לוגיקה ותורת הקבוצות

תוכן העניינים

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 1 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- $\square$ את הסימן המתאים, $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1 \square \{1,\{1\}\}$
ב. $\{1\} \square \{1,\{1\}\}$
ג. $\{8,\varnothing\} \square \{1,2,8\}$
ד. $\varnothing \square \{1,2\}$
ה. $\varnothing \square \{\varnothing,1,2\}$
ו. $\{2\} \square \{\{1,\{2\}\}\}$
ז. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\}\}$
ח. $\{2\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
ט. $\{2\} \square \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$
י. $\{\{2\},\varnothing\} \square \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
יא. $\varnothing \square \{1,\{\varnothing\}\}$
יב. $\{\varnothing\} \square \{1,\{\varnothing\}\}$
יג. $\{1,2\} \square \{1,\{2\}\}$
יד. $1 \square \mathbb{N}$
טו. $\{1\} \square \mathbb{N}$
טז. $1 \square \{\mathbb{N}\}$
יז. $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. $\in$ ב. $\in,\subseteq,\subset$ ג. $\notin,\not\subseteq$ ד. $\notin,\subseteq,\subset$ ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$ ז. $\notin,\subseteq,\subset$ ח. $\in,\subseteq,\subset$ ט. $\in,\subseteq,\subset$ י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$ יב. $\in,\not\subseteq$ יג. $\notin,\not\subseteq$ יד. $\in,\notin$ טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$ יז. $\notin,\not\subseteq$

פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\}, B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2\notin P(A)$

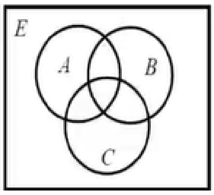
2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$ ב. $A-(B-C)$

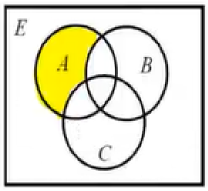
ג. $A\cap B^c$ ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$ ו. $A\cap(B\cap C)$

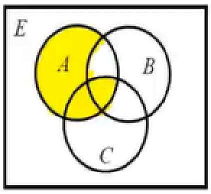
ז. $(A\cup B)\cup C$ ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

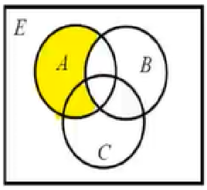
1) א.



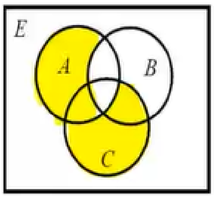
ב.



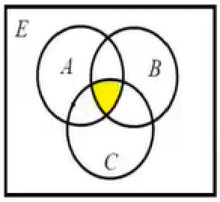
ג.



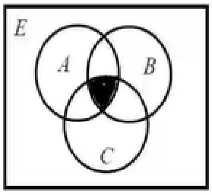
ד.



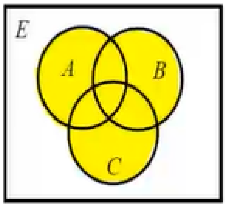
ה.



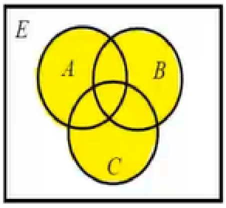
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי, $B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים, $C=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\right\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2, $D=\left\{2^1,2^2,2^3,...\right\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $K=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\geq 2\to x^2>41\right\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| |x|\geq 7\to x<20\right\}$

ד. $C=\left\{3n-1 \middle| n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}=\left\{3n-1 \middle| \sqrt{n}\in\mathbb{N}\right\}$

ה. $C=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| x\geq 8\to x^2<67\right\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\left|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right.\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,\ldots\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\ldots\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,\ldots\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,\ldots\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,\ldots\}$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cup B$.
ב. אם $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$.
ג. אם $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.
ד. אם $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$.
ה. אם $x\notin A$, אז $x\notin A-B$.
ו. אם $x\notin A-B$, אז $x\notin A$.
ז. אם $x\in B$, אז $x\notin A-B$.
ח. אם $x\notin A-B$, אז $x\in B$.
ט. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$
י. $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$
יא.השלימו: $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A\subseteq B\cap C \Leftrightarrow (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$
יג. $A\subseteq B\cup C \Leftrightarrow (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$
יד. אם $A=A\cup B$, אז $A\subseteq B$.
טו.אם $A=A\cup B$, אז $B\subseteq A$.
טז.אם $A=A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
יז. אם $A=A\cap B$, אז $B\subseteq A$.
יח.אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cup B$.
יט.אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cup B$.
כ. אם $A\subseteq B$, אז $A=A\cap B$.
כא. אם $B\subseteq A$, אז $A=A\cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.

ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.

ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.

ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.

ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:
1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B \ V\ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $A \supseteq C$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 2 - לוגיקה

תוכן העניינים

מבוא

שאלות

1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:

א. הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.
ב. הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.
ג. שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".
ד. הפסוק "$1+1=2$ או $2=3$" הוא פסוק אמת.
ה. הפסוק "$1+1=2$ וגם $2=3$" הוא פסוק אמת.
ו. הפסוק "אם $1+1=2$ אז $2=3$" הוא פסוק אמת.
ז. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1=2$" הוא פסוק אמת.
ח. הפסוק "אם $2=3$ אז $1+1\neq 2$" הוא פסוק אמת.
ט. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ וגם $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ או $ab=12$".
י. שלילת הפסוק "$a\neq 4$ או $b\neq 3$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".
יא. שלילת הפסוק "$a\notin\{3,4\}$ או $b\notin\{3,4\}$" היא "$a+b=7$ וגם $ab=12$".

2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$
ב. $\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg r)$
ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$
ד. $(p\vee q)\rightarrow(q\rightarrow r)$

3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.
ב. האוכל חם וטעים.
ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.
ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.
ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.
ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.
ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.
ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.
ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.
י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

א. $\neg(p \to q)$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \to q$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \to (\neg q)$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \to (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ $p \vee u$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים:

$\alpha_1 : (A \vee B) \to (D \to C)$

$\alpha_2 : B \to \neg(C \wedge A)$

$\alpha_3 : C \leftrightarrow (A \wedge D)$

$\beta : D \vee (B \wedge C)$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

א. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

3) הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p \vee (\neg p)$

ב. $p \vee (p \to q)$

ג. $(p \to q) \vee (q \to r)$

ד. $(p \wedge (p \to q)) \to q$

ה. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

ו. $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$

ז. $(q \vee p \vee r) \to ((\neg p) \to ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח. $((B \to (C \wedge (\sim A))) \wedge (((\sim B) \vee C) \to D) \wedge (E \to (\sim D))) \to (A \to \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש-$(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))) \to (((p \to r) \wedge ((\neg q) \to p) \wedge (\neg r)) \to q)$$

4) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות.
להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו, P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

5) בארץ חלם מתקיימות בחירות.
זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש.
הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.

6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון.
אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר.
אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים.
אבל לוייזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים.
לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים,
G גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.

ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.

7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p,q,r פסוקים אטומים):

א. $(p\vee q)\Rightarrow p$

ב. $(p\vee q)\Rightarrow q$

ג. $(p\rightarrow q)\Rightarrow q$

ד. $p,p\rightarrow q\Rightarrow q$

ה. $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge p\Rightarrow r$

ו. $r\Rightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge p$

ז. $A\rightarrow B,C\rightarrow B,D\rightarrow(A\vee C),D\Rightarrow B$

ח. $(A\vee B\rightarrow D),D\rightarrow(C\vee P),P\rightarrow Q,(\neg C)\wedge(\neg Q)\Rightarrow\neg A$

ט. $(B\rightarrow(C\wedge(\sim A)))\ ,\ (((\sim B)\vee C)\rightarrow D)\ ,\ (E\rightarrow(\sim D))\models(A\rightarrow\sim E)$

8) נתון כי α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$.
ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$.
ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta)\vee(\alpha \Rightarrow \gamma))$.
ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta)\vee(\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.
ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta)\wedge(\alpha \Rightarrow \gamma))$.
ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta)\wedge(\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.
ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$, אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$.
ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$.
ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma)\vee(\beta \Rightarrow \gamma)$.
י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma)\vee(\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.
יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha,\beta \models \gamma$.
יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

9) עבור α, פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.
כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α.
הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

10) הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,
בעזרת כללי ההיסק הבאים:
1. $\Rightarrow p \to p$
2. $p \Rightarrow q \to p$
3. $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$B \vee D$

$C \rightarrow B$

$D \rightarrow (A \vee C)$

$\neg B$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$P \Rightarrow Q \vee P$

$P \wedge Q \Rightarrow P$

$P \wedge Q \Rightarrow Q$

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow \neg\neg P$

$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ב. קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ג. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ד. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$.

ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ו. הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ז. קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ח. קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$.

ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$.
הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.

יא. הביעו את הקשר $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$ באמצעות $\downarrow$ בלבד.

יב. הביעו את הקשר $\downarrow$ באמצעות $f(x,y,z)=x\rightarrow\neg(y\rightarrow z)$ בלבד.

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \rightarrow q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x<y\right)\right)$

ב. $\forall x\in\mathbb{N}\left(\exists y\in\mathbb{N}\left(x>y\right)\right)$

ג. $\forall x,y\in\mathbb{R}\left(x>y\right)\to\exists z\in\mathbb{R}\left(x>y+z\right)$

ד. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\right)\to\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\right)$

ה. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x\neq 0\to\forall y\in\mathbb{Z}\exists z\in\mathbb{R}\left(xz=y\right)\right)$

ו. $\forall x\in\mathbb{N}\left(x\geq 1\to\forall y\in\mathbb{N}\exists z\in\mathbb{N}\left(xz=y\right)\right)$

ז. $\forall x\in\mathbb{R}\left(x>0\to\exists y\in\mathbb{N}\left(xy>1\right)\right)$

ח. $\forall x\in\mathbb{R}\forall y\in\mathbb{R}\left(xy=x\wedge x+y<5\right)\to y<4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x\in\mathbb{R}\left(\left(x>0\right)\to\forall y\in\mathbb{R}\left(\exists n\in\mathbb{N}\left(nx>y\right)\right)\right)$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x\,P(x)\to\exists x\;P(x)$

ב. $\exists x\,P(x)\to\forall x\;P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)\to\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\to\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)\to\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

3) בעולם הדיון $\mathbb{Z}$, נסמן

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$Q(x): x \text{ is odd}$$
$$R(x): x > 0$$
$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x\left[P(x) \to Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x) \to P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x) \to Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x) \to P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x) \to Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x) \to Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x) \to P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x) \to \neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x) \lor Q(x)\right) \to R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x) \to \left(Q(x) \land R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x) \to \left(Q(x) \land R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצה $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(,),\subseteq,\in,=,\neq,\exists,\forall,\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,<,>$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

שימו לב: <u>אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$.

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן $\notin$).

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- $\notin$)

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצרין).

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.

י. תהי פונקציה $f:X\rightarrow Y$.
נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\rightarrow P(Y)$ כך: $G(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}$.
הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.
השתמשו רק בסימנים הבאים:
סימני המשתנים x,y,B,C, סימני הקבוצות X,Y, סימון הפונקציה f, סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: <u>אסור להשתמש</u> בסימנים G ו- P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\rightarrow B$ ולכל פונקציה $g:B\rightarrow A$, אם $g\circ f=Id_A$, אז f היא על.
מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, קשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\rightarrow$, והסימנים $g,f,B^A,A^B,\in,(,),\forall,\exists$.
למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- $\circ$.

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו- 1. הצרינו את הטענה הבאה:
לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.
מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$,

הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $|,=,\cdots,1,2,3,\leq,\mathbb{N},\in,(,),\forall,\exists$.

הסימן | פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y,z, סימני הקבוצות $\mathbb{N}$, A וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A\subseteq B$ אז $A\sim B$.

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A,B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים. אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x,y, סימני הקבוצות $\mathbb{R},\mathbb{N}$ (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f,g, סוגריים, קשרים, וכמתים: $=,\neq,\in,\{,\},(,),\leftrightarrow,\rightarrow,\vee,\wedge,\forall,\exists$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים $x_1,x_2,\cdots$, הקשרים $\vee,\wedge,\leftrightarrow,\leftrightarrow$ והסימנים $0,\leq,\mathbb{R},\in,(,),\forall$.

דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14\leq\pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi\leq-1.57$.

5) נתונה הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall y\left[\left(y\in\{t\in\mathbb{N}|t>3\}\rightarrow(y>x)\right)\right]\right\}$.

כתבו אותה בצורה $\{x\in\mathbb{R}|.....\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

6) תארו במדויק את הקבוצה:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\exists y\in\mathbb{N}\ \left(x=y^2\right)\rightarrow(x>2)\right\}-\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|>1\right\}.$$

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

1) הוכיחו:

א. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.

ד. אם $n\in\mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m,k\in\mathbb{N}$, כך ש- $m^2-k^2=n$.
רמז: חפשו $m,k\in\mathbb{N}$ עוקבים.

ה. אם $a,b,c\in\mathbb{N}$ וגם $a\mid b$ וגם $a\mid c$, אז $a\mid b+c$.

2) הוכיחו:

א. קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).

ב. קיימים $x,y\notin\mathbb{Q}$, כך ש- $x^y\in\mathbb{Q}$.

ג. יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2+y^2=z^2$.

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

3) הוכיחו בדרך השלילה:

א. שלא קיים טבעי הכי גדול.

ב. שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

ג. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

ד. שלא קיימים $p,t\in\mathbb{Q}$, כך ש- $p-t\notin\mathbb{Q}$.

ה. שלא קיימים $p\in\mathbb{Q},\ r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, כך ש- $p+r\in\mathbb{Q}$.

ו. שלא קיים $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$, כך ש- $q=\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

ז. שלכל $q\in\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$ מתקיים $q\neq\min\{x\mid 0<x\in\mathbb{Q}\}$.

4) הוכיחו בקונטרה-פוזיציה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.

ב. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.

ג. אם $m,n\in\mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.

ד. אם $x,y\in\mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x,y הוא אי-רציונלי.

ה. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cap B$, אז $x\notin A$ או $x\notin B$.

ו. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A\cup B$, אז $x\notin A$ וגם $x\notin B$.

ז. אם A,B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x\notin A$, אז $x\notin A\cap B$.

ח. אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

ט. אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $A(-C)\cap B=\varnothing$.

י. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 3, אז $z^2=1\bmod(3)$.

ב. הוכיחו או הפריכו:

אם $z\in\mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב- 4, אז z^2 לא מתחלק ב- 4.

6) הוכיחו בדרך השלילה:

א. אם $n\in\mathbb{N}$, כך ש- $n\bmod(3)=2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.

ב. אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.

ג. אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 3 - פונקציות

תוכן העניינים

מבוא לפונקציות:

שאלות:

1) בכל אחד מהאיורים הבאים זהה את התחום ואת הטווח ובחר את האפשרות המתאימה:

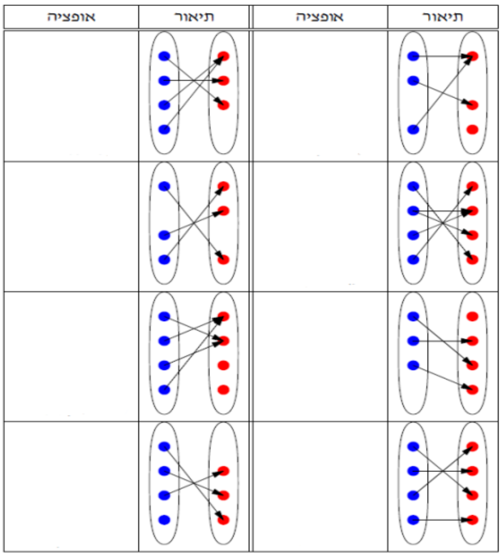
א. זו אינה פונקציה.

ב. זו פונקציה חח"ע שאינה על.

ג. זו פונקציה על שאינה חח"ע.

ה. זו פונקציה שאינה חח"ע ואינה על.

ו. זו פונקציה שהיא גם חח"ע וגם על.



2) עבור הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).
חשב את:

א. $g(\pi)\,,\,g(-\pi)$

ב. $\operatorname{Im}(g)$

ג. מצא מקור ל-7-.

ד. מצא את כל המקורות ל-7-.

ה. האם כל איבר בטווח הוא גם תמונה?

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע? האם על? הוכח טענותיך.

א. פונקציית הזהות $I_A:A\to A$ המוגדרת ע"י $I_A(x)=x$.

ב. $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $h_1(x)=2x+1$.

ג. $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x)=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון של x).

ד. $h_3:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $h_3(x,y)=x-y$.

ה. $h_4:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ מוגדרת ע"י $h_4(A,B)=A\cup B$ וחשב את $Im\,h_4$.

ו. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ מוגדרת ע"י $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$.

ז. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ מוגדרת ע"י $f_2(x)=x+\frac{1}{x}$.

ח. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.

ט. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

י. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ מוגדרת ע"י $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$.

יא. $f_6:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $f_6(X)=X\Delta\mathbb{Z}$.

יב. $f_7:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_7(n)=\text{the sum of the digits of } n$.

יג. $f_8:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י $f_8(\langle x,y\rangle)=3x+2y$.

יד. $f_9:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(\langle n,k\rangle)=2^{n-1}(2k-1)$.

טו. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ n+3 & else\end{cases}$.

4) בדוק אם הפונקציות הבאות חח"ע, על וחשב את תמונתן:

א. $f_9:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f_9(x)=\begin{cases}\frac{n}{2} & 4|n\\ 2n+1 & else\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_9$.

ב. $f_{10}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{10}(x)=\begin{cases}3x-1 & x<2\\ x-3 & x\ge 2\end{cases}$ וחשב את $Im\, f_{10}$.

ג. $f_{11}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_{11}(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$.

5) תהיינה $f,g:A\to A$ פונקציה. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f חח"ע.

ב. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f על.

ג. אם לכל איבר ב-$Im(f)$ יש מקור יחיד אז f אינה קבועה.

ד. אם יש איבר ב-$Im(f)$ ללא מקור אז f על.

ה. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז f אינה על.

ו. אם $Im(f)\subset Im(g)$ (הכלה ממש) אז g אינה על.

ז. אם $Im(f)=Im(g)$ אז $f=g$.

ח. לכל $D\subseteq A$, $D\neq\varnothing$ קיימת $f:A\to A$ כך ש-$Im(f)=D$.

6) נתונה $g:\mathbb{N}_{odd}\to\mathbb{N}$ פונקציה לא ידועה.

נגדיר $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $h(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in\mathbb{N}_{even}\\ g(n) & n\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}$,

למשל: $h(34)=17$, $h(35)=g(35)$ שהוא מספר טבעי לא ידוע.

הוכח כי h אינה חח"ע.

מצא אינסוף מספרים טבעיים שונים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $h(x_i)=h(x_j)$.

7) נגדיר $F:(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times P(\mathbb{R}))\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא: $F((f,A))=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in A\ f(y)=x\}$.

א. עבור $A=\{2,3,4,5,17,18\}$, $g(x)=2x$, חשב: $F((g,A))$.

ב. בדוק האם f חח"ע והאם על.

ג. מצא את $\text{Im}(F)$.

8) נגדיר $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $G(f)=\{\alpha\in\mathbb{N}|\exists\beta\in\mathbb{N}\quad f(\beta)=\alpha\}$.

א. חשב $G(f)$ עבור $f=I_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות עבור $\mathbb{N}$

הפונקציה $f(n)\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 4 & else\end{cases}$ ועבור הפונקציה הקבועה 3.

ב. בדוק האם G חח"ע והאם על ומצא את $Im(G)$.

9) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$. הוכח כי F אינה על.

10) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$.

הוכח כי F אינה חח"ע.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$.

קבע האם F חח"ע ועל.

12) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן זוגי.
ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שמספר אבריהן אי זוגי.
לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת ,
$\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן
ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\varnothing)=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$
היא חח"ע אך אינה על.

13) נגדיר $H:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$ באופן הבא : $H(\langle f,g\rangle)=\operatorname{Im} f\,\Delta\operatorname{Im} g$.
בדוק אם f חח"ע ועל.

פונקציות שחובה להכיר:

14) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא פונקציה כנדרש :

א. מצא $f:(0,1)\to(1,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ב. השתמש בפונקציה שמצאת בסעיף קודם כדי למצוא $f:(0,1)\to(0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.

ג. מצא $f:[2,5)\to[1,7)$ שהיא חח"ע ועל.

ד. עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ מספרים נתונים מצא $f:[a,b]\to[c,d]$ שהיא חח"ע ועל.

ה. מצא $f:[1,3)\cup[4,8]\to[0,1]$ שהיא חח"ע ועל.

ו. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שהיא חח"ע ועל. מצא גם $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ שמצאת.

ז. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.

ח. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע.

ט. מצא $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שהיא על. (רמז : סעיף קודם)

י. מצא פונקציה $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{7}\to\mathbb{N}$ (כלומר $f:\mathbb{N}^7\to\mathbb{N}$) שהיא חח"ע.

יא. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times[0,1)\to[0,\infty)$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:[0,\infty)\to\mathbb{N}\times[0,1)$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

יב. מצא פונקציה $f:(0,1]\to(0,1)$ שהיא חח"ע ועל.

יג. מצא $F:[0,1)\times[0,1)\to[0,1)$ חח"ע ועל.

יד. מצא פונקציה $f:\mathbb{N}\times\{0,1\}\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
מצא גם $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{0,1\}$ שהיא היפוך החיצים לפונקציה שמצאת.

טו. מצא $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ שהיא חח״ע ועל.

טז. מצא $F:\{0,1\}^A\to P(A)$ חח״ע ועל. הוכח כי הפונקציה שמצאת היא אכן חח״ע ועל.

יז. מצא $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל.

יח. מצא $F:\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^2\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ כלומר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ שהיא חח״ע ועל והוכח שהיא חח״ע ועל.

תמונה של קבוצה:

רקע:

צפה בשיעורים בנושא תמונה ותמונה הפוכה של קבוצה בטרם תענה על השאלות שבנושא זה.

x) $t\in f(D) \Leftarrow$ קיים $\alpha\in D$ כך ש- $f(\alpha)=t$

y) $\alpha\in D \Leftarrow f(\alpha)\in f(D)$

z) $F(\alpha)\in E \Leftrightarrow \alpha\in f^{-1}(E)$

שאלות:

1) נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $g(n)=2n$ $K=\{1,8,17\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $g(K)$

ב. $g^{-1}(K)$

ג. $g(\mathbb{N})$

ד. $g(\mathbb{N}_{evev})$

ה. $g(\mathbb{N}_{odd})$

ו. $g^{-1}(\mathbb{N}_{evev})$

ז. $g^{-1}(\mathbb{N}_{odd})$

2) נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2-5x+4$ $M=\{0,4\}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n)=\begin{cases}2n & n\in\mathbb{N}_{even}\\ 1 & else\end{cases}$ ותהי $E=\{1,5,6,8\}$.

חשב את הקבוצות הבאות:

א. $f^{-1}(f(M))$

ב. $f(f^{-1}(M))$

ג. $f(f^{-1}(\{-3,4\}))$

ד. $f(f^{-1}(\{-3\}))$

ה. $f(f^{-1}(E))$

3) תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D\subseteq A$, $E\subseteq B$ שתי קבוצות.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D)=D$

ב. $f(D)\neq D$

ג. $f^{-1}(E)=E$

ד. $f^{-1}(E)\neq E$

ה. $f(D)\subseteq f(A)$

ו. אם $D\subset A$ אז $f(D)\subset f(A)$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ז. $f^{-1}(E)\subseteq A$

ח. אם $E\subset B$ אז $f^{-1}(E)\subset A$ (שים ♥ שההכלות בסעיף זה הן הכלות ממש).

ט. f על אם"ם לכל $y\in B$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

י. f חח"ע אם"ם לכל $y\in A$ מתקיים: $f^{-1}(\{y\})$ ריקה או בעלת איבר אחד.

4) בשאלה זו נבחן את השוויון: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

א. אשר את השוויון עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$.
$D_1=\{2,5\}\quad D_2=\{-2,4\}$

ב. הוכח כי שוויון זה מתקיים תמיד.
כלומר: תהי $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1 , D_2\subseteq A$.
הוכח כי: $f(D_1\cup D_2)=f(D_1)\cup f(D_2)$.

5) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $D_1 , D_2\subseteq A$.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f(D_1\cap D_2)\subseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ב. $f(D_1\cap D_2)\supseteq f(D_1)\cap f(D_2)$

ג. אם f חח"ע אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ד. אם f על אז $f(D_1\cap D_2)=f(D_1)\cap f(D_2)$.

ה. אם $f(D_1\cap D_2)\neq f(D_1)\cap f(D_2)$ אז f אינה חח"ע.

6) $f:A\to B$ פונקציה ותהינה $E_1 , E_2\subseteq B$.
הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}(E_1\cap E_2)=f^{-1}(E_1)\cap f^{-1}(E_2)$

ב. $f^{-1}(E_1\cup E_2)=f^{-1}(E_1)\cup f^{-1}(E_2)$

7) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $D\subseteq A$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\subseteq D$

ב. $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\supseteq D$

ג. אם f חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ד. אם f לא חח"ע אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

ה. אם f על אז $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

ו. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f על.

ז. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ח. אם לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$ אז f חח"ע.

ט. אם $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$ אז f אינה חח"ע.

י. אם f על אז לכל $D\subseteq A$ מתקיים $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)=D$.

יא. אם f לא על אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

יב. אם f לא חח"ע אז קיימת $D\subseteq A$ עבורה $f^{-1}\left(f\left(D\right)\right)\neq D$.

8) $f:A\to B$ פונקציה ותהי $E\subseteq B$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$

ב. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$

ג. $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\subseteq E$ או $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\supseteq E$.

ד. אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ה. אם f על אז $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$.

ו. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f חח"ע.

ז. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f על.

ח. אם לא לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f לא על.

ט. אם לכל $E\subseteq B$ מתקיים $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)=E$ אז f היא פונקציית הזהות.

י. אם קיימת $E\subseteq B$ כך ש- $f\left(f^{-1}\left(E\right)\right)\neq E$ אז קיים $\alpha\in A$ כך שלכל $\beta\in A$ מתקיים: $f\left(\beta\right)\neq\alpha$.

9) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי: $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי: $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{2,16,18\}$ ב. $\{4\}$ ג. $\{4n|n\in N\}$ ד. ראה סרטון.
ה. $\{4n+2|n\in N\}$ ו. $\mathbb{N}$ ז. $\varnothing$

2) א. $\{0,1,4,5\}$ ב. $\{0,4\}$ ג. $\{0,4\}$ ד. $\varnothing$ ה. $\{1,8\}$

3) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון. י. נכון.

4) הוכחה.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.

6) הוכחה.

7) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. לא נכון. ז. לא נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. לא נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון.

8) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. לא נכון. י. נכון.

9) הוכחה.

הרכבת פונקציות

שאלות

1) חשבו את ההרכבה $f\circ g$ ו- $g\circ f$ במקרה שהן מוגדרות עבור הפונקציות הנתונות.

א. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=3x+7 \quad f(x)=2^{x^2-1}$

ב. $f,g:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad g(A)=\bar{A} \quad f(A)=A\cap\mathbb{N}$

ג. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad g(n)=10n \quad f(n)=\text{The sum of } n\text{'s digits}$

ד. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}5 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases}7 & x<3\\ 8 & x\ge 3\end{cases}$

ה. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ x & x>3\end{cases} \quad f(x)=2x-1$

2) חשבו את ההרכבה הבאה:

א. נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$g(x)=\begin{cases}3 & x\ge 1\\ 2 & x<1\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}4x+3 & x<5\\ 2x & x\ge 5\end{cases}.$$

חשבו $g\circ f$.

ב. עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<2\\ 2x-1 & x\ge 2\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\ge 1\\ 4-3x & x<1\end{cases}.$$

חשבו $f\circ g$.

3) בדקו את השוויון $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3\ ,\ g(x)=2x+3\ ,\ h(x)=2x+3$

ב. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3^{x^2-7}\ ,\ g(x)=x^3+1\ ,\ h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{|x|+3}}$

ג. $f,g,h:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ $\quad f(A)=A\cap\mathbb{N}\ ,\ g(A)=\bar{A}\ ,\ h(A)=A\Delta\mathbb{Z}$

שאלת חזרה

יהיו f ו- g פונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך: $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n \text{ odd} \\ n-1 & n \text{ even}\end{cases}$,

וכן לכל $n\in\mathrm{N}$, $g(n)=2n-1$.

הוכיחו או הפריכו:

א. f היא חח"ע.

ב. g חח"ע.

ג. f על $\mathbb{N}$.

ד. g על $\mathbb{N}$.

ה. $f\circ g$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

ו. $g\circ f$ היא פונקציית הזהות על $\mathbb{N}$.

4) תהי $f:A\to B$ פונקציה הוכיחו כי $I_B\circ f=f$, $f\circ I_A=f$.
הסיקו כי לכל $f:A\to A$ מתקיים $f\circ I_A=I_A\circ f=f$ זה מראה כי פונקציית הזהות מתנהגת כמו 1 בכפל.

5) תהיינה $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ שלוש פונקציות.
הוכיחו כי $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.
המשמעות של תכונה זו היא שאפשר למקם סוגרים כרצוננו בדיוק כמו בכפל וחיבור רגילים.

6) תהי $f:A\to A$.
הוכיחו את הזהויות הבאות.
הערה: בשני הסעיפים האחרונים נתון כי f הפיכה.

א. $f^m\circ f^k=f^{m+k}$

ב. $f^2\circ f^{-5}=f^{2-5}=f^{-3}$ $\qquad$ $f^5\circ f^{-2}=f^{5-2}=f^3$

ג. הסק מסעיף קודם כי $f^m\circ f^{-k}=f^{m-k}$ והסק כי $f^0=I$

ד. $\left(f^m\right)^k=\left(f^m\right)^k=f^{mk}$

ה. $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

ו. $\left(f^{-1}\right)^n=\left(f^n\right)^{-1}$

7) תהיינה $f,g:A\to A$.
הוכיחו כי $\operatorname{Im} f\circ g\subseteq \operatorname{Im} f$ ותנו דוגמה לפונקציות עבורן ההכלה היא הכלה ממש.

8) הוכיחו או הפריכו:
א. אם g היא פונקציה על אז $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$.
ב. אם $\operatorname{Im} f\circ g=\operatorname{Im} f$ אז g היא פונקציה על.

9) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.
נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $f(X)=\begin{cases}X\cap B^C & X\cap B\neq\varnothing\\ X\cup B & X\cap B=\varnothing\end{cases}$.
לדוגמה, עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$, $f(\{2,3\})=\{3\}$.
א. הוכיחו כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.
ב. הוכיחו כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.
ג. הוכיחו כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.
ד. האם הפונקציה חח"ע?
ה. האם הפונקציה על?

10) תהי A קבוצה ו-B תת קבוצה החלקית **ממש** ל-A. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$ המוגדרות באופן הבא: $\begin{matrix} g(X)=X\cap B \\ f(X)=A-X \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו: $f\circ g$ על.

11) הוכיחו או הפריכו:
הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדרת על-ידי $f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$,
היא פונקציה הפיכה.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$
הוכיחו כי $\left\{f\circ h \middle| f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\right\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

13) מצאו $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שאינה פונקציה קבועה ואינה זהות כך ש- $f\circ f=f$.

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם $f\circ g$ חח״ע וגם $g\circ h$ חח״ע וגם $h\circ g\circ f$ על,
אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) תהיינה $g:A\to B,\ f:B\to C$ שתי פונקציות (בתנאים אלו $f\circ g:A\to C$).
הוכיחו או הפריכו (במקרה של הפרכה בחרו $A=B=C=\mathbb{N}$):

א. אם f חח״ע וגם g חח״ע אז $f\circ g$ חח״ע.
ב. אם $f\circ g$ חח״ע אז f חח״ע.
ג. אם $f\circ g$ חח״ע אז g חח״ע
ד. אם f על וגם g על אז $f\circ g$ על.
ה. אם $f\circ g$ על אז f על.
ו. אם $f\circ g$ על אז g על.
ז. אם $f\circ g$ חח״ע וגם g על אז f חח״ע.
ח. אם $f\circ g$ על וגם f חח״ע אז g על.
ט. אם f לא חח״ע וגם g לא על אז $f\circ g$ לא חח״ע או $f\circ g$ לא על.

16) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f על אז $g=h$.
ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.
ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f חח"ע אז $g=h$.
ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על אז $g=h$.

17) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A]$ פונקציה.
הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.
ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.
ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$.
ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$.

18) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפריכו (שאלה קשה מאוד) :
א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$.
ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.
ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$.
ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה, ראו תשובות מפורטות באתר.

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 4 - יחסים

תוכן העניינים

יחסים – מושגי יסוד

שאלות

1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.
היחס R המוגדר מעל A להיות $aRb \Leftrightarrow b>a+3$, כאשר:

א. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ב. $A=\{3,5,19,103\}$

ג. $A=\{5,6,7\}$

2) עבור $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:

א. $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2<5\}$

ב. $R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2>5\}$

ג. $R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x<y+2\}$

ד. $R_4=\{\langle x,y\rangle \mid x\cdot y>8\}$

3) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר A, כך ש-R יחס מעל A.

א. $R=\{2,5,(7,8)\}$

ב. $R=\{(1,3),(3,7),(2,5)\}$

ג. $R=\{((1,2),(3,4)),((1,3),(2,4))\}$

4) עבור הקבוצות משאלה **1**, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את $\mathrm{dom}(R)$ ואת $\mathrm{range}(R)$, ורשמו את היחס במטריצה.

5) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A\{1,2,3,4,5\}$, כך: $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow |y-x|>2$.

א. רשמו את R במפורש בעזרת $\langle\ldots\rangle$ ובעזרת דיגרף.

ב. חשבו את היחס R^{-1} ואת כל החזקות השונות של R.

ג. מצאו אם היחס R מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:

$$R\cap R^{-1}\subseteq I_A,\ \ R=R^{-1},\ \ I_A\subseteq R,\ \ R^2\subseteq R$$

6) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. ה- Domain של $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ הוא $\{1,2\}$.
ב. ה- Range של $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ הוא $\{2,3,1\}$.
ג. ה- Domain של היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ שווה ל- Range של R^{-1}.

7) תהי $A\{1,2,5\}$ ויהי R יחס מעל A.
איזו טענה נכונה:
א. אם R הוא יחס הזהות $(R=I_A)$, אז $R=\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$.
ב. אם R הוא היחס המלא, אז
$R=\{(1,1),(1,2),(1,5)(2,1),(2,2),(2,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$.
ג. אם R הוא יחס הזהות, אז $R=\left((IR)^{-1}\right)^{-1}$.

8) תהיינה $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{5,6\}$, יהי R יחס כך ש- $R\subseteq A\times B$,
ויהי S יחס כך ש- $S\subseteq B\times C$.
איזו טענה נכונה:
א. $SR=\varnothing$
ב. אם R ו- S יחסים מלאים, אז ב- RS יש ארבעה איברים.
ג. אם R הוא היחס הריק ו- S הוא היחס המלא, אז $RS=S$.
ד. ה- Domain שווה ל- Range של $S^{-1}R^{-1}$.

9) תהי $A=\{1,2,5\}$ ויהי $R=\{(1,1),(1,2),(2,5),(5,5)\}$ יחס מעל A.
א. הביעו את R בצורה של גרף.
ב. הביעו את R^{-1} בצורה של גרף.
ג. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של גרף.
ד. הביעו את היחס המלא מעל A בצורה של גרף.
ה. הביעו את יחס הזהות מעל A בצורה של מטריצת סמיכויות.
ו. הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.
ז. הביעו את RR^{-1} בצורה של גרף.
ח. הביעו את $R\cup R^{-1}$ בצורה של גרף.
הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.
ט. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\cap\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של מטריצת סמיכויות.
י. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\setminus\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.
יא. הביעו את $\left(R^{-1}R\right)\Delta\left(RR^{-1}\right)$ בצורה של גרף.

יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור

שאלות

(1 עבור $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ נגדיר יחס T באופן הבא: $\langle x,y\rangle \in T \Leftrightarrow x\cdot y\le 23$
רשום מדגם בן שלושה זוגות של איברים ביחס ובדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי.

(2 נתון היחס T הבא מעל $A=\{1,2,3,4\}$

$$T=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

האם T רפלקסיבי? אם לא רפלקסיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T סימטרי? אם לא אז סימטרי הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
האם T טרנזיטיבי? אם לא טרנזיטיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.
הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי ש- T יהיה גם רפלקסיבי, גם סימטרי, וגם טרנזיטיבי.

(3 נגדיר יחס T מעל $\mathbb{Z}$ באופן הבא: $T=\{|\langle a,b\rangle| a\cdot b\in \mathbb{Z}_{even}\}$

א. רשום שלוש זוגות ביחס ושלושה זוגות שאינם ביחס.
ב. בדוק האם T רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

(4 נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: (יש ל- x,y אותה הזוגיות) $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in S$ (כלומר שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים)
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

(5 נתון יחס R מעל קבוצה A.
הוכיחו כי $R^2\subseteq R$ אם"ם R טרנזיטיבי.

(6 נתון יחס S מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $\langle x,y\rangle \in S \Leftrightarrow 3|x-y$
הוכח כי S רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

7) נתונים היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$,

$R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$ $\quad$ $R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, R_2 , R_1,
קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

8) עבור $A\{1,2,3,4,5,6\}$, נגדיר S מעל A כך:

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

א. בדקו אם S רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.
ב. רשמו את היחסים I_A ו- S^{-1}.
ג. רשמו את כל החזקות השונות של S.
ד. רשמו את היחס $R=\{1,3,6\}^2\cup\{2,4\}^2\cup\{5\}^2$, כקבוצה של זוגות.
ה. היחס R הוא יחס שקילות.
רשמו את מחלקות השקילות השונות ואת קבוצת המנה.

9) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.
א. יחס $@$ מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in @ \Leftrightarrow |x-y|\le 100$.
ב. יחס $\clubsuit$ מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in\clubsuit \Leftrightarrow 3|x-y$.
ג. היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$, המוגדר באופן הבא: $(A,B)\in\subseteq \Leftrightarrow A\subseteq B$.
ד. היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in$ שרגא $\Leftrightarrow x+y\ge x\cdot y$.
ה. יחס T מעל $\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא: $x^2+y\ge 1 \Leftrightarrow (x,y)\in T$.

10) תהי $\mathbb{N}_+$ הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ונגדיר עליה יחס R כך: $aRb\Leftrightarrow\left[a=b^b\vee b=a^a\right]$.
א. האם $1R1$? האם R רפלקסיבי?
ב. האם R סימטרי?
ג. האם R אנטי-סימטרי?
ד. האם R טרנזיטיבי?

11) נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, על ידי $\langle f,g\rangle\in R$ אם ורק אם קיימת $A\subseteq\mathbb{N}$ אינסופית, כך ש- $f(n)=g(n)$ לכל $n\in A$.

א. האם R רפלקסיבי?

ב. האם R אנטי-סימטרי?

ג. האם R טרנזיטיבי?

12) בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{R}$, כך: $aTb \iff a<b+1$.

ב. נגדיר יחס P מעל $P(\mathbb{N})$, כך: $\left(A=B\vee A\cup\{1,2\}=b\right) \iff APB$.

13) מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות $A=\{3,5,7,9\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

א. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$

ב. $xsy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$

ג. $xRy \iff \exists m\in\mathbb{Z}_{odd}\ \left(x=my\vee y=mx\right)$

14) תהי $A\{1,2,3,4\}$ ויהי R יחס מעל A.

איזו טענה נכונה:

א. $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ הוא יחס הזהות מעל A.

ב. $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ הוא היחס המלא מעל A.

ג. אם R הוא היחס המלא מעל A, אז R^{-1} הוא היחס המלא מעל A.

ד. אם R הוא יחס הזהות מעל A, אז R^{-1} הוא יחס הזהות מעל A.

ה. יהי R יחס מעל $A=\{1,2\}$.

האם יתכן כי R אינו טרנזיטיבי? נמקו.

15) יהי R יחס מעל A. הוכיחו:

א. אם $R\subseteq I_A$, אז R רפלקסיבי.

ב. אם $R=R^{-1}$, אז R סימטרי.

ג. אם $R^2\subseteq R$, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$, אז R אנטי-סימטרי.

16) תהי $A=\{1,2,3,4\}$ ויהי $R=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ יחס מעל A.

א. רשמו את הסגור הרפלקסיבי של R.

ב. רשמו את הסגור הסימטרי של R.

ג. רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של R.

17) תהי A קבוצה ו-R יחס מעל A הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות. בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם R סימטרי, אז R טרנזיטיבי.

ב. אם R אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז R טרנזיטיבי.

ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז $R=\varnothing$.

ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז $R=\varnothing$.

ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי, אז R רפלקסיבי.

ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז R אנטי סימטרי חזק.

ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז R אנטי סימטרי חלש.

18) יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל A, כך ש- $\forall a\in A\exists b\in A \quad aRb$.
הוכיחו כי R רפלקסיבי.

19) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B,C\subseteq A$, כך ש- $R=B\times C$.

20) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A, ונניח שקיים $y\in A$, עבורו $\forall x\in A(x,y)\in S$.

הוכיחו כי לכל $z\in A$ מתקיים $(y,z)\notin S$.

21) נתון כי R יחס על A וכן $R\cap I_A=\varnothing$ (אנטי-רפלקסיבי), וכן $a,b\in A$, לא בהכרח שונים זה מזה, המקיימים $(a,b)\in R^2$ וגם $(b,a)\in R^2$.
הוכיחו שקיימים $c,d\in A$ (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- a ואינו שווה ל- b, המקיימים $(c,d)\in R^2$ וגם $(d,c)\in R^2$.

יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3,4,5\}$ נגדיר יחס S על A כך: $x\cdot y\geq 2 \Leftrightarrow xSy$.

א. האם $S^2\setminus S=\varnothing$?

ב. האם S יחס שקילות על A ?

2) עבור $A\{1,2,3\}$ נגדיר יחסים R,S מעל A כך:

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\},\qquad S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

א. חשבו את היחסים RS ו- SR, ובדקו האם הם יחסי שקילות.

ב. האם היחסים S ו- S^2 אנטי-סימטריים? נמקו.

3) תהי S קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי E מעל S באופן הבא:
$AEB \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$.
הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

4) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
$aEb \Leftrightarrow ab\geq -1$.
הוכיחו כי E יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

5) תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים,
ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי $(m_1,n_1)R(m_2,n_2) \Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות ב- A.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות $[(2,1)]_R$, $[(1,2)]_R$, $[(1,1)]_R$.

6) נתון היחס R מעל $\mathbb{N}$.
$xRy \leftrightarrow (6\mid x-y)\vee(3\nmid x\cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)
מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

7) נגדיר יחס שקילות S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x=y=0) \vee (xy>0)$

ונגדיר יחס שקילות T מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2-9)S(y^2-9)$.

(אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)

כתבו במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$, ונמקו בקצרה.

8) יהי R יחס שקילות על A.

נאמר כי R אוקלידי, אם עבור כל $a,b,c \in A$ מתקיים התנאי:

$\left[(a,b)\in R \wedge (a,c)\in R\right] \Rightarrow (b,c)\in R$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם R יחס שקילות, אז הוא אוקלידי.

ב. אם R רפלקסיבי ואוקלידי, אז הוא יחס שקילות.

9) נתון כי R יחס שקילות על A, וכן $A \in P(B)\setminus\{B\}$.

האם מהנתון נובע כי R יחס שקילות על B, או שאינו יחס שקילות על B?

10) תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסים מעל A.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):

א. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם R,S רפלקסיביים, אז $R\cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם R,S סימטריים, אז $R\cap S$ סימטרי.

ד. אם R,S סימטריים, אז $R\cup S$ סימטרי.

ה. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם R,S טרנזיטיביים, אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cap S$ יחס שקילות.

ח. אם R,S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ יחס שקילות.

ט. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם R,S אנטי סימטריים חלש, אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

11) רשמו במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S=\{a,b,c,d\}$

המקיימים $\left|S/E\right|=2$ וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה.

הערה: יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S\times S$.

12) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ באופן הבא:
$ASB \Leftrightarrow \min A = \min B$, כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב-A.

א. הוכיחו כי S הינו יחס שקילות.

ב. נסמן ב-K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S.
בנו פונקציה $F: K \to \mathbb{N}$ חח״ע ועל.

13) יהיו R,S יחסי שקילות מעל A.
הוכיחו כי $R \triangle S$ לא יחס שקילות מעל A.

14) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים, אם מתקיים $(aRb \wedge bRc) \to cRa$ לכל $a,b,c \in A$.

א. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.

ב. הוכיחו כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק,
אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

15) יחס השקילות S על $P(N)$ מוגדר כך: $S\{\langle A,B\rangle \mid A\cap\{1,2,3\} = B\cap\{1,2,3\}\}$.

א. מהי העוצמה של מחלקת השקילות $[\{4,7,9\}]_S$?

ב. כמה מחלקות שקילות יש?

יחסי סדר

שאלות

1) הוכיחו כי היחס R, המוגדר מעל הקבוצה $A=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}\}$, על ידי $aRb \Leftrightarrow a|b$, הוא יחס סדר מלא.

2) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2=\{(a,b) \mid a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$,
באופן הבא: $(a_1,b_1)D(a_2,b_2) \Leftrightarrow (a_1\ge a_2)\wedge(a_1+b_1\ge a_2+b_2)$.
הוכיחו כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

3) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:
$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a\le c \wedge b\le d)$.

א. הוכיחו כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצאו תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, שעליה היחס R הוא מלא.

4) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow \neg\left(\left(\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor \to y<x\right)\right)$
(אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר).
כתבו במפורש את כל האיברים המינימליים של S.
תזכורת: $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R, אם $\forall y\in A\left((y\ne x)\to\neg(yRx)\right)$.

5) יהי R יחס סדר חלש מעל A, ויהי S יחס סדר חלש מעל B.
הוכיחו כי אם $A\cap B=\varnothing$, אז $R\cup S$ יחס סדר חלש מעל $A\cup B$.

6) תהי A קבוצה לא-ריקה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A (סדורה חלקית ביחס להכלה).

א. הראו שיש ב-K איבר קטן ביותר וגדול ביותר, והוכיחו שהם שייכים ל-K ואכן מקיימים את הנדרש.

ב. תהי $A=\{1,2,3,4\}$.
נסלק מ-K את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר שנמצאו בסעיף א, ונסמן את הקבוצה החדשה שהתקבלה ב-L (שאף היא סדורה חלקית ביחס להכלה).
תנו דוגמה לשני איברים מינימליים ב-L והוכיחו שהם מינימליים, ותנו דוגמה לשני איברים מקסימליים ב-L והוכיחו שהם מקסימליים.

ג. הוכיחו שאין ב-L איבר קטן ביותר וגדול ביותר.

שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

שאלות

1) יחס T מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg \leftrightarrow f \circ g = g \circ f$.
הוכיחו או הפריכו: T יחס שקילות.

2) תהיינה A,B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A, <_B$ יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A,B בהתאמה.
תהי $f: A \to B$ פונקציה המקיימת אם $a_1 <_A a_2$, אז $f(a_1) <_B f(a_2)$.
הוכיחו כי f חח"ע אך אינה בהכרח על.

3) יהי T יחס המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא:
$fTg \Leftrightarrow$ קיים $x \in \mathbb{R}$, כך ש-$f(x) = g(x)$.
האם T יחס שקילות?

4) תהי $F: A \to A$ פונקציה, ונגדיר יחס R מעל A כך: $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$.
נתון ש-R סימטרי וטרנזיטיבי.
הוכיחו כי F היא פונקציית הזהות.

5) נגדיר יחס S על הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך: $(x_1,x_2)S(y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$.
S יחס שקילות (אין צורך להוכיח).
הוכיחו כי קבוצת המנה $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus S$ שוות עוצמה לקבוצה $\mathbb{R}$.

6) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-A.
נגדיר יחס E מעל A^A באופן הבא: לכל $f,g \in A^A$, fEg אם ורק אם קיימת $h \in A^A$ הפיכה, כך ש-$f = h \circ g$.
א. הוכיחו כי E יחס שקילות.
ב. יהי $c \in A$ כלשהו, ותהי $f_c: A \to A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי $f_c(x) = c \quad \forall x \in A$.
תארו את מחלקת השקילות של f_c ביחס ל-E (תנו תיאור מפורש ככל הניתן) ונמקו.

7) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A, ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A.
נגדיר פונקציה $F:J\times E\to J$ באופן הבא: $F(R,S)=R\cap S$.
הוכיחו כי F על.

8) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A.
נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ-A ל- $\{0,1\}$.
נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F=\left\{(f,g)\middle|B\subseteq\left\{x\middle|f(x)g(x)\right\}\right\}$.

א. בהינתן $A=\{1,2,3\}$ ו- $B=\{1,2\}$, תנו דוגמה ל- $f,g,h\in F$ שונים, כך ש- $(f,g)\in E,(f,h)\notin E$.

ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E? נמקו.

9) תהי $A=\{1,2,3\}$ ותהי M קבוצת כל היחסים מעל A,
נגדיר פונקציה $t:M\to M$, המתאימה לכל יחס את הסגור הטרנזיטיבי שלו.

א. t חח"ע.

ב. t על.

ג. לכל $R\in M$ מתקיים $t(R^2)=\left(t(R^2)\right)^2$.

ד. לכל $R\in M$ מתקיים $t(t(R))=t(R)$.

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 5 - עוצמות

תוכן העניינים

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{even}=\{0,2,4,\dots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Q}^+$, כאשר $\mathbb{Q}^+$ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0,3]\sim[0,1]$.

ז. הוכיחו כי $[3,4]\sim[0,1]$.

ח. הוכיחו כי $[3,5]\sim[0,1]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B, מתקיים $A\times B\sim B\times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות (פונקציית שקילות):

א. $(0,2010)\sim(0,\infty)$

ב. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$

ג. $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

ד. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$

ו. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ח. $(0,1]\sim(0,1)$

ט. $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$

י. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$

יא. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0,1\}^A\sim P(A)$

<u>הגדרה</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.
היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות **3-4**.

3) תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו:
א. אם A אינסופית, אז $A\cup B$ אינסופית.
ב. אם A אינסופית וגם $A\subseteq B$, אז B אינסופית.

4) תהיינה A,B קבוצות, ונתון כי $A\cap B$ שקולה ל-A.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $A\cup B\neq B$, אז A אינסופית.
ב. אם $A\cup B\neq A$, אז B אינסופית.
ג. אם A סופית, אז $A\subseteq B$.

5) נגדיר יחס $\sim$ בין קבוצות באופן הבא: $(A,B)\in\sim \;\Leftrightarrow\; A,B$ שוות עוצמה.
הוכיחו כי $\sim$ הוא יחס שקילות.

6) הוכיחו:
א. $\aleph_0+n=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
ב. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
ג. $3\cdot\aleph_0\cdot2\cdot\aleph_0=\aleph_0$
ד. $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.
ה. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
ו. $\aleph_0^n=\aleph_0$ (היעזרו במשפט קב"ש)
ז. אם $\aleph_0\le\alpha$, אז $\alpha=\alpha+3$.
ח. $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$
ט. $\aleph^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$
י. $\aleph_0^{\aleph}>2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph}>\aleph^{\aleph_0}$)

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1,k_2 עוצמות ויהיו A,B קבוצות, כך ש- $|A|=k_1, |B|=k_2$.

נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$.

פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.

הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$, אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $A\sim B \wedge C\sim D \wedge A\cap C=\varnothing \wedge B\cap D=\varnothing$, אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $A\sim B \wedge C\sim D$, אז $A\times C\sim B\times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים:

א. $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

ב. אם $B\cap C=\varnothing$, אז $A^B\times A^C\sim A^{(B\cup C)}$, והראו כי $B\cap C=\varnothing$ הכרחית.

ג. $(A\times B)^C=A^C\times B^C$

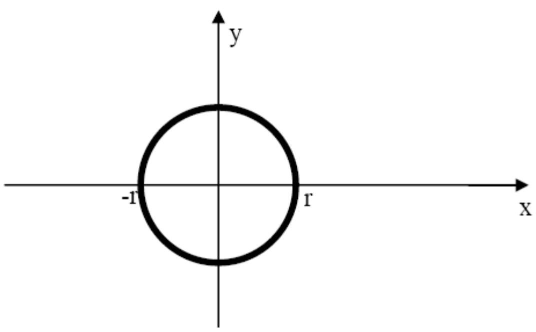
ד. $\left(A^B\right)^C\sim A^{B\times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A=\mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,

ו- $B=\left\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r>0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים, הוא קבוצת כל הנקודות (x,y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$, כמודגם בציור שלהלן.

הוכיחו שלכל $r>0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא $\aleph$.



11) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

12) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות בנות שני אברים של הטבעיים.
מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים.
א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$.
ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$?
למשל, $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{\sqrt{4}}\in A$.
ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$.
מה עוצמת A ?

15) תהי $A=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$.
מהי עוצמת A ? הוכיחו.

16) נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$, כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).
הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

17) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$.

18) הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

19) תהי A קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי E יחס שקילות מעל A.
הוכיחו כי $|E|=\aleph_0$.

20) הוכיחו או הפריכו:
לכל זוג קבוצות A,B מתקיים $\left(A\times B\right)^C\sim\left(A^C\times B\right)\cup\left(A\times B^C\right)$.

21) פונקציית הסינוס $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π.
כלומר, $\sin\left(x+2\pi\right)=\sin\left(x\right)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים $\sin x=0\Leftrightarrow x\in\left\{0,\pi,2\pi\right\}$.
מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin}=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\sin x=0\right\}$. הוכיחו.

22) האם קיימת קבוצה A, כך ש-$\left|P\left(A\right)\right|=\aleph_0$? הוכיחו.

23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור $\mathbb{R}^2$.

24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:
א. $\left\{0,1\right\}^{\mathbb{R}},\ \left\{0,1\right\}^{P(\mathbb{R})}$
ב. $P\left(\mathbb{R}\right)^{\mathbb{N}},\ P\left(\mathbb{R}\right)^{P(\mathbb{N})}$
ג. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:
א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.
ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.
ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.
ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.
ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.
ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10 וגם את הרצף 00.
ז. קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{N}$.
ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{N}$.

לפתרונות מלאים בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 6 - שובך היונים

תוכן העניינים

שובך היונים

שאלות

1) תהי $A=\{1,2,3,\cdots,49\}$.
הוכיחו כי לכל בחירה של קבוצה $B\subseteq A$, כך ש- $|B|=26$, יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.

2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1,\dots 11\}$.
הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.

3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים, שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב- 3009? נמקו.

4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם.
הוכיחו שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- n.

5) הוכיחו כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים, כחול ואדום, יש שתי נקודות שמרחקן אחד והן צבועות באותו צבע.

6) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $k\in\mathbb{N}$, כך שבמספר הטבעי $k\cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו- 0 בלבד.

7) הוכיחו כי מבין כל 12 מספרים דו-ספרתיים יש שניים שהפרש בעל שתי ספרות זהות.

8) הוכיחו כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות, שאורך צלעו הוא אחד, יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.

9) הוכיחו כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, יש שני מספרים x,y כך ש:
א. x,y זרים (כלומר, המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).
ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.
ג. הראו כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאים א ו-ב.

10) נבחר 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,81\}$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שהפרש הוא בדיוק 9.
הוכיחו גם כי המספר הנ"ל הדוק (כלומר מצאו 45 מספרים מתוך $\{1,2,3,\cdots,81\}$, שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).

11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים מתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,\cdots,100$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שסכומם 104.

12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים.
הוכיחו כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.

13) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי.

14) הוכיחו כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות, והוא מתכנן נאומי בחירות: לפחות אחד ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בסך הכל.
הוכיחו כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם 24 נאומים.

16) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $m\in\mathbb{N}$, כך ש-n מחלק את 2^m-1.
הדרכה: התבוננו בסדרה $2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots 2^{n+1}-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 7 - אינדוקציה

תוכן העניינים

אינדוקציה

שאלות

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

1) $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

2) $\sum_{k=1}^{n}(4k1)=n(2n+3)$

3) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$

6) $\sum_{k=1}^{n}2^k=2(2^n-1)$

7) $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$

8) $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$

9) $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$

10) $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$

11) $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$

12) $13 | \left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)$

13) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{2+3}{2}$

14) הוכיחו באינדוקציה על n שהנוסחה הנתונה היא אכן פתרון לנוסחה הרקורסיבית הנתונה:

לכל $n>1$, $a_{n-1} | 2a_{n-1} | a_n = 0$, כאשר $a_0 = a_1 = 1$.

הוכיחו באינדוקציה כי: לכל $n \geq 0$, $a = (-1)^n (1-2n)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 8 - תורת הגרפים

תוכן העניינים

מבוא לתורת הגרפים

שאלות

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים: 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה 1.
כמה קשתות יש ב- G?

ב. הוכיחו כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי.

2) עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט G_n, כך שצמתיו הם 2^n הסדרות הבינאריות באורך n, ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקואורדינטה אחת.
מה מספר הקשתות של G_5 ושל G_n? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה)

3) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\left\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\middle|\,|A|=3\right\}$
$E=\left\{\{A,B\}\,\middle|\,|A\cap B|=1\right\}$, למשל $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$, כי בחיתוך יש איבר אחד.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם G דו"צ?

4) חזרו על שאלה קודמת עבור הגרף $G=(V,E)$ באופן הבא:
V כמו קודם ו- $E=\left\{\{A,B\}\,\middle|\,A\cap B=\varnothing\right\}$.

5) יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים: 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3.
מהן האפשרויות הנכונות?

א. יש גרף פשוט כזה, שהוא קשיר.

ב. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.

ג. יש גרף כזה, אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.

ד. יש גרף כזה, והוא לא פשוט וקשיר.

6) נתונים שני גרפים G_2 , G_1 על 5 קודקודים. סדרת דרגותיו של G_1 היא 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של G_2 היא 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:
א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים $d(x)+d(y)\geq n-1$, אז G קשיר.
ב. הוכיחו באינדוקציה כי גרף על n קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

8) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז G קשיר, כאשר $|E|$ מספר הקשתות.
הראו גם כי חסם זה הדוק. כלומר, הראו גרף פשוט G, עבורו $|E|=\binom{n-1}{2}$, כך ש- G אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

9) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכיחו כי אם $d(x)+d(y)\geq n$, אז יש ל- x ול- y לפחות שני שכנים משותפים.

10) יהי G גרף פשוט על $n\geq 2$ צמתים, ויהיו $u,v\in V$ קודקודים שאינם שכנים.
הוכיחו כי אם: $d(u),d(v)\geq \frac{n+1}{2}$ אז יש ל- u,v לפחות שלושה שכנים משותפים.

11) יהי $G=(V,E)$ גרף, כך ש- $(n\geq 2)$, $V=P_2(\{1,2,..,n\})$, $e\in E \Leftrightarrow A\cap B=\phi$, כאשר $A,B\in V$.
א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אזי G קשיר (רמז: דרך השלילה).

12) יהי G גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-G שדרגתם היא 9.
ב. G קשיר.

13) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.
הוכיחו כי אם $|V|=|E|$, אז ב- G יש מעגל, ואם G קשיר, אז המעגל יחיד.

14) יהי G גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים, שסדרת דרגותיו היא 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

15) יהי G גרף פשוט בעל n קודקודים.
הוכיחו כי אם לכל קודקוד $x\in V$ מתקיים $d(x)\geq \frac{n}{2}$, אז ב- G מעגל באורך 4.

16) הוכיחו כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים, שבו כל הדרגות הן לפחות 10, יש מעגל באורך ≥ 4.

17) יהי G גרף פשוט.
הוכיחו כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ קשיר.
בניסוח שקול: הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים לפחות, אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

18) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי (משולש חד צבעי).

19) הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

20) יהי G גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$, (כאשר n גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים <u>בדיוק</u>. לדוגמה, הקודקוד $\{1,2,3,4\}$ שכן של $\{1,2,7,8\}$, אך לא של $\{1,2,3,7\}$.

כמה קודקודים בגרף הם שכנים של $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

21) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_{17} ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד (מעגל מונוכרומטי).

22) כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם K_n על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$?
שני מעגלים המתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב נחשבים זהים.
למשל, עבור $n=5$, שני המעגלים $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים, ואילו המעגלים $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

23) נצבע ב- $n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם K_n , כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת.
הוכיחו כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

24) יהי G גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר, אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת).
הוכיחו שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5 (כלומר, 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר).

25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$. נגדיר $G=(V,E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1 , G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

26) יהי G_n גרף פשוט שקודקודיו הם כל תתי-הקבוצות של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$, למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

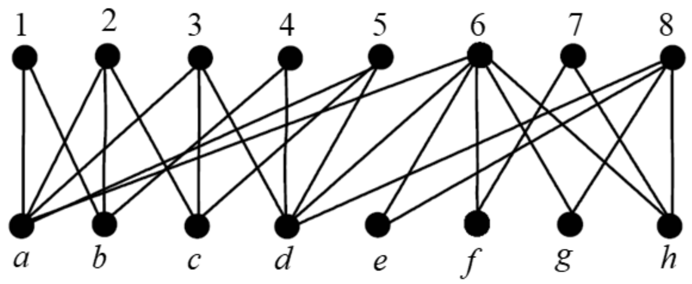
א. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$, G_n קשיר.

ב. הוכיחו כי אם v תת קבוצה בת k איברים של $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$: אז דרגתה כקודקוד ב- G_n היא: $2^n-2^{n-k}-2^k+1$.

ג. הוכיחו כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב- G_n . מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k \le 2^{n-1}+2$.

27) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5 ?
ב. בגרף המלא K_6 ?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$, כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

28) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי בגרף הבא אין זווג מושלם.
ב. מצאו זווג מקסימום.
ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?



29) יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, ונגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:
$E'=\{\{x,y\}|x,y\in V\wedge\exists z\in V:\{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\}$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם G קשיר, אז H קשיר.
ב. אם G קשיר, אז H לא קשיר.
ג. אם H קשיר, אז G קשיר.
ד. אם H קשיר, אז G לא קשיר.

30) נתון גרף G.
הוכיחו כי אם $\bar{G}$ לא קשיר, אז לכל שני קודקודים x,y ב- G מתקיים $d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל- y).

31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים $V=\{v,u,t,s,r\}$.
כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים V מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

32) יהי G גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

33) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות K_{2t+1} ב-t צבעים, נקבל מעגל חד צבעי.

גרף דו צדדי

שאלות

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$

$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$.

א. האם G דו צדדי?

ב. האם G דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף, כאשר כל צומת של G היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל, 000000 צומת של G. שני צמתים הם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל, 010111 מחובר ל-011101, כי הם נבדלים במקומות השלישי והחמישי.

א. כמה קשתות יש ל- G?

ב. האם G קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל- G?

ג. האם G דו״צ?

ד. (למי שלמדו גרפים מישוריים, האם G מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n\geq 1$) והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו״צ $K_{4,4},K_{5,5}$, ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים, כאשר האיחוד שלהם מוגדר להיות $G_1\cup G_2=(V,E)$ כש- $V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו או הפריכו:

א. איחוד של שני גרפים דו״צ הוא גרף דו״צ.

ב. איחוד של שני גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.

ג. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.

ד. איחוד של n גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו״צ.

6) הציגו את K_{16} כאיחוד של 4 גרפים דו״צ.

7) הוכיחו או הפריכו:
אם $G=(V,E)$ גרף דו״צ k רגולרי שצדדיו הם A,B, אז $|A|=|B|$.

8) יהיו $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו״צ שונים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל גרף צדדים A_i,B_i, כאשר $i=1,2,3,4,5,6,7$. כמובן שבסימונים אלה
מתקיים $A_i\cap B_i=\varnothing$, $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי G איחוד כל הגרפים האלה, כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח
רק קשת אחת, כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- G נתאים סדרה בת שבע אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך
בגרפים $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$, בהתאמה.
למשל, אם v שייך לקבוצות $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$, כלומר בשני הגרפים
הראשונים הוא בצד A, בשלושת הגרפים הבאים בצד B, ובשני הגרפים
האחרונים בצד A, אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה $AABBBAA$.
כלומר, ל- v שלנו תתאים המילה $AABBBAA$, ובאופן דומה, לכל צומת תתאים
מילה בת 7 אותיות.
הוכיחו כי אם לשני צמתים u,v מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- G בין u
לבין v.

9) יהי G גרף דו צדדי $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$, ונתון כי G הוא d רגולרי, $d\ge 1$.
הוכיחו כי $|V_1|=|V_2|$.

10) הוכיחו או הפריכו:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

11) כמה זיווגים מושלמים יש,
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)
א. בגרף המלא K_5?
ב. בגרף המלא K_6?
ג. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$?
(הגדרת גרף דו״צ בפרק גרף דו צדדי)
ד. בגרף הדו״צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

12) יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט., וכן $|V|=n$.
הוכיחו כי $|E|\le \frac{n^2}{4}$.

13) נגדיר גרף שצמתיו הם $P(\{1,2,3,\cdots n\})$ (יש 2^n צמתים), ושני צמתים מחוברים, אם אחד מהם מכיל את השני והם נבדלים באיבר אחד.
(למשל, $\{1,2,5,7\},\{1,5,7\}$ מחוברים)

א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. הוכיחו כי G רגולרי.
ג. הוכיחו כי G הוא גרף דו״צ.

14) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

עצים

שאלות

1) יהי T עץ שעל $n\ge 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים.
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן לכל $n\ge 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

2) יהי $T=(V,E)$ עץ.
הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות, אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

3) יהי T עץ על $n\ge 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-T הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי T? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

4) יהי T עץ. נוסיף ל-T קודקוד שנקרא לו v, וקשתות מ-v לחלק מקודקודי T.
מה צריכה להיות דרגת v כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת v תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

5) G גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים.
כמה רכיבי קשירות בגרף?

6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים <u>עצים</u> על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר, אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שווֹת ל-5.
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

7) יהיו $T_1=(V,E_1)$, $T_2=(V,E_2)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים,
ונגדיר גרף G על אותה קבוצת קודקודים, שקשתותיו $E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו כי קיים $x\in V$, כך ש-$d(x)\le 3$ (דרגתו של x ב-G).

8) יהיו $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ עצים, ונגדיר גרף G כך: $G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.

א. נתון כי $V_1 \cap V_2 = \{v\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי $E_1 \cap E_2 = \{e\}$.
האם G בהכרח עץ? נמקו.

9) יהי T עץ על $n \geq 3$ קודקודים ויהי v קדקוד ב- T מדרגה 2.
יהי k מספר רכיבי הקשירות של $T - v$ (שהוא תת הגרף של T המתקבל ממחיקת v, והקשתות ש- v קצה שלהן).
מה הם הערכים האפשריים עבור k? הוכיחו.

10) יהי T עץ בעל n קודקודים, ונתון שדרגותיו הן 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5.
כמה עלים יש בעץ?

11) יהי $T = (V, E)$ עץ, שבו $|V| = n$. דרגות צמתי T הן 1,3,5 בלבד. מספר הצמתים שלהם מדרגה 3 הוא 10 ומספר הצמתים שלהם מדרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

12) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם K_n בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי G וקשתותיו הן חלק מקשתות G.

13) יהי $G = (V, E)$ $|V| = n,$ גרף פשוט וחסר מעגלים, שבו k רכיבי קשירות.
הוכיחו כי $|E| = n - k$.

14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V = \{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם)

15) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ (כאשר $n \geq 1$), והתקבל גרף G שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- G הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

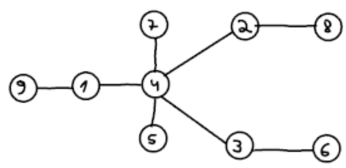
16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים $G_1=(V,E_1)$,
$G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$.
נגדיר $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- V דרגתו ב- G היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים G_1, G_2 ו- G_3 <u>אינו</u> חסר-מעגלים.

ב. יהיו $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים V.
לכל צומת $v\in V$ נסמן ב- $d_i(v)$ את הדרגה של v ב- G_i, אשר $i=1,2,3$.
הוכיחו כי קיים צומת $v\in V$, שעבורו $\sum_{i=1}^{3}d_i(v)\le 5$.

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

18) מהי סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$, שלהם בדיוק שני עלים?

22) T הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.
א. הדגימו עץ כזה.
ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר.
ג. מצאו את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם) 8,9,10?

24) יהי G גרף פשוט על n קודקודים המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

25) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מעגלים מיוחדים

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

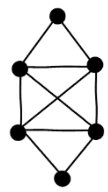
דוגמאות

1) צפו בסרטון על מעגלי המילטון והוכיחו כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם G המילטוני, אז G אוילרי.
ב. אם G המילטוני, אז G לא אוילרי.
ג. אם G לא המילטוני, אז G אוילרי.
ד. אם G לא המילטוני, אז G לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם G הוא גם אוילרי וגם המילטוני, אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם G אוילרי וגם המילטוני, אז G הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב- G מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון, אז G הוא מעגל פשוט.

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תנו דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

2) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\|A|=3\}$
$E=\{\{A,B\}\,\|A\cap B|=1\}$. למשל, $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם G דו"צ?
ג. האם G אוילרי?
ד. האם G המילטוני?

3) מהו האורך המירבי של מסלול ב- K_{2n+1} ? נמקו.

4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהי G גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של $\{1,2,3,\cdots,8\}$, כאשר שני קודקודים מחוברים אם ורק אם בקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- G יש מעגל המילטון?
ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם.
הוכיחו כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

6) יהיו $G_2=(V_2,E_2)$, $G_1=(V_1,E_1)$, $V_2\cap V_2=\varnothing$, $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$, $V=V_1\cup V_2$,
ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם G אוילרי?
אם נחבר את u_1 עם u_2 במקום ללכד אותם, האם כעת G אוילרי?

7) יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.
הוכיחו כי יש ב- G לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.
(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש n דרגות אפשריות כי כולן זוגיות)

8) יהי G גרף בעל שני רכיבי קשירות, T_1 ו- T_2, שכל אחד מהם עץ. נוסיף שתי קשתות חדשות ל- G (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ויתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.
א. הוכיחו שב- $\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.
ב. בנו דוגמה שבה ב- $\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

9) יהי G גרף פשוט על $n\geq 3$ קודקודים.
נתון:
1. n מספר זוגי.
2. כל הדרגות ב-G שוות (כלומר G גרף רגולרי).
3. גם G וגם $\bar{G}$ קשירים.

הוכיחו שלפחות באחד מבין G ו- $\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

10) הוכיחו או הפריכו: אם G אוילרי דו"צ, אז מספר הצמתים של G הוא זוגי.

11) עבור $A=\{1,2,3\}$, נגדיר $G=(V,E)$, כאשר $V=A\times A$ (9 צמתים), ואת E קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם $a+b\neq c+d$.
א. הוכיחו כי G קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב- G?
ג. הוכיחו כי אין ב- G מסלול אוילר.

12) יהי G גרף פשוט 3-רגולארי על $n\geq 4$ קודקודים. נתון שב-G יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של G, המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון, הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, יש להוכיח ש-n זוגי).

13) יהיו $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים V. נגדיר את הגרף $G=(V,E_1\oplus E_2)$, כאשר $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות (כל הקשתות שנמצאות ב- E_1 או ב- E_2 אבל לא בשתיהן). הוכיחו כי אם ב- G_1,G_2 יש מעגל אוילר ו- G קשיר, אז גם בו יש מעגל אוילר.

14) יהי $G=(V,E)$ גרף על n צמתים.
א. הוכיחו כי אם $|E|>\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני.
ב. הוכיחו כי החסם הנ"ל הדוק. כלומר, כי הטענה: אם $|E|\geq\binom{n-1}{2}+1$, אז G המילטוני – איננה נכונה.

15) נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי שיש בו שלוש קשתות $e_1,e_2,e_3\in E$, שלאחר הסרתן מהגרף, G נשאר אוילרי.
א. הדגימו גרף כזה.
ב. הוכיחו כי G לא דו"צ.

16) נתון G גרף אוילר, ונגדיר שיטה: נבחר קודקוד, נתחיל ממנו מסלול, ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.

א. הוכיחו כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.

ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?

ג. נתון כי G גם המילטוני.
האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

17) יהי G גרף פשוט על n קודקודים, המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של G שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף G? אם כן, מהו מספר הקשתות?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

18) יהי G גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף H שקודקודיו הם קודקודי G ועוד קודקוד חדש v, שקשתותיו הם קשתות G וכל הקשתות האפשריות בין v לקודקודי G.
הוכיחו שב- H יש מעגל אוילרי.

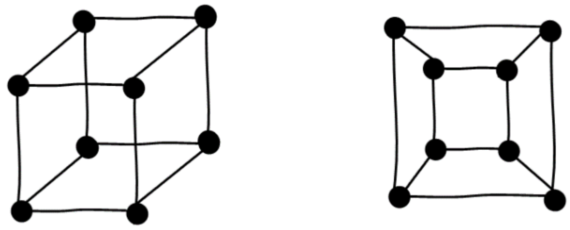
19) הוכיחו או הפריכו: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי, אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

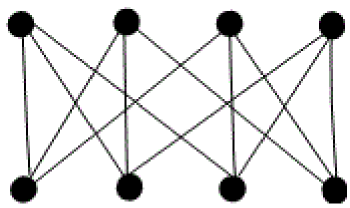
איזומורפיזם

שאלות

1) הוכיחו כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי (כלומר, ניתן לשכן אותו במישור [למצוא גרף איזומורפי לו] מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).

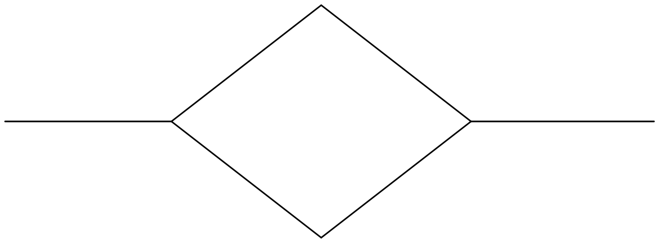


2) הוכיחו כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא.
כלומר, קיים גרף G איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- G חותכת צלע אחרת.

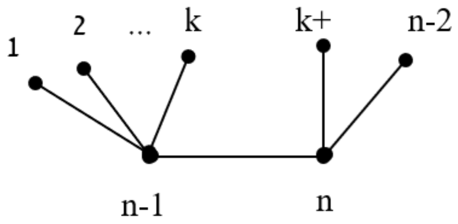


3) יהיו G_1,G_2 שני גרפים איזומורפיים.
הוכיחו כי G_1 חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ G_2 חסר מעגלים, והסיקו כי G_1 עץ $\Leftrightarrow$ G_2 עץ.

4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים $\{a,b,c,d,e,f\}$?



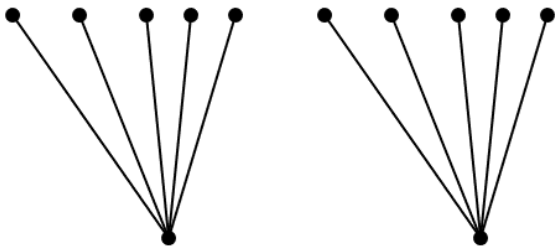
5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל k,n טבעיים המקיימים $2\le k\le n-3$.

הפרידו בין המקרים $n=2k+2$, $n\ne 2k+2$.

6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



7) הוכיחו או הפריכו:

אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר, אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

8) נגדיר C_n להיות מעגל על n קודקודים.

לאילו ערכים של n מתקיים ש- C_n איזומורפי ל- $\bar{C}_n$?

(כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים)

9) יהי T עץ.

מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?

(שאלה מאתגרת)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il