לוגיקה ותורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. לוגיקה 1
2. תורת הקבוצות 15
3. פונקציות 29
4. עוצמות 43
5. האלגוריתם של אוקלידס ..... (ללא ספר)

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 1 - לוגיקה

תוכן העניינים

1. מבוא 1
2. הקשרים ..... (ללא ספר)
3. טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים 2
4. קבוצת קשרים שלמה 7
5. צורות נורמליות 8
6. חוקי דה מורגן ..... (ללא ספר)
7. תחשיב הפרדיקטים 9
8. תרגול בשיטות ההוכחה השונות 13

מבוא

שאלות

1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:

א. הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.

ב. הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.

ג. שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".

ד. הפסוק "$1+1=2$" או "$2=3$" הוא פסוק אמת.

ה. הפסוק "$1+1=2$" וגם "$2=3$" הוא פסוק אמת.

ו. הפסוק "אם $1+1=2$ אז "$2=3$" הוא פסוק אמת.

ז. הפסוק "אם $2=3$ אז "$1+1=2$" הוא פסוק אמת.

ח. הפסוק "אם $2=3$ אז "$1+1\neq 2$" הוא פסוק אמת.

ט. שלילת הפסוק "$a\neq 4$" וגם "$b\neq 3$" היא "$a+b=7$" או "$ab=12$".

י. שלילת הפסוק "$a\neq 4$" או "$b\neq 3$" היא "$a+b=7$" וגם "$ab=12$".

יא. שלילת הפסוק "$a\notin\{3,4\}$" או "$b\notin\{3,4\}$" היא "$a+b=7$" וגם "$ab=12$".

2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$

ב. $\neg(p\wedge q)\to(\neg r)$

ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$

ד. $(p\vee q)\to(q\to r)$

3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p\to q)$ $\quad$ $p\wedge(\neg q)$

ב. $(\neg p)\to q$ $\quad$ $p\vee(\neg q)$

ג. $p\to(\neg q)$ $\quad$ $\neg(p\wedge q)$

ד. $(p\vee q)\wedge(\neg q)$ $\quad$ $p\wedge(\neg q)$

ה. $p\leftrightarrow q$ $\quad$ $(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

ו. $(s\to(p\wedge(\neg r)))\wedge((p\to(r\vee q))\wedge s)$ $\quad$ $p\vee u$

ז. הראו כי $\neg(r\wedge(p\vee q))\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))\vee\neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים:

$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$

$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$

$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$

$\beta:D\vee(B\wedge C)$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

3) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\to q)$

ג. $(p\to q)\vee(q\to r)$

ד. $(p\wedge(p\to q))\to q$

ה. $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

ו. $((p\to r)\wedge(q\to r))\to((p\vee q)\to r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\to((\neg p)\to((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\to(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\to D)\wedge(E\to(\sim D)))\to(A\to\sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש-$(u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u)))\to(((p\to r)\wedge((\neg q)\to p)\wedge(\neg r))\to q)$$

4) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

5) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לווייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.

ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומים):

א. $(p \vee q) \Rightarrow p$

ב. $(p \vee q) \Rightarrow q$

ג. $(p \to q) \Rightarrow q$

ד. $p, p \to q \Rightarrow q$

ה. $(p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p \Rightarrow r$

ו. $r \Rightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p$

ז. $A \to B, C \to B, D \to (A \vee C), D \Rightarrow B$

ח. $(A \vee B \to D), D \to (C \vee P), P \to Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$

ט. $(E \to (\sim D)) \models (A \to \sim E)$, $(((\sim B) \vee C) \to D)$, $(B \to (C \wedge (\sim A)))$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

8) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\big((\alpha \Rightarrow \beta)\vee(\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$.

ד. אם $\big((\alpha \Rightarrow \beta)\vee(\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $\big((\alpha \Rightarrow \beta)\wedge(\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$.

ו. אם $\big((\alpha \Rightarrow \beta)\wedge(\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$.

ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma)\vee(\beta \Rightarrow \gamma)$.

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma)\vee(\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.

יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha,\beta \models \gamma$.

יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

9) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

10) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1. $\Rightarrow p \to p$
2. $p \Rightarrow q \to p$
3. $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$

$C \to B$

$D \to (A \vee C)$

$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$

$P \wedge Q \Rightarrow P$

$P \wedge Q \Rightarrow Q$

$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$

$P, P \to Q \Rightarrow Q$

$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow \neg\neg P$

$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה-$\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה-$\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה-$\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה-$\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה-$\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\to\neg(y\to z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \to q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \to q) \to (r \to \neg q)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x<y\right)\right)$

ב. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x>y\right)\right)$

ג. $\forall x,y\in\mathbb{R}\left(x>y\right)\to\exists z\in\mathbb{R}\left(x>y+z\right)$

ד. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\right)\to\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\right)$

ה. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x\neq 0\to\forall y\in\mathbb{Z}\exists z\in\mathbb{R}\left(xz=y\right)\right)$

ו. $\forall x\in\mathbb{N}\left(x\geq 1\to\forall y\in\mathbb{N}\exists z\in\mathbb{N}\left(xz=y\right)\right)$

ז. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\to\exists y\in\mathbb{N}\left(xy>1\right)\right)$

ח. $\forall x\in\mathbb{R}\forall y\in\mathbb{R}\left(xy=x\wedge x+y<5\right)\to y<4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(x>0\right)\to\forall y\in\mathbb{R}\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(nx>y\right)\right)\right)$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x\,P\left(x\right)\to\exists x\;P\left(x\right)$

ב. $\exists x\,P\left(x\right)\to\forall x\;P\left(x\right)$

ג. $\left(\forall x\left(P\left(x\right)\wedge Q\left(x\right)\right)\right)\to\left(\forall x\,P\left(x\right)\wedge\forall x\,Q\left(x\right)\right)$

ד. $\left(\forall x\,P\left(x\right)\wedge\forall x\,Q\left(x\right)\right)\to\left(\forall x\left(\;P\left(x\right)\wedge Q\left(x\right)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P\left(x\right)\vee Q\left(x\right)\right)\right)\to\left(\forall x\,P\left(x\right)\vee\forall x\,Q\left(x\right)\right)$

ו. $\left(\forall x\,P\left(x\right)\vee\forall x\,Q\left(x\right)\right)\to\left(\forall x\left(\;P\left(x\right)\vee Q\left(x\right)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P\left(x\right)\wedge Q\left(x\right)\right)\right)\to\left(\exists x\,P\left(x\right)\wedge\exists x\,Q\left(x\right)\right)$

ח. $\left(\exists x\,P\left(x\right)\wedge\exists x\,Q\left(x\right)\right)\to\left(\exists x\left(\;P\left(x\right)\wedge Q\left(x\right)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P\left(x\right)\vee Q\left(x\right)\right)\right)\to\left(\exists x\,P\left(x\right)\vee\exists x\,Q\left(x\right)\right)$

י. $\left(\exists x\,P\left(x\right)\vee\exists x\,Q\left(x\right)\right)\to\left(\exists x\left(\;P\left(x\right)\vee Q\left(x\right)\right)\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

3) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן

$$P(x):x^2-8x+15=0$$
$$Q(x):\ x\ is\ odd$$
$$R(x):x>0$$
$$L(x):\ x^2+2x+2=0$$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x)\to Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x)\to P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x)\to Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x)\to P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\to\neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\to R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(,),\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב-P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב-$\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\to Y$.

נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\to P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}$.

הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני המשתנים x,y,B,C, סימני הקבוצות X,Y, סימן הפונקציה f, סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.

שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו-P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\to B$ ולכל פונקציה $g:B\to A$, אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, קשרים $\wedge,\vee,\leftrightarrow,\rightarrow$, והסימנים $f,g,B^A,A^B,\in,(,),\forall,\exists$.

למען הסר ספק: אסור להשתמש ב-d_A וב-$\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $|,=,\cdots,3,2,1,\leq,\mathbb{N},\in,(,),\forall,\exists$.
הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצות $A,\mathbb{N}$ וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A\subseteq B$ אז $A\sim B$.
מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A,B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.
אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.
השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y, סימני הקבוצות $\mathbb{N},\mathbb{R}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f,g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=,\neq,\in,\{,\},(,),\leftrightarrow,\rightarrow,\vee,\wedge,\forall,\exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $\forall,(,),\in,\mathbb{R},\leq,0$.
דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14\leq\pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi\leq-1.57$.

5) נתונה הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\forall y\left[\left(y\in\left\{t\in\mathbb{N}\middle|t>3\right\}\rightarrow\left(y>x\right)\right)\right]\right\}$.
כתבו אותה בצורה $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|.....\right\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

6) תארו במדויק את הקבוצה:
$A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\exists y\in\mathbb{N}\ \left(x=y^2\right)\rightarrow\left(x>2\right)\right\}-\left\{x\in\mathbb{R}\middle||x|>1\right\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

1) הוכיחו:

א. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.

ד. אם $n\in\mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k\in\mathbb{N}$, כך ש- $m^2-k^2=n$.
רמז: חפשו $m,k\in\mathbb{N}$ עוקבים.

ה. אם $a,b,c\in\mathbb{N}$ וגם $a\mid b$ וגם $a\mid c$, אז $a\mid b+c$.

2) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y\notin\mathbb{Q}$, כך ש- $x^y\in\mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=z^2$.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

3) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t\in\mathbb{Q}$, כך ש- $p-t\notin\mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p\in\mathbb{Q}, r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r\in\mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q=\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q\neq\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

4) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש-n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש-m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש-m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש-$x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הוא אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו-x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו-x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו-x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש-z לא מתחלק ב-3, אז $z^2=1\bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:

אם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש-z לא מתחלק ב-4, אז z^2 לא מתחלק ב-4.

6) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש-$n\bmod(3)=2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 2 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות 15
2. פעולות על קבוצות 16
3. דיאגרמת ון 18
4. קריאת קבוצות 20
5. שאלות הוכחה 22
6. דרך השלילה 24
7. קבוצת חזקה 25
8. מכפלה קרטזית 27

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים, $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $\{1,\{1\}\}$ □ 1
ב. $\{1,\{1\}\}$ □ $\{1\}$
ג. $\{1,2,8\}$ □ $\{8,\varnothing\}$
ד. $\{1,2\}$ □ $\varnothing$
ה. $\{\varnothing,1,2\}$ □ $\varnothing$
ו. $\{\{1,\{2\}\}\}$ □ $\{2\}$
ז. $\{2,\{2,\{2\}\}\}$ □ $\{2\}$
ח. $\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ □ $\{2\}$
ט. $\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$ □ $\{2\}$
י. $\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ □ $\{\{2\},\varnothing\}$
יא. $\{1,\{\varnothing\}\}$ □ $\varnothing$
יב. $\{1,\{\varnothing\}\}$ □ $\{\varnothing\}$
יג. $\{1,\{2\}\}$ □ $\{1,2\}$
יד. 1 □ $\mathbb{N}$
טו. $\mathbb{N}$ □ $\{1\}$
טז. 1 □ $\{\mathbb{N}\}$
יז. $\{\mathbb{N}\}$ □ $\{1\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\not\in,\not\subseteq$ ד. $\not\in,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\not\in,\not\subseteq$ ז. $\not\in,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\not\in,\not\subseteq$
יא. $\not\in,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\not\in,\not\subseteq$ יד. $\in,\not\in$ טו. $\not\in,\subseteq,\subset$
טז. $\not\in$ יז. $\not\in,\not\subseteq$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2 \notin P(A)$

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

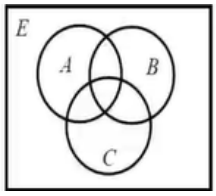
3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

ו. $A\cap(B\cap C)$

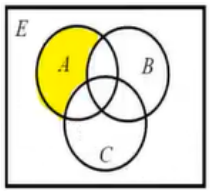
ז. $(A\cup B)\cup C$

ח. $A\cup(B\cup C)$

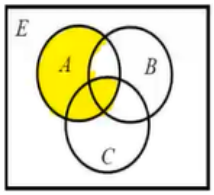
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

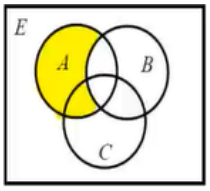
1) א.



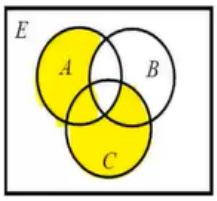
ב.



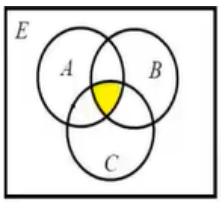
ג.



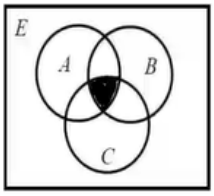
ד.



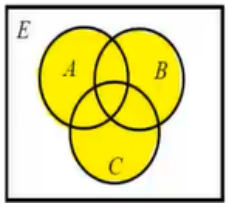
ה.



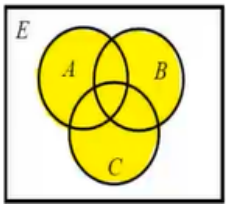
ו.



ז.



ח.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1|n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z}||x|\geq 2\to x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z}||x|\geq 7\to x<20\}$

ד. $C=\{3n-1|n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z}|x\geq 8\to x^2<67\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\left\{n\middle|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\right\}$.

ד. דרך 2: $\left\{\sqrt{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$.

ה. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\right\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cup B$.

ב. אם $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$.

ג. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ד. אם $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$.

ה. אם $x\notin A$, אז $x\notin A-B$.

ו. אם $x\notin A-B$, אז $x\notin A$.

ז. אם $x\in B$, אז $x\notin A-B$.

ח. אם $x\notin A-B$, אז $x\in B$.

ט. $x\notin A \Leftrightarrow x\notin A-B$

י. $x\in B \Leftrightarrow x\notin A-B$

יא. השלימו: $x\notin A-B \Leftrightarrow$ _____.

יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow \left(A\subseteq B \wedge A\subseteq C\right)$

יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow \left(A\subseteq B \vee A\subseteq C\right)$

יד. אם $A=A\cup B$, אז $A\subseteq B$.

טו. אם $A=A\cup B$, אז $B\subseteq A$.

טז. אם $A=A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

יז. אם $A=A\cap B$, אז $B\subseteq A$.

יח. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cup B$.

יט. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cup B$.

כ. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cap B$.

כא. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cap B$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

2) תהיינה A,B,C קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.

ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.

ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.

ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$

2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B\ V\ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,

א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$

ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $\big((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B)\big)\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

ד. אם $\big((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C)\big)$, אז

$$\Big(\big((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B)\big)\wedge(A\cup B\subseteq C)\Big).$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.

אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימן $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$\big(A\times(B\times C)\big)\cap\big((A\times B)\times C\big)\neq\varnothing$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

1. מבוא והגדרות ראשונות 29
2. תמונה של קבוצה 34
3. הרכבת פונקציות והפונקציה ההפוכה 38

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

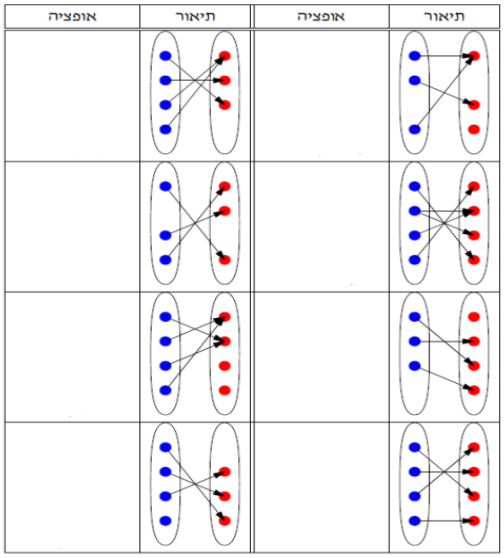
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).
חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\mathrm{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על?
הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=the\,sum\,of\,the\,digits\,of\,n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\,f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\geq 2\end{cases}$ וחשב את $Im\,f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\mathrm{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}\,|\,\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}\,|\,f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן
ב-$\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב-A וב-$\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח"ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im}f\Delta\operatorname{Im}g$.
בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש:

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז: סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח"ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^{A}\to P(A)$ חח"ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח"ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{2}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח"ע ועל והוכח שהיא חח"ע ועל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן : 054-7599493 ©

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

$t \in f(D) \Leftarrow$ קיים $\alpha \in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$ (x

$\alpha \in D \Leftarrow f(\alpha) \in f(D)$ (y

$F(\alpha) \in E \Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(E)$ (z

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D\subseteq A\ ,\ E\subseteq B$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D)=D$

ב. $f(D)\neq D$

ג. $f^{-1}(E)=E$

ד. $f^{-1}(E)\neq E$

ה. $f(D)\subseteq f(A)$

ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$

ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט. f על אם"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

י. f חח"ע אם"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.

$$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.

כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1\ ,\ D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ג. אם f חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1\ ,\ E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$

ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

7) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\supseteq D$

ג. אם f חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ד. אם f לא חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$ אז f אינה חח"ע.

י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

יב. אם f לא חח"ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

8) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$.

ד. אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ה. אם f על אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f חח"ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש-$f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f\left(\beta\right)\neq\alpha$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in\mathbb{N}\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in\mathbb{N}\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
שיעורים פרטיים ליחידים וקבוצות – טל פלדמן: 054-7599493 ©

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2^{x^2-1}\quad g(x)=3x+7$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\quad g(A)=\bar{A}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad f(n)=\text{The sum of }n\text{'s digits}\quad g(n)=10n$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\geq 3\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x-1\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\leq 3\\ x & x>3\end{cases}$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\geq 5\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}3 & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}.$$

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 1\\ 4-3x & x<1\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\geq 2\end{cases}.$$

חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|}+3}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\triangle\mathbb{Z}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

שאלת חזרה

יהיו f ו-g פונקציות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd}\\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.

הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.

הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\qquad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\text{Im}\,f\circ g\subseteq\text{Im}\,f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:

א. אם g היא פונקציה על אז $\text{Im}\,f\circ g=\text{Im}\,f$.

ב. אם $\text{Im}\,f\circ g=\text{Im}\,f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.

לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$, $f(\{2,3\})=\{3\}$.

א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.

ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.

ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **<u>ממש</u>** ל-A. נתונות הפונקציות המוגדרות באופן הבא: $f,g:P(A)\to P(A)$ $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:
הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$,
היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$
הוכיחו כי $\left\{f\circ h\middle| f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\right\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על,
אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $f:B\to C$, $g:A\to B$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).
הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.
ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז f חח"ע.
ג. אם $f\circ g$ חח"ע אז g חח"ע
ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.
ה. אם $f\circ g$ על אז f על.
ו. אם $f\circ g$ על אז g על.
ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.
ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.
ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.

ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע אז $g=h$.

ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.

ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע אז $g=h$.

ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש-f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$.

ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד):

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 4 - עוצמות

תוכן העניינים

1. עוצמות 43

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\ldots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,1]\sim[0,3]$.

ז. הוכיחו כי $[0,1]\sim[3,4]$.

ח. הוכיחו כי $[0,1]\sim[3,5]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות:
(פונקציית שקילות)

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^{A}\sim P(A)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

<u>הגדרה</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.

היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **3-4**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:

א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.

ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.

ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.

ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \Leftrightarrow A,B$ שוות עוצמה.

הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:

א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

ג. $3\cdot\aleph_0\cdot 2\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)

ז. אם $\aleph_0\le\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.

ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$

ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$

י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph^{\aleph_0}>\aleph_0^{\aleph}$)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1,|B|=k_2$.

נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.

פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.

הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B\wedge C\sim D\wedge A\cap C=\varnothing\wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B\wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

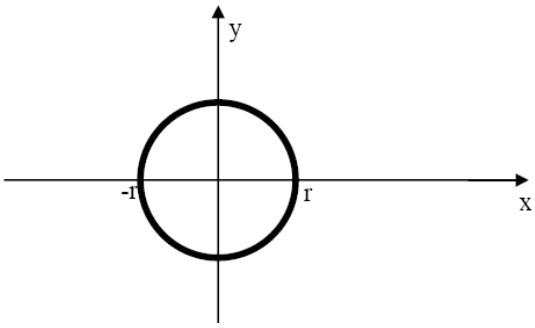
ד. $(A^B)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,

ו- $B=\{f(x)=ax^2+bx+c:a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים, הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$, כמודגם בציור שלהלן.

הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא $\aleph$.



11) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,|\,|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב-$\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.

א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$.

ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A?

15) תהי $A=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב-$\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$,
כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/_S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

20) הוכיחו או הפריכו:

לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $(A\times B)^C \sim (A^C\times B)\cup(A\times B^C)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.

כלומר, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0\Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$.

מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\{x\in\mathbb{R}\,|\sin x=0\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש-$|P(A)|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:

א. $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\{0,1\}^{P(\mathbb{R})}$

ב. $P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})}$

ג. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.

ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.

ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.

ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.

ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.

ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.

ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.

ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 5 - האלגוריתם של אוקלידס

תוכן העניינים

1. האלגוריתם של אוקלידס ..... (ללא ספר)