$  ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ; תחום הגדרתה : כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$  ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  ג. שאלת הוכחה.
- ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

# מבוא לחדו"א

פרק 12 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

## תוכן העניינים

|           |                                       |
|-----------|---------------------------------------|
| 171       | 1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית      |
| 175       | 2. משוואת הישר                        |
| 180       | 3. מצבים הדדיים בין ישרים             |
| 182       | 4. מציאת משוואות ישר                  |
| 183       | 5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר |
| (ללא ספר) | 6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר      |
| 189       | 7. חלוקת קטע ביחס נתון                |
| 190       | 8. מרחק נקודה מישר                    |
| 192       | 9. מיקום נקודה ביחס לישר              |
| 194       | 10. מרחק בין ישרים מקבילים            |

## מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

### סיכום כללי:

#### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב לפי:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

### שאלות:

#### שאלות העוסקות באמצע קטע:

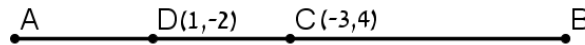
- (1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א.  $A(1, 4), B(5, -8)$       ב.  $A(-3, 0), B(3, -2)$
- ג.  $A(4, 5), B(-4, -5)$       ד.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה.  $A(6, -1), B(-3, -1)$       ו.  $A(4, 7), B(4, -12)$

- (2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א.  $A(4, -2), M(2, 1)$       ב.  $A(-6, -8), M(0, 0)$
- ג.  $A(13, -11), M(4, -7)$       ד.  $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם  $B(2, -4), C(6, 1)$ .
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- (4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי:  $A(-2, 1), B(6, 5)$ . מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי:  $D(1, -2)$ ,  $C(-3, 4)$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות  $A(2, -7)$ ,  $B(-10, 4)$  ו- $C(6, 11)$  הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

### שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| א. $A(4, 7)$ , $B(-3, 7)$  | ב. $A(6, 2)$ , $B(1, 2)$   |
| ג. $A(-3, 10)$ , $B(0, 6)$ | ד. $A(6, -9)$ , $B(1, 3)$  |
| ה. $A(4, 7)$ , $B(13, -1)$ | ו. $A(6, 6)$ , $B(-9, -9)$ |
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקדקודיו הם:  $A(3, -2)$ ,  $B(4, 9)$ ,  $C(0, 14)$ .
- (9) נתונות נקודות  $A(14, 4)$ ,  $B(6, y)$  שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את y.
- (10) נתונות נקודות  $A(x, -12)$ ,  $B(15, -2)$  שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את x.

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה  $A(-4, 1)$  הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) ידוע כי אורכי השוקיים הוא  $\sqrt{45}$ . יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם  $(0, 4)$  ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא  $d_{AC} = \sqrt{50}$ . מצא את היקף המלבן. ידוע כי:  $A(-3, -2)$ ,  $B(-4, 1)$ .

## שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$ , $B(4,1)$  | ב. $A(3,-2)$ , $B(-3,1)$  |
| ג. $A(7,8)$ , $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$ , $B(7,0)$    |
| ה. $A(6,9)$ , $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$ , $B(18,-1)$ |

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו

הם:  $A(6,5)$  ,  $B(2,13)$  ,  $C(4,-7)$  מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(3, -2)$  ב.  $(0, -1)$  ג.  $(0, 0)$
- ד.  $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$  ה.  $(1.5, -1)$  ו.  $(4, -2.5)$
- (2) א.  $B(0, 4)$  ב.  $B(6, 8)$  ג.  $B(-5, -3)$  ד.  $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3)  $D(4, -1.5)$
- (4)  $D(0, 2)$
- (5)  $A(5, -8)$ ,  $B(-11, 16)$
- (6)  $D(18, 0)$
- (7) א.  $d_{AB} = 7$  ב.  $d_{AB} = 5$  ג.  $d_{AB} = 5$  ד.  $d_{AB} = 13$
- ה.  $d_{AB} = \sqrt{145}$  ו.  $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8)  $P_{ABC} \approx 33.862$  יחידות אורך
- (9)  $y = -2$  או  $y = 10$
- (10)  $x = -9$  או  $x = 39$
- (11)  $B(-1, -3)$
- (12)  $B(3, -2)$ ,  $C(-3, -2)$
- (13)  $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$  יחידות אורך
- (14) א.  $m_{AB} = 1$  ב.  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$  ג.  $m_{AB} = -7$  ד.  $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו.  $m_{AB} = 0$
- (15)  $m_{AB} = -2$ ,  $m_{BC} = -10$ ,  $m_{AC} = 6$

## משוואת הישר:

### סיכום כללי:

#### נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

#### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

#### משוואת הישר:

- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה:  $y = mx + n$ .
- כאשר:  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $n$  הוא ערך ה- $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .
- נוסחה למציאת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

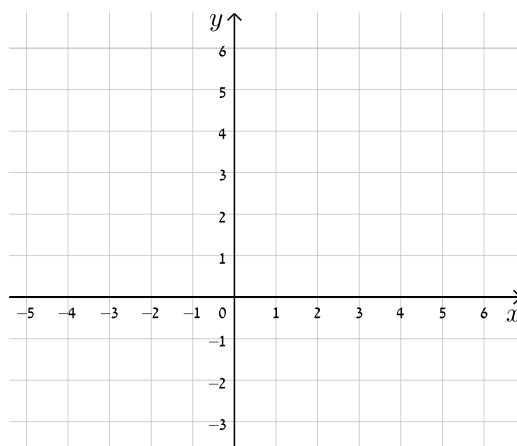
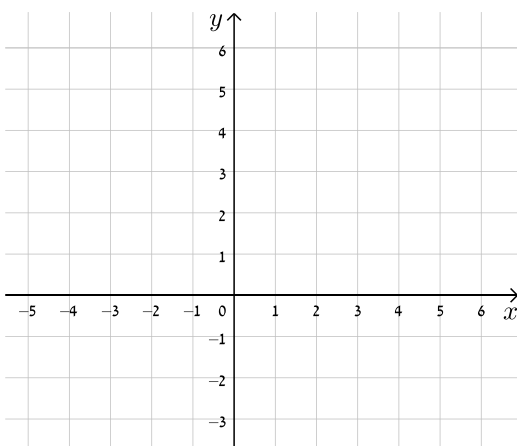
### שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

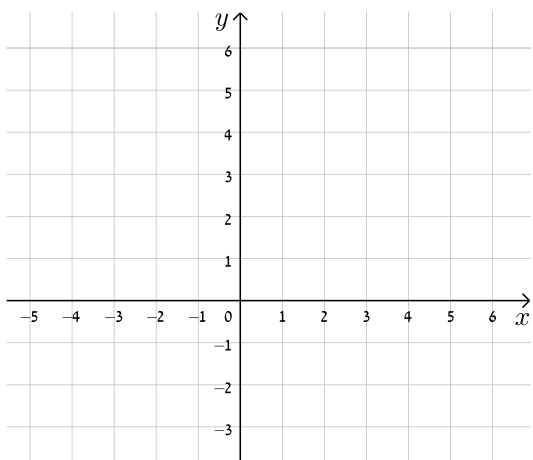
ב.  $y = -x + 5$

ב.

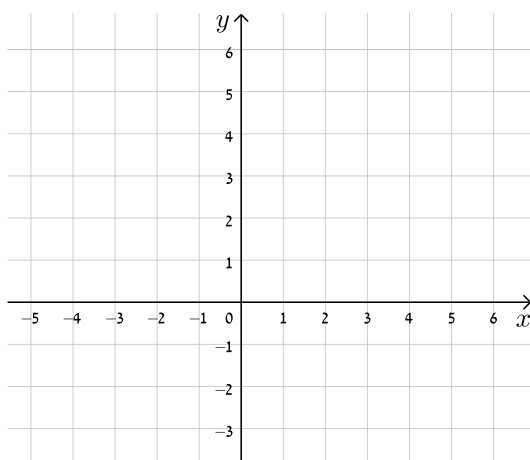
א.  $y = x + 4$



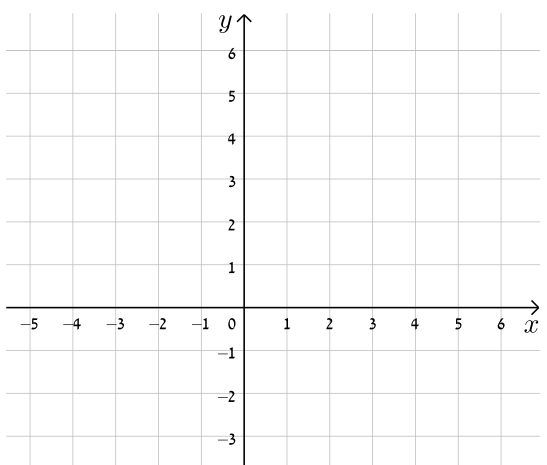
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



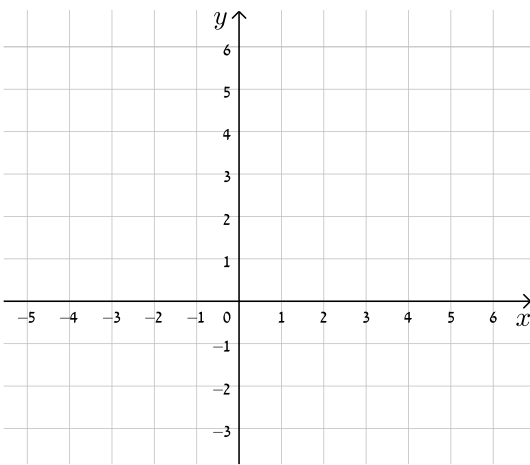
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

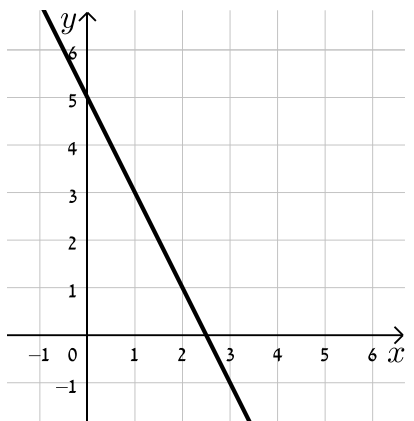


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

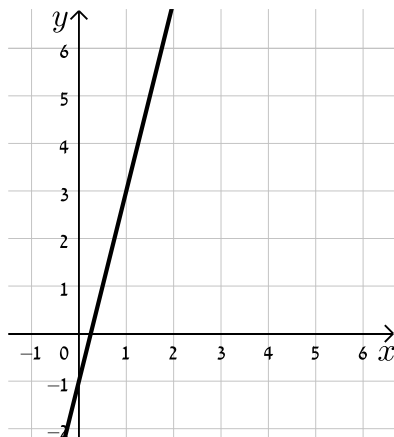


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

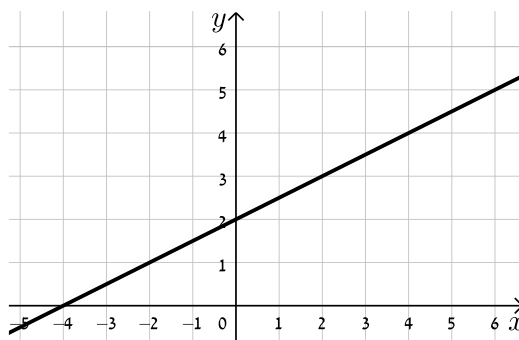
ב.



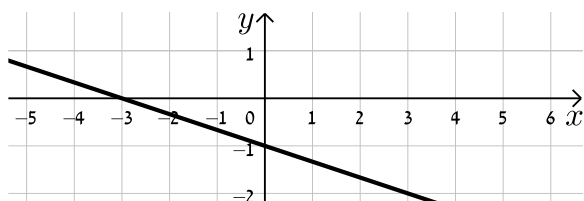
א.



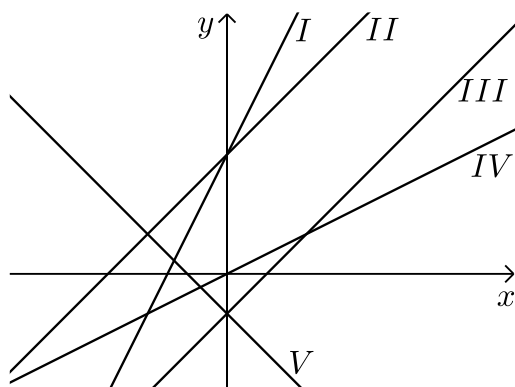
ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט :



א.  $y = x + 3$

ב.  $y = -x - 1$

ג.  $y = 2x + 3$

ד.  $y = x - 1$

ה.  $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה :  $y = 2x + 3$  . קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו :  $A(-1,1)$  ,  $B(3,3)$  ,  $C(0,4)$  ,  $D(6,15)$  .

20) נתונה משוואת הישר הבאה :  $y = mx - 2.5$  . ידוע כי הנקודה  $A(4,2)$  נמצאת על

הישר. מצא את  $m$  וקבע האם גם הנקודה  $B(7,-2)$  נמצאת עליו.

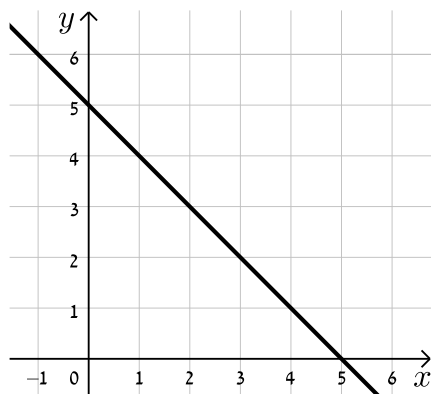
21) הנקודות  $A(5,-3)$  ,  $B(4,1)$  נמצאות על ישר שמשוואתו היא :  $y = mx + n$  .

מצא את  $m$  ואת  $n$  .

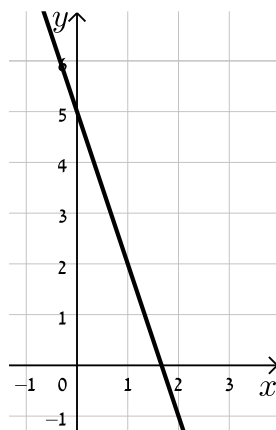
## תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

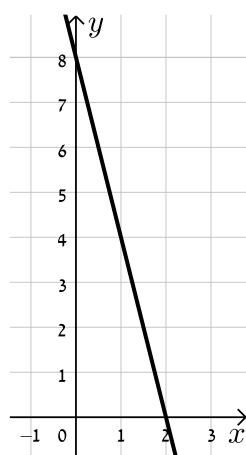
ב.



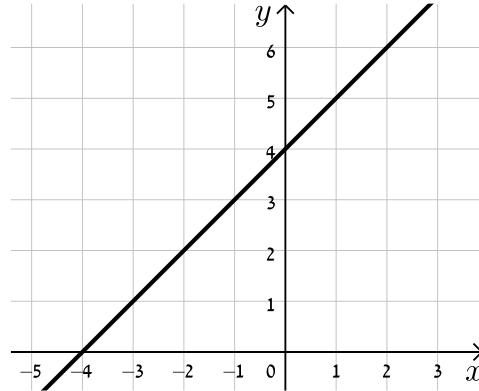
ד.



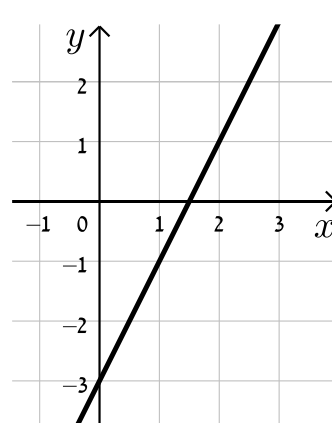
ו.



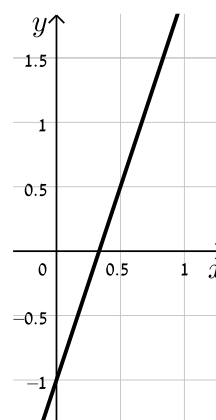
א.



ג.



ה.



- (17) א.  $y = 4x - 1$     ב.  $y = -2x + 5$     ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2$     ד.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$
- (18) א. II.    ב. V.    ג. I.    ד. III.    ה. IV.
- (19) נמצאות : A, D. לא נמצאות : B, C.
- (20)  $m = \frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.
- (21)  $m = -4$ ,  $n = 17$ .

## מצבים הדדיים בין ישרים:

### סיכום כללי:

#### מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים:  $m_1 = m_2$ ,  $n_1 \neq n_2$ .
- ישרים חותכים מקיימים:  $m_1 \neq m_2$ .
- ישרים מתלכדים מקיימים:  $m_1 = m_2$ ,  $n_1 = n_2$ .

### שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

|                                                          |                                                         |                                                        |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ | ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ | ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$ |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

|                                                           |                                                       |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$   | ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$ |
| ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ | ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$ |

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

|                                                                    |                                                               |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$            | ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$ |
| ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ | ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$        |

**(25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא  $y = 6x - 2$ .

- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?  
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**(26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים:  $A(5, -1)$ ,  $B(3, 7)$ ,  $C(-5, 5)$ .  
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

### תשובות סופיות:

- (22)** א.  $(-1, 1)$       ב.  $(-6, -18)$       ג.  $(10, 16)$ .  
**(23)** א. נחתכים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.      ד. מתלכדים.  
**(24)** מאונכים: ג', ד'.      לא מאונכים: א', ב'.  
**(25)** א.  $m_{AB} = m_{CD} = 6$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$ .  
 ב. הכל הפוך:  $m_{BC} = m_{AD} = 6$ ,  $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ .  
**(26)** שאלת הוכחה.

## מציאת משוואות ישר:

### שאלות:

(27) מצא את משוואות הישרים הבאים :

- א. ישר העובר דרך הנקודה  $A(1,3)$  ושיפועו  $m=2$ .
- ב. ישר העובר דרך הנקודה  $A(0,-4)$  ושיפועו  $m=\frac{1}{3}$ .
- ג. ישר העובר דרך הנקודה  $A(5,9)$  ושיפועו  $m=0$ .
- ד. ישר העובר דרך הנקודות  $A(5,-12)$  ו-  $B(6,-6)$ .
- ה. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-6,4)$  ומקביל לישר :  $y=2x-3$ .
- ו. ישר העובר דרך הנקודה  $A(3,-5)$  ומקביל לציר ה-  $y$ .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-7,-3)$  ומאונך לישר :  $y=x+3$ .
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים :  $y=11x-4$  ו-  $y=3x-12$  ומקביל לישר :  $y=7x+5$ .

### תשובות סופיות:

- (27) א.  $y=2x+1$       ב.  $y=\frac{1}{3}x-4$       ג.  $y=9$       ד.  $y=6x-42$
- ה.  $y=2x+16$       ו.  $x=3$       ז.  $y=-x-10$       ח.  $y=7x-8$

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

ידוע כי:  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $D(-2, 2)$ .

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

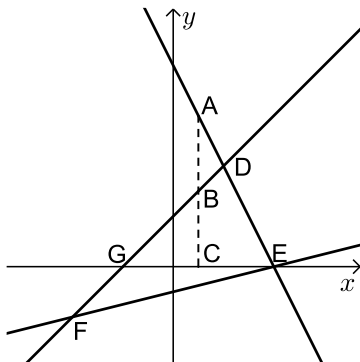
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים  $A(-9, 1)$  ו-  $B(5, -7)$ .

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא  $x + 3y + 6 = 0$ .

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט:  $2x + y - 8 = 0$  ו-  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 4y - 4 = 0$ .

הקטע AC מקביל לציר ה-  $y$ .

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון:  $d_{BC} = 3$ .

חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד  $A(-6, 1)$ .

משוואת התיכון BD היא  $x - y = 1$  ומשוואת הצלע BC היא  $3x + 5y = 67$ .

מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) ובו משוואת השוק BC היא:  $x = 2$ .

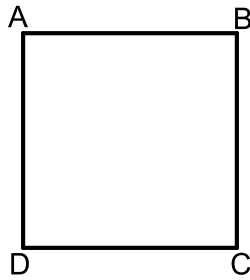
משוואת הבסיס CD היא  $2x + 3y = 7$  וידוע כי  $A(-4, 1)$ .

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.

הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



**33** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1, 4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?  
הראה חישוב מתאים.

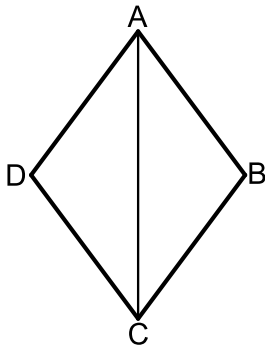
ב. נתון גם:  $D(4, 13)$ ,  $m_{CD} = -\frac{1}{3}$  ו-  $\sqrt{90}$  ס"מ  $BC =$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם:  $B(-8, 7)$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



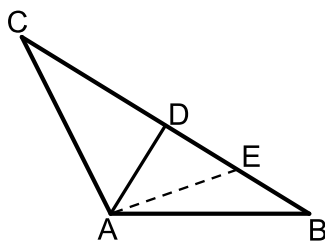
**34** המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0, 6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא:  $y = -1.5x + 6$  ואחת ממשוואות הצלעות היא:  $5y + x = 4$ .

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



**35** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

ב- $\triangle ABC$  מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

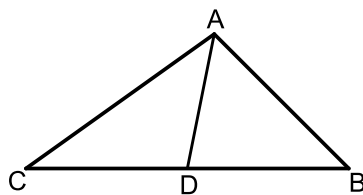
ומסמנים נקודה E כך שמתקיים:  $DE = BE$ .

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון

כי:  $D(5, 7)$ ,  $E(8.5, 2.5)$ .

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



**36** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

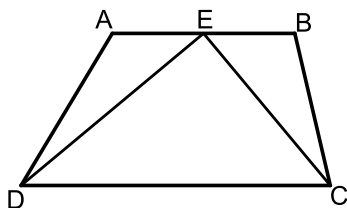
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר:  $y = 4$  וידוע כי

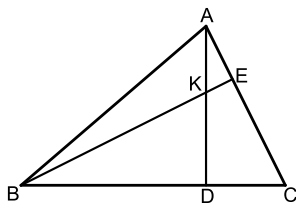
שיעור ה- $x$  של הנקודה C הוא:  $x_C = -1$ .

כמו כן נתון:  $A(7, 8)$ ,  $m_{AB} = -2$ .

- א. מצא את משוואת הצלע AB.  
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?  
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.  
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?



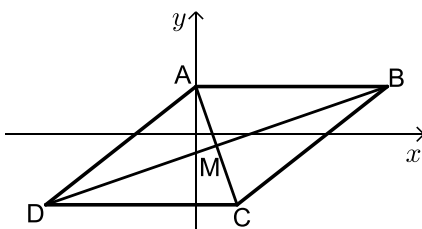
- 37** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- $x$ . שיעורי הנקודה B הם  $(3, 2)$  והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ . אורך הקטע DE הוא  $\sqrt{80}$ . כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$ .  
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.  
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.



- 38** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC. ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם  $(1, 3)$ . שיעורי הנקודות D ו-E הם  $D(-2, 4)$ ,  $E(3, 5)$ .  
 א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.  
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.  
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.  
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

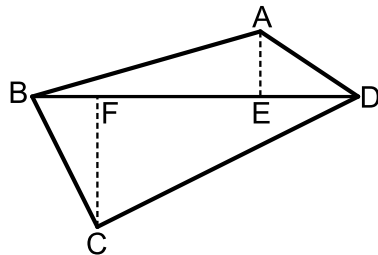
- 39** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על  $y = -7$ . אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים

בנקודה:  $M(-0.5, -3)$ . שיפוע האלכסון AC הוא -4.



- א. מצא את משוואת האלכסון AC.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40 נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם:  $A(3,13)$ ,  $B(-2,4)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(8,14)$ .



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

41 על הישר  $y = -5$  מסמנים את

הנקודות:  $A(-7,-5)$ ,  $B(2,-5)$ .

הנקודה C נמצאת על הישר:  $y = x - 5$ .

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

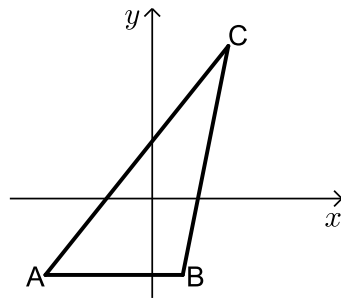
ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.



42 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ )

ובו נתון:  $A(-4,12)$ ,  $B(x,6)$  ו-  $C(4,8)$ .

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

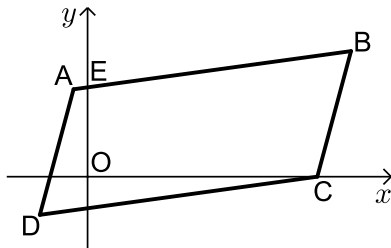
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ( $x_E < 5$ ) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים:  $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$ .



**(43)** באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים:  $A(-1, y)$

ו-  $B(x, 4)$ .  $x$  ו-  $y$  נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא:  $d_{CD} = \sqrt{104}$ .

א. מצא את  $x$  ו-  $y$  אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-  $x$  בחלקו החיובי

וכי:  $d_{BC} = \sqrt{17}$ . מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה-  $y$  ב- E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש } S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך } AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח } S_{ABC}$$

$$(33) \quad \text{א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.}$$

$$\text{ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.}$$

$$\text{ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות.} \quad \text{ד. } 90 \text{ יח"ש } S$$

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (5, 5), (4, 0), (-1, 1)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12, -2), C(-2, 16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווים}$$

$$\text{שטח הוא תיכון.} \quad \text{ב. ii. } B(9, 4), D(4, 4)$$

$$\text{ג. ii. } AD = 5, BC = 10 \quad \text{ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה}$$

$$\text{למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.}$$

$$(37) \quad \text{א. } D(-5, -8), A(-5, -2), E(-1, 0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5, -3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש } S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}, AC: y = -x + 8 \quad \text{ב. } A(7, 1)$$

$$\text{ג. } BE: y = x + 2, BC: y = 3x + 10 \quad \text{ד. } B(-4, -2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5, -7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר } S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5, 11), F(3, 9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ } BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20, -5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0, 10) \quad \text{ד. i. } E(2, 4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8, 0), C(10, 0) \quad \text{ג. } C(8, 0)$$

## חלוקת קטע ביחס נתון:

### סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$  (בהצלבה).

### שאלות:

- (1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון:  $A(2, -5)$ ,  $B(-12, 16)$ .

מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי:  $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$ .

- (2) קודקודי משולש ABC הם:  $A(-1, 3)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(4, -12)$ .

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.  
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

- (3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ .

- (4) קודקודי המשולש ABC הם:  $A(5, 1)$ ,  $B(7, -3)$ ,  $C(-1, 4)$ .

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

### תשובות סופיות:

(2)  $M(3, -3)$

(1)  $P(-2, 1)$

(4) 1.697 יחידות אורך.

(3)  $\left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

## מרחק נקודה מישר:

### סיכום כללי:

#### הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה):  $Ax + By + C = 0$ .
- מרחק הנקודה  $A(x_1, y_1)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  הוא:  $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ .  
כאשר  $B > 0$ :

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

### שאלות:

#### (5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה  $(-2, 4)$  מהישר  $4x + 3y + 11 = 0$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(4, 3)$  מהישר  $y = 3x - 1$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(3, -11)$  מהישר  $x - 5 = 0$ .

#### (6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$ ,  $A(-5, -1)$       ב.  $12x + 5y - 17 = 0$ ,  $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$ ,  $A(11, -2)$       ד.  $3x - 14 = 0$ ,  $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

#### (7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן

מהישר  $2x - y + 5 = 0$  הוא:  $\sqrt{20}$ .

#### (8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם:  $A(7, -1)$ ,  $B(-5, 4)$ ,  $C(-1, 7)$ ,  $D(11, 2)$ .

- (9) מצא את שטחו של המשולש  $\triangle ABC$  שבו שיעורי קדקוד  $A$  הם  $A(5, -3)$  ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים  $x - 4 = 0$  ו-  $2x - y - 1 = 0$ .
- (10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם:  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-5, -2)$ .
- (11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$ .
- (12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$ .

### תשובות סופיות:

- (5) א. 3 ב.  $\frac{8}{\sqrt{10}}$  ג. 2
- (6) א. 1 ב. 1 ג.  $1\frac{1}{2}$  ד.  $1\frac{1}{3}$
- (7)  $(4, 3)$ ,  $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$
- (8)  $S_{ABCD} = 56$  יח"ש
- (9)  $S_{ABC} = 18$  יח"ש
- (10)  $S_{ABC} = 2.5$  יח"ש
- (11)  $(4, 9)$ ,  $(64, 99)$
- (12)  $(-1, 8)$ ,  $(-157, 216)$

## מיקום נקודה ביחס לישר:

### שאלות:

**13** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$  והיא נמצאת מתחתיו.

**14** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$  והיא נמצאת מעליו.

**15** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים:  $A(1,1)$ ,  $B(13,6)$ . הקדקוד C נמצא על הישר  $2x - y - 19 = 0$  ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

**16** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:  
 $I: x + 2y + 1 = 0$ ,  $II: x - 2y - 11 = 0$ ,  $III: 2x - y + 6 = 0$   
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

**17** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים:  $I: 4x - 3y + 2 = 0$ ,  $II: 3x - 4y - 51 = 0$ ,  $III: 3x + 4y - 11 = 0$ .

**18** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה  $G(7, -3)$  נמצאת מתחתיו ובמרחק  $2\sqrt{10}$  ממנו.

**19** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-2, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2, 9)$  הוא  $\sqrt{5}$ .

**20** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(9, 10)$  ומרחקו מהנקודה  $B(8, -3)$  הוא  $5\sqrt{5}$ .

**21** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(3, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-9, 2)$  הוא 4.

**(22)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(1,2)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-3,10)$  הוא 4.

**(23)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(10,8)$  ומרחקו מהנקודה  $B(7,-1)$  הוא 3.

**(24)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-6,1)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2,7)$  הוא 10.

### תשובות סופיות:

- |                                                                                         |                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <b>(14)</b> $(-1,8)$                                                                    | <b>(13)</b> $(64,99)$                                           |
| <b>(16)</b> $(-1,-4)$                                                                   | <b>(15)</b> $C(11,3)$                                           |
| <b>(18)</b> $y = 3x - 4$                                                                | <b>(17)</b> $(2,-5)$                                            |
| <b>(20)</b> $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}$ , $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ | <b>(19)</b> $y = 2x + 10$ , $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ |
| <b>(22)</b> $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$                               | <b>(21)</b> $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ , $y = 6$         |
| <b>(24)</b> $y = -\frac{4}{3}x - 7$                                                     | <b>(23)</b> $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$      |

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים:  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Ax + By + C_2 = 0$  כאשר:  $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

○ אם:  $C_1 > C_2$ ,  $(d > 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מתחת ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .

○ אם:  $C_1 < C_2$ ,  $(d < 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מעל ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .

### שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר  $3x - 4y + 8 = 0$  ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים:  $5x + 12y - 14 = 0$ ,  $5x + 12y + 25 = 0$ .

(27) נתונים הישרים:  $y = 6x + 5$ ,  $12x - 2y - 15 = 0$ .  
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן  $AB: 3x + y = 0$  ו-  $CD: 3x + y - 6 = 0$ . הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר  $3x - 2y + 5 = 0$ .  
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה  $B(1, -1)$ .  
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.  
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות  $P(4, 1)$  ו-  $Q(7, 2)$  וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא  $3\sqrt{10}$ .

**(31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר  $x - y + 3 = 0$  והצלע BP מונחת על הישר  $x + 2y + 3 = 0$ . אורך הגובה לצלע BP הוא  $3\sqrt{5}$  ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

### תשובות סופיות:

$$(25) \quad 3x - 4y + 28 = 0, \quad 3x - 4y - 12 = 0 \quad (26) \quad 3$$

$$(27) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (28) \quad 14.4 \text{ יח"ש} = S, \quad (2.1, -3.3)$$

$$(29) \quad 3x - 2y - 15 = 0, \quad y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$(30) \quad y = 3x \quad (31) \quad P\left(2, -2\frac{1}{2}\right)$$

# מבוא לחדו"א

פרק 13 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

|           |                                      |
|-----------|--------------------------------------|
| 196       | 1. הכרות עם משוואת המעגל             |
| 200       | 2. מעגל המשיק לצירים                 |
| 202       | 3. משיק למעגל                        |
| 203       | 4. שאלות יסודיות שונות               |
| (ללא ספר) | 5. נושאים מתקדמים במעגל              |
| 210       | 6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע |
| 211       | 7. משוואות המשיקים למעגל             |
| 213       | 8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה        |
| 214       | 9. שאלות מסכמות שונות                |

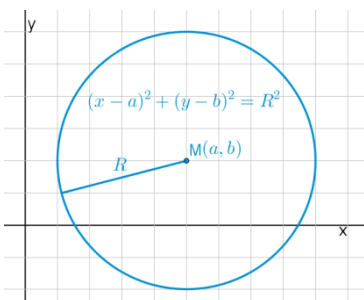
## הכרות עם משוואת המעגל:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

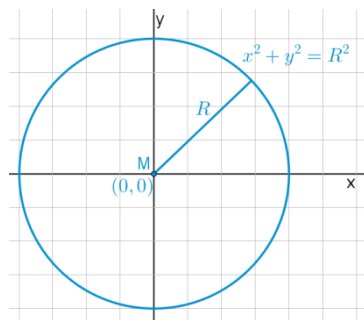
#### משוואת מעגל:



משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $M(a, b)$

ורדיוסו  $R$  היא:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

#### משוואת מעגל קנוני:



משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים  $M(0, 0)$ )

ורדיוסו  $R$  היא:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

### שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א.  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב.  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג.  $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם  $M$  ורדיוסם  $R$ :

א.  $M(4, -2), R=3$

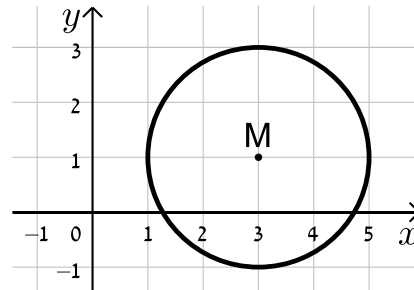
ב.  $M(-3, 5), R=10$

ג.  $M(5, 5), R=\sqrt{40}$

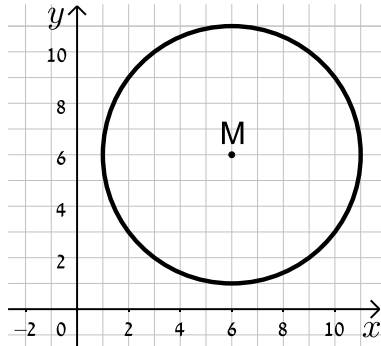
ד.  $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה :

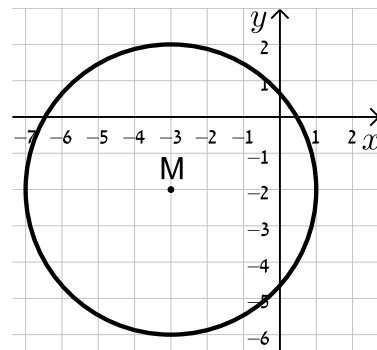
א.



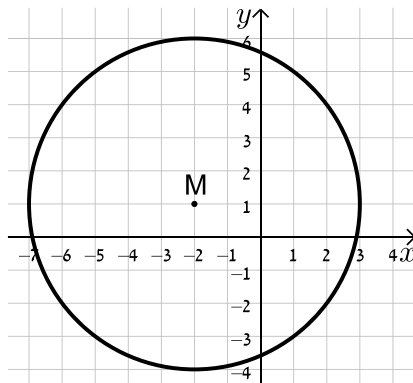
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(-4, 5)$  ומרכזו בנקודה  $O(2, -1)$ .

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(-5, 6)$  והוא חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 9$ .

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(0, -7)$  והוא חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$ .

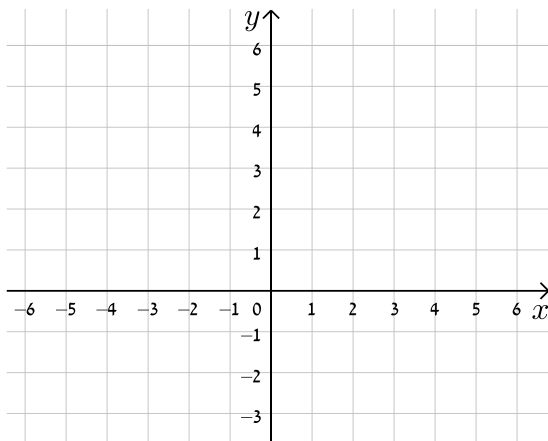
7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(11, 2)$ , רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר  $y = 2x - 1$ .

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות  $A(-2, 3)$  ו- $B(4, -3)$  הן קצות הקוטר שלו.

(9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר  $x = 4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- $x$  מיתר שאורכו 12.

(10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו  $M(4, -3)$  אם ידוע כי הישר  $y = -3x + 7$  חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

(11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם  $A(22, -24)$ ,  $B(-10, 40)$ ,  $C(-30, 28)$ .



(12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז  $M(3, -1)$ , האחד הוא בעל רדיוס  $R$  והשני בעל רדיוס של  $2R$ .  
א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות  $R$ ).  
ב. מה תהיינה המשוואות עבור  $R = 2$ ?  
ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

(13) שני מעגלים שמרכזיהם  $M_1(6, 2)$  ו- $M_2(-3, -4)$  חותכים זה את זה בנקודה  $(-2, 3)$ . מצא את משוואות המעגלים.

(14) נתונה משוואת המעגל הבאה:  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$  כאשר  $a$  פרמטר.

- מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות  $a$ .
- איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור  $a$ ?  
נמק ומצא את תחום ההגדרה של  $a$ .

i.  $a = 5$

ii.  $a = 55$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad M(3, -5), R = 7 \quad \text{א.} \quad M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג.} \quad M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{ב.} \quad (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100$$

$$\text{ג.} \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40 \quad \text{ד.} \quad (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{ב.} \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$$

$$\text{ג.} \quad (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad \text{ד.} \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$(4) \quad M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72$$

$$(5) \quad (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232$$

$$(6) \quad x^2 + (y+7)^2 = 100$$

$$(7) \quad (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad \text{או} \quad (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169$$

$$(8) \quad (x-1)^2 + y^2 = 18$$

$$(9) \quad (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad \text{או} \quad (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100$$

$$(10) \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5}$$

$$(11) \quad (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360$$

$$(12) \quad \text{א.} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2$$

$$\text{ב.} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

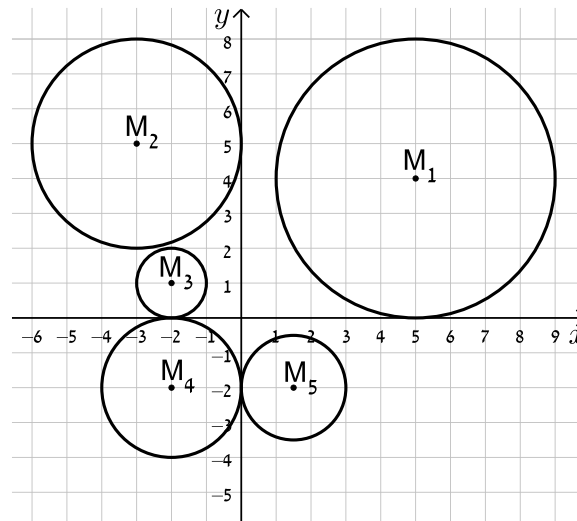
$$(13) \quad (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65, (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50$$

$$(14) \quad \text{א.} \quad R = \sqrt{50-a} \quad \text{ב.} \quad a = 5, a < 50$$

## מעגל המשיק לצירים:

### שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- $x$  ומרכזו בנקודה  $M(16,8)$ .

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר  $2x + 3y + 6 = 0$  והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה- $y$  ולישר  $y = 6$  ומרכזו על הישר  $y = 3x - 2$  ברביע הראשון.

### תשובות סופיות:

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad (15)$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad (16)$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad (17)$$

$$. \left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad (18)$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad (19)$$

## משיק למעגל:

### סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליו היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

**20** מצא את משוואות המשיקים למעגל  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$  בנקודות על המעגל שבהן  $y = 5$ .

**21** נתונה משוואת המעגל:  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  ומשוואת הישר  $y = 2x + m$  כאשר  $m$  פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של  $m$  הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

### תשובות סופיות:

**20**  $4x - 3y + 35 = 0$  ו-  $4x + 3y = 27$ .

**21** משיק:  $-9, -11, m$ , חותך:  $-9 < m < 11$ .

## שאלות יסודיות שונות:

### שאלות:

(22) נתון מעגל שמשוואתו  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.  
 ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- $x$ .  
 מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א'  
 ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

- (23) נתון ישר שמשוואתו  $y = 2x - 10$ . הישר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A ואת ציר ה- $y$  בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

- (24) נתון המעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 81$ . מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- $x$ . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (O ראשית הצירים).

- (25) נתון ישר שמשוואתו  $y = x$ . הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 32$  בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

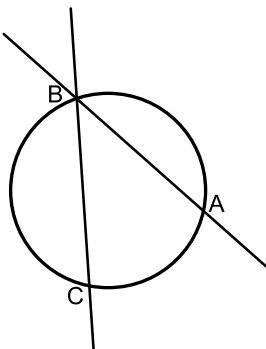
- (26) הישרים:  $9y + 11x = 94$  ו-  $y = -3x + 14$  נחתכים בנקודה B.

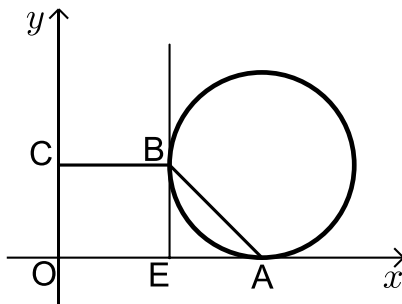
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא:  $M(-9, 1)$ .

ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

- א. מצא את שיעורי הנקודה B.  
 ב. מצא את משוואת המעגל.

- ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו:  $y = -3x + 14$  עם המעגל.





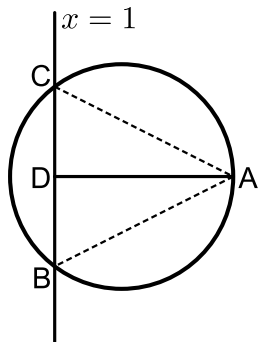
- (27)** נתון מעגל המשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $A$ .  
מהנקודה  $E$  שעל ציר ה- $x$  מעלים אנך המשיק  
למעגל בנקודה  $B$  (ראה איור).  
הקטע  $BC$  מקביל לציר ה- $x$  ו- $O$  היא נקודת  
ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית  $ABCO$   
ששטחו הוא  $170$  סמ"ר.  
ידוע כי:  $C(0,10)$  ו-  $10$  ס"מ  $AE =$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

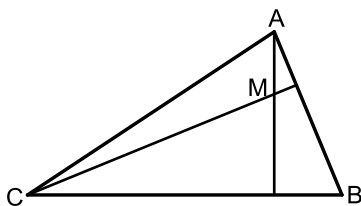
i. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .

ii. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .

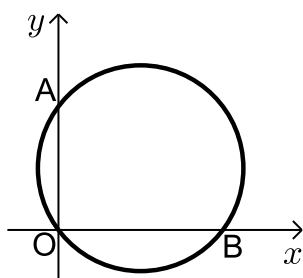
ב. כתוב את משוואת המעגל.



- (28)** הנקודה  $A(17,4)$  נמצאת על המעגל  
שמשוואתו:  $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$ .  
הישר  $x=1$  חותך את המעגל בשתי נקודות  $B$  ו- $C$  כך  
ש- $B$  נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע  $AD$   
המאונך לישר  $BC$  וידוע כי הנקודה  $D$  היא אמצע  $BC$ .  
א. מצא את רדיוס המעגל.  
ב. מצא את שיעורי הנקודות  $B$  ו- $C$ .  
ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
i. חשב את מרחק הנקודה  $A$  מהישר  $x=1$ .  
ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



- (29)** נתון משולש  $ABC$ . משוואות הצלעות  $AB$  ו- $BC$   
במשולש  $ABC$  הן בהתאמה:  $2y - x = 56$   
ו-  $8y + x = 104$ .  
מעבירים גבהים לצלעות  $AB$  ו- $BC$  אשר  
נחתכים בנקודה  $M(0, -2)$  שבתוך המשולש.  
א. מצא את משוואות הגבהים.  
ב. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .  
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M$   
ורדיוסו הוא הקטע  $BM$ .



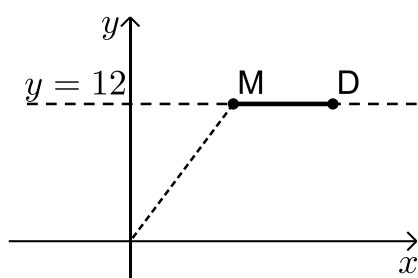
**(30)** באיור שלפניך מתואר המעגל:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

**(31)** המעגל:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$ ,  $a > 0$ , חותך את ציר ה-x בנקודה שבה:  $x=1$ .

- מצא את a.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ .
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



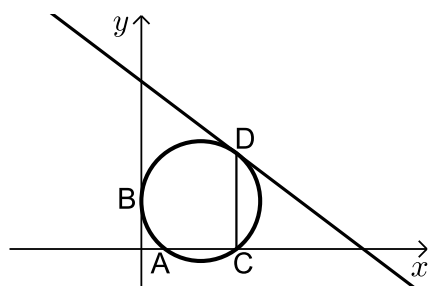
**(32)** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר  $y=12$  ידוע כי שיעור

ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).  
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

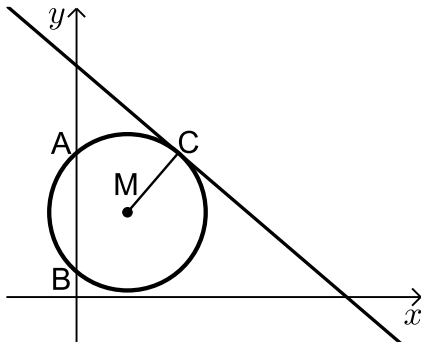
- ענה על הסעיפים הבאים:
- i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
- ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
- כתוב את משוואת המעגל.
- האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**(33)** מעגל שמרכזו בנקודה M(15,12) משיק לציר ה-y

בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



- כתוב את משוואת המעגל.
- מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
- דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
- מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- $y$  בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל:  $6x + 7y = 191$

דרך הנקודה:  $C(12, 17)$ .

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר  $y = 10$ .

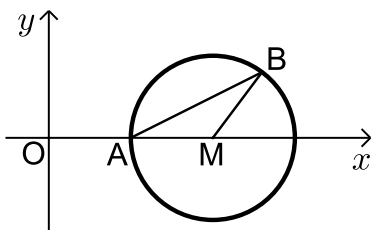
i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.

iii. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$ .

ד. חשב את שטח המשולש AMB.



35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על

ציר ה- $x$ . המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A.

מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם:  $A(5, 0)$ .

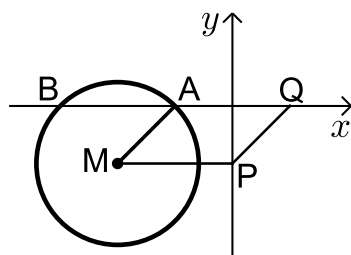
א. מצא את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב

את שטח המשולש AMB.



36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$$

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$

ב-A ו-B (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- $y$  מנקודת מרכז המעגל M

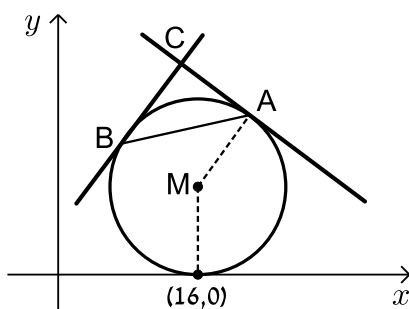
ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל

בנקודה  $(-2, -4)$ .



37 נתון מעגל שרדיוסו  $R$  ( $R < 16$ ) ומשיק לציר ה- $x$

בנקודה שבה:  $x = 16$ .

א. הבע באמצעות  $R$  את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- $y$  או לא. נמק.

מהנקודה  $A(22,18)$  שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את  $R$  וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ .

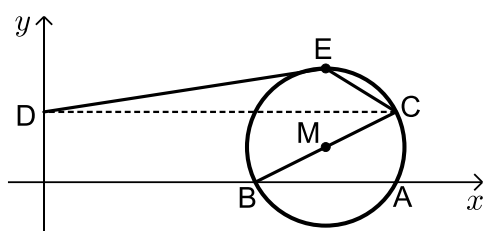
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $B$  שבה  $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה  $C$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. מצא את שטח המשולש  $ABC$ .



38 באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A(10,0)$ .

א. מצא את  $a$  אם ידוע כי  $a > -10$ .

ב. מצא את הנקודה  $B$  - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה  $B$  ומרכז המעגל  $M$ .

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- $y$  בנקודה  $D$ .

הנקודה  $E$  היא הנקודה בעלת שיעור ה- $y$  הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות  $D$  ו- $E$  כך שנוצר המחומש  $DECBO$ . חשב את שטחו.

39 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$ , רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל

וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות  $A$  ו- $B$  - החיתוך של

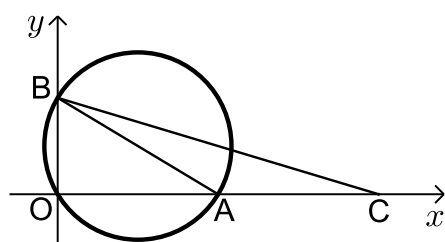
המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה  $C$  על ציר ה- $x$

כך ש- $A$  היא אמצע הקטע  $CO$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



## תשובות סופיות:

(22) א.  $(0, -8)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  ב. 27 יח"ש.

(23) 12.5 יחידות אורך.

(24)  $S_{ABOC} = \sqrt{80}$  יח"ש

(25)  $y = -x + 8$ ,  $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 32$

(26) א.  $(2, 8)$  ב.  $(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 170$  ג.  $(4, 2)$

(27) א. i.  $B(12, 10)$  ii.  $A(22, 0)$  ב.  $(x - 22)^2 + (y - 10)^2 = 100$

(28) א.  $R = 10$  ב.  $B(1, -4)$ ,  $C(1, 12)$  ג. i.  $d = 16$

ii.  $S = 128$

(29) א.  $y = 8x - 2$ ,  $y = -2x - 2$  ב.  $(-24, 16)$  ג.  $x^2 + (y + 2)^2 = 900$

(30) א.  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 6)$ ,  $B(8, 0)$  ב.  $C(8, 6)$  ג. 28 יח"ש  $P$

(31) א.  $a = 1$  ב.  $(0, -1)$ ,  $(-2, 3)$  ג.  $y = -2x - 1$

ד.  $S = \frac{1}{4}$

(32) א. i.  $d = 15$  ii.  $x = 18$  ב.  $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- $x$  - כאשר מציבים ב- $y$  אפס מתקבלת משוואה ריבועיתללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת-  $(12, 0)$ .

(33) א.  $(x - 15)^2 + (y - 12)^2 = 225$  ב.  $C(24, 0)$ ,  $D(24, 24)$  ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א.  $y = \frac{7}{6}x + 3$  ב. i.  $M(6, 10)$  ii.  $\sqrt{85}$

iii.  $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 85$  ג.  $A(0, 17)$ ,  $B(0, 3)$  ד. 42 יח"ש

(35) א.  $(x - 10)^2 + y^2 = 25$  ב.  $y = 0.5x - 2.5$  ג.  $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש  $S_{AMB}$

(36) א.  $A(-2,0)$ ,  $B(-6,0)$  ב.  $Q(2,0)$  ג.  $y = x - 2$

(37) א.  $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב.  $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$ ,  $R = 10$  ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$

ד.  $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$  ה.  $C(14,24)$  ii. 50 יח"ש.

(38) א.  $a = -8$  ב.  $B(6,0)$  ג.  $y = 0.5x - 3$

ד.  $(10,2)$  ה.  $11 + 5\sqrt{5}$  יח"ש  $S_{\text{DECB}} =$

(39) א.  $\sqrt{34}$  יחידות אורך  $R =$ ,  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$  ב.  $A(10,0)$ ,  $B(0,6)$

ג.  $C(20,0)$  i. ii. 30 יח"ש  $S_{\text{ABC}} =$

## כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

### שאלות:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

- א.  $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$       ב.  $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$   
 ג.  $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$       ד.  $x^2 + y^2 + 2y = 0$   
 ה.  $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$       ו.  $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

(2) משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$ . מצא את ערכו של  $m$  אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר  $y = 2x + 7$ .

(3) משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$ . מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר  $y = 2x - 4$  מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $M(-5, -3), R = 6$       ב.  $M(1, -10), R = 10$   
 ג.  $M(4, 7), R = \sqrt{65}$       ד.  $M(0, -1), R = 1$   
 ה.  $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right), R = 2$       ו.  $M(m, -3m), R = 3m$

(2)  $m = -1$

(3)  $2\sqrt{80}$

## משוואות המשיקים למעגל:

### שאלות:

- (4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה  $(1,8)$  המשיק לשני הצירים.
- (5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$  היוצא מהנקודה  $A(10, -3)$ .
- (6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$  בנקודה  $A(5, -4)$ .
- (7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$  בנקודות שבהן  $x = -1$ .
- (8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה  $(-2, 6)$  והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.  
א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.  
ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- (9) נתון המעגל  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  והישר  $y = 2x + m$ .  
לאילו ערכים של הפרמטר  $m$  הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של  $m$  הישר חותך את המעגל?

**תשובות סופיות:**

(4)  $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$  או  $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

(5) 8.

(6) משיק:  $y = 3x - 19$ , נורמל:  $x + 3y + 7 = 0$ .

(7)  $(-5, 1)$ .

(8) שאלת הוכחה.

(9) משיק:  $m = -9, 11$ , חותך:  $-9 < m < 11$ .

## מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

### סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל  $(x-a)^2 = (y-b)^2 = R^2$  היוצאים מהנקודה  $A(x_1, y_1)$  שמחוץ

למעגל היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ ,

המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-3, 8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$ , המחבר

את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-5, 1)$ .

11) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$  ונקודה P, שנמצאת על החלק

החיובי של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים

היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון:  $PQ = 14$ .

מצא את שיעורי הנקודה Q.

### תשובות סופיות:

10) א.  $x - 4y + 11 = 0$  ב.  $x = -1$

11)  $Q(0, -8)$  או  $Q(0, -6)$ .

## שאלות מסכמות שונות:

### שאלות:

**12** נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$ . המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13** המעגלים  $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$  ו-  $x^2 + y^2 = 26$  נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של  $m$ .

**14** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר:  $3x - y - 9 = 0$  והשוק AD מונחת על הישר  $x + y - 3 = 0$ . שיעורי הקודקוד B הם  $(3, -8)$ . מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא  $3x - y + 10 = 0$ .

### תשובות סופיות:

**12**  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $A(-3.2, 2.4)$ ,  $4x - 3y + 20 = 0$

**13**  $m = -26$

**14**  $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

**15**  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

# מבוא לחדו"א

פרק 14 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

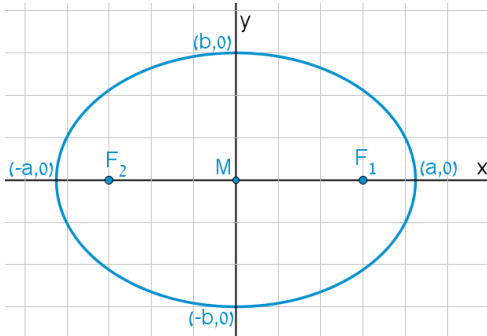
|     |                 |
|-----|-----------------|
| 215 | 1. האליפסה..... |
| 219 | 2. הפרבולה..... |

## האליפסה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



#### מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$ .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$ .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).  
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$ . המוקדים יסומנו ב- $F_1$  ו- $F_2$  ושיעוריהם הם:  $F_1(c,0)$ ,  $F_2(-c,0)$ .
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.  
אורך הרדיוס מנקודה  $(x,y)$  שעל האליפסה למוקד הימני הוא:  $r_1 = a - \frac{cx}{a}$ .  
אורך הרדיוס מנקודה  $(x,y)$  שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא:  $r_2 = a + \frac{cx}{a}$ .
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

#### משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  או  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא:  $a^2 - b^2 = c^2$ .
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$ .

## שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 36$ .
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא  $2\sqrt{3}$ .
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה  $8\sqrt{2}$ .
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה  $(-3\sqrt{3}, 2)$ .
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 16$  ומוקד אחד שלה הוא בנקודה  $(\sqrt{10}, 0)$ .
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$  בנקודה  $(0, -2\sqrt{5})$  והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות  $(-2, \sqrt{6})$  ו- $(\sqrt{14}, 1)$ .
- (8) מצא על האליפסה  $3x^2 + 4y^2 = 144$  את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה  $(-3, 1)$  ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה  $x^2 + 3y^2 = 12$  את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

**(11)** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה  $x^2 + 4y^2 = 50$  ששיפועו חיובי ואורכו  $\sqrt{56}$ .

**(12)** נתונים האליפסה  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  והישר  $y = 2x + k$ . מצא לאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר  $k$  הישר חותך את האליפסה.

**(13)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $3x^2 + 5y^2 = 120$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**(14)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**(15)** באליפסה  $5x^2 + 9y^2 = 90$  חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

**(16)** באליפסה  $x^2 + 5y^2 = 16$  חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

**(17)** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$ .

מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה  $(4\sqrt{2}, 0)$ .

**(18)** מצא באליפסה  $2x^2 + 3y^2 = 12$  משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא  $(1.5, 1)$ .

**(19)** ישר שמשוואתו  $x - y - 3 = 0$  חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה  $(2, -1)$ . מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2\sqrt{2}, -2)$ .

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של  $a$  המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של  $a$  המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור  $a = 4$  אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

### תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$2a = 12, 2b = 6 \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (4)$$

$$(4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24}) \quad (8)$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (7)$$

$$(\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}) \quad (10)$$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (9)$$

$$(12) \text{ משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$y = \sqrt{6}x \quad (11)$$

$$S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש} \quad (15)$$

$$S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (14)$$

$$S = 60 \text{ יח"ש} \quad (13)$$

$$y = -x + 2.5 \quad (18)$$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (17)$$

$$(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}) \quad (16)$$

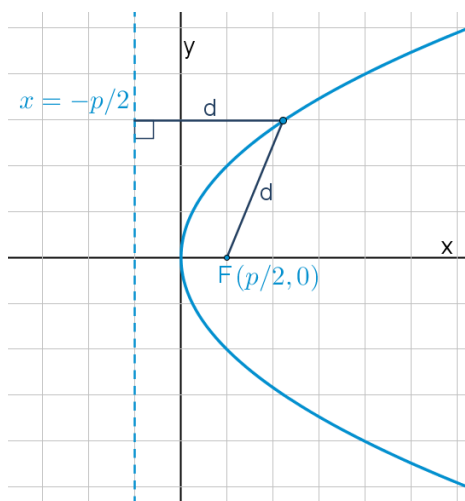
$$(20) \text{ א. i. } a = \sqrt{12.5} \text{ ii. } a \neq \sqrt{12.5}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (19)$$

## הפרבולה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

#### מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה:  $r = x + \frac{p}{2}$ .
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- $x$  אצלנו).

#### משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא:  $y^2 = 2px$  כאשר  $p$  הוא פרמטר הפרבולה.

### משיק לפרבולה:

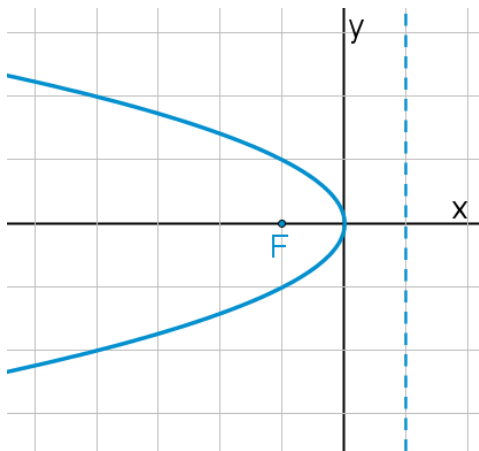
- משוואת המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .
- שיפוע המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $A(x_0, y_0)$  שעליה הוא:  $m = \frac{p}{y_0}$ .

### מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

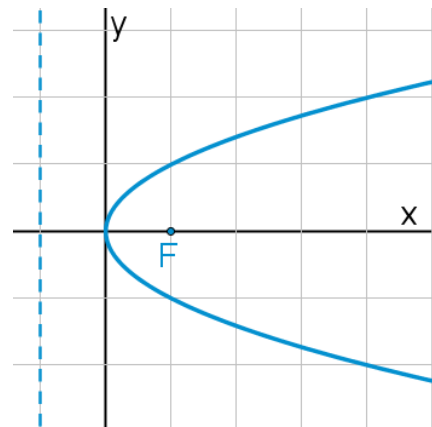
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה  $y^2 = 2px$  היוצאים מהנקודה  $A(x_0, y_0)$  שמחוץ לפרבולה היא:  $yy_0 = p(x + x_0)$ .

### תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה  $y^2 = -2px$ :



פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :



### שאלות:

(1) נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$ . מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

(2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר  $x = -3$  הוא המדריך שלה.

(3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה  $(-6, 9)$ .
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה  $x^2 + 2y^2 = 18$ .
- (6) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 6x$  שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 8x$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה  $y^2 = 2px$  שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 10x$ .
- (10) הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה  $y^2 = 2px$ .
- (11) נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- $x$ , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה  $y^2 = 20x$  חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- $x$  שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.
- (13) קצות מיתר בפרבולה  $y^2 = 4x$  הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- $x$  של נקודה A הוא 4.
- (14) מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 16x$ , שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא  $\frac{8}{\sqrt{5}}$ .

(15) מצא משוואת מיתר בפרבולה  $y^2 = 2x$ , שאמצעו בנקודה  $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

(16) נתונה הפרבולה  $y^2 = 4x$  והישר  $y = 2x + k$ , לאיזה ערך של  $k$  הישר משיק לפרבולה?

(17) נתונה הפרבולה  $y^2 = 6x$ .

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן  $x = 1.5$ .

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- $x$ .

(18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה  $y^2 = 12x$ . נתון כי  $y_A = 4$ . מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

(19) נקודה A נמצאת על הפרבולה  $y^2 = 28x$  ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- $x$  הוא  $7\sqrt{5}$ . מצא את משוואת הנורמל.

(20) מרחק המוקד של הפרבולה  $y^2 = 8x$  ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא  $\sqrt{8}$ . מצא את משוואת המשיק.

(21) נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא  $p$ .

(22) נתונות שתי פרבולות: I.  $y^2 = 6x$ , II.  $y^2 = 12x$ . ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

(23) נתונה הפרבולה  $y^2 = 14x$  והנקודה  $(-1, -3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

**(24)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 18x$  ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- $x$  שלה קטן ב-1 משיעור ה- $y$  שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.

**(25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה  $y^2 = 24x$  והוא משיק למדריך שלה.

**(26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה  $(8,0)$  והוא משיק לפרבולה  $y^2 = 10x$  בשתי נקודות.

**(27)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  ומעגל שמרכזו על ציר ה- $x$  והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות  $p$  את משוואת המעגל.

**(28)** הנקודה  $A(2,3)$  נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה  $A$  ומשיק לציר ה- $y$ .

**(29)** נתונה הפרבולה  $y^2 = 2px$  שבה  $p > 4$ . הישר  $x = 2$  חותך את הפרבולה בנקודות  $A$  ו- $B$ . הבע באמצעות  $p$  את שיעורי קדקוד  $C$  של משולש  $\triangle ABC$  שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד  $C$  נמצא על ציר ה- $x$ .

**(30)** אליפסה שמשוואתה  $x^2 + 4y^2 = 16$  חותכת את הפרבולה  $y^2 = 2px$  בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

- (1)  $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2)  $y^2 = 12x$
- (3)  $y^2 = 10x$
- (4)  $y^2 = 4x$
- (5)  $y^2 = 12x$
- (6)  $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7)  $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8)  $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9)  $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$  יח"ש
- (10)  $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (11)  $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$  יח"ש
- (12)  $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$  יח"ש
- (13)  $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$  או  $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14)  $y = -2x$  או  $y = 2x$
- (15)  $y = 2x - 2$
- (16)  $k = \frac{1}{2}$
- (17)  $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$  .א
- (18)  $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19)  $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20)  $y = x + 2$
- (21)  $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23)  $7x + 3y - 7 = 0$
- (24)  $y = -9x + 18$
- (25)  $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26)  $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27)  $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28)  $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29)  $C(p + 2, 0)$
- (30)  $y^2 = 1\frac{1}{2}x$

# מבוא לחדו"א

פרק 15 - קווים ותחומים במישור

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור..... 225
2. נספח – משטחים ממעלה שנייה..... 229

## קווים ותחומים במישור

## שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה.  $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו.  $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = 2 + \sqrt{1 - (x - 3)^2}$

ב.  $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג.  $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$

ז.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ח.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10 נתונה המשוואה  $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$ .

- הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.
- רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
- רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
- מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
- מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

**12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :**

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

**13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :**

א.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

## תשובות סופיות

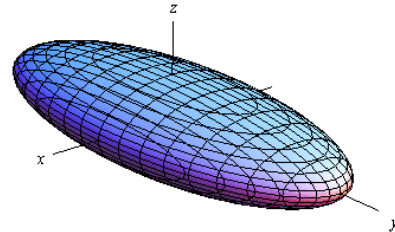
לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

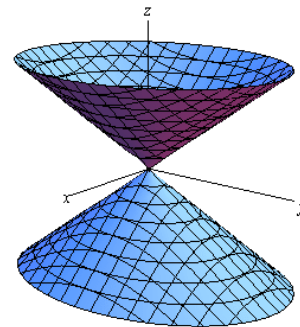
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a = b = c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

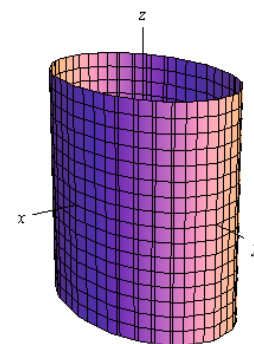
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

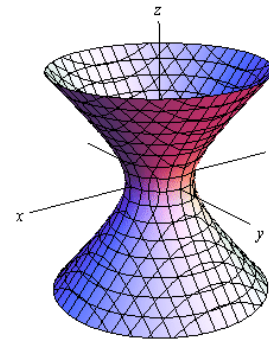
תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

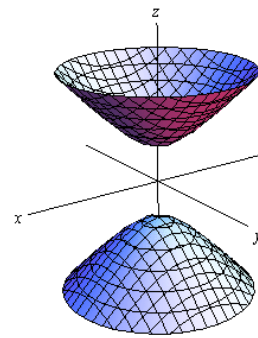


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

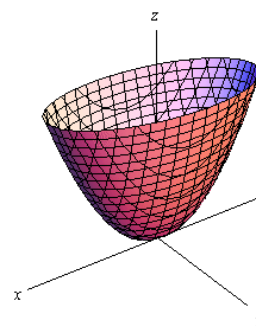
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

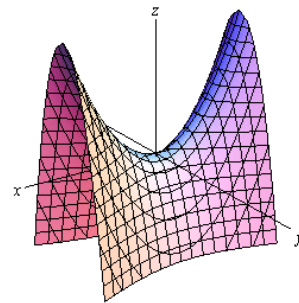
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

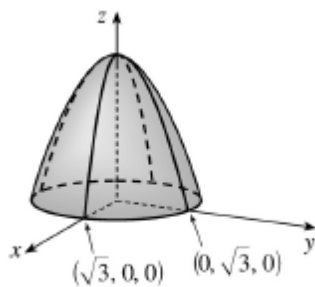
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

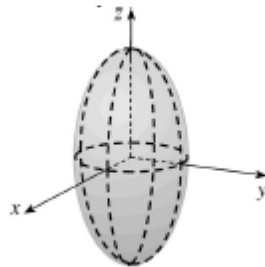
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

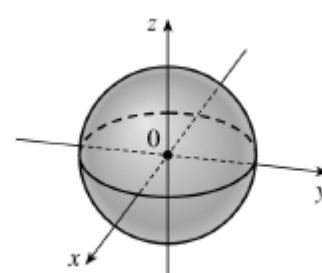
\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

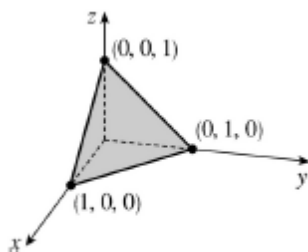
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



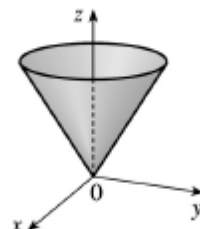
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



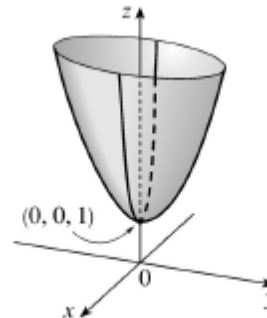
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$