

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	1. יסודות ההסתברות
5	2. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים
14	3. קומבינטוריקה - כלל המכפלה
18	4. קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה
21	5. קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה
23	6. קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה
26	7. קומבינטוריקה - שאלות מסכמות
31	8. הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד
34	9. הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד
38	10. דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה
43	11. תלות ואי תלות בין מאורעות
46	12. שאלות מסכמות בהסתברות
51	13. המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות
55	14. המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן
59	15. המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת והשונות)
62	16. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (תכונות התוחלת והשונות)
65	17. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית
69	18. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית
72	19. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה
75	20. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית
78	21. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית
81	22. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית
84	23. המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

# תוכן העניינים

87	24. משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת
93	25. משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים
100	26. המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות
103	27. המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד - שאלות מסכמות
111	28. המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)
120	29. התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית
123	30. התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות אחידה
126	31. התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית
(ללא ספר)	32. התפלגות הדגימה- התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי
(ללא ספר)	33. התפלגות הדגימה - התפלגות סכום התצפיות במדגם ומשפט הגבול המרכזי
(ללא ספר)	34. התפלגות הדגימה - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית
134	35. הסקה סטטיסטית - הקדמה
137	36. מושגי יסוד באמידה
142	37. אמידה נקודתית
148	38. רווח סמך לתוחלת (ממוצע)
158	39. רווח סמך לשונות וסטיית תקן
163	40. רווח סמך לפרופורציה
166	41. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים
170	42. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים
172	43. שאלות מסכמות על רווחי סמך
175	44. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים
181	45. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
199	46. בדיקת השערות על שונות
204	47. בדיקת השערות על פרופורציה
211	48. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים
219	49. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים
223	50. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות
226	51. שאלות מסכמות בבדיקת השערות

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 1 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## הגדרות יסודיות:

### רקע:

**ניסוי מקרי:** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם:** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , או: מזג האוויר בעוד שבועיים:  $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$ .

**מאורע:** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות:  $A, B, C$ . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן:  $A = \{5, 6\}$ . המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**גודל מרחב המדגם:** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל:  $|\Omega| = 6$ .

**גודל המאורע:** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו:  $|A| = 2, |B| = 3$ .

**מאורע משלים:** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה:  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ .

**מרחב מדגם אחיד (סימטרי):** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד:** במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד:** תחושב לפי השכיחות היחסית:  $\frac{f}{n}$ .

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

מספר התלמידים – השכיחות – $f$	הציון – $x$
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?  $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$

**הסתברות למאורע משלים:** הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל:  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$ .

**שאלות:**

- (1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.  
 א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.  
 ב. רשמו את המקרים למאורע:  
 i. במילה נמצאת האות E.  
 ii. במילה האותיות שונות.  
 ג. רשמו את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .

- (2) מטילים זוג קוביות.  
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:  
 i. סכום התוצאות 7.  
 ii. מכפלת התוצאות 12.  
 ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

- (3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.  
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?  
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?  
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

- (4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

10	22	18	28	22	<b>מספר משפחות</b>
4	3	2	1	0	<b>מספר מקלטים</b>

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?  
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?  
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- (5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

10	30	100	40	20	<b>מספר משפחות</b>
4	3	2	1	0	<b>מספר מכוניות</b>

- נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
- א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
- i. התקבל פעם אחת עץ.
- ii. התקבל לפחות פלי אחד.
- ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
- ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

**תשובות סופיות:**

1) א.  $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$

ב.  $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$ ,  $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$

ג.  $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$

2) א.  $\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{matrix} \right\}$

ב.  $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ,  $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$

ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$ . הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$ .

3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5

4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32

5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8

6) א.  $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$

ב.  $A = \{PPE, PEP, EPP\}$ ,  $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$

ג.  $\bar{D} = \{EEE\}$

ד.  $\frac{1}{8}$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 5

## פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.  
 חיתוך בין המאורע  $A$  למאורע  $B$  יסומן כך:  $A \cap B$ .  
 מדובר בתוצאות שנמצאות ב- $A$  וגם ב- $B$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 החיתוך שביניהם הוא:  $A \cap B = \{6\}$ .

פעולת איחוד:



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת:  $A \cup B$ .  
 הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- $A$  או ב- $B$ .  
 כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

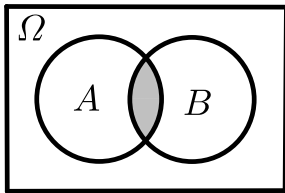
דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית:  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ .

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

**נוסחת החיבור לשני מאורעות:**



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**חוקי דה מורגן לשני מאורעות:**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

**שיטת ריבוע הקסם:**

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

**מאורעות זרים:**



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:  $A \cap B = \{ \}$ . כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

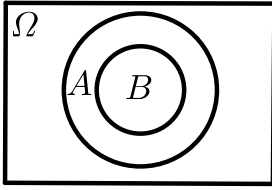
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס:  $P(A \cap B) = 0$ .

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$  והאפשרות לקבל 3

היא:  $B = \{3\}$ , ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר:  $A \cap B = \{ \}$ .

**מאורעות מוכלים:**


נתונים שני מאורעות  $A$  ו- $B$ , השונים מאפס. נאמר שהמאורע  $B$  מוכל במאורע  $A$  אם כל איברי המאורע  $B$  כלולים במאורע  $A$  ונרשום:  $B \subset A$ .

מאורע  $A$  מכיל את מאורע  $B$  כל התוצאות שנמצאות ב- $B$  מוכלות בתוך מאורע  $A$ .

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$ .

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

למשל:

## שאלות:

- (1) מהאותיות  $E, F$  ו- $G$  יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - במילה נמצאת האות  $E$ .  
 $B$  - במילה אותיות שונות.  
 א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך  $A$  עם  $B$ .  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של  $A$  עם  $B$ .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.  
 $B$  - לעבור את המבחן בכלכלה.  
 היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:  
 א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.  
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.  
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.  
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.  
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.  
 ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את  $A$  להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את  $B$  להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.  
 א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:  
 $A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cup B$ .  
 ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- $\Omega$  את מרחב המדגם וב- $\phi$  קבוצה ריקה.  
 נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.  
 להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .  
 קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:  
 $\bar{A}, A \cap \phi, A \cup \phi, A \cap \Omega, A \cup \Omega, A \cap \bar{A}, \bar{\phi}, A \cup \bar{A}$ .

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

$A$  - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

$B$  - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה.  $\bar{\bar{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

$A$  - אדם דובר עברית.

$B$  - אדם דובר ערבית.

$C$  - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עמיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עמיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:  $P(A) = 0.6$ ,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את  $P(\bar{A} \cap B)$ .

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב

שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי:  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$ .  
 ב. האם  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים?  
 ג. מה ההסתברות שרק  $A$  יקרה או שרק  $B$  יקרה?

15  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

מה הסיכוי למאורע  $A$  ומה ההסתברות למאורע  $B$ ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א.  $A \cap B = B \cap A$ .  
 ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$ .  
 ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$ .  
 ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

17 נתון ש- $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.2$ .

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$ ?  
 ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$ ?  
 ג. אם  $A$  ו- $B$  זרים מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?  
 ד. אם  $A$  מכיל את  $B$  מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?  
 ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?  
 ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?  
 ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?  
 ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?  
 ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?  
 ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- 19** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

**20** הוכיחו:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ .

- 21**  $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא:  $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ ?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$   
 ב.  $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- (2) א.  $B \cap \bar{A}$  ב.  $A \cap \bar{B}$  ג.  $A \cap B$  ד.  $A \cup B$  ה.  $\bar{A} \cap \bar{B}$  ו.  $\bar{B}$
- (3) א.  $A = 0, 2, 4, 6, 8, B = 0, 1, 2, 3, 4, \bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9$   
 $A \cap B = 0, 2, 4, A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$
- ב.  $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- (4)  $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$   
 $A \cap \bar{A} = \phi, \bar{\phi} = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega$
- (5) א.  $A \cap B$ : גובה בין 1.7 ל-1.8.  
 ב.  $A \cup B$ : כל גובה אפשרי.  
 ג.  $\bar{A} = \bar{A} \cap B$ : גובה לכל היותר 1.7.  
 ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$ : לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.  
 ה.  $A = \bar{\bar{A}}$ : גובה מעל 1.7.
- (6) א.  $A \cap B \cap C$  ב.  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$  ג.  $A \cup B \cup C$   
 ד.  $\bar{C}$  ה.  $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- (7) א.  $P(A \cup B) = 0.24$  ב.  $P(A \cap B) = 0.04$  ג.  $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- (8) א.  $P(A \cap B) = 10\%$  ב.  $P(A \cup B) = 50\%$  ג.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- (9) א.  $P(A \cap B) = 0.2$  ב.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$  ג.  $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- (10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- (11) א. כן. ב.  $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- (12) הטענה הנכונה היא ג'.
- (13) א. 0.05. ב. 0.95.
- (14) א.  $P(A \cap B) = 0.06$  ב. לא. ג.  $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- (15)  $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- (16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- (17) א. כן. ב. לא. ג.  $P(A \cup B) = 0.5$  ד.  $P(A \cup B) = 0.3$
- (18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- (19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) נכון.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 14

## קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

**רקע:**

**כלל המכפלה:**

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש  $k$  שלבים:  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני...  $n_k$

אפשרויות לשלב  $k$ :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

## שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
- הטלת קובייה פעמים.
  - מספר תלת ספרתי.
  - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
  - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
    - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
    - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- המספר הוא זוגי.
  - במספר כל הספרות שונות.
  - במספר כל הספרות זהות.
  - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
  - במספר לפחות שתי ספות זהות.
  - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- כולם ירו בקומה החמישית.
  - כולם ירדו באותה קומה.
  - כולם ירדו בקומה אחרת.
  - ערך ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 0.36    ב. 0.900    ג. 0.70    ד. 0.90
- (2) א. 0.36    ב. i.  $\frac{1}{36}$     ב. ii.  $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5    ב. 0.3024    ג. 0.0001    ד. 0.9999    ה. 0.6976    ו. 0.01
- (4) א.  $\frac{1}{8^5}$     ב.  $\frac{1}{8^4}$     ג. 0.205    ד.  $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 0.3375    ב. 0.2730
- (6) א.  $\frac{1}{216}$     ב.  $\frac{5}{18}$     ג.  $\frac{13}{18}$     ד.  $\frac{215}{216}$
- (7) א.  $\frac{23^5}{26^5}$     ב.  $\frac{1}{26^4}$     ג.  $1 - \frac{1}{26^4}$     ד.  $\frac{1}{26^2}$
- (8) א.  $0.9^a$     ב.  $1 - 0.9^a$     ג.  $0.5^a$
- (9)  $2^n$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

1. כללי..... 18

## קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

**רקע:**

**תמורה:**

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים בשורה:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ .

הערה:  $0! = 1$ .

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יופיעו בתור הרצף  $ba$ ?

## שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים  
 א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?  
 ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.  
 א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.  
 א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?  
 ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.  
 א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?  
 ב. שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.  
 א. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.  
 א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?  
 ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?  
 ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.24      ב. 0.120
- (2) א. 0.2      ב. 0.8      ג. 0.022
- (3) א. 0.362880      ב. 0.2880
- (4) א. 0.3628800      ב. 0.2      ג. 0.8      ד.  $\frac{1}{45}$
- (5) א.  $\frac{1}{792}$       ב.  $\frac{1}{99}$       ג.  $\frac{1}{4620}$
- (6) א. 0.75      ב. 0.014      ג.  $\frac{1}{14}$       ד.  $\frac{1}{35}$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 5 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 21

## קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

**רקע:**

**מדגם סידור בדגימה עם החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא:  $n^k$ .

**דוגמה:**

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?  $10^3 = 1,000$ ,  $k = 3$ ,  $n = 10$ .

**מדגם סידור ללא החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$\cdot (n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**דוגמה:**

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד:  $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ .

## שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?  
ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?  
ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?  
ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8000      ב. 6840
- (2) א. 0.0001      ב. 0.6561      ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04      ב. 0.48
- (5) א.  $40^5$       ב. 78,960,960

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 23

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין

$$\text{משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: } \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

## שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
  - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
  - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפני רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 10-2, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
  - מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
  - מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
  - מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

- 6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".  
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.  
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- 8)  $2n$  בנים ו- $2n$  בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?  
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

**תשובות סופיות:**

- |                         |                         |           |            |
|-------------------------|-------------------------|-----------|------------|
| א. 53130                | ב. 20475                | ג. 3003   | 1)         |
| א. 252                  | ב. 100                  | ג. 100    | ד. 60      |
| א. 0.1117               | ב. 0.1445               | ג. 0.9819 | 2)         |
| א. 0.02                 | ב. 0.187                | ג. 0.972  | ד. 0.00246 |
| א. 0                    | ב. 0.1923               | ג. 0.009  | ד. 0.837   |
| א. $6.45 \cdot 10^{-5}$ | ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$ | ג. 0.3225 | 3)         |
| 7) שאלת הוכחה.          |                         |           |            |

8) א.  $\binom{2n}{n}^2$       ב.  $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 7 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

26 ..... 1. כללי

## קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

### שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - אין תפקידים שונים בוועד.
- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
  - כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
  - כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
  - בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
- (4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
- מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
  - מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
  - מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
  - מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- 5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- 6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
  - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- 7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- 8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- ללא הגבלה.
  - כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
  - שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- 9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

- 10** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.  
 כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.  
 א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?  
 ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?  
 ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?  
 ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

- 11** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה 41 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.



- 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.  
 א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?  
 ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?  
 ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?  
 ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).  
 ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?  
 ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני מול פנים.  
 ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?  
 ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

- 12** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.  
 א. כמה סיסמאות שונות יש?  
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?  
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

- 13** מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .  
 א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.  
 ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.  
 ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

- 14** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים. בטאו באמצעות  $n$  את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם  $a$  ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).  
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות  $a$ ):
- א. בקוד אין את הספרה 5.
  - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
  - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000    ב. 78,960,960    ג. 658008
- (2) א. 810,000    ב. 657,720    ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000    ב. 1,404,000    ג. 5,616,000    ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024    ב. 0.00098    ג. 0.05933    ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098    ב. 0.17798    ג. 0.02929    ד. 0.02197
- (6) א.  $\frac{1}{4096}$     ב.  $\frac{1}{32,768}$     ג. 0.205    ד. 0.795
- ה. 0.0105    ו. 0.5129    ז. 0.1071
- (7) א. 4,200    ב. 50,400    ג. 604,800
- (8) א. 604,800    ב. 2,880    ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512    ב. 0.014    ג. 0.059    ד.  $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320    ב. 0.1071    ג. 0.2142    ד. 0.0357  
ה. 0.5714    ו. 0.1429    ז. 0.0143    ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176    ב. 45,239,040    ג. 48,484,800
- (13) א.  $\frac{n!}{3!(n-3)}$     ב.  $n \cdot (n-1)(n-2)$     ג.  $n^3$
- (14)  $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א.  $0.9^a$     ב.  $1-0.9^a$     ג.  $0.5^a$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 8 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד

תוכן העניינים

1. כללי ..... 31

## הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

**רקע:**

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של  $A$  בהינתן ש- $B$  כבר קרה:  $P(A|B)$ .

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

$A$  - התוצאה זוגית.

$B$  - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את:  $P(A|B)$ .

## שאלות:

- (1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
- (2) יוסי הטיל קובייה.  
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
- (3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:  
 $A$  - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.  
 $B$  - מכפלת התוצאות 12.  
 חשבו את  $P(A|B)$ .
- (4) מטבע הוטל פעמיים.  
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
- (5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.  
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
- (6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.  
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
- (7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.  
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
- (8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.  
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?
- (9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.  
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?
- (10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,  
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערך ודין התיישבו זה ליד זה.  
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

**תשובות סופיות:**

(1) 0.2

(2)  $\frac{1}{3}$

(3) 0.5

(4) 0

(5)  $\frac{1}{6}$

(6)  $\frac{2}{11}$

(7)  $\frac{1}{3}$

(8)  $\frac{3}{4}$

(9)  $\frac{2}{3}$

(10)  $\frac{1}{4}$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 9 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

1. כללי ..... 34

## הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע  $A$  יתרחש, בהינתן שמאורע  $B$  כבר קרה:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.  
 במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

## שאלות:

- (1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.  
 B - לעבור את המבחן בכלכלה.  
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.  
 חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
- התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
  - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
  - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
  - התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
  - התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?
- (2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.
- איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
  - נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
  - אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
  - אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
- (3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
- מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
  - ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
  - אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
  - נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

- א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
- ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?
- ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
- ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
- ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
- ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :  
 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט",  
 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראלכרט,  
 8% מחזיקים ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?

## תשובות סופיות:

(1) א. 0.833    ב. 0.9375    ג. 0.0625    ד. 0.5    ה. 0.789

(2) א. 5%    ב. 0.0833    ג. 0.786    ד. 0.6875

(3) א. 0.4    ב.  $\frac{2}{3}$     ג. 0.25    ד.  $\frac{6}{7}$

(4) א. להלן טבלה:    ב.  $\frac{2}{3}$     ג. 0.6    ד.  $\frac{23}{30}$

סה"כ	לא אקדמאי	אקדמאי	
200	180	20	שכיר
100	70	30	עצמאי
300	250	50	סה"כ

ה. 0.3    ו. 0.72

(5) א. 0.625    ב. 0.133    ג. 0.402

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 10 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 38

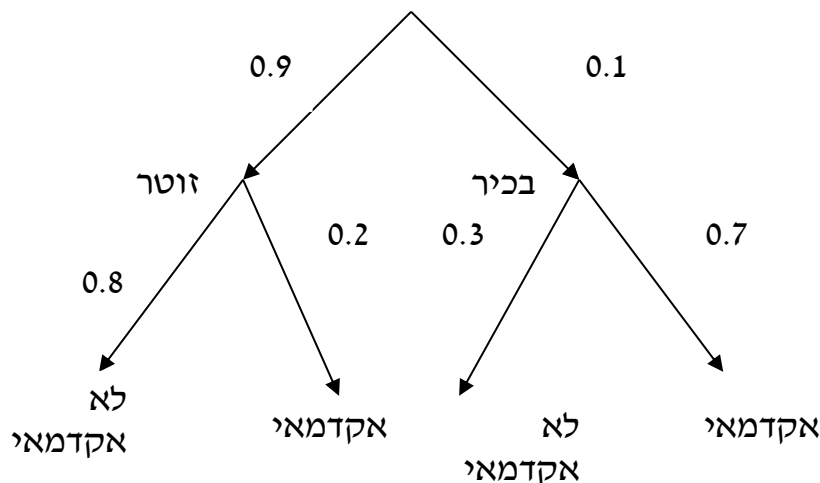
## דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

### רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

### דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף. נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

(1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ?  $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$ .

(2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ?  $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$ .

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

(3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?  $0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$ .

(4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר? מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72 \text{ : מותנה}$$

### נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן  $B$ , מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם  $\Omega$  ל- $A_1, \dots, A_n$  כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$ ,

$$. P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right) \text{ אזי:}$$

### נוסחת בייס:

$$. P\left(\frac{A_j}{B}\right) = \frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

## שאלות:

- (1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.
- א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
- ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?
- (2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
- א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
- ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
- ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
- ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
- (3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
- ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
- (4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
- א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
- ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
- ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

- (5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו. 70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
- א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?  
 ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?  
 ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?
- (6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
- מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.  
 מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.  
 30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.  
 כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
- א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?  
 ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?
- (7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D. אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
- א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?  
 ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?  
 ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?
- (8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
- א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?  
 ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?  
 ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?  
 ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

- (9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא  $P$ , ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש  $k$  תשובות אפשריות. אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?
- (10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
  - רונית, דולב, רונית.
- בכל משחק מישהו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{2}{7}$       ב.  $\frac{23}{49}$
- (2) א. 6%      ב. 58%      ג. 0.241      ד. 0.2
- (3) א. 0.544      ב. 0.5
- (4) א. 9%      ב. 0.09375      ג. 0.9722
- (5) א. 0.14      ב. 0.3488      ג. 0.2442
- (6) א. 70%      ב. 0.8125
- (7) א. 0.57      ב. 0.3158      ג. 0.7543
- (8) א. 0.0886      ב. 0.2889      ג. 0.3137      ד. 0.8778
- (9)  $\frac{kp}{1+p(k-1)}$
- (10) א'

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 11 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 43

## תלות ואי תלות בין מאורעות:

### רקע:

אם מתקיים ש:  $P(B|A) = P(B)$ , נגיד שמאורע  $B$  בלתי תלוי ב- $A$ .

הדבר גורר גם ההפך:  $P(A|B) = P(A)$ , כלומר, גם  $A$  אינו תלוי ב- $B$ .

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

הוכחה לכך:  $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18$$

**הרחבה: אי תלות בין  $n$  מאורעות:**

$n$  מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  הם בלתי תלויים אם ורק אם:  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$ .

## שאלות:

- (1) נתון:  $P(A) = 0.2$ ,  $P(B) = 0.5$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$ .  
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
- (2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.  
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?  
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?
- (3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.  
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?  
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.  
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?  
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?
- (5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.  
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?  
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (6) עבור שני מאורעות  $A$  ו- $B$  המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:  
 $P(A|B) = 0.6$ ,  $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$ ,  $P(A \cup B) = 0.9$ .  
האם  $A$  ו- $B$  מאורעות בלתי תלויים?
- (7) הוכיח שאם:  $P(A/B) = P(B/A)$ , אז:  $P(A) = P(B)$ .

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו!

- א. אם:  $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$ , אזי המאורעות בלתי תלויים.  
 ב. מאורע  $A$  כלול במאורע  $B$ :  $0 < P(B) < 1$ ,  $P(A) > 0$ , לכן:  $P(A/B) < P(A)$ .  
 ג.  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.  
 ד.  $A$  ו- $B$  מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים.  
 ה.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$  לכן  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים.

### תשובות סופיות:

- 1) א. כן.  
 2) א. 0.28 ב. 0.18.  
 3) א. 0.0064 ב. 0.1536.  
 4) א. 0.5904 ב. 0.9984.  
 5) א.  $0.08^5$  ב. 0.3409.  
 6) לא, הם תלויים.  
 7) שאלת הוכחה.  
 8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 12 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

46 ..... 1. כללי

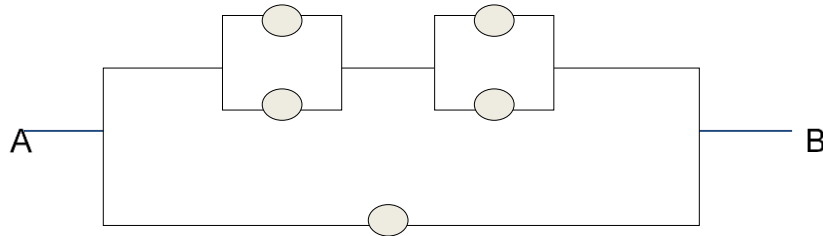
## שאלות מסכמות בהסתברות:

### שאלות:

- (1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
- ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
- מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
- ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
- (2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
- כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
- ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
- ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
- ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?
- (3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי: בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם ייצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
- ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?
- ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?
- ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

- 4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
  - אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
  - מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
  - נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
- 5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
  - נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
  - נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
- 6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.
- חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
  - האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
  - ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?
- 7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?
  - אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
  - האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
  - אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
    - מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
    - אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8) נתונה המערכת החשמלית הבאה :



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות  $p$ .  
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה  $A$  לנקודה  $B$ .  
 הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא:  $P + (1 - P)(2P - P^2)^2$ .

9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.  
 א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?  
 ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?  
 ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10) נתונים שלושה מאורעות:  $A$ ,  $B$  ו- $C$ . ידוע ש:  $P(A|B) = 1$ ,  $P(A|C) = 1$ .  
 תנו דוגמא ספציפית למאורעות:  $A$ ,  $B$  ו- $C$  שבה המאורעות  $B$  ו- $C$  תלויים.

11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:  
 אם  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים, אז  $A$  ו- $\bar{B}$  בלתי תלויים.

12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא  $P$  כאשר:  $0 < P < 1$ .  
 נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.  
 $B$  - המשחק הראשון היה ניצחון.  
 מה ערכו של  $P$ , עבורו  $A$  ו- $B$  יהיו מאורעות בלתי תלויים?

**13** טל מניח בשורה  $N$  קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים

$$\frac{N+1}{3(N-1)} : \text{שונים של המכחול הוא}$$

**14** הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול:  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25    ב. 0.75    ג. 0.6    ד. 0.5
- (2) א. 0.2    ב. 0.267    ג. 0.524    ד. תלויים.
- (3) א. 0.2    ב. אינם זרים.    ג. תלויים.    ד. 0.06
- (4) א. 0.94    ב. 0.255    ג. 0.03    ד. 0.168
- (5) א. 15%    ב. 0.692    ג. לא זרים ותלויים.
- (6) א. 0.65    ב. תלויים.    ג. 0.5384
- (7) א. 8%    ב. 0.733    ג. תלויים.
- ד. i. 0.478    ד. ii. 0.15
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) א.  $\frac{19}{480,700}$     ב.  $\frac{27,132}{480,700}$     ג. 0.4015
- (10) ראו סרטון.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12)  $\frac{1}{2}$
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 13 - המשתנה המקרי הברידי - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 51

## המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

**רקע:**

**משתנה מקרי בדיד:**

משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.

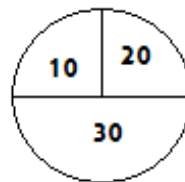
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

**פונקציית ההסתברות:**

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה. סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

## שאלות:

- (1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא :  
 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.  
 70 משפחות עם מכונית אחת.  
 60 משפחות עם 2 מכוניות.  
 20 משפחות עם 3 מכוניות .  
 בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (2) מהאותיות :  $A, B, C$  יוצרים קוד דו תווי.  
 א. כמה קודים ניתן ליצור?  
 ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.  
 ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות  $B$  מופיעה בקוד.  
 בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים : מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו :  $k = 1, 2, \dots, 4$  :  $P(X = k) = \frac{k}{A}$ . מצאו את ערכו של  $A$ .

- (7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגדיר את  $X$  כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- (8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:  
 20% צופים בערוץ 2.  
 8% צופים בערוץ 1.  
 10% צופים בערוץ 10.  
 כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.  
 10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.  
 נגדיר את  $X$  להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

## תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

3	2	1	0	$X$
0.1	0.3	0.35	0.25	$P(X)$

(2) להלן טבלה:

2	1	0	$X$
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$P(X)$

(3) להלן טבלה:

2	1	0	$X$
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

(4) להלן טבלה:

4	3	2	1	$X$
0.343	0.147	0.21	0.3	$P(X)$

(5) להלן טבלה:

3	2	1	0	$X$
0.504	0.398	0.092	0.006	$P(X)$

(6) 10.

(7) להלן טבלה:

4	3	2	1	$X$
$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	$P(X)$

(8) להלן טבלה:

4	3	2	1	$X$
0.01	0.1	0.15	0.74	$P(X)$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 14 - המשתנה המקרי הברידי - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 55

## המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

**רקע:**

**תוחלת:**

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$\text{מגדירים תוחלת באופן הבא: } E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

**שונות:**

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

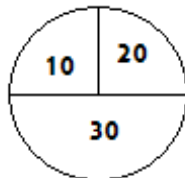
$$\text{מגדירים שונות באופן הבא: } V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**סטיית תקן:**

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים:  $STD = \sigma$ .

**דוגמה:**

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



30	20	10	$X$
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

## שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

40	20	0	-30	$X$
0.2	0.3	0.1	0.4	$P(X)$

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון. חשבו את:  $E(X)$ .

- (3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר. א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת וסטית התקן של  $X$ .

- (4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח. א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

8	6	4	2	$X$
0.2		0.3		$E(X)$

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$ .

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את:  $V(X)$ .

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5-0 ו-5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי:

$X$	$P$
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
$K$	$\frac{1}{4}$

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של  $X$ ?

## תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2, שונות: 796.

(2) 0.9.

(3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36, סטיית תקן: 1.603.

(4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	$X$
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(X)$

(5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

8	6	4	2	$X$
0.2	0.1	0.3	0.4	$P(X)$

(6) ראו טבלה:

5	0	-5	$X$
0.2	0.6	0.2	$P(X)$

(7) 2.33.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 15 - המשתנה המקרי הברידי - טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת והשונות)

תוכן העניינים

1. כללי ..... 59

## המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

### רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי  $Y$  מיוצג ע"י משתנה אקראי  $X$  כאשר  $a, b$  הם קבועים כלשהם:  $Y = aX + b$ , אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

### שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו- $b$ .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונויות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

$$\text{חישבנו קודם ש: } E(X) = 22.5 = \mu, \quad V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

**שאלות:**

(1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

(2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

(3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

(4)  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$  ו- $V(X) = 3$ .  
 $Y$  הינו משתנה מקרי חדש, עבורו:  $Y = 7 - X$ . חשבו את:  $E(Y)$  ו- $V(Y)$ .

(5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.  
א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.  
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.  
מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הני"ל?

(6) יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	$X$
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(X)$

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

- א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
- ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:  
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.  
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

(7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:  $P(X = k) = \frac{k}{A}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4$ .

- א. מצא את ערכו של  $A$ .  
 ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.  
 ג. חשב את:  $E(X^3)$ .  
 ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $\frac{X}{2} - 4$ .

### תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 14, שונות: 32.  
 (2) תוחלת: 8, שונות: 12.  
 (3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.  
 (4) תוחלת: 3, שונות: 3.  
 (5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות:  $85,727.5^2$ .

0	25	50	100	$X$
0.929	0.05	0.02	0.001	$P(X)$

- ג. תוחלת: 1650, שונות:  $85,727.5^2$ .  
 (6) ב.  $V(X) = 1.8275$ .  
 (7) א.  $A = 10$ . ב.  $E(X) = 3$ ,  $V(X) = 1$ . ג.  $E(X^3) = 35.4$ ,  $V(X^3) = 616.84$ . ד.  $E(Y) = -2.5$ ,  $V(Y) = 0.25$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 16 - תוחלת ושוונות של סכום משתנים מקריים (תכונות התוחלת והשוונות)

תוכן העניינים

1. כללי ..... 62

## תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

---

**רקע:**

אם:  $X_n, \dots, X_2, X_1$  משתנים מקריים אזי:

$$. E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם:  $X_n, \dots, X_2, X_1$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$. V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

**דוגמה:**

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.

מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

## שאלות:

(1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

(2)  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של  $X$  היא 3. סטיית התקן של  $Y$  היא 4. מהי סטיית התקן של  $X+Y$ ?

(3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:  $X$  - סכום הזכייה במשחק הראשון.  $Y$  - סכום הזכייה במשחק השני. נתון:

$$\sigma(X) = 3, \quad E(x) = 10$$

$$\sigma(Y) = 4, \quad E(y) = 12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

(4) ברולטה הסיכוי לזכות ב-30 ש"ח הוא חצי, ב-10 ש"ח רבע וכך גם ב-20 ש"ח. מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

(5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K = 2, 3, 4, 5, \quad P(X = K) = \frac{A}{K-1}$$

$$0 \text{ אחר } t$$

מצאו את ערכו של  $A$ .

א. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .

ב. נלקחו  $n$  משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות  $n$  את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

**תשובות סופיות:**

- (1) תוחלת: 9, שונות: 15.
- (2) 5.
- (3) תוחלת: 22, שונות: 5.
- (4) תוחלת: 90, שונות: 275.
- (5) א.  $A = \frac{12}{25} = 0.48$ . ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.  
ג. תוחלת: 2.92, שונות:  $1.1136n$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 17 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 65

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

### רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:  
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".  
 למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.  
 בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי  $n$  פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.  
 מגדירים את  $X$  להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- $p$  את הסיכוי  
 להצלחה בניסוי בודד, וב- $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.  
 ואז נגיד ש:  $X \sim B(n, p)$ .

### פונקציית ההסתברות של $X$ :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1$$

לגודל:  $\binom{n}{k}$ : ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות:}$$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי  $n$  פעמים.
- (3)  $X$  – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.  
 נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

**שאלות:**

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את  $X$  להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ?
  - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
  - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות שלושה יעבדו במדגם?
  - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
  - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את  $X$  כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ? הסבירו.
  - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
  - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
  - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?
- (3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
  - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
  - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
  - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

- (4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
  - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

- (5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
- (6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
- (7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
- (8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את  $X$  כמספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את:  $E(X^2)$ .

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $X \sim B(n=5, p=0.1)$     ב. 0.32805    ג. 0.59049  
 ד. 0.0729    ה. 0.40954    ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45
- (2) א. 0.2335    ב. 0.1493    ג. 0.1493    ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449
- (3) א. 0.5314    ב. 0.0984    ג. 0.1143    ד. תוחלת: -18, סטיית תקן: 14.697
- (4) א. 0.1789    ב. 2
- (5) א. 0.1956    ב. 0.4253
- (6) א. 0.85    ב. 0.182    ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8
- (7) א. 0.401    ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193
- (8) 7.5

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 18 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 69

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

### רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.  
 $X$  – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.  
 נסמן ב- $p$  את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.  
 $X \sim G(p)$

**פונקציית ההסתברות:**  $P(X = k) = pq^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ .

**תוחלת:**  $E(X) = \frac{1}{p}$

**שונות:**  $V(X) = \frac{q}{p^2}$

### תכונות חשובות:

אם  $X$  מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי  $X$  הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,  
 דהיינו,  $P(X > k) = q^k \cdot P(X = (n+k) / X > k) = P(X = n)$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- מה ההסתברות שהוצאו יותר מ-5 כדורים?
- אם הוצאו יותר מ-3 כדורים, מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

## שאלות:

- (1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- שידגום 3 מוצרים.
  - שידגום 4 מוצרים.
  - שידגום 5 מוצרים.
  - שידגום יותר מ-7 מוצרים.
  - שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.
- (2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
- מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
  - מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
  - מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
  - כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
- (3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
- מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
  - מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים, אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
  - אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
  - מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
- (4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.
- מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
  - מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

- (5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?
- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?  
 ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?  
 ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.  
 מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?  
 ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?
- (6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.
- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?  
 ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?  
 ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?  
 ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגות הגבינה שדגם האדם?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.04512    ב. 0.0428    ג. 0.0407    ד. 0.6983    ה. 0.6983
- (2) א. 0.009    ב. 0.0001    ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234  
 ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5
- (3) א. 0.999    ב. 0.875    ג. 0.03125    ד. 1
- (4) א. 0.1029    ב. 9.72
- (5) א. 0.06    ב. 0.7176    ג. 0.0729    ד. 9.487
- (6) א. 0.015    ב. 0.0215    ג. תוחלת:  $63\frac{1}{3}$ , שונות:  $2777\frac{7}{9}$   
 ד. תוחלת  $\frac{2}{3}$ , שונות 1.054

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

תוכן העניינים

72 ..... 1. כללי

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

**רקע:**

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- $a$  ועד  $b$  בקפיצות של אחד.  $X \sim U(a, b)$ .

**פונקציית ההסתברות:**  $P(X = K) = \frac{1}{b-a+1}$  ,  $K = a, a+1, \dots, b$

**תוחלת:**  $E(X) = \frac{a+b}{2}$

**שונות:**  $V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

## שאלות:

- (1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45. נתבונן במשתנה  $X$  - המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- חשבו את  $P(X = 2)$ .
  - חשבו את  $P(X \leq 30)$ .
  - חשבו את  $P(X > 4 | X \leq 10)$ .
  - חשבו את  $P(X = k)$ .
- (2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.
- בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
  - הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
    - מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
    - מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?
- (3) יהי  $X$  התוצאה בהטלת קובייה.
- מהי ההתפלגות של  $X$ ?
  - מה התוחלת של  $X$ ?
  - קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?
- (4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?
- (5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.
- מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
  - מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
  - אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?
- (6) הוכיחו שאם:  $X \sim U(a, b)$ , אז מתקיים ש:  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ .

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{1}{45}$     ב.  $\frac{30}{45}$     ג. 0.6
- (2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.  
 ב. i. 0.08192    ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71
- (3) א.  $X \sim U(1,6)$     ב. 3.5    ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66
- (4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25
- (5) א.  $\frac{1}{50}$     ב.  $\frac{30}{50}$     ג.  $\frac{7}{30}$
- (6) שאלת הוכחה.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

75 ..... 1. כללי

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

### רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

$\lambda$  - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן:  $X \sim pois(\lambda)$ . התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

### פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

### התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

### תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר  $\lambda$  פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

## שאלות:

- (1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
- מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
  - מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
  - מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
  - מה שונות מספר הפניות בדקה?
- (2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
- מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
  - אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
  - אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
- (3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
- מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
  - מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
- (4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
- מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
  - מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
  - מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
  - מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
- (5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
- מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
  - מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
  - מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

- 6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.
- א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?
- ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

### תשובות סופיות:

- |   |           |           |           |                              |
|---|-----------|-----------|-----------|------------------------------|
| 1 | א. 0.0337 | ב. 0.9933 | ג. 0.1246 | ד. 0.5                       |
| 2 | א. 0.084  | ב. 0.099  | ג. 0.151  |                              |
| 3 | א. 4      | ב. 0.407  |           |                              |
| 4 | א. 0.1804 | ב. 0.8647 | ג. 0.6767 | ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41 |
| 5 | א. 0.0139 | ב. 0.2196 | ג. 0.6948 |                              |
| 6 | א. 16.7   | ב. 0.0708 |           |                              |

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית

תוכן העניינים

78 ..... 1. כללי

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

### רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה  $N$  פריטים, מתוכה  $D$  פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה  $n$  פריטים ללא החזרה.  $X$  מוגדר להיות מספר הפריטים ה"מיוחדים" שנדגמו. משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים  $(N, D, n)$  יסומן על ידי:  $X \sim H(N, D, n)$ .

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{התוחלת של ההתפלגות:}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad \text{השונות של ההתפלגות:}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

- א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
- ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

## שאלות:

- (1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.  
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.  
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.  
 ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
- (2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.  
 נגדיר את  $X$  להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.  
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$  בנוסחה (לא בטבלה).  
 ב. מה התוחלת וסטיית התקן של  $X$ ?  
 ג. חשבו את ההסתברות הבאה:  $P(X = 2 | X > 1)$ .
- (3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה. אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה. זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:  
 א. האוכלוסייה גדולה מאד.  
 ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
- (4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.  
 א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?  
 ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

## תשובות סופיות:

(1) א. ב. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$ , שונות:  $\frac{5}{9}$ .

3	2	1	0	$x$
$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$	$P(x)$

ג. תוחלת:  $1\frac{2}{3}$ , שונות:  $\frac{20}{27}$ .

(2) א.  $\frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$ . ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

(3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

(4) א. 0.0256. ב. 0.8.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 81

## התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית שלילית:

### רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- $r$ .  $X =$  מספר החזרות עד שהתקבלו  $r$  הצלחות:  $X \sim NB(r, p)$ .

**פונקציית ההסתברות:**  $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ ,  $k = r, r+1, \dots, \infty$

**תוחלת:**  $E(X) = \frac{r}{p}$

**שונות:**  $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קובייה מוטלת עד שמקבלים 3 פעמים תוצאה שגדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

## שאלות:

- (1) בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. כדור מוצא באקראי פעם אחר פעם ומוחזר בין הוצאה להוצאה. נסמן ב- $X$  את מספר הכדורים שהוצאו עד שהתקבלו 2 כדורים לבנים בסך הכול (לא בהכרח ברצף).
- חשבו את  $P(X = 2)$ .
  - חשבו את  $P(X = 3)$ .
  - חשבו את  $P(X = 4)$ .
  - חשבו את  $P(X = k)$ .
- (2) הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).
- מה הסיכוי שישחק פעמיים?
  - מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?
  - מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?
  - מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?
  - מה הסיכוי שישחק  $k$  פעמים?
- (3) הראו שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.
- (4) מטבע מוטל שוב ושוב עד שמתקבל שלוש פעמים עץ בסך הכול.
- בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.
  - מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?
  - חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?
- (5) יהיה  $X_i$  מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה, כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- הוכיחו שהתוחלת והשונות של  $\sum_{i=1}^n X_i$  זהות לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית השלילית  $NB(n, p)$ .

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.36    ב. 0.288    ג. 0.0576    ד.  $0.6^2 \cdot 0.4^{k-2}$
- (2) א. 0.16    ב. 0.192    ג. 0.1728    ד. 0.13824    ה.  $0.4^2 \cdot 0.6^{k-2}$
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) ב. תוחלת: 6, שונות: 6.    ג. 0.1886
- (5) שאלת הוכחה.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 23 - המשתנה המקרי הברידי - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

84 ..... 1. כללי

## המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

### שאלות:

(1) נתון כי:  $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ ,  $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ .

- א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של  $X$ .
- ב.  $W = 2X - 4$ , חשבו את התוחלת וסטיית התקן של  $W$ .
- ג.  $T = X + Y$ , חשבו את התוחלת של  $T$ .
- האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של  $T$ ?
- (2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

- א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?
- ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

- (3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .
- ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

- (4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?
- ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?
- ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

- (5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
  - יהי  $X$  מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל). מהי פונקציית ההסתברות של  $X$ ?
  - מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
  - ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?
- (6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
- הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
  - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
  - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
- ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
  - מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
  - מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
- (7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.
- נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?
  - בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

- 8) מבחן בנוי משני חלקים : בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?  
 ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?  
 ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?  
 ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

**תשובות סופיות:**

- 1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.      ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.  
 ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.
- 2) א. 0.03.      ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.  
 ג. 0.1328.
- 3) א. ראו טבלה:      ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	$x$
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(x)$

- ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.
- 4) א. 0.9975.      ב. 0.0172.      ג. 1.0025.
- 5) א. 0.375.      ב. 0.6.      ג. 0.282.      ד. 0.282.
- 6) א. ראו טבלה:      ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

3	2	1	0	$x$
0.084	0.428	0.392	0.092	$P(x)$

- ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.
- 7) א. 0.4348.      ב. 0.0923.
- 8) א. 2.013.      ב. 0.5256.      ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.  
 ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 24 - משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת

תוכן העניינים

1. כללי ..... 87

## משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

### רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית:  $X$  ו- $Y$ .

### דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי  $Y$  משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

### נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:

$$p(x=0, y=0) = 0.05$$

$$p(x=0, y=1) = 0$$

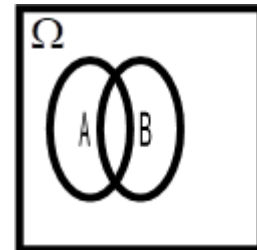
$$p(x=1, y=0) = 0.15$$

$$p(x=1, y=1) = 0.05$$

$$p(x=2, y=0) = 0$$

$$p(x=2, y=1) = 0.75$$

$y/x$	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75



שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציית הסתברות שוליות:

$Y/X$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

**משתנים בלתי תלויים:**

$X$  ו- $Y$  יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  אפשריים התקיים הדבר

$$. p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$$

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

**דוגמה:**

$$. p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2) \cdot p(y=1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$$

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

**שאלות:**

- (1) אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים. נגדיר את  $X$  להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת  $Y$  כמספר המשחקים שהאדם שיחק.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.  
 ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?  
 ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

- (2) להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

$Y / X$	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

- א. השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.  
 ב. האם  $X$  ו- $Y$  תלויים?  
 ג. מצאו את הסתברות ש- $Y = 3$ , אם ידוע ש- $X = 1$ .
- (3) מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא  $\frac{1}{10}$ . מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות. יהי  $X$  מספר המוצרים בחבילה, ו- $Y$  מספר המוצרים הפגומים בחבילה.
- א. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $x = 3$ .  
 ב. מה ההתפלגות של המשתנה  $Y$  בהינתן  $X$  הינו  $K$  כלשהו.  
 ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.  
 ד. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

- (4) מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי  $X$  המספר הקטן מבין השניים ו- $Y$  הגדול מביניהם.
- א. חשבו את ההתפלגות של  $(X, Y)$ .
- ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?
- ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של  $X$  בהינתן  $Y = 4$ . מצאו:  $E(X / Y = 4)$ .
- (5) ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים. יהי  $X$  מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי  $Y$  משתנה אינדיקטור:
- 1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.  
 0 – אחרת.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.
- ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

**תשובות סופיות:**

1) א. להלן טבלה: ב. 2.4 ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

$x \setminus y$	0	50	100	$P(y)$
1	0	0	0.3	0.3
3	0.343	0.294	0.063	0.7
$P(x)$	0.343	0.294	0.363	1

2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.125.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
2	0.2	0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05	0	0.15
4	0.1	0.27	0.08	0.45
$P(x)$	0.4	0.4	0.2	1

3) א.  $y/x=3 \sim B\left(n=3, p=\frac{1}{10}\right)$  ב.  $y/x=k \sim B\left(n=k, p=\frac{1}{10}\right)$

ג. 0.3 ד. להלן טבלה:

$x \setminus y$	2	3	$P(y)$
0	0.405	0.3645	
1	0.09	0.1215	
2	0.005	0.0135	
3	0	0.0005	
$P(x)$	0.5	0.5	1

4) א. להלן טבלה: ב. 0.5 ג. תוחלת: 2.

$x \setminus y$	2	4	$P(y)$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

5) א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.05	0.35	0	0.4
1	0	0.45	0.15	0.6
$P(x)$	0.05	0.8	0.15	1

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 25 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

תוכן העניינים

93 ..... 1. כללי

## משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

### רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- $\rho$ .  
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.

$$\frac{\quad}{\quad} \quad \quad \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \quad \quad \frac{\quad}{\quad}$$

מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה:  $y = ax + b$ .

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $a$  יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $a$  שלילי (מקדם מתאם -1).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט.

### חישוב מקדם המתאם:

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \text{הנוסחה של מקדם המתאם היא:}$$

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) \quad \text{השונויות המשותפת:}$$

תכונות של השונויות המשותפת:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \quad (1)$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (2)$$

### משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונויות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.  
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

### השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי  $X$  מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי  $Y$  משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת. נחשב את מקדם המתאם:

$X/Y$	0	1	2	$P_Y$
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
$P_X$	0.05	0.2	0.75	1

$X$	0	1	2
$P_X$	0.05	0.2	0.75

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

$y$	$P_Y$
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.  
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה  $Y$ ?

### שאלות:

- (1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
- נגדיר את  $X$  להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את  $Y$  להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פוני ההסתברות השולית.
  - האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
  - ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
  - האם המתאם בין  $X$  ל- $Y$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.
  - חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ .
  - האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
- (2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת  $Y$  להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
  - האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים?
  - מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ . האם המשתנים מתאומים?
  - אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
  - אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
- (3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מספר הכדורים בתא הראשון.
  - $Y$  - מספר הכדורים בתא השני.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
  - האם המשתנים בלתי מתאומים?

- (4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים. יהי  $X$  ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי  $Y$  מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.
- מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
  - חשבו את מקדם המתאם של  $X$  ו- $Y$ .
  - מצאו את ההתפלגות של  $Y$  בהינתן ש- $X = 2$ .
- (5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
  - $Y$  - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציית ההסתברות השולית.
  - האם המשתנים מתואמים?
  - מה מקדם המתאם בין  $X$  לבין  $Y$ ?
  - מה יהיה מקדם המתאם:
- בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.
  - בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.
- ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

**תשובות סופיות:**

(1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963 ו. מתואמים.

(2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25 ה. 0.5

(3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

ג.  $\frac{2}{3}$ .

5) א. להלן טבלה: ב.  $X$  ו- $Y$  מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ה.  $-\frac{2}{3}$ .

ii. -1.

ד. i.  $-\frac{2}{3}$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 26 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות

תוכן העניינים

100 ..... 1. כללי

## המשתנה המקרי הדו ממדי – קומבינציות לינאריות:

**רקע:**

יהיו שני משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$ .  
התוחלת והשונות של סכומם היא:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

התוחלת והשונות של הפרשם היא:

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y)$$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

**קומבינציה ליניארית:**

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה לינארית של שני משתנים אחרים:  
 $W = (aX + b) + (cY + d)$ . אזי:

$$\text{cov}[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

- נתונים שני משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$  המקיימים:  
 $\mu_X = 80$ ,  $\sigma_X = 15$ ,  $\mu_Y = 70$ ,  $\sigma_Y = 20$ ,  $\text{cov}(X, Y) = 200$
- מצאו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
  - מצאו את התוחלת והשונות של  $X$  ו- $Y$ .
  - מצאו את השונות ומה התוחלת של המשתנה  $W = 2X + 3Y$ .

**שאלות:**

(1) נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

$Y / X$	1	2	3	$P(X)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

- השלימו את ההסתברויות החסרות.
- האם המשתנים תלויים?
- האם המשתנים בלתי מתואמים?
- חשבו את השונות המשותפת.
- חשבו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- חשבו את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

(2) מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100, עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי היא 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

- חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.
- חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.
- חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.
- עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

(3) נתון:  $\text{var}(X + 2Y) = 3$ ,  $\text{var}(X - 2Y) = 2$ .  
חשבו:  $\text{cov}(X, Y)$ .

(4) מטילים קובייה  $n$  פעמים. נגדיר את המשתנים הבאים:  
 $X =$  מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.  
 $Y =$  מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5.  
 בטאו את השונות המשותפת באמצעות  $n$ .

## תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מתואמים. ד.  $-0.1$ .

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
2	0.2	0.1	0.3	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
$P(x)$	0.4	0.2	0.4	1

ה. תוחלת:  $4.4$ , שונות:  $0.84$ . ו. תוחלת:  $-0.4$ , שונות:  $1.24$ .

(2) א.  $240$ . ב. תוחלת:  $190$ , שונות:  $1105$ .

ג. תוחלת:  $10$ , שונות:  $145$ . ד. תוחלת:  $1710$ , שונות:  $2785$ .

(3)  $-0.125$ .

(4)  $-\frac{n}{36}$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 27 - המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות ..... 103

## המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד – שאלות מסכמות:

**רקע:**

**משתנים בלתי תלויים:**

יהיו משתנים  $X$  ו- $Y$ . הם יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  אפשריים מתקיים:  $p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$ .

**מקדם המתאם:**

מגדירים את מקדם המתאם:  $\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ .

**שונות משותפת:**

מגדירים את השונות המשותפת:

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השונות המשותפת:

$$1. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$2. \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$3. \text{cov}[(aX + b), (cY + d)] = a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

**משתנים בלתי מתואמים:**

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

תוחלת ושונות של סכום משתנים:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

קומבינציות לינאריות:

נגדיר קומבינציה ליניארית כללית באופן הבא:  $W = (aX+b) + (cY+d)$   
 אזי מתקיים:

$$E(W) = E((aX+b) + (cY+d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX+b) + (cY+d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

## שאלות:

- (1) יש ליצור סיסמה בת 3 תווים. כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים:  $A, B, C, 1, 2$ . יהי  $X$  מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמה, ויהי  $Y$  מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצה הסיסמה (שני הקצוות).
- זהו את ההתפלגויות השוליות של  $X$  ו- $Y$  כהתפלגויות מיוחדות.
  - מצאו את ההתפלגות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - מצאו את מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ .
  - מהו המתאם בין  $2X$  ל- $3Y+5$ ?
- (2) במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה: 4 "מכבי", 2 "גולדסטאר" ו-1 "טבורג". קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח. נסמן ב- $X$  את מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, ונסמן ב- $Y$  את מספר בקבוקי "טבורג" שנלקחו על ידי קרן.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - חשבו את התוחלת והשונות של  $X$  ושל  $Y$ .
  - מצאו את השונות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - נגדיר את  $W$  כמספר בקבוקי ה"גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן. בטאו את  $W$  באמצעות  $X$  ו- $Y$ , וחשבו את התוחלת והשונות של  $W$  על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.
  - מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?
- (3) במגירה 6 זוגות נעליים. יהודה הוציא מהמגירה 4 נעליים (לא בהכרח זוגות) באקראי. נסמן ב- $W$  את מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה, ונסמן ב- $R$  את מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.
- מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו.
  - האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?
  - מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.
  - אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

- (4) בכד 5 כדורים כחולים, 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול, ו-0 אחרת.  
 $Y$  - מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.
- א. חשבו את  $P(X=1)$ .
- ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ג. מה התוחלת של  $Y$ , אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?
- ד. מה השונות של  $X$ , אם ידוע שהוצא לכל היותר כדור לבן אחד?
- (5) ביום ההולדת הרביעי של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל-5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה-5 באופן אקראי ובלתי תלוי בבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מספר הפרסים שקיבלה יוליה.  
 $Y$  - מספר הילדים שלא קיבלו פרס.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי מתואמים?
- ג. מצאו את התוחלת של  $X \cdot Y^2$ .
- ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה, למספר הילדים שקיבלו פרס?
- (6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו.
- א. אם שני משתנים הם מתואמים, אזי הם תלויים.  
 ב. אם שני משתנים הם תלויים, אזי הם מתואמים.  
 ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.  
 ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים, אזי הם בלתי תלויים.
- (7) במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו-25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות, מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
- נסמן  $X_i$  - מספר הגברים שבחרו במתנה  $i$ .  
 נסמן  $Y_i$  - מספר הנשים שבחרו במתנה  $i$ .
- א. האם  $X_1$  ו- $Y_1$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.  
 ב. האם  $X_1$  ו- $X_2$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.  
 ג. מהי ההתפלגות של  $X_1 + X_2$ ?  
 ד. האם המתאם בין  $X_1$  ו- $X_2$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי?  
 אין צורך לחשב רק להסביר.

(8) הוכיחו את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים  $X, Y$  ו- $Z$  :  
 $\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$ .

(9) מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50 עלים בדקה. נסמן ב- $Y$  את מספר העלים שנושרים מהעץ בין 12:00 ל-12:10, ונסמן ב- $Q$  את מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל-12:30.  
 א. חשבו את:  $\text{cov}(4Y, Q+6)$ .  
 ב. מה המתאם בין  $Y$  ל- $Q$ ?

(10) בסל יש 20 כדורים אדומים, 20 ירוקים ו-20 כחולים. מוציאים באקראי מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

(11) נתון ש:  $Y \sim B(1, p)$  כאשר  $0 < p < 1$ .  
 הוכיחו שאם מתקיים:  $P(X = x | Y = 0) = P(X = x | Y = 1)$  לכל  $X$ , אז  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים.

(12) נתון ש- $X \sim B(n, p)$  וכן:  $Y \sim B(m, p)$ , שאינם תלויים זה בזה.  
 הוכיחו שמתקיים:  $X | X+Y = k \sim HG(n+m, n, k)$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{5}\right) \quad \text{א.}$$

ב. להלן טבלה: ג. 0.816 ג. ד. 0.816.

$X/Y$	0	1	2	3	$P_Y$
0	$\frac{64}{125}$	$\frac{16}{125}$	0	0	$\frac{80}{125}$
1	0	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{125}$	0	$\frac{40}{125}$
2	0	0	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
$P_X$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

$$(2) \quad \text{א. להלן טבלה: ב. } E(X) = \frac{12}{7}, V(X) = \frac{24}{49}, E(Y) = \frac{3}{7}, V(Y) = \frac{12}{49}.$$

$X/Y$	0	1	2	3	$P_Y$
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{20}{35}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{15}{35}$
$P_X$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$\text{ג. } -\frac{8}{49} \quad \text{ד. } E(W) = \frac{6}{7}, V(W) = \frac{20}{49} \quad \text{ה. } -1.$$

(3) א. להלן טבלה: ב. המשתנים תלויים.

$R/W$	0	1	2	$P_R$
0	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
2	$\frac{90}{495}$	$\frac{120}{495}$	$\frac{15}{495}$	$\frac{225}{495}$
3	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
4	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
$P_W$	$\frac{240}{495}$	$\frac{240}{495}$	$\frac{15}{495}$	1

ג. להלן טבלה: ד. 1.

$R/w = 1$	1	2	3
$P(R/w = 1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

א.  $\frac{185}{220}$  ב. להלן טבלה: ג. 1.714 ד. 0.071

$X/Y$	0	1	$P_Y$
0	$\frac{1}{220}$	$\frac{55}{220}$	$\frac{56}{220}$
1	$\frac{12}{220}$	$\frac{100}{220}$	$\frac{112}{220}$
2	$\frac{18}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{48}{220}$
3	$\frac{4}{220}$	0	$\frac{4}{220}$
$P_X$	$\frac{35}{220}$	$\frac{185}{220}$	1

א. להלן טבלה: ב.  $X$  ו- $Y$  בלתי מתואמים. (5)

$X/Y$	0	1	2	3	$P_Y$
2	$\frac{24}{125}$	$\frac{36}{125}$	0	0	$\frac{60}{125}$
3	$\frac{36}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{12}{125}$	0	$\frac{60}{125}$
4	$\frac{4}{125}$	0	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
$P_X$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

ג. 4.128 ד. 0.

א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. (6)

- 7) א. בלתי תלויים.      ב. תלויים.      ג.  $x_1 + x_2 \sim B\left(n = 25, p = \frac{2}{5}\right)$ .
- ד. חלקי ושלילי.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) א. 1000.      ב. 0.316.
- 10) -0.5.
- 11) שאלת הוכחה.
- 12) שאלת הוכחה.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 28 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

תוכן העניינים

1. כללי ..... 111

## המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

### רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$ . השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

### הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף  $X$  בעל פונקציית צפיפות  $f(x)$ .

### פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא:  $F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$   
 כמו כן מתקיים:  $p(X > t) = 1 - F(t)$  ו- $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$ .

### תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$   
 שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא:  $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$

תוחלת של פונקציה של  $X$  :

תוחלת של פונקציית משתנה רציף  $X$ , המסומנת:  $g(x)$ , תחושב באופן

$$\text{הבא: } E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

### אחוזונים:

האחוזון ה- $p$  הוא ערך (נסמן אותו:  $x_p$ ), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא  $p$ .

$$\text{כלומר: } P(X \leq x_p) = p$$

### ריענון מתמטי:

#### נוסחאות לחישוב שטחים

$$S_{\text{triangle}} = \frac{h \cdot a}{2} : \text{שטח משולש: גובה } (h) \text{ כפול הבסיס } (a) \text{ חלקי } 2$$

$$S_{\text{rectangle}} = a \cdot b : \text{שטח מלבן: אורך } (a) \text{ כפול רוחב } (b)$$

### משוואת קו ישר:

משוואת ישר מפורשת תסומן:  $y = mx + n$ , כאשר  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $n$  היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} : \text{שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות: } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ הוא}$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית  $(x_1, y_1)$  ושיפועו הוא  $m$ , תחושב באופן

$$\text{הבא: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

## אינטגרלים מידיים:

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

## שאלות:

(1)  $X$  הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוטו:

א. מצאו את ערכו של  $c$ .

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

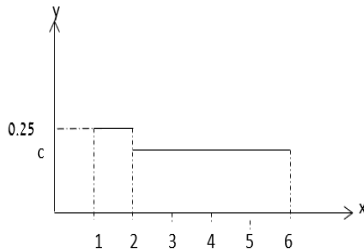
i.  $P(x < 4)$

ii.  $P(x > 1.5)$

iii.  $P(1.5 < x < 5)$

iv.  $P(5 < x < 10)$

v. מצאו את החציון של המשתנה.



(2) נתון משתנה מקרי רציף  $A$  שפונקציית הצפיפות שלו היא:

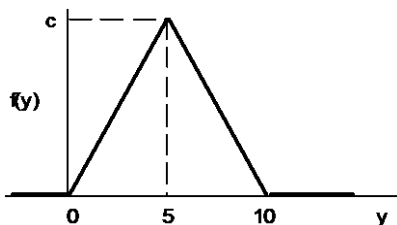
$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

וידוע ש-  $P(0 < X < 1) = \frac{1}{4}$

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של  $X$ .

ב. מצאו את החציון של  $X$ .

ג. מה הסיכוי ש- $X$  קטן מ-0.5?



(3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $Y$ :

א. מצאו את  $c$ .

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של  $Y$ .

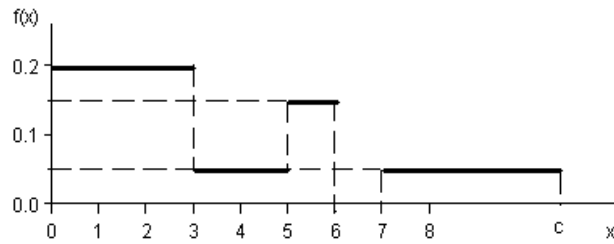
ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(Y > 4)$ ,  $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$ ,  $P(Y \leq 3.0)$ ,  $P(Y = 7.0)$

ד. מצאו את העשירון התחתון:  $y_{0.1}$ , הרבעון התחתון:  $y_{0.25}$  והחציון של  $Y$ .

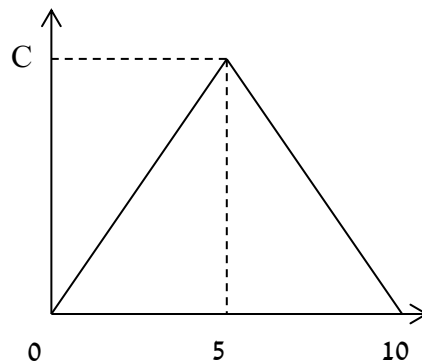
הסיקו מהו העשירון עליון:  $y_{0.9}$ .

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי  $X$ :



- א. מצאו ערך  $c$  שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:  
 $P(1.0 < X \leq 5.0)$ ,  $P(X \geq -2.0)$ ,  $P(X \geq 4)$ .

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



- א. מה ערכו של  $c$ ?  
 ב. מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.  
 6) נתונה פונקציית צפיפות:  $f(X) = \frac{2}{x}$ , המוגדרת מ-1 עד  $K$ .  
 א. מצאו את ערכו של  $K$ .  
 ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו את הסיכוי ש- $X$  לפחות 1.5.  
 ד. מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.  
 ה. מה התוחלת של  $X$ ?

7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה :  $f(X) = AX^2(10 - X)$  ,  $0 < X < 10$ .

A הינו קבוע חיובי.

א. מצאו את A.

ב. חשב את:  $P(x > 5 | x > 2)$ .

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X :

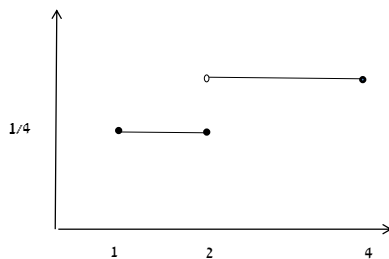
$$f(x) = 0.5 \cdot e^{2x} , -\infty \leq X \leq \ln(c)$$

א. מצאו את ערכו של c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.

ג. חשב:  $P(X > 0)$ .

ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?



9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :

א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.

ה. חשבו את:  $E(X^3)$ .

10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל

$$f(x) = 6x(1-x) , 0 \leq x \leq 1$$

א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?

ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?

ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים

שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t} : \text{ההתפלגות המצטברת הבאה}$$

א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול

פחות מרבע שעה?

ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את  $b$ .  
 ב. חשבו את התוחלת של  $X$ .  
 ג.  $y$  הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם  $X$  קטן מ-5. מהי השונות של  $y$  ?

13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של  $k$ .  
 ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ג. חשבו  $P(x > 2.5)$ .

14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה :  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ,  $a \leq x \leq b$

- א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.  
 ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.  
 ג. מצאו את התוחלת של  $\frac{1}{X}$ .

## תשובות סופיות:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)0.25 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.25 + (t-2) \cdot \frac{3}{16} & 2 < t \leq 6 \\ 1 & t > 6 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } \frac{3}{16} \quad \text{(1)}$$

ג. i.  $\frac{5}{8}$

א. ii.  $\frac{7}{8}$       iii.  $\frac{11}{16}$       iv.  $\frac{3}{16}$       ד.  $\frac{1}{3}$

א.  $b=2, c=0.5$       ב. 1.41      ג. 0.0625      (2)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.02t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ 1 - 0.02(t-10)^2 & 5 < t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 0.2 \quad \text{(3)}$$

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.2t & 0 < t \leq 3 \\ 0.6 + (t-3) \cdot 0.05 & 3 < t \leq 5 \\ 0.7 + (t-5) \cdot 0.15 & 5 < t \leq 6 \\ 0.85 & 6 < t \leq 7 \\ 0.85 + (t-7) \cdot 0.05 & 7 < t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 0.10 \quad \text{(4)}$$

ג. 0.5

א.  $c=0.2$       ב.  $0.5 \pm 1.46$       (5)

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 \cdot \ln t & 1 \leq t \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 & t > e^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } e^{\frac{1}{2}} \quad \text{(6)}$$

ג. 0.189

ד. 1.051      ה. 1.297

א. 0.0012      ב. 0.7067      ג. תוחלת: 6, שונות: 4      (7)

$$(8) \quad \text{א. 2.} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{2t} & t \leq \ln(2) \\ 1 & t > \ln(2) \end{cases} \quad \text{ג. 0.75} \quad \text{ד. 0.549}$$

$$(9) \quad \text{א.} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{8} & 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)0.25 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.25 + (t-2) \cdot \frac{3}{8} & 2 < t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } 2\frac{2}{3} \quad \text{ד. תוחלת: } 2.625, \text{ שונות: } 0.6927 \quad \text{ה. } 23.4375$$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{7}{27} \quad \text{ב. } 0 \quad \text{ג. } 3.704$$

$$(11) \quad \text{א. עיין סרטוט בוידאו} \quad \text{ב. } 0.0498 \quad \text{ג. } 0.6321 \quad \text{ד. } 11.51$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{2}{3} \quad \text{ב. } 5.22 \quad \text{ג. } \frac{2}{9}$$

$$(13) \quad \text{א. } \frac{1}{6} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t^3-1}{12} & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{7}{12} + \frac{t^2-4}{12} & 2 < t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases} \quad \text{ג. } 0.229$$

$$(14) \quad \text{א.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{(t-b)}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases} \quad \text{ב. תוחלת: } E(X) = \frac{a+b}{2}, \text{ שונות: } V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{ג. } \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 29 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 120

## התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות מעריכית:

### רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.  $\lambda$  - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית):  $X \sim \exp(\lambda)$  כאשר  $\lambda > 0$ .

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד להתרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

### פונקציית הצפיפות של ההתפלגות:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{לכל } x \geq 0.$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:  $F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{התוחלת:}$$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{השונות:}$$

להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון:  $P(X > a+b \mid X > a) = P(X > b)$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ-9 שעות?

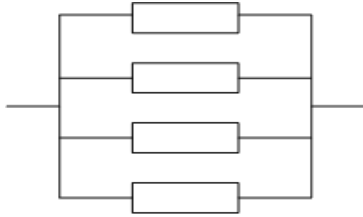
ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

## שאלות:

- (1) הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
- מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
  - מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
  - מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.
- (2) הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
- מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
  - מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
  - מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?
- (3) משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
- מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
  - מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
  - אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
  - מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?
- (4) בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
- שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
  - אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
  - מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה שני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמתואר בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין. אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת.

עלות הוספת רכיב היא  $K$  ₪.

כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות

נגרם הפסד של  $A$  ₪.

מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

### תשובות סופיות:

1) א. 0.368 ב. 0.865 ג. 0.347

2) א. 24 שעות. ב. 0.632 ג. 0.135

3) א. 0.393 ב. 0.239 ג. 0.513 ד. 69.08

4) א. 0.264 ב. 0.368 ג. 0.233

5) א. 0.8403 ב.  $K < 0.0588A$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 30 - התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 123

## התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

### רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין  $a$  לבין  $b$ .

$$. X \sim U(a, b)$$

### פונקציית הצפיפות:

$$. f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$a \leq x \leq b$$

### פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$. F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

### התוחלת:

$$. E(X) = \frac{a+b}{2}$$

### השונות:

$$. V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$X$  - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש- $X$  קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של  $X$ ?

$$a = 20, b = 40$$

$$X \sim U(20, 40)$$

$$\text{א. } P(x < 25) = f(25) = \frac{25-20}{40-20} = 0.25$$

$$E(x) = \frac{20+40}{2} = 30$$

$$\text{ב. } V(x) = \frac{(40-20)^2}{12} = 33\frac{1}{3}$$

## שאלות:

- (1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור,  $X$ , מתפלג:  $U(13,16)$ .
- מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של משך ההפסקה?
  - מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
  - מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?
- (2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
- הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
  - אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
  - מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?
- (3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
- מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
  - נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
  - מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?
  - עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

## תשובות סופיות:

- (1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב.  $\frac{1}{3}$ . ג.  $\frac{2}{3}$ .
- (2) א.  $X \sim U(0,10)$ . ב. 0.6. ג. 10.
- (3) א. 0.2. ב.  $\frac{2}{7}$ . ג. 109. ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 31 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

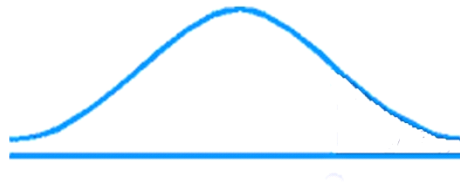
תוכן העניינים

126 ..... 1. כללי

## התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

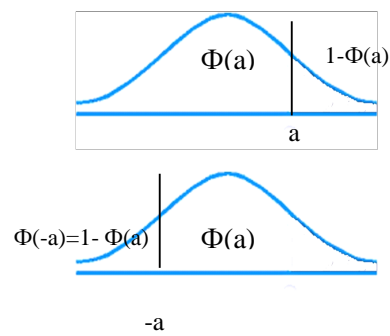
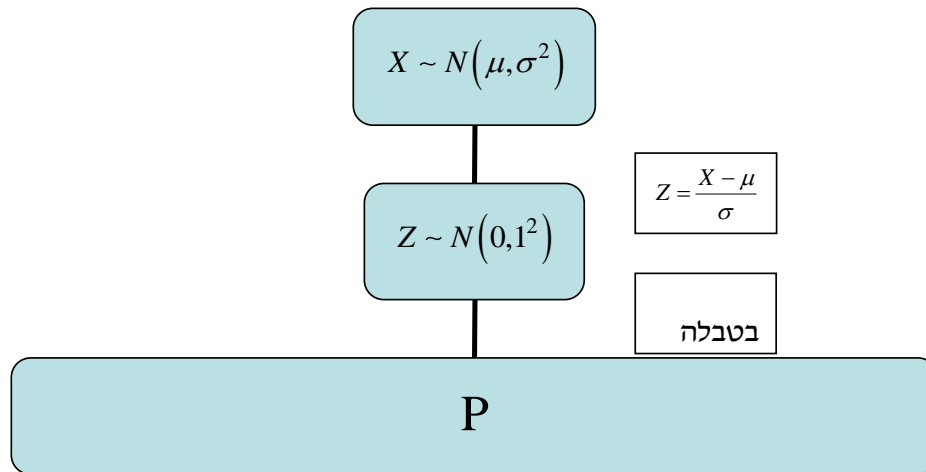
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

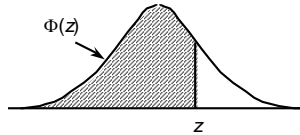
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות  $Z$ :  $Z \sim N(0, 1^2)$ .

$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



**טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$  :**


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

## שאלות:

- (1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
- (2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
  - מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
  - מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
  - מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
- (3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
  - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
  - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
  - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
  - מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?
- (4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
  - מצאו את האחוזון ה-95.
  - מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225.
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - מהו האחוזון ה-20?
  - מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
  - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
  - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
  - מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
  - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
  - במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
    - בעשירון העליון.
    - בממוצע.
    - בשונויות.
  - לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
    - 1.
    - 2.
    - 3.
    - אין לדעת.



- 9** הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- 10** ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- $T$  דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של  $T$ ?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל  $T$ ?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
- 11** אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

**תשובות סופיות:**

ה. 50%	ד. 50%	ג. 0	ב. 2.28%	א. 89.25%	<b>(1)</b>
	ד. 68.26%	ג. 0%	ב. 3.76%	א. 0%	<b>(2)</b>
	ד. 0.383	ג. 39.44%	ב. 89.44%	א. 26.43%	<b>(3)</b>
				ה. 100%	
		ג. 2787.2	ב. 3958	א. 3812.8	<b>(4)</b>
	ד. 87.4	ג. 112.6	ב. 80.8	א. 119.2	<b>(5)</b>
		ג. 453.48	ב. 532.9	א. 500	<b>(6)</b>
	ד. 733	ג. 0.3446	ב. 100	א. 500	<b>(7)</b>
				ה. 267	
		ג. 1	ב. בממוצע.	א. 3	<b>(8)</b>
	ד. 0.3975	ג. 0.8563	ב. 0.0228	א. 0.1587	<b>(9)</b>
		ג. 0.1587	ב. 0.2266	א. 1925	<b>(10)</b>
	ד. 0.25	ג. 100	ב. 0.675	א. 0.1359	<b>(11)</b>

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 32 - התפלגות הדגימה - התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 33 - התפלגות הדגימה - התפלגות סכום התצפיות במדגם ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 34 - התפלגות הדגימה - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 35 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

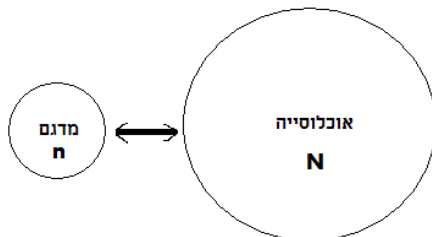
1. כללי ..... 134

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	ממוצע
$\mu$	$\bar{X}$	
$P$	$\hat{p}$	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר משפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 36 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 137

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ . הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- מה הפרמטר בדוגמה זו?
  - מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $E(\hat{\theta}) = \theta$ : יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ .
  - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה  $\mu$ :**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם:}$$

$$E(\bar{x}) = \mu \quad \text{לכן } \bar{x} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} \mu. \text{ כמו כן, טעות תקן: } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$$

**פרופורציה באוכלוסייה  $p$ :**

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:}$$

$$E(\hat{p}) = p, \quad \text{לכן } \hat{p} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} p. \text{ כמו כן טעות התקן: } \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

**שונות האוכלוסייה  $\sigma^2$ :**

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה:}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{ולכן } S^2 \text{ הינו אומד חסר הטיה ל-} \sigma^2. \quad S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
 להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
 אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומד ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25    ב. 0.019    ג. 0.24    ד. 0.01
- (2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.  
 ב. 100    ג. 2342    ד. 58
- (3) א. 177.9    ב. 64.1    ג. 0.4
- (4) א. 8.1    ב. 3.16
- (5) ד'
- (6) ג'
- (7) ד'
- (8) ד'
- (9) ג'

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 37 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

1. אומדן חסר הטייה ..... 142

## אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטייה ל- $\theta$ , אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה  $X$  הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	$X$
$4\theta$	$1 - 60\theta$	$2\theta$	הסתברות

מעוניינים לאמוד את  $\theta$  על סמך שתי תצפיות מההתפלגות:  $X_1$  ו- $X_2$ .

א. הראו שהאומד:  $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$ , הוא אומד מוטה ל- $\theta$ .

הטיה של אומד היא:  $E(\hat{\theta}) - \theta$ . כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד  $T_1$ ?

ג. תקנו את  $T_1$ , כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא:  $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$ .

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם  $\hat{\theta}$  אומד חסר הטיה ל- $\theta$ , אז  $g(\hat{\theta})$  יהיה אומד חסר הטיה עבור  $g(\theta)$ , רק אם  $g$  תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל:  $P(X = 3)$ .

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה  $\sigma^2$ :  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$ .

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של  $X$ .

**תזכורות חשובות:**

אם:  $Y = aX + b$ , אזי:  $E(Y) = aE(X) + b$ ,  $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$ ,  $\sigma_Y = |a|\sigma_X$ .

אם:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים, אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

## שאלות:

- (1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת  $\mu$  וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת  $\mu$ , נלקח מדגם של 5 ציונים:  $X_1, \dots, X_5$ . שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
- הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
- במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
- איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

- (2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של  $2n$  נשים. נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$ . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i \quad \text{זה:}$$

- בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
- איזה אומד עדיף? נמקו.

- (3)  $X \sim B(n, p)$ . כלומר,  $X$  הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר  $P$  (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל  $n$ .

- פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$ .
- מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?
- מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$ ?
- מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$ .

4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע:  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2$ .

פונקציית ההסתברות של  $X$  - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2}, \quad P(X=1) = \frac{\theta}{3}, \quad P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- $\theta$ , שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- $\theta$ , שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום,

במשך שלושה ימים -  $X_1, X_2, X_3$  (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל

והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל

התפלגות התלויה בפרמטר  $\theta$  באופן הבא:

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא  $3\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא  $1 - 4\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא  $\theta$ .

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק

אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר  $\theta$  על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול

אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $5T$  אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר  $5\theta$ .

ב. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $T^2$  אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר  $\theta^2$ .

- (7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $p$ , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $2p$ . דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב- $X$  את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- $Y$  את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- $p$ ?

א.  $\frac{X}{20}$ .

ב.  $\frac{Y}{20}$ .

ג.  $\frac{X+Y}{60}$ .

ד.  $\frac{2X+Y}{80}$ .

- (8) יהיו  $T_1$  ו- $T_2$  אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר  $\theta$ .  
 א. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta^2$ , המתבסס על  $T_1$  ו- $T_2$ .  
 ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$ , המתבסס על  $T_1$  ו- $T_2$ .

- (9) נתון ש- $X$  הינו משתנה מקרי עם תוחלת  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$ . נדגמו  $n$  תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  אומד חסר הטיה ל- $\mu$ , כאשר:  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות:  $X_1 \cdot X_2$ .

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- $\mu^2$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } T_1 \text{ ו- } T_2 \quad \text{ב. } \frac{2}{3} T_3 \quad \text{ג. } T_1 = 76.6, T_2 = 110 \quad \text{ד. } T_1$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בוידאו.} \quad \text{ב. } T_2$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x}{n} \quad \text{ב. } 1 - \frac{x}{n} \quad \text{ג. } X \quad \text{ד. } \theta$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3x}{2} \quad \text{ב. } \frac{3\bar{x}}{2}$$

$$(5) \quad \text{א. } 1 - \frac{x}{2} \quad \text{ב. } 1 - \frac{1}{2} \bar{x} \quad \text{ג. } 0.125 \quad \text{ד. } 3 \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{x} \right)$$

ה. לשונות 0.917.

$$(6) \quad \text{א. נכון.} \quad \text{ב. לא נכון.}$$

(7) ב'.

$$(8) \quad \text{א. } T_1 \cdot T_2 \quad \text{ב. } T_1 - T_1 \cdot T_2$$

$$(9) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.}$$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 38 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 148 ..... 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה.
- 153 ..... 2. קביעת גודל מדגם.
- 155 ..... 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה.

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא:  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$ : נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$ .

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?

2. מה המשתנה באוכלוסייה?

3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

4. מהו רווח הסמך?

5. מה אורך רווח הסמך?

6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקרה ש- $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד:  $\mu$ .

אומד נקודתי:  $\bar{x}$ .

תנאים לבניית רווח הסמך:  $X \sim N$  או  $n \geq 30$ .

$\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך:  $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:  $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\varepsilon$  - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

• אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .

• ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$ .

• ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.

• ככל שרמת הביטחון ( $1-\alpha$ ) גבוהה יותר, כך  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

## שאלות:

- 1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
  - מה המשתנה הנחקר?
  - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - מה רווח הסמך לפרמטר?
  - מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - מה אורך רווח הסמך?
  - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- 3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- 4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- ממוצע המדגם.
  - שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
  - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
  - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- מהו ממוצע המדגם?
  - מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
  - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
  - גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
  - המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
  - רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

9) חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל:  $48 < \mu < 54$ . מה נכון בהכרח:

א.  $\mu = 51$ .

ב.  $\bar{X} = 6$ .

ג.  $\bar{X} = 51$ .

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

### תשובות סופיות:

1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג.  $\mu$ . ד.  $9200 < \mu < 9800$ .

ז. 0.05.

ו. 600.

ה. 0.95.

2)  $4920.6 < \mu < 4979.4$

ב.  $222.16 < \mu < 237.84$

א.  $223.42 < \mu < 236.58$

ג. ראה סרטון.

4) א.  $10,116 < \mu < 9284$ . ב. הסטייה המירבית בין  $\bar{x}$  ל- $\mu$  היא 416 שם בבטחון של 95%.

ד. לא.

ג. 800.

ג. 0.9544.

ב. 3.

א. 102.

ג. גדל.

ב. יקטן פי 2.

א.  $4.42 < \mu < 83.5$ .

ג. 0.9544.

ב. 5.

א. 87.

8) ב'.

9) ג'.

10) ד'.

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$  ברמת סמך של  $1-\alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב

$$.n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

## שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.  
 א. כמה מתגייסים יש לדגום?  
 ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

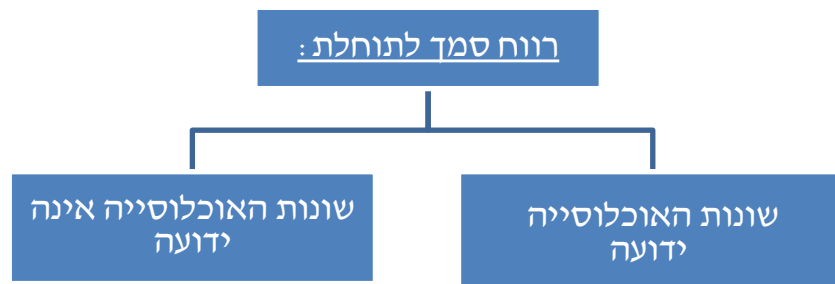
## תשובות סופיות:

- (1) .780  
 (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.  
 (3)  $n = 62$ .

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

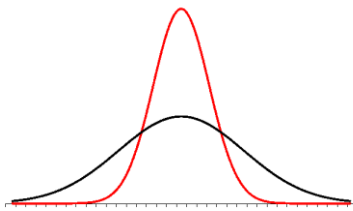


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה  $(\sigma^2)$  אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:**  $X \sim N$  או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:**  $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן:  $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

## שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.  
 ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?  
 ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן:  $S = 13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
- א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?  
 ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.  
 ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.  
 ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ .
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח  $\sigma = 20$ . סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$ . למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?  
 א. סטטיסטיקאי א'.  
 ב. סטטיסטיקאי ב'.  
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.  
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $79.88 < \mu < 89.72$       ב. כן.      ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית.      ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א.  $96.63 < \mu < 107.37$       ב.  $96.90 < \mu < 107.10$       ג. ראה בסרטון.
- (5)  $3.149 < \mu < 3.351$
- (6)  $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 39 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

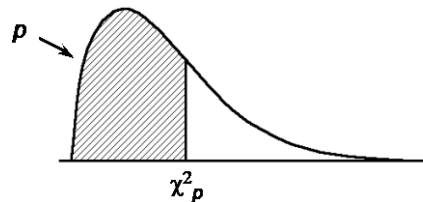
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....158

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

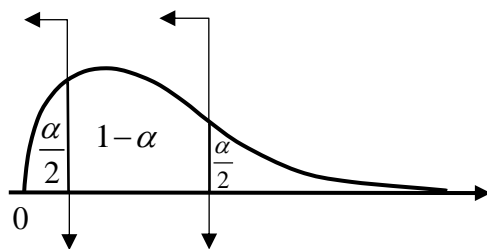
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

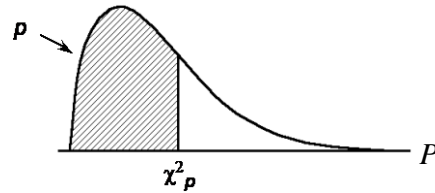
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020097	0.033421	0.054129	0.101280	0.138009	0.175395	0.233371	0.270613	0.317706
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.214778	0.352929	0.505131	0.717356	0.900000	1.064479	1.385829	1.600000	1.832741
3	0.071714	0.115717	0.216000	0.352929	0.505131	0.717356	0.900000	1.064479	1.385829	1.600000	1.832741	2.071813	2.364515
4	0.207163	0.297000	0.484000	0.711000	1.060000	1.500000	2.000000	2.400000	2.700000	3.000000	3.350000	3.745000	4.108000
5	0.411614	0.554382	0.831000	1.150000	1.610000	2.230000	3.000000	3.690000	4.100000	4.500000	4.950000	5.400000	5.890000
6	0.676000	0.872000	1.240000	1.640000	2.200000	3.000000	4.000000	4.780000	5.210000	5.590000	6.000000	6.400000	6.880000
7	0.989000	1.240000	1.690000	2.170000	2.830000	3.850000	5.020000	5.910000	6.350000	6.750000	7.160000	7.560000	8.030000
8	1.340000	1.650000	2.180000	2.730000	3.490000	4.750000	6.160000	7.170000	7.640000	8.030000	8.450000	8.860000	9.330000
9	1.730000	2.090000	2.700000	3.330000	4.170000	5.580000	7.340000	8.480000	8.990000	9.390000	9.800000	10.200000	10.630000
10	2.160000	2.560000	3.250000	3.940000	4.870000	6.330000	8.330000	9.590000	10.100000	10.490000	10.900000	11.300000	11.750000
11	2.600000	3.050000	3.820000	4.570000	5.580000	7.280000	9.490000	10.800000	11.330000	11.730000	12.140000	12.540000	12.980000
12	3.070000	3.570000	4.400000	5.230000	6.300000	8.210000	10.590000	11.980000	12.530000	12.940000	13.350000	13.750000	14.190000
13	3.570000	4.110000	5.010000	5.890000	7.040000	9.140000	11.580000	13.050000	13.620000	14.030000	14.440000	14.840000	15.290000
14	4.070000	4.660000	5.630000	6.570000	7.790000	10.130000	12.600000	14.180000	14.770000	15.180000	15.580000	15.980000	16.430000
15	4.600000	5.230000	6.260000	7.260000	8.550000	11.150000	13.270000	14.830000	15.440000	15.850000	16.250000	16.650000	17.100000
16	5.140000	5.810000	6.910000	7.960000	9.310000	12.190000	14.000000	15.670000	16.300000	16.710000	17.110000	17.510000	17.960000
17	5.700000	6.410000	7.560000	8.670000	10.100000	13.150000	14.900000	16.560000	17.200000	17.610000	18.010000	18.410000	18.860000
18	6.260000	7.010000	8.230000	9.390000	10.900000	14.160000	15.830000	17.490000	18.100000	18.510000	18.910000	19.310000	19.760000
19	6.840000	7.630000	8.910000	10.100000	11.700000	15.140000	16.780000	18.380000	19.000000	19.410000	19.810000	20.210000	20.660000
20	7.430000	8.260000	9.590000	10.900000	12.400000	16.130000	17.780000	19.380000	20.000000	20.410000	20.810000	21.210000	21.660000
21	8.030000	8.900000	10.300000	11.600000	13.200000	17.140000	18.790000	20.380000	20.900000	21.310000	21.710000	22.110000	22.560000
22	8.640000	9.540000	11.000000	12.300000	14.000000	18.160000	19.800000	21.380000	21.900000	22.310000	22.710000	23.110000	23.560000
23	9.260000	10.200000	11.700000	13.100000	14.800000	19.180000	20.830000	22.380000	22.900000	23.310000	23.710000	24.110000	24.560000
24	9.890000	10.900000	12.400000	13.800000	15.700000	20.200000	21.870000	23.380000	23.900000	24.310000	24.710000	25.110000	25.560000
25	10.500000	11.500000	13.100000	14.600000	16.500000	21.230000	22.900000	24.380000	24.900000	25.310000	25.710000	26.110000	26.560000
26	11.200000	12.200000	13.800000	15.400000	17.300000	22.260000	23.930000	25.380000	25.900000	26.310000	26.710000	27.110000	27.560000
27	11.800000	12.900000	14.600000	16.200000	18.100000	23.280000	24.960000	26.380000	26.900000	27.310000	27.710000	28.110000	28.560000
28	12.500000	13.600000	15.300000	16.900000	18.900000	24.290000	25.990000	27.380000	27.900000	28.310000	28.710000	29.110000	29.560000
29	13.100000	14.300000	16.000000	17.700000	19.800000	25.290000	26.990000	28.380000	28.900000	29.310000	29.710000	30.110000	30.560000
30	13.800000	15.000000	16.800000	18.500000	20.600000	26.290000	27.990000	29.380000	29.900000	30.310000	30.710000	31.110000	31.560000

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 40 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

1. רווח הסמך לפרופורציה.....163

## רווח הסמך לפרופורציה:

**רקע:**

המטרה היא לאמוד את  $P$  – פרופורציה באוכלוסייה.

**האומד הנקודתי:**

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{ מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

**תנאי לבניית רווח הסמך:**

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

## שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.  
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.  
 ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?  
 ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.  
 א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).  
 ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?  
 ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:  
 $0.08 < p < 0.18$   
 א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?  
 ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של  $\pm 3\%$  מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 40-35 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.  
 א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.  
 ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $.18.1\% < p < 29.9\%$   
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.  
 ג.  $.14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א.  $0.545 \leq p \leq 0.655$   
 ב. האורך שלו היה קטן.  
 ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 52  
 ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א.  $.30.9\% > p > 22.5\%$   
 ב.  $.60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 200

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 41 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששוניות האוכלוסיה ידועות.....166
2. כששוניות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שוניות.....168

## כששונויות האוכלוסייה ידועות:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

1.  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  ידועות.

2.  $X_1, X_2 \sim N$  או  $n_1, n_2 > 30$ .

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך:  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1-\alpha$ , לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪. כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

## שאלות:

- (1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
- (2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.  
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.  
ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
- (3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

## תשובות סופיות:

- (1)  $(-20, 90)$ .
- (2) א.  $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$ .  
ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.  
ג. רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.
- (3)

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$2. X_1, X_2 \sim N$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

**השונויות המשוקללת:** כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

הנוסחה הבאה:

$$d.f = n_1 + n_2 - 2$$

דרגות החופש:

$$\text{רווח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$ , לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

באר שבע	תל אביב	
10	20	מספר האקדמאים
9500	11,000	ממוצע הכנסות של אקדמאים
250	200	סטיית התקן של הכנסות אקדמאים

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

## שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה  $X$  שמתפלג:  $N(\mu_x, \sigma^2)$ , ומשתנה  $Y$  שמתפלג:  $N(\mu_y, \sigma^2)$ .

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$  ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
1. השונות שווה.
  2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
  3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 42 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) הפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) הפרשים במדגמים מזווגים ..... 170

## רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

### רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש  $n$  צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים:  $X$  ו- $Y$ .

ניצור משתנה חדש:  $D = x - y$ .

הפרמטר שנרצה לאמוד:  $\mu_D$ .

התנאים לבניית רווח הסמך:

1.  $x, y \sim N$ .

2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך:  $\bar{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ .

כאשר דרגות החופש:  $df = n - 1$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית. מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

## שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

82	75	90	68	74	סמסטר א'
100	76	87	84	80	סמסטר ב'

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-19 < \mu_0 < 38$ . ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל. ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2)  $-0.013 < \mu < 0.185$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 43 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך ..... 172

## שאלות מסכמות על רווחי סמך:

### שאלות:

- (1) מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps. מהירות מתחת ל-10Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה. התוצאות שהתקבלו במדגם: ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה. בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים:
- תוחלת מהירות הגלישה.
  - סטיית תקן של מהירות הגלישה.
  - הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.
- (2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות:

5	4	3	2	1	0	מספר פעמים
10	20	22	28	34	86	מספר אנשים

- תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום.  $\alpha = 0.05$ .
  - אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה".  $\alpha = 0.1$ .
- (3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא:  $81 < p < 91$ . רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.
- כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?
  - באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
  - בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

- (4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

- א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?  
 ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?  
 ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

- (6) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים.

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832 \text{cm}^2, \quad \bar{x} = 176.2 \text{cm}$$

- א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.  
 ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

- (7) בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?  
 ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

- (8) להלן מדגם של שכר הדירה ב-₪ של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב:

7500	6500	7000	7500	8000	שנת 2012
7700	6800	7800	8200	8000	שנת 2013

- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $80.65 \leq \mu \leq 93.35$     ב.  $13.5 < \sigma < 22.9$     ג.  $0.225 \leq p \leq 0.575$
- (2) א.  $1.21 \leq \mu \leq 1.65$     ב.  $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$
- (3) א. 70    ב. 0.9988    ג.  $83\% < p < 89\%$
- (4) א.  $97.4 \leq \mu \leq 106.6$     ב. לא    ג. יגדל.
- (6) א.  $170.8 \leq \mu \leq 181.6$     ב.  $8.8 \leq \sigma \leq 14.3$
- (7) א.  $-372 \leq \mu_A - \mu_B \leq 772$ , לא    ב.  $6467 \leq \mu_A \leq 7133$
- (8)  $-21 \leq \mu_D \leq 821$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 44 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

175	.....	1. הקדמה
179	.....	2. סוגי טעויות

## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

### תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
 הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
 בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
 אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.  
 (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.
- ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

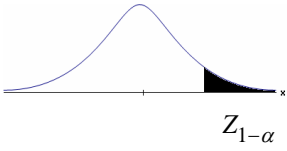
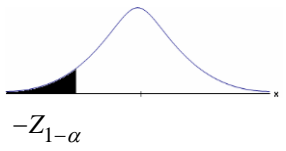
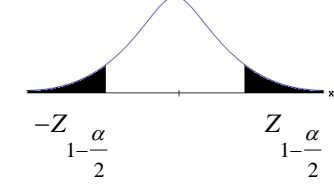
פרק 45 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 181 ..... 1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה
- 185 ..... 2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה)
- 190 ..... 3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה
- 194 ..... 4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה)
- 197 ..... 5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה $H_0$ אם מתקיים:
--	--	--	-----------------------

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

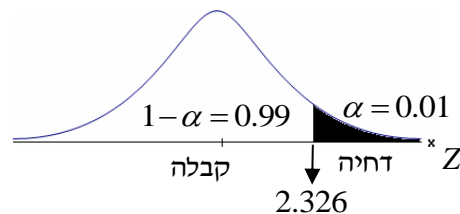
הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

**תנאים:**

1.  $X \sim N$

2.  $\sigma = 2.5$

**כלל הכרעה:**

נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{x}} = \frac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

**מסקנה:**

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 ס"מ<sup>3</sup> וסטיית תקן 20 ס"מ<sup>3</sup>. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 ס"מ<sup>3</sup> במדגם בגודל 25. א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%? ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.  
 ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

(1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$ , דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ ידועה			תנאים:
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

כאשר בהנחת השערת האפס:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה:  $X =$  משקל בק"ג.

פרמטר:  $\mu$ .

$$H_0: \mu = 65$$

השערות:  $H_1: \mu > 65$

תנאים:

$$1. X \sim N$$

$$2. \sigma = 12$$

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left( \begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

## שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu > 70$ . המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 74$ . מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?  
 ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?  
 ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?  
 ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?  
 ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.



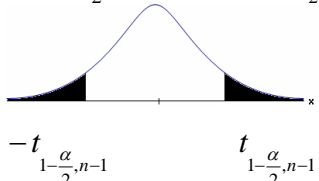
- 6) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?  
 בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
  - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
  - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
  - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- 7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
  - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
  - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
  - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- 8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל:  $p\text{ value} = 0.0254$  לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
  - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
  - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
  - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

### תשובות סופיות:

- (1) 0.0228
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א.  $H_0: \mu = 100$   
 ב. 0.1056 ג. 0.1056  
 ד.  $H_1: \mu < 100$
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן ג. נכריע שאין כיול. ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

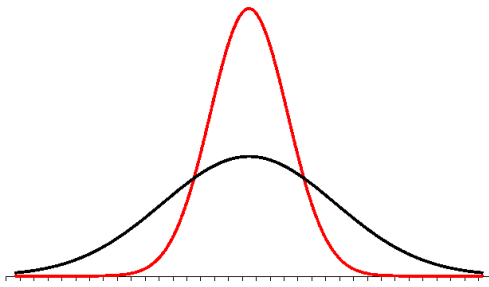
רקע:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



### התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה ששנים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  ,  $H_1: \mu < \mu_0$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:

- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

### רקע:

נוכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

· לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

· לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. אינה ידועה $\sigma$ או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$			תנאים:
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n - 1$$

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

- רשמו את השערות המחקר.
- מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה:  $X =$  זמן נסיעה בדקות.

תנאים:  $X \sim N$ .

פרמטר:  $\mu$ .

א. השערות:  
 $H_0: \mu = 40$   
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = ( \bar{X} \leq 32.6 ) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$ , לכן דוחים את  $H_0$ .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

## שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{א. } H_0 : \mu = 1000 \\ H_1 : \mu \neq 1000 \end{array} \quad \text{ב. } 20\% \leq P_v \leq 50\%$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%

(3) 1.01, נקבל את  $H_0$ .

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$  :

$$H_0 : \mu = \mu_0 , H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1-\alpha$  ל- $\mu$  :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$  .

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$  .

### דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0 : \mu = 80 , H_1 : \mu \neq 80 , \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$  .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

### פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל  $H_0$  .

## שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 90$ ,  $H_1: \mu \neq 90$ . החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
- א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
- ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצלין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.
- (2) א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$ .
- ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
- (3) א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$ . ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 46 - בדיקת השערות על שוניות

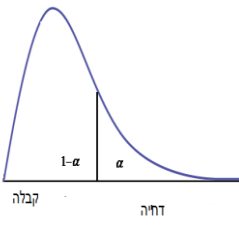
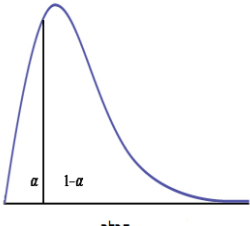
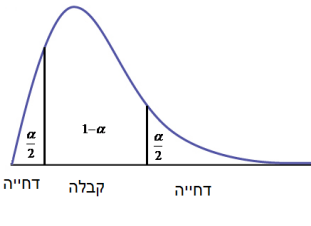
תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן.....199

## בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

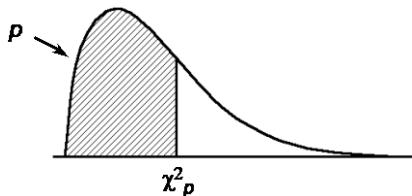
בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$X \sim N$			תנאים:
 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ או $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$	נדחה את השערת האפס אם:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

התפלגות חי בריבוע:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)} \quad \text{אם } X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע, מתקיים ש:}$$



התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם  $\mu$  אינו ידוע, אז:  $d.f = n - 1$ .

**דוגמה:**

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 15$ . מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420 \quad \text{במדגם של 20 ישראלים התקבל:}$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן I.Q

המשתנה:  $X =$  ציון I.Q

פרמטר:  $\sigma^2$

$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$

השערות:  $H_1: \sigma^2 \neq 225$

הנחה:  $X \sim N$

$$d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19 \quad \text{כלל הכרעה:}$$

נדחה את  $H_0$  אם  $X^2 > 32.9$  או  $X^2 < 8.91$

תוצאות המדגם:  $n = 20$

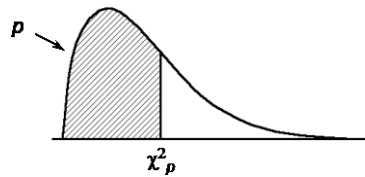
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את  $H_0$ , לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q

שונה מזו של אמריקאים. ( $\alpha = 5\%$ )

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005157	0.00982	0.01393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

## שאלות:

(1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארוז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).  
 לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):  
 1008, 1024, 1005, 996, 997.  
 מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 110, 90, 72, 50, 38.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

(3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים

באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

(4) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma^2 > 100$   $H_0: \sigma^2 = 100$

מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם  $\sigma_1^2 = 150$ ?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

(5) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma < 2$ ,  $H_0: \sigma = 2$ .

במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.

תנו הערכה למובהקות התוצאה.

### תשובות סופיות:

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) א. נדחה את  $H_0$ .  
 ב. לא תשתנה.  
 ג. לא ניתן לדעת.  
 ד. לא תשתנה.
- (3) א. נדחה את  $H_0$ .  
 ב. לא נדחה את  $H_0$ .
- (4) א. בין 25% ל-50%.  
 ב. 405.3.
- (5)  $0 < P_v < 0.005$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

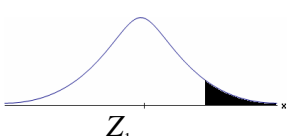
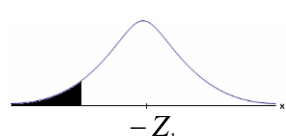
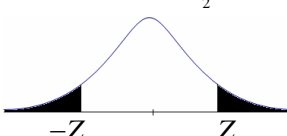
פרק 47 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

204	.....	1. התהליך
207	.....	2. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית

## התהליך:

רקע:

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את $H_0$	כלל הכרעה: אזור הדחייה של $H_0$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל הכרעה – אזור הדחייה של $H_0$ :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

## שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
- א. רשמו את ההשערות.  
 ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.  
 ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
- א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?  
 ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות:  $H_0: p = p_0$ ,  $H_1: p > p_0$ . חוקר א' השתמש ברמת מובהקות  $\alpha_1$  וחוקר ב' ברמת מובהקות  $\alpha_2$  החוקר הראשון דחה את  $H_0$  ואילו החוקר השני קיבל את  $H_0$ . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
- א.  $\alpha_1 = \alpha_2$ .  
 ב.  $\alpha_1 > \alpha_2$ .  
 ג.  $\alpha_1 < \alpha_2$ .  
 ד. המצב המתואר לא אפשרי.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) א.  $H_0: p = 0.2$   
 ב.  $H_1: p \neq 0.2$   
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה  $H_0$ .  
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

## מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב-  $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם  $p_v \leq \alpha$  דוחים את  $H_0$ .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} < p_0$	p-value

כאשר בהנחת השערת האפס:  $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון:  $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

## שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.  
 א. מהי מובהקות התוצאה?  
 ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.  
 א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?  
 ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?  
 ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?  
 ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5%:  
 (בחרו בתשובה הנכונה)  
 א. יקבל את השערת האפס  
 ב. ידחה את השערת האפס.  
 ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה:  
 "במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך  $p\text{-value}$  של 3%, לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי), היינו מקבלים ערך  $p\text{-value}$  של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

**תשובות סופיות:**

- (1) א. 0.0455.  
ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את  $H_0$ .  
ברמת מובהקות של 5% : נדחה את  $H_0$ .
- (2) א. 0.0548.      ב. 0.0548.      ג. מעל 0.0548.  
ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3)  $p_v = 0$ , נדחה את  $H_0$ .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה



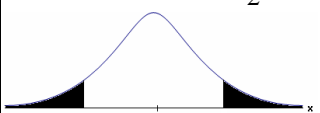
פרק 48 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות..... 211
2. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 215

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות – רקע

$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
מדגמים בלתי תלויים $\sigma_1, \sigma_2$ ידועות $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים			תנאים:
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה $H_0$ אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

התקנון:

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

## שאלות

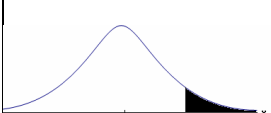
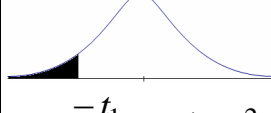
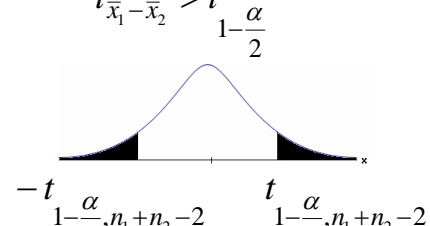
- (1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- (2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
- (3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.  
 א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.  
 ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו-40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.  
 א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?  
 ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

**תשובות סופיות**

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה את  $H_0$ .
- (3) א. 0      ב. נדחה את  $H_0$ .
- (4) א. נדחה את  $H_0$ , אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.  
ב. 0.6331

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:
1. מדגמים בלתי תלויים 2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית			
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את $H_0$	אזור הדחייה של $H_0$

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונויות המשוקללת:

## חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה $H_0$ אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

## דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 200$ .

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות  $S^2 = 260$ .

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות

(1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.  
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

(2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

(3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

100W	60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	$S$
15	13	$n$

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
- ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

**תשובות סופיות**

- (1) נדחה את  $H_0$ .
- (2) הנחות:  
1. סטיות התקן שוות.  
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.  
נקבל את  $H_0$ .
- (3) א. נדחה את  $H_0$ .  
ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.  
ג. לא נדחה את  $H_0$ .

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

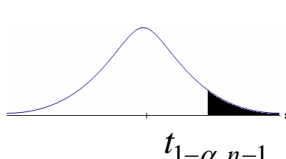
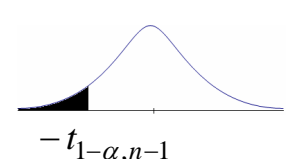
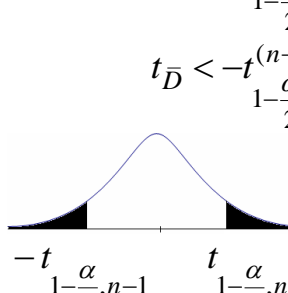
פרק 49 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים..... 219

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

### בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
1. $\sigma_D$ אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	או $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל הכרעה: אזור הדחייה של $H_0$
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
גיל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

## שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת  $X$  לחברת  $Y$  מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

יפן	סין	מצרים	פולין	הולנד	קנדה	ארה"ב	חברה/מדינה
4.2	3.2	3.5	3	2.2	2.1	1.5	$X$
4.2	3.2	3.2	3.1	1.9	2	1.4	$Y$

- בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצע?  
 (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

82	75	90	68	74	סטטיסטיקה א'
100	76	87	84	80	סטטיסטיקה ב'

- פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.  
 א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?  
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן  $Z$  למדגם יחיד.
- מבחן  $T$  למדגם יחיד.
- מבחן  $T$  למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן  $T$  למדגמים מזווגים.

(5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

### תשובות סופיות

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) לא נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $0.25 \leq p \leq 0.5$     ב. 0.5    ג. לא נדחה  $H_0$ .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 50 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 223

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

---

### רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu_1 - \mu_2$  :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל-  $\mu_1 - \mu_2$  :

אם  $C$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$  .

אם  $C$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$  .

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו :  $\alpha = 5\%$ ,  $H_0 : \mu_D = 80$ ,  $H_1 : \mu_D \neq 80$  .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%,  $78 < \mu_D < 83$  .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

## שאלות

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

סמסטר א	סמסטר ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

- (2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

- א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.
- ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

## שאלות רב-ברירה :

- (3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
- הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ . אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את השערות :
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$  ;  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$  ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :
- א. לדחות את השערת האפס.
- ב. לא לדחות את השערת האפס.
- ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
- ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו :  $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ , רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
- לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
  - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
  - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של  $D$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$  ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א.  $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$  ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג.
- (4) א.

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

פרק 51 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

- 226 ..... 1. שאלות רב ברירה ( אמריקאיות )
- 239 ..... 2. שאלות פתוחות מסכמות

### שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות  $\alpha = 0.01$ , נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ ?

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ג. ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים. מהן ההשערות האלטרנטיביות להשערת האפס?

א.  $H_1 : p = 0.5$

ב.  $H_1 : p = 0.6$

ג.  $H_1 : p > 0.5$

ד.  $H_1 : p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב  $X - Y$ )

68	82	93	69	לפני הנישואין - X
71	84	88	80	לאחר הנישואין - Y

א.  $H_1 : \mu_d < 0, H_0 : \mu_d = 0$

ב.  $H_1 : \mu_x - \mu_y < 0, H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$

ג.  $H_1 : \mu_x - \mu_y < 0, H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$

ד.  $H_1 : \mu_d > 0, H_0 : \mu_d = 0$

5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות

בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך \_\_\_\_\_, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך \_\_\_\_\_.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח

חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר

נישואיהם. הנה התוצאות :

68	82	93	69	לפני הנישואין
71	84	88	80	לאחר הנישואין

לבדיקת

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות  $\chi^2$  ו-3 דרגות חופש.

- 9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$  על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה:  $H_0: \mu = 20$  כנגד האלטרנטיבה  $H_1: \mu \neq 20$  ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה  $H_0: \mu \leq 20$  כנגד האלטרנטיבה  $H_1: \mu > 20$  מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
  - לא לדחות את השערת האפס.
  - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- 10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
  - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
  - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
  - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- 11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
  - טעות מסוג שני.
  - טעות מסוג שלישי.
  - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

**12** בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

**13** שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

**14** ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

**15** חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת  $H_0$  כאשר היא הייתה נכונה.
- ב. החוקר דחה את השערת  $H_1$  כאשר היא הייתה נכונה.
- ג. החוקר לא דחה את השערת  $H_0$  כאשר היא הייתה לא נכונה.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של  $H_1$ .

- 16** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
  - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

- 17** בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 8,900 ₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?
- מבחן Z על פרופורציה.
  - מבחן T על תוחלת אחת.
  - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

- 18** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:
- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
  - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

- 19** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
  - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- 20** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:
- השערת האפס הייתה נדחית.
  - השערת האפס הייתה לא נדחית.
  - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
- 21** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
- ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
- רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
- מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.
- 22** נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $H_1: \mu < \mu_0$ .
- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.
- 23** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
  - העוצמה של המבחן גדלה.
  - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
  - תשובות א ו-ב נכונות.

24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	$\alpha$
א. גדולה	א. גדולה
ב. קטנה	ב. גדולה
ג. גדולה	ג. קטנה
ד. קטנה	ד. קטנה

26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית  $H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- הן  $\alpha$ , והן  $(1 - \beta)$ , יקטנו.
- $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $(1 - \beta)$  יגדל.
- $\alpha$  יגדל ואילו  $(1 - \beta)$  יקטן.
- הן  $\alpha$  והן  $(1 - \beta)$  יגדלו.

27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- טעות מסוג ראשון.
- טעות מסוג שני.
- טעות מסוג שלישי.
- אין טעות במסקנתו.

28) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .

מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?  
 בחר בתשובה הנכונה :

- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ידחה את השערת האפס מקרה.
- ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**(29)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**(30)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל  $p \text{ value} = 0.0254$ , לכן :

- ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
- ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
- ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
- ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

**(31)** רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- אף תשובה לא נכונה.

**(32)** נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $H_1: \mu < \mu_0$ .

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
- $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי :
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**(33)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

- זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא :

- 9
- 19
- 18
- 8

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.  
 המבחן שיש לבצע כאן הוא:  
 א. מבחן Z למדגם יחיד.  
 ב. מבחן T למדגם יחיד.  
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.  
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.  
 ב. מבחן T למדגם יחיד.  
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.  
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.  
 ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.  
 ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.  
 ד. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ . אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ;  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ,

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:  
 א. לדחות את השערת האפס.  
 ב. לא לדחות את השערת האפס.  
 ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.  
 ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

**38** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו:  $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$  רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של  $D$ .

**39** אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- תמיד נדחה  $H_0$  כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- לא נדחה את  $H_0$  אף פעם.
- לא נדחה את  $H_0$  כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- כל התשובות לא נכונות.

**40** חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 10$ ,  $H_1: \mu \neq 10$ . לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל:  $t_x = -2.63$ . לכן המסקנה היא:

- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- הוא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- הוא לא ידחה  $H_0$  ברמת מובהקות 0.1.

**41** האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- 0.005
- 0.03
- 0.0287
- 0.05

- 42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במצאות** השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:
- יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני ( $\beta$ ).
  - תגדל רמת הביטחון ( $1 - \alpha$ ).
  - אף תשובה לא נכונה.
  - כל התשובות נכונות.

- 43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- $POWER + \alpha + \beta = 1$
- $POWER = 0.5 - \beta$
- $POWER + \alpha = 1$
- $\beta + \alpha = 1$
- הכול לא נכון.

- 44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

- היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
- בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
- היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
- אף תשובה אינה נכונה.

- 45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של  $\alpha$ . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של  $2\alpha$  על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

- ההשערה תדחה.
- ההשערה לא תדחה.
- התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
- לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

- 46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- אפס
- חיובי
- שלילי
- לא ניתן לדעת

47) עוצמה שווה ל-1 פרושה :

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

48) מה מהבאים **נכון** לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

- כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
- התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית  $H_0: \mu \geq 10$ , נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית  $H_0: \mu = 10$ ,  $H_1: \mu \neq 10$ , אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:

- ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- מקבלים את השערת האפס.
- דוחים את השערת האפס.
- לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$

נלקח מדגם מקרי בגודל  $n$  מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות  $\sigma^2$ . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מדגם בגודל  $n$  וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 60$  העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל  $2n$  ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$  העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל  $n$  ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות:  $H_0: \mu = 55$ ,  $H_1: \mu = 65$  העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

- שלושת הטענות אינן נכונות.
- טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
- טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
- טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

## תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א	26	א
2	ד	27	ב
3	ד	28	א
4	א	29	א
5	ג	30	ג
6	ג	31	ד
7	א	32	א
8	ב	33	א
9	ג	34	ד
10	א	35	ג
11	א	36	א
12	ג	37	ג
13	א	38	א
14	א	39	ג
15	א	40	א
16	א	41	א
17	א	42	א
18	ג	43	ה
19	א	44	ד
20	ג	45	ד
21	ב	46	א
22	ג	47	ד
23	ד	48	ג
24	ג	49	ב
25	ג	50	ד

## שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

### שאלות

- (1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 520$ ,  $H_1: \mu > 520$ . כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$ . חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי  $\alpha = 0.05$ . חוקר ב' מחליט לדחות  $H_0$  אם  $\bar{X} > 522$ .

- א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?  
 ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור  $\mu_1 = 525$ .  
 ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור  $\mu_1 = 525$ , של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.  
 ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו  $\bar{X} = 523$ . מהי מסקנתו?

- (2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5. דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב – 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.  
 א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).  
 ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייקים" שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

B	A	מוצר / רשת
5	5	1
5	4	2
3	5	3
4	7	4

- (3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:  
 הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.  
 אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.  
 א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.  
 ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

4 במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

180	140	171	189	156	176	סטודנטים באוניברסיטאות
150	204	186	191	190	180	סטודנטים במכללות

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

5 בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופרציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ברמת במדגם	1.1	1.2	0.7	0.9	2	גברים	ב. מה היא מסקנת המחקר מובהקות של 5% אם
	1.2	1.8	1.9	1.1	1.4	נשים	

ל-102 משפחות היה מדיח כלים.

ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.

האם ניתן לדעת את הסתברותה?

6 נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם. ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

7 להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

4	3	2	1	0	מספר הנסיעות
12	20	26	102	84	מספר המשפחות

א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

(8) נתון כי:  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$ .

מעוניינים לבדוק את ההשערות:  $H_0: \mu = 40$ ,  $H_1: \mu > 40$ .

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל  $\bar{X} = 45$ .

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה:  $H_1: \mu < 40$ .

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה:  $H_1: \mu \neq 40$ .

### תשובות סופיות

- |                    |                    |                                    |                 |     |
|--------------------|--------------------|------------------------------------|-----------------|-----|
| א. חוקר א'         | ב. 0.0122          | ג. גדלה.                           | ד. נדחה $H_0$ . | (1) |
| א. לפחות 0.0808    | ב. 0.7995          |                                    |                 | (2) |
| א. לא נדחה $H_0$ . | ב. לא נדחה $H_0$ . |                                    |                 | (3) |
| א. לא נדחה $H_0$ . | ב. בין 5% ל-10%.   | ג. נדחה $H_0$ .                    |                 | (4) |
| א. $H_0: p = 0.6$  | ב. נדחה $H_0$ .    | ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05. |                 | (5) |
| א. לא נדחה $H_0$ . | ב. 0.8643          | ג. 0.8749.                         |                 | (6) |
| א. נדחה $H_0$ .    | ב. נדחה $H_0$ .    |                                    |                 | (7) |
| א. 0.0062          | ב. 0.9938          | ג. 0.0124.                         |                 | (8) |