כלים מתמטיים 71001



תוכן העניינים

1. חזרה כללית - מבוא לאלגברה 1
2. חזרה כללית - משוואות אלגבריות 47
3. חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים 69
4. חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים 85
5. חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים 95
6. חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים 105
7. מבוא לתורת הקבוצות 121
8. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר 131
9. גיאומטריה אנליטית - המעגל 156
10. גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה 175
11. גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה 185
12. גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות 191
13. וקטורים גיאומטריים 197
14. וקטורים אלגבריים - מבוא להצגה של וקטור במערכת צירים 211
15. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב 220
16. מספרים מרוכבים 252
17. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות ..... (ללא ספר)
18. הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות 268
19. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים 290
20. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום 305
21. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש 318
22. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות 356
23. חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט 374

תוכן העניינים

24. חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות 388
25. חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת ..... (ללא ספר)
26. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות 423
27. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות 439
28. חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי 455
29. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות 464
30. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות היפרבוליות 469
31. קוים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב 475
32. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה 502

כלים מתמטיים 71001

פרק 1 - חזרה כללית - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים 7
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים 8
5. כפל וחילוק שברים 14
6. חיבור וחיסור שברים 16
7. בעיות יסודיות באחוזים 20
8. חזרה על תבניות מספר 22
9. כינוס איברים 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר 28
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים 30
13. פירוק הטרינום 33
14. שברים אלגברים 35
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים 39
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים 41
17. שברים כפולים 45

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

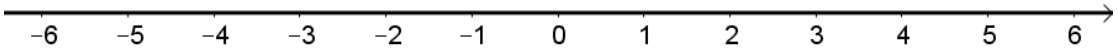
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -5\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ 4\ ,\ -3\frac{1}{2}$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-5):(-25)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

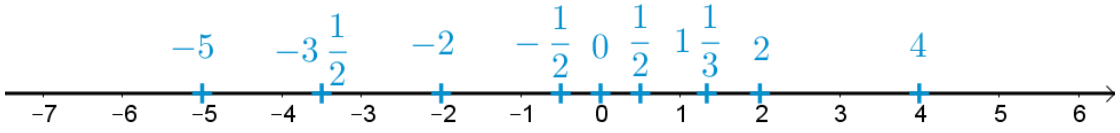
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

1) $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

תשובות סופיות:

1) 28	**2)** 33	**3)** 19	**4)** -37
5) 31	**6)** -14	**7)** 5	**8)** -21
9) -16	**10)** -44	**11)** 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{X\,X}_{\text{שלמים}}.\underbrace{Y\,Y\,Y}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

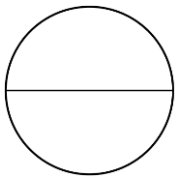
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

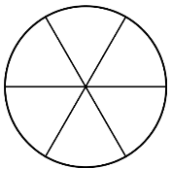
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

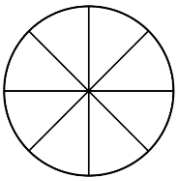
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



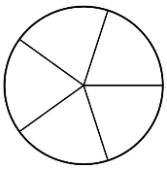
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

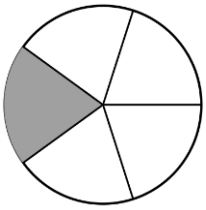


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

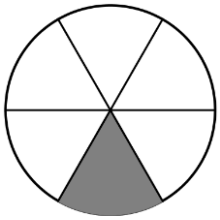


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

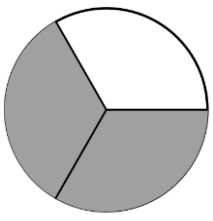
א. שבר:



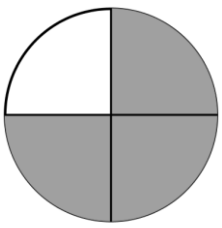
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.\overline{18}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

(1) $8x$

(2) $2x^2$

(3) $4xy$

(4) $-x^2y$

(5) $4a^2-a$

(6) x^2

(7) $9xy-36y$

(8) $8mn^2-6nm^2$

(9) $15x^3-19$

(10) 0

(11) $7x^2-7x+2$

(12) $2xy+x+1$

(13) $4x^2+3x-9$

(14) $-5x-5y-5xy$

(15) $-13n-2m+6mn$

(16) $-5ab^2+22a^2b-3b$

(17) $4z^2-1$

(18) $14x^2z+5xz^2+6$

(19) $-3x^2+2x-3$

(20) $-3x^2-x$

(21) $7a^2b+13x^2y$

(22) $-8x^2y^3+15a^2$

(23) $-8y^2-5x^3y^2$

(24) $-6x^3y-x^2$

(25) $2a^2b+3a^2+7b$

(26) $25a^2b-22ab^2$

(27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

(28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$

ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$

ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$

ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$

ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$

ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$

ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$

ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25

ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$

ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4

ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$

ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1

ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד אז $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

כלים מתמטיים 71001

פרק 2 - חזרה כללית - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 52
4. משוואה ממעלה שנייה 53
5. משוואות דו-ריבועיות 55
6. משוואות עם פרמטרים 57
7. משוואות עם שורשים 59
8. משוואות עם ערך מוחלט 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות 64
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 67

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

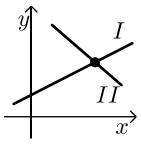
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

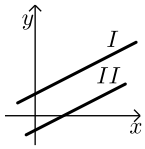
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

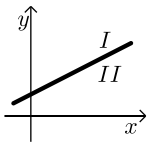
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+2y=1\\4x+8y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}2(x-y)+4y=1+x\\2-7y+x=3(x-y)\end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. 8- ב. 1- ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}\ ,\ a\neq\pm b$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$
2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$
3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$
4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$
5) $x_{1,2}=\pm 1$
6) $x_{1,2}=\pm 2$
7) $x=1$.
8) $x=3$.
9) $x=2$.
10) $3.5\le x\le 7$.
11) $x=4$.
12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.
13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$
14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$
15) $x\le 0$.
16) $x=-1$.
17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.
18) $x=-\frac{1}{4}\ ,\ x\le\frac{5}{4}$.
19) $x=-\sqrt{5}$.
20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$

2) $(2y+5)^3$

3) $8x^3-1$

4) $8y^3+343$

5) a^6-27

6) $x^3y^6z^9-1$

7) $11+88x^{12}$

8) $64mn^4-8m^4n^7$

9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$

12) $125x^3=1-15x+75x^2$

13) $x^3+x-30=0$

14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

17) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

18) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x^3-9x+27x-27$

2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

3) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

4) $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

5) $\frac{1}{x+2}$

6) $x=4$

7) $x=3$

8) $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2$

9) $(3,6)\ ,\ (6,3)$

10) $8y^3+60y^2+150y+125$

11) $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

12) $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

13) $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

14) $\frac{x^2-4x+16}{x}$

15) $x=\frac{1}{-}$

16) $x_{1,2,3}=-2\ ,\ -1\ ,\ 3$

17) $x_{1,2,3}=-2.5\ ,\ -1\ ,\ 1$

18) $(-5,-6)\ ,\ (6,5)$

כלים מתמטיים 71001

פרק 3 - חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 72
4. אי שוויונים עם מנה 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 75
6. שאלות מסכמות 76
7. מציאת תחום הגדרה 78
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט 80
9. אי שוויונים עם שורשים 83

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c\overset{>}{<}0$ כאשר $a\neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2$, $x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1$, $x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0$, $x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2$, $1<x<3$

8) $x\le 0$, $x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1$, $2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ 3 \le x$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $x > 2 \, , \, -5 \leq x < -2$ ה. $x > 2 \, , \, -2 \leq x < 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\|x\|<a$	$\|x\|>a$
פתרון	$-a<x<a$	$x<-a \cap x>a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$ ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$ ד. $|2x+1|-3x>4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$ ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$ ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $|x^2-3x|<4$ ד. $|6x^2-7x-4|>1$

ה. $x^2-6|x|+5\le 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$, $x>7$

4) א. $x>2$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $x>4$ או $x<-6$ ד. $x>4$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $x>2$, $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$, $0\le x\le\frac{2}{3}$

ג. $x\ge 46$, $x<12$ ד. $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x<2$, $2<x\le 4$

6) א. $x=-1$, $x\ge 3$, $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $-1\le x\le -\frac{2}{3}$, $0\le x\le 1$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a\geq 0$	$\sqrt{f(x)}<a$	$0\leq f(x)<a^2$
$a<0$	$\sqrt{f(x)}<a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)}>a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3}<7$

2) $\sqrt{2x-5}\geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x < -10 \ , \ x > 1$.
4) $\varnothing$.
5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \ , \ x \le -2$.
6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16} \ , \ x \le -3$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x < -9 \ , \ x > 0$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 4 - חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 85
2. חוקי השורשים 90
3. כתיבה מדעית של מספרים 94

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6 ב. $t^3t^5t^7$ ג. $b^2b^5b^{12}b^3$

ד. $\frac{k^8}{k^3}$ ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$ ו. $\frac{c^6}{c^2}$

ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$ ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$ ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$

י. $3^23^33^4$ יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$ יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$ ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$ ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\frac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\frac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\frac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\frac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$

ב. $\frac{1}{5^3}$

ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$

ה. $\frac{1}{81}$

ו. $\frac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$

ב. $\frac{1}{3^{-2}}$

ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1)	א. a^8	ב. t^{15}	ג. b^{22}	ד. k^5	ה. n^5	ו. c^4
	ז. a^7	ח. x^3	ט. 1	י. 3^9	יא. 2^8	יב. 5^5.
2)	א. 18	ב. ab	ג. x^6y^{10}.			
3)	$n=16$.					
4)	א. 2	ב. $\frac{1}{3}$	ג. $\frac{5}{8}$	ד. 40.		
5)	א. a^8	ב. c^{30}	ג. x^{26}	ד. b	ה. n^3	ו. d^{10}
	ז. 2	ח. 9	ט. 8^{18}	י. 3^7	יא. 3	יב. 3^5.
6)	$n=2$.					
7)	א. 6	ב. 9	ג. 56.			
8)	א. 3^{12}	ב. 2^{21}	ג. 5^{10}	ד. 2^{12}	ה. 2^7	ו. 3^{51}.
9)	א. $\frac{2b^3}{a}$	ב. k	ג. $3\frac{1}{5}$	ד. $\frac{1}{x}+x$.		
10)	א. a^6b^3	ב. $m^{20}n^{15}$	ג. $x^{36}y^9$	ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$	ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$	ו. $a^{21}b^3$
	ז. $x^{12}y^{18}$	ח. t^4r^{12}	ט. b^2c^6.			
11)	א. 576	ב. 225	ג. 8			
12)	א. 4^{-6}	ב. 5^{-3}	ג. 2^{-10}	ד. 2^{-3}	ה. 3^{-4}	ו. 5^{-3}.
13)	א. 64	ב. 9	ג. 125.			
14)	א. 81	ב. 8	ג. 5	ד. $\frac{1}{9}$	ה. 1000	ו. 3.
15)	א. $5^{24}\cdot 3^{12}$	ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$	ג. $5^3\cdot 2^4$.			
16)	א. a^{1-5n}	ב. k	ג. m^{2n+12}.			

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 5 - חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות 95
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 97
3. משוואות עם קבוע אוילר 99
4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס 100
5. משוואות מסכמות שונות 101
6. מערכת משוואות מעריכיות 102
7. אי שוויונים מעריכיים 103
8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 104

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$

ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$.

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$.

4) א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$

ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$.

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$

ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$

ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$

ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$

ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\ ,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\ ,\ -1$.

3) א. $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\ ,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה-x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{6}{4^{x-1}-1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+2}=\frac{2^x+4}{2^x-2}$.

3) $\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}=\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.
2) $x=3$.
3) $x=1.5$.
4) $x=1,-1$.
5) $x=\frac{1}{2}$.
6) $x=-3$.
7) $x=1,-2$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ **2)** $(0,2)\ ,\ (2,4)$ **3)** $(1,2)$ **4)** $(1,3)$

5) $(3,2)$ **6)** $(-1,-2)$ **7)** $(1,2)\ ,\ (-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $x > 3$, $0 < x < 1$.
2) $3 < x < 6$.
3) $1 < x < 3$.
4) $1 < x < 2$, $0 < x < 0.5$.
5) $x \geq 3$, $x \leq -1$.
6) $0 < x < 2$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 6 - חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 105
2. חוקי הלוגריתמים 108
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית 112
4. מעבר בין בסיסים 113
5. הלוגריתם הטבעי 115
6. משוואות עם בסיסים שונים 117
7. מערכת משוואות לוגריתמיות 118
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות 119
9. אי-שוויונים לוגריתמים 120

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1 \ , \ b > 0 \ , \ a$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0 \ , \ a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)\ ,\ 4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0\neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1}3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{\sqrt{125}}9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25}64\cdot\log_{13}625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16}9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32}x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27}x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125}x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32}36$

ג. $\log_{216}96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$

ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$

ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$

ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$

ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 5 = 0.827$, $x = \log_7 3 = 0.564$ ד. אין פתרון.

2) א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$

2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$

3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$

5) $(25,8)$

6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$

8) $(3,9),(9,3)$

9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

כלים מתמטיים 71001

פרק 7 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. כללי 121

כללי:

סיכום כללי:

הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית $\Rightarrow$: $A\Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $\Leftrightarrow$ (אם ורק אם): $A\Leftrightarrow B$ פירושו: $A\Rightarrow B$ וגם $B\Rightarrow A$.
- הסימן 'או': $\vee$.
- הסימן 'וגם': $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a\in A$.
  - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a\notin A$.

שוויון בין קבוצות:

שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.

פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A=B\Leftrightarrow\left(x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)$.

הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- ϕ, כלומר $\phi=\{\}$.

קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה:

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B, נסמן זאת: $A\subseteq B$.

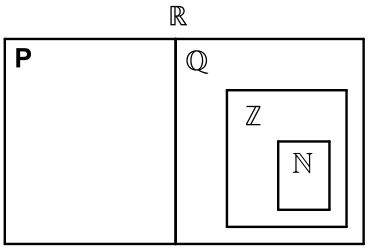
תמיד מתקיים:

- $A\subseteq A$.
- $\phi\subseteq A$.

עבור שוויון קבוצות נדרוש: $A=B\Leftrightarrow\left(x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)$ או $A=B\Leftrightarrow\left(A\subseteq B\wedge B\subseteq A\right)$.

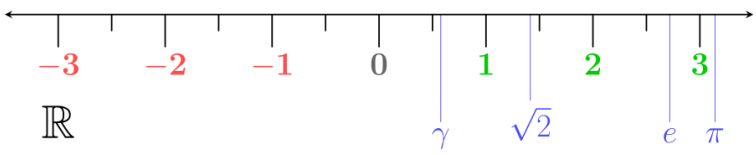
קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,....\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,....\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\;\middle|\;p,q\in\mathbb{Z},q\neq0\right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט P).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת P).



ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים:

תיאור מילולי	סימון קבוצות	סימון קטעים
הקטע הפתוח מ-a ל-b לא כולל נקודות הקצה	$\{x \mid a < x < b\}$	(a,b)
הקטע הסגור מ-a ל-b וכולל נקודות קצה	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$
הקרן הפתוחה מ-a עד ∞ ללא a	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a,∞)
הקרן הסגורה מ-a עד ∞ כולל a	$\{x \mid a \le x < \infty\}$	$[a,\infty)$
הקרן הפתוחה מ-$-\infty$ עד b ללא b	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty,b)$
הקרו הסגורה מ-$-\infty$ עד b כולל b	$\{x \mid -\infty < x \le b\}$	$(-\infty,b]$

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של A ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cap B$.

	תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup B$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
	$A \cap \phi = \phi$	$A \cup \phi = A$
		$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות A ו-B המסומן $A-B$ הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B, כלומר: $A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$.

משלים של קבוצה:

ההפרש $U-A$ מסומן ב-A^c או ב-A' ונקרא **המשלים** של A כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן:

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

שאלות:

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x\forall y:\ (x+y)^2>0$

ב. $\forall x\exists y:\ (x+y)^2>0$

ג. $\forall x\forall y\exists z:\ xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0,\forall y>0\ ,\ \sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n\exists k, n^3-n=6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר n^3-n מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה $A=\{x\mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה: $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$E=\{7,8\}$, $D=\{6,7,8\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$.

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in R\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\,|\,2^x=0\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות: $C=\{4,5,6,10\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $A=\{4,5,6,7,8\}$.

א. חשב את $(A-B)-C$.

ב. חשב את $A-(B-C)$.

13) נתון: $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$, $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגם את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

16) הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) נתונה הקבוצה: $A=\{\phi,4,\{4\}\}$.
רשמו את $P(A)$.

18) הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
א. לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq P(A)$.
ב. לכל קבוצה A מתקיים $A\not\subseteq P(A)$.

19) הוכיחו כי: $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$.

תשובות סופיות:

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$, $A=\{1,2\}$.

8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) הוכחה.

10) א. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ ב. $A\cap B=\{4,6,8\}$

ג. $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$.

11) א. $A\cup B=(-2,4)$ ב. $A\cap B=\phi$

ג. $(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$.

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$.

13) ללא פתרון.

14) הוכחה.

15) א. $A^c=(-\infty,1)$ ב. $B^c=[1,4]$ ג. $C^c=[1,4]$ ד. $D^c=(-\infty,1]\cup[3,4]$.

16) ראו סרטון.

17) $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{4\},\{\{4\}\},\{\phi,4\},\{4,\{4\}\},\{\phi,\{4\}\},\{\phi,4,\{4\}\}\}$.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

כלים מתמטיים 71001

פרק 8 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 131
2. משוואת הישר 135
3. מצבים הדדיים בין ישרים 140
4. מציאת משוואות ישר 142
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר 143
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון 149
8. מרחק נקודה מישר 150
9. מיקום נקודה ביחס לישר 152
10. מרחק בין ישרים מקבילים 154

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

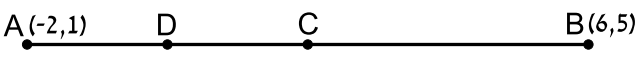
ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

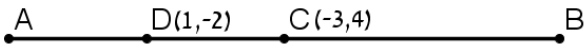
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $B(-10,4)$, $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$, $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$, $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$, $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$, $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$, $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$, $B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $A(5,-8)$, $B(-11,16)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x: $m=\tan\alpha$.

משוואת הישר:

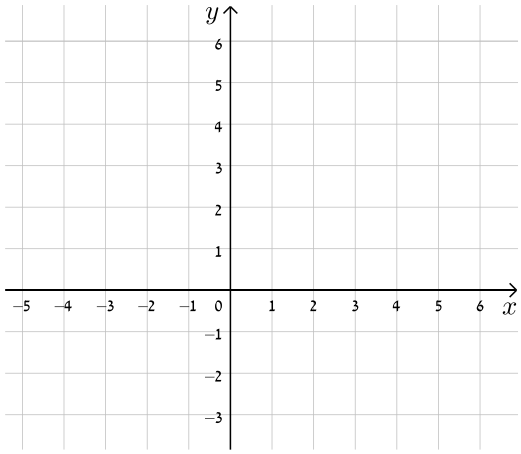
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו-n הוא ערך ה-y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

  נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

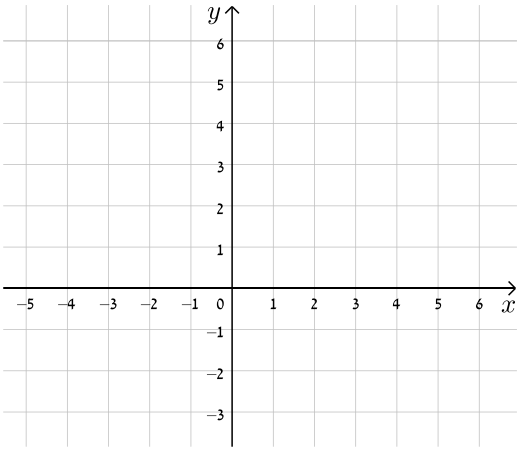
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

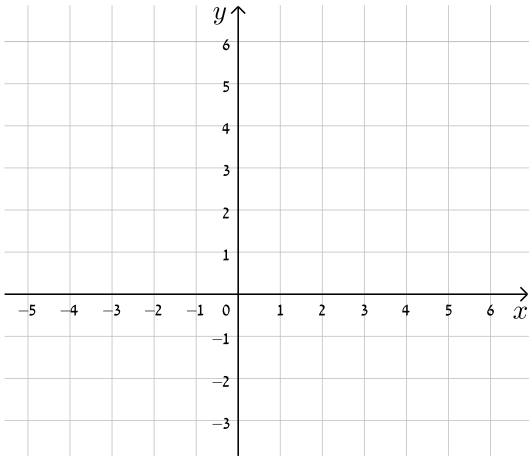
א. $y=x+4$



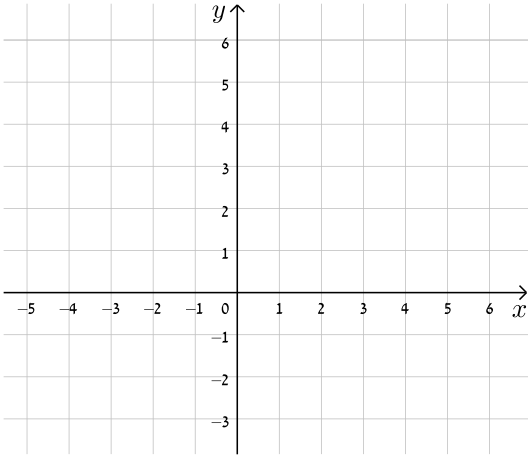
ב. $y=-x+5$



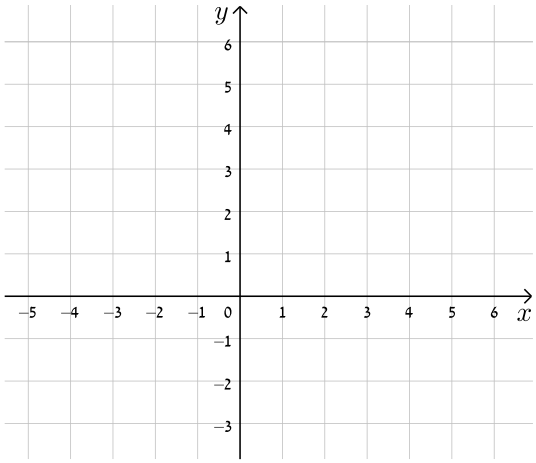
ג. $y=2x-3$



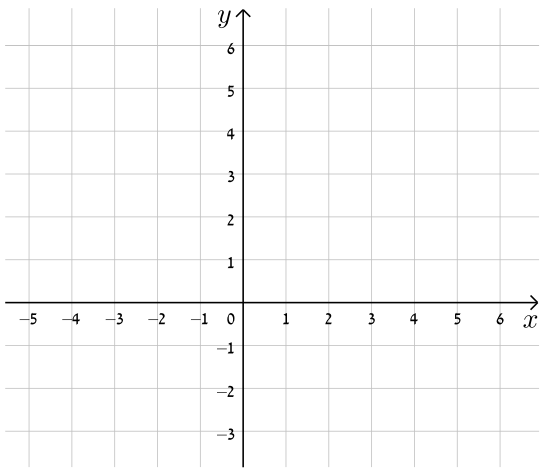
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

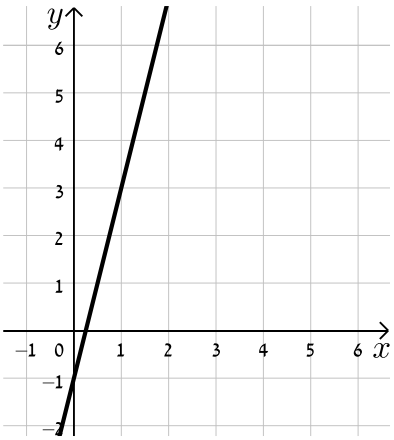


ו. $y=8-4x$

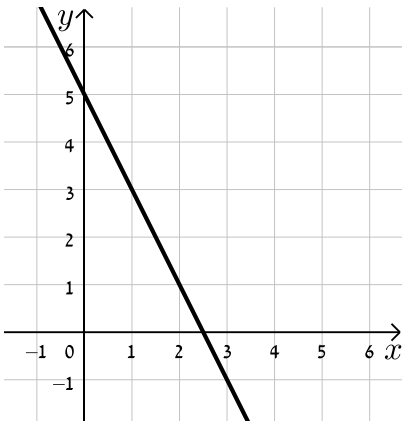


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

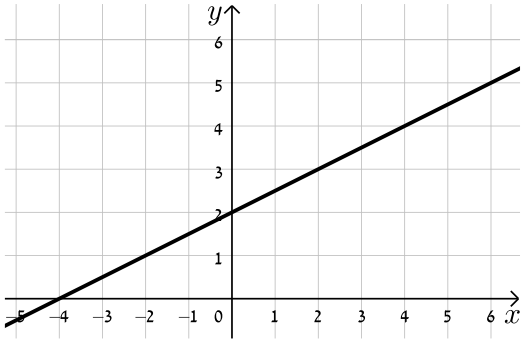
א.



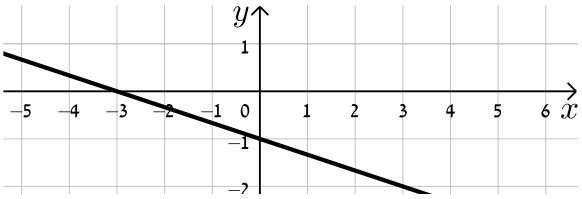
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

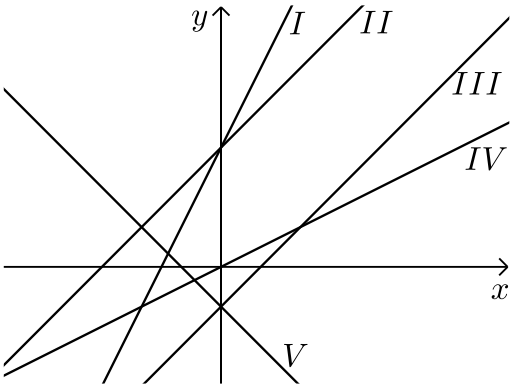
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

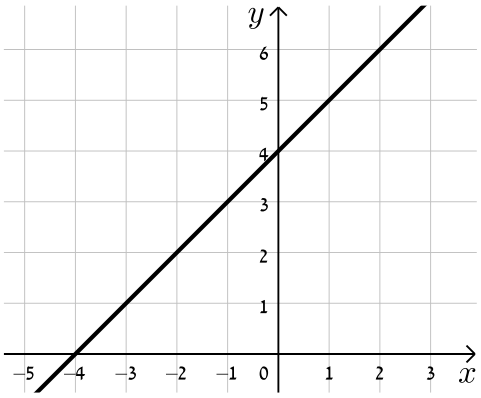
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את m ואת n.

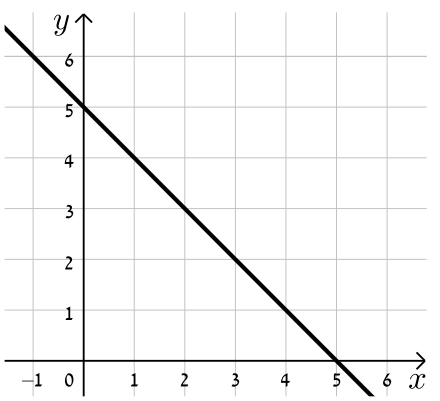
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

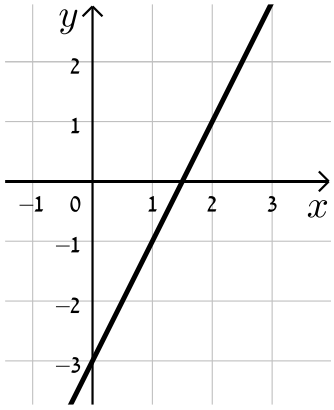
א.



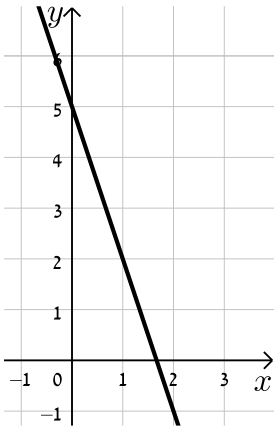
ב.



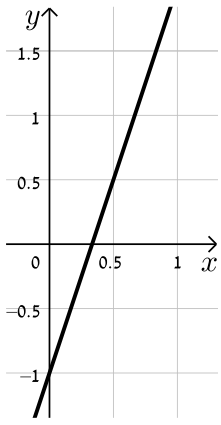
ג.



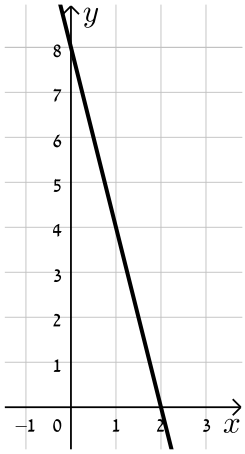
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$, $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$, $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $D(-2,2)$, $B(2,4)$, $A(3,-2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

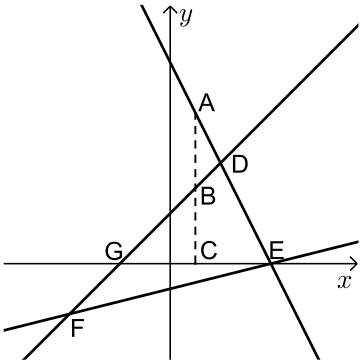
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- y.



א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

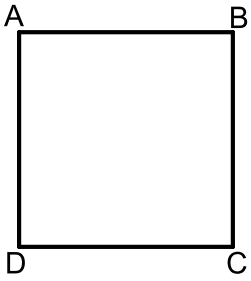
32) נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.



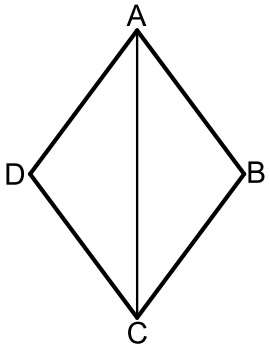
א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

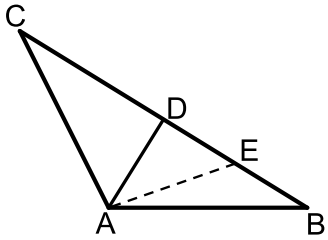
34) המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.



א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

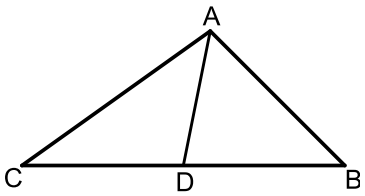
35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-ΔABC מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.



א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

36) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

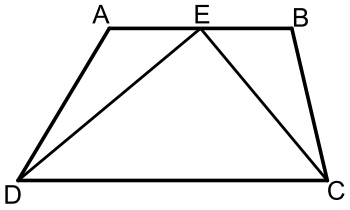
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

37) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.



שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$.

כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.

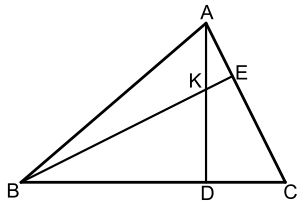
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

38) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.



ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

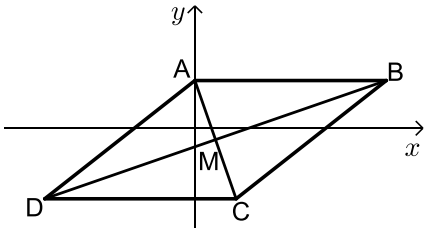
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39) נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.

אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.

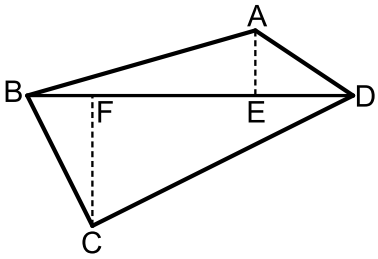


א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

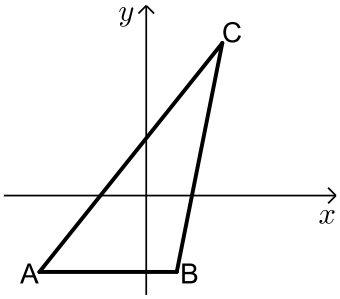
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

41) על הישר $y=-5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$

ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

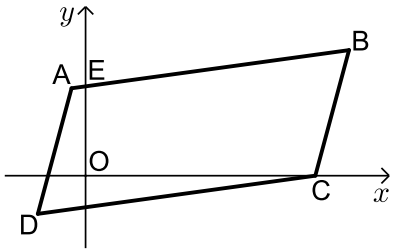
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו-$B(x,4)$. (x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

28) א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29) א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30) א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. 3 יחידות אורך $=AB$.

31) $C(14,5)$.

32) א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$, $B(2,-3)$ ג. 12 יחידות שטח $=S_{ABC}$.

33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90 יח"ש $=S$.

34) א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

35) א. $C(-2,16)$, $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

36) א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ב. ii. $D(4,4)$, $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$, $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

37) א. $E(-1,0)$, $A(-5,-2)$, $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$, $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. 30 יח"ש $=S_{DEC}$.

38) א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

39) א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ"ר $=S_{DMC}=S_{BMC}$.

40) א. $y=x+6$, $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$.
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$, $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

41) א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$, $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. $t=8$, $BC=$ 10 ס"מ. ג. $D(-20,-5)$.

42) א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

43) א. $x=9$, $y=2$ ב. $C(10,0)$, $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $B(-12,16)$, $A(2,-5)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

2) קודקודי משולש ABC הם: $C(4,-12)$, $B(6,0)$, $A(-1,3)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $C(x_3,y_3)$, $B(x_2,y_2)$, $A(x_1,y_1)$.

4) קודקודי המשולש ABC הם: $C(-1,4)$, $B(7,-3)$, $A(5,1)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

1) $P(-2,1)$

2) $M(3,-3)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

4) 1.697 יחידות אורך.

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $A(-5,-1)$ ב. $12x+5y-17=0$, $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$, $A(11,-2)$ ד. $3x-14=0$, $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $D(11,2)$, $C(-1,7)$, $B(-5,4)$, $A(7,-1)$.

9) מצא את שטחו של המשולש ΔABC שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(-5,-2)$.

11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

7) $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$

8) $S_{ABCD}=56$ יח"ש

9) $S_{ABC}=18$ יח"ש

10) $S_{ABC}=2.5$ יח"ש

11) $(64,99)$, $(4,9)$

12) $(-157,216)$, $(-1,8)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$I: x+2y+1=0$, $II: x-2y-11=0$, $III: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $III: 3x+4y-11=0$, $II: 3x-4y-51=0$, $I: 4x-3y+2=0$.

18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

13) $(64,99)$

14) $(-1,8)$

15) $C(11,3)$

16) $(-1,-4)$

17) $(2,-5)$

18) $y=3x-4$

19) $y=2x+10$, $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

20) $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

21) $y=6$, $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

22) $x=1$ או $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$

23) $x=10$ או $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$

24) $y=-\frac{4}{3}x-7$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

שאלות:

25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0, 5x+12y-14=0$.

27) נתונים הישרים: $y=6x+5, 12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

25) $3x-4y+28=0$, $3x-4y-12=0$ **26)** 3

27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$ **28)** $S=$ יח"ש 14.4 , $(2.1,-3.3)$

29) $y=-\frac{2}{3}x+3$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $3x-2y-15=0$

30) $y=3x$ **31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

כלים מתמטיים 71001

פרק 9 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

1. הכרות עם משוואת המעגל 156
2. מעגל המשיק לצירים 160
3. משיק למעגל 162
4. שאלות יסודיות שונות 163
5. נושאים מתקדמים במעגל ..... (ללא ספר)
6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע 170
7. משוואות המשיקים למעגל 171
8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה 173
9. שאלות מסכמות שונות 174

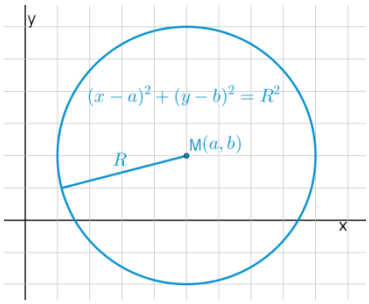
הכרות עם משוואת המעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

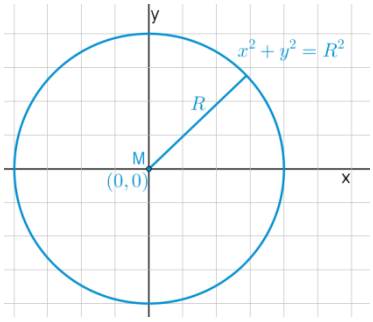
המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל:



משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$
ורדיוסו R היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

משוואת מעגל קנוני:



משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)
ורדיוסו R היא: $x^2+y^2=R^2$.

שאלות:

1) מצא את מרכז ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

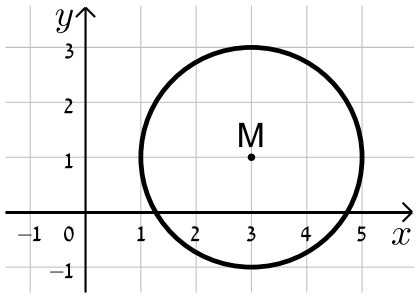
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

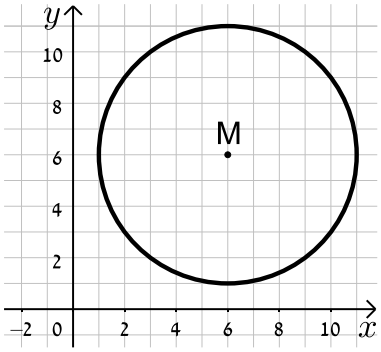
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

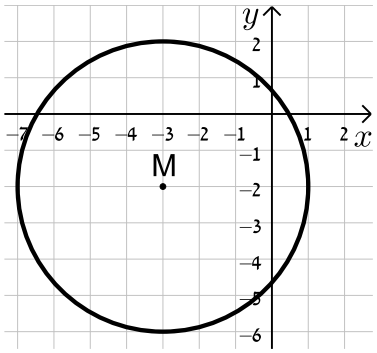
א.



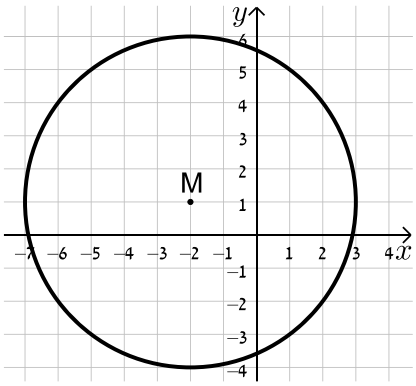
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=3$.

7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-x מיתר שאורכו 12.

10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

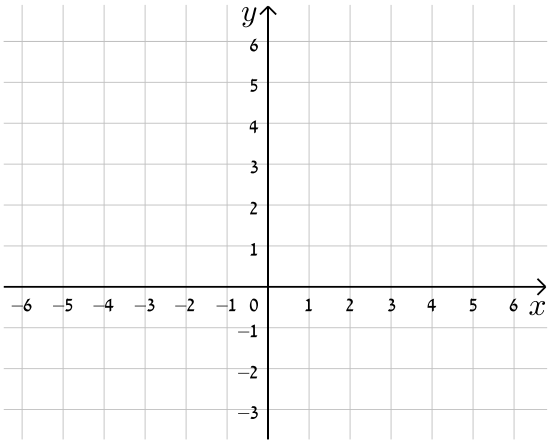
11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $C(-30,28)$, $B(-10,40)$, $A(22,-24)$.

12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.



13) שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

14) נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר a פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של a.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

תשובות סופיות:

1) א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$.

3) א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

4) $(x-2)^2+(y+1)^2=72$, $M(3,-3)$.

5) $(x+5)^2+(y-6)^2=232$.

6) $x^2+(y+7)^2=100$.

7) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$.

8) $(x-1)^2+y^2=18$.

9) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

10) $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$.

11) $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$.

12) א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$, $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$, $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

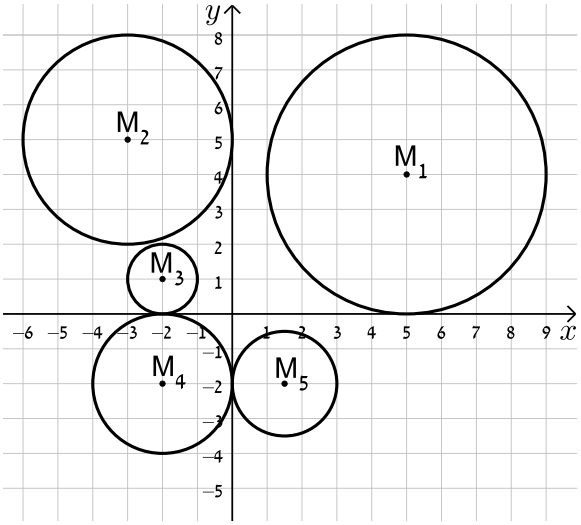
13) $(x-6)^2+(y-2)^2=65$, $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

14) א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$, ת.ה: $a<50$.

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה-y ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

תשובות סופיות:

15 $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$, $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$, $M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$, $M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$.

16 $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

17 $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

18 $(x-6)^2+(y+6)^2=36$, $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

19 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

משיק למעגל:

סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

20) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

21) נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

תשובות סופיות:

20) $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

21) משיק: $m=11,-9$, חותך: $-9<m<11$.

שאלות יסודיות שונות:

שאלות:

22) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

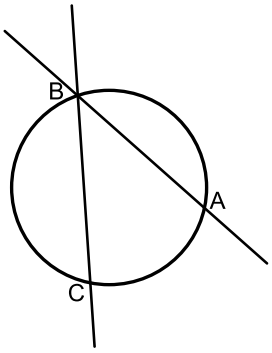
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-x.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

23) נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-x בנקודה A ואת ציר ה-y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

24) נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-x. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

25) נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

26) הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

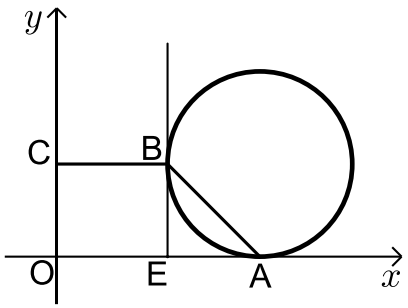


א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

27) נתון מעגל המשיק לציר ה-x בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה-x מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה-x ו-O היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.

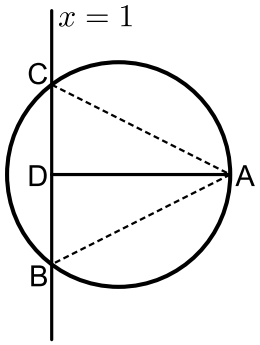


ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. מצא את שיעורי הנקודה B.
   ii. מצא את שיעורי הנקודה A.

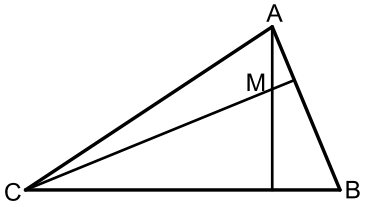
ב. כתוב את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



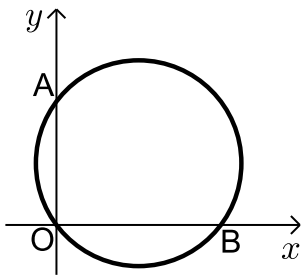
א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$:
   ii. חשב את שטח המשולש ABC.

29) נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.



א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

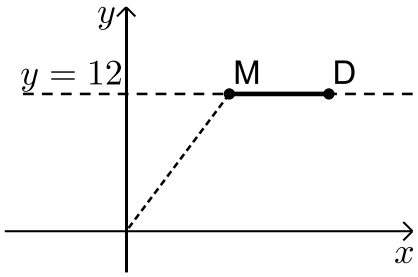
30) באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.



א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
ג. חשב את היקף המלבן.

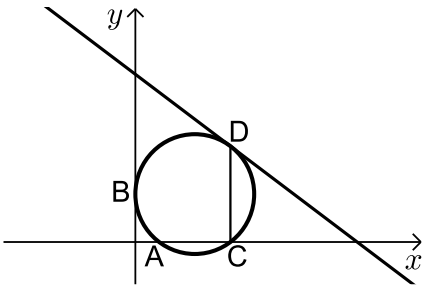
31) המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$, $a>0$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.
א. מצא את a.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

32) הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



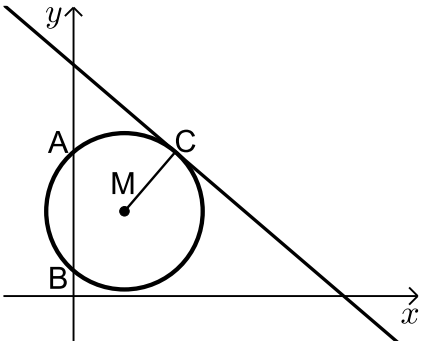
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
ב. כתוב את משוואת המעגל.
ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

33) מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-y בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



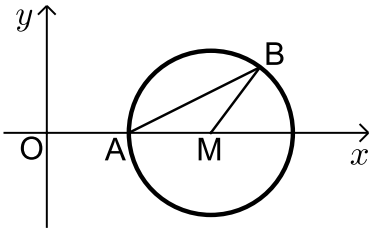
א. כתוב את משוואת המעגל.
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



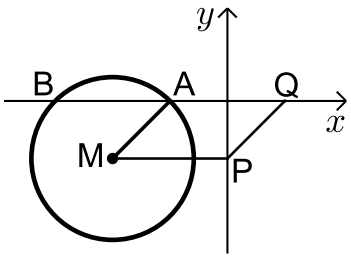
א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- x. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



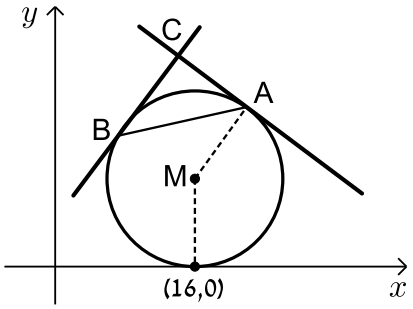
א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.



מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ב-A ו-B (ראה איור).
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

37) נתון מעגל שרדיוסו R $(R<16)$ ומשיק לציר ה-x בנקודה שבה: $x=16$.



א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה-y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

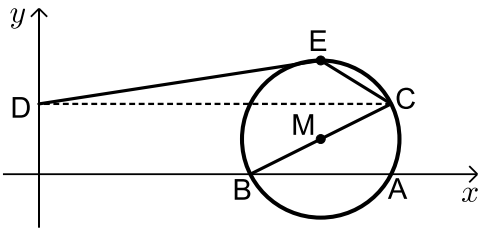
ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

38) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, a פרמטר.

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה $A(10,0)$.



א. מצא את a אם ידוע כי $a>-10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-x.

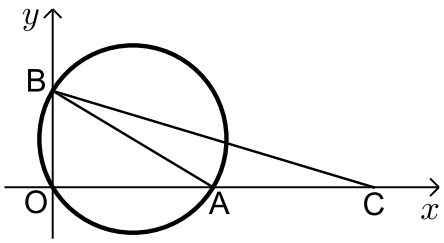
ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה-y בנקודה D.
הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה-y הגדול ביותר על המעגל.
מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

39) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, R רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.



א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה-x כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

תשובות סופיות:

22) א. $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,-8)$ ב. 27 יח"ש.

23) 12.5 יחידות אורך.

24) $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

25) $(x-8)^2+(y-8)^2=32$, $y=-x+8$.

26) א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

27) א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

28) א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$, $C(1,12)$ ג. i. $d=16$

ii. $S=128$

29) א. $y=8x-2$, $y=-2x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

30) א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P=$ 28 יח"א.

31) א. $a=1$ ב. $(0,-1)$, $(-2,3)$ ג. $y=-2x-1$

ד. $S=\frac{1}{4}$.

32) א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה-x כאשר מציבים ב-y אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה אחת- $(12,0)$.

33) א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$, $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

34) א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$, $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

35) א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$

ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

36) א. $A(-2,0)$, $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$.

37) א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $R=10$, $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$

ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

38) א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$

ד. $(10,2)$. ה. $11+5\sqrt{5}$ יח"ש $=S_{DECBO}$.

39) א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$. ב. $A(10,0)$, $B(0,6)$

ג. i. $C(20,0)$. ii. 30 יח"ש $=S_{ABC}$.

כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$

ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$

ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$

ד. $x^2+y^2+2y=0$

ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$

ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

2) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

3) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

תשובות סופיות:

1) א. $M(-5,-3)\ ,\ R=6$

ב. $M(1,-10)\ ,\ R=10$

ג. $M(4,7)\ ,\ R=\sqrt{65}$

ד. $M(0,-1)\ ,\ R=1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)\ ,\ R=2$

ו. $M(m,-3m)\ ,\ R=3m$.

2) $m=-1$.

3) $2\sqrt{80}$.

משוואות המשיקים למעגל:

שאלות:

4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

9) נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.

לאלו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

תשובות סופיות:

4) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

5) 8.

6) משיק: $y=3x-19$, נורמל: $x+3y+7=0$.

7) $(-5,1)$.

8) שאלת הוכחה.

9) משיק: $m=-9,11$, חותך: $-9<m<11$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- y בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

תשובות סופיות:

10) א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

11) $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$.

שאלות מסכמות שונות:

שאלות:

12) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

13) המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של m.

14) בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15) מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

תשובות סופיות:

12) $4x-3y+20=0$, $A(-3.2,2.4)$, $x^2+y^2=16$.

13) $m=-26$.

14) $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

15) $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 10 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

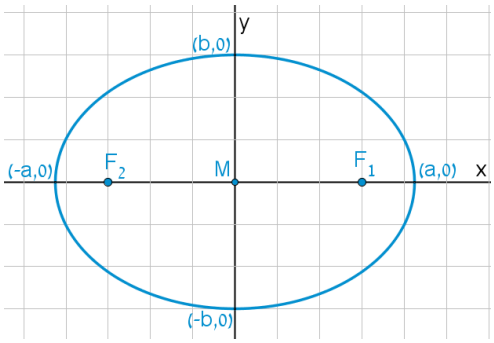
תוכן העניינים

1. האליפסה 175
2. הפרבולה 179

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

8) מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

10) מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

15) באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

16) באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

18) מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $\left(1.5,1\right)$.

19) ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $\left(2,-1\right)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$, $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

1) $2a=12$, $2b=6$

2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

8) $\left(4,\sqrt{24}\right)$, $\left(4,-\sqrt{24}\right)$, $\left(-4,\sqrt{24}\right)$, $\left(-4,-\sqrt{24}\right)$

9) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

10) $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$

11) $y=\sqrt{6}x$

12) משיק: $k=\pm 12$, חותך: $-12<k<12$.

13) $S=$ 60 יח"ש

14) $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

15) $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

16) $\left(1,\sqrt{3}\right)$, $\left(1,-\sqrt{3}\right)$

17) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

18) $y=-x+2.5$

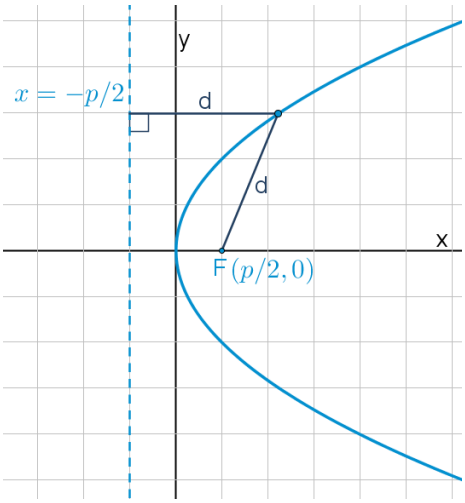
19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

20) א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

הפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r=x+\frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה-x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2=2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

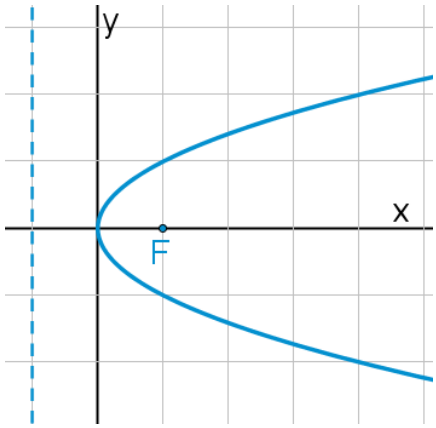
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

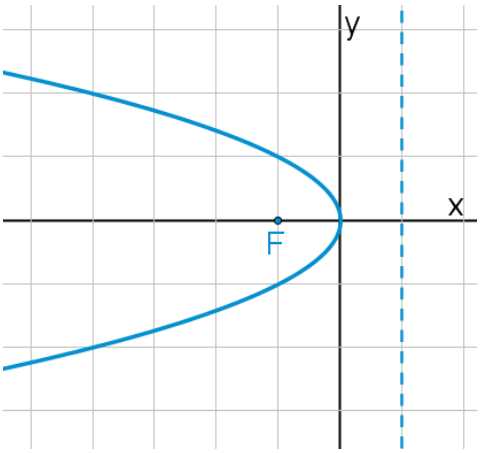
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:



שאלות:

1) נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

11) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-x, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

13) קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-x של נקודה A הוא 4.

14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

16) נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17) נתונה הפרבולה $y^2=6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-x.

18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$. נתון כי $y_A=4$.
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ בربיע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-x הוא $7\sqrt{5}$.
מצא את משוואת הנורמל.

20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$.
מצא את משוואת המשיק.

21) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p.

22) נתונות שתי פרבולות: I. $y^2=6x$, II. $y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

23) נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

24) נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-x שלה קטן ב-1 משיעור ה-y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

25) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

26) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

27) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-y.

29) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש ΔABC שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-x.

30) אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

1) $p=9$, $\mathrm{F}\left(4\frac{1}{2},0\right)$

2) $y^2=12x$

3) $y^2=10x$

4) $y^2=4x$

5) $y^2=12x$

6) $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$, $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

7) $\left(1,\sqrt{8}\right)$, $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

8) $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

9) $S_{\mathrm{OAB}}=300\sqrt{3}$ יח"ש

10) $S_{\mathrm{ABO}}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

11) $S_{\mathrm{ABC}}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

12) $S_{\mathrm{ABCF}}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

13) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$

14) $y=2x$ או $y=-2x$

15) $y=2x-2$

16) $k=\frac{1}{2}$

17) א. $y=x+1\frac{1}{2}$, $y=-x-1\frac{1}{2}$

18) $\mathrm{B}\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

19) $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

20) $y=x+2$

21) $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

22) הוכחה.

23) $7x+3y-7=0$

24) $y=-9x+18$

25) $(x-6)^2+y^2=144$

26) $(x-8)^2+y^2=55$

27) $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

28) $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

29) $\mathrm{C}(p+2,0)$

30) $y^2=1\frac{1}{2}x$

כלים מתמטיים 71001

פרק 11 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

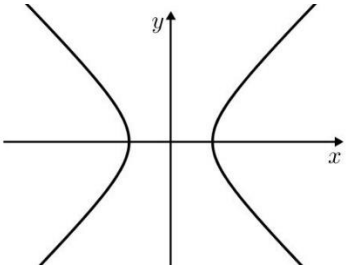
1. הגדרות יסודיות 185
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה 186
3. רדיוסים של היפרבולה 187
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה 188
5. אסימפטוטות של היפרבולה 189

הגדרות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה שבה $a=b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2=a^2+b^2$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2-4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

תשובות סופיות:

1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

2) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$

הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה:

שאלות:

4) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $\left(-10,3\sqrt{5}\right)$.

5) מצא משוואת היפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

תשובות סופיות:

4) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

5) $x^2-y^2=25$

רדיוסים של היפרבולה:

סיכום כללי:

רדיוסים בהיפרבולה	רדיוסים באליפסה
$r_1=\left\|\frac{cx}{a}-a\right\|$	$r_1=a-\frac{cx}{a}$
$r_2=\left\|\frac{cx}{a}+a\right\|$	$r_2=a+\frac{cx}{a}$

שאלות:

6) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2-y^2=18$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.

7) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2-9y^2=63$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.

8) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

9) נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2-4y^2=80$.
מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני F_1 של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה F_2. נתון כי היקף הטרפז F_1BAF_2 הוא 29 יחידות אורך.
מצא את שיעורי הנקודה A.

תשובות סופיות:

6) $\left(\pm2,\pm\sqrt{6}\right)$

7) $\left(\pm4,\pm2\frac{1}{3}\right)$

8) $(3,-4)$

9) $\left(5,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

שאלות:

10) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-3y^2=24$.

מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3,4)$ היא אמצעו.

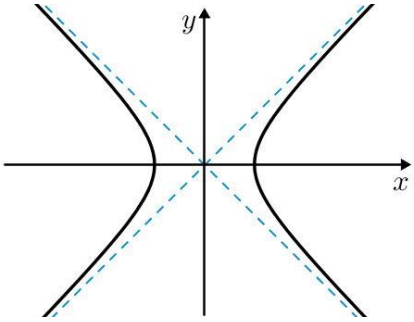
תשובות סופיות:

10) $y=x+1$

אסימפטוטות של היפרבולה:

סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן: $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$.

שאלות:

11) מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=48$.

12) הישר $y=-\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20.
מצא את משוואת ההיפרבולה.

13) נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2-4y^2=k$ ואורך צירה המדומה הוא 6.
מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

14) ישר שעובר בנקודה $(-6,8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $\left(9,-8\sqrt{2}\right)$.

א. מצא את משוואת ההיפרבולה.

ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

15) מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4,-1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2+25y^2=400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסיפמטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות:

11) $y=2x,\ y=-2x$

12) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

13) $(2,-3)$

14) א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ב. $d=4$

15) $\left(-3,\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

כלים מתמטיים 71001

פרק 12 - גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטרים והוכחות

תוכן העניינים

1. מקומות גיאומטרים 191
2. שאלות הוכחה 195

מקומות גיאומטרים:

סיכום כללי:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y.

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

- שיפועים:
  i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).
  ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא 1-).
  iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.
- משפט פיתגורס.
- אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.
- משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.
- קטע מרכזים:
  i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.
  ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.
- משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)
- אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7,-6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9,2)$.

2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3,-6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1,10)$.

3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1,0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x=9$.

4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6,0)$ ומשיקים לישר $x=-6$.

5) נתונים שני ישרים: $\text{I. } 3x+y-6=0$, $\text{II. } 2x+6y-1=0$
מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.

6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y מימין ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?

7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4,-10)$ עם נקודות על הישר $y=6x+2$.

8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+12x-16y=0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.

9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

10) נתונות הנקודות $A(2,0)$ ו-$B(10,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ABC אם ידוע שהקודקוד C מונח על הישר $y=3x-12$. מהי ההגבלה?

11) נתון המעגל $x^2+y^2+4x-10y+11=0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7,2)$.

12) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ בזווית של $120°$.

13) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בזווית של $60°$.

14) נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2+y^2-12x-64=0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה-x שחותך את ציר ה-x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה-x. המקביל ל-AM והמקביל לציר ה-x נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

15) האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה-x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה-y בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה-x בין O ל-A (O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה-x שחותך את הישר AB בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו-OD.

16) נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה-x שחותך את ציר ה-x בנקודה C. נסמן ב-B את אמצע הקטע AC.
מנקודה C העבירו מקביל ל-AO (O ראשית הצירים).
מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל-AO.

17) נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו-$B(-2,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\sphericalangle C$ במשולש ΔABC.

18) נתון מעגל קנוני שרדיוסו R. את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB:BO=a:b$ מנקודה A העבירו אנך לציר ה-x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה-y.

א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.

ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה-y בנקודות P ו-Q. מצא את אורך הקטע PQ.

תשובות סופיות:

1) $y=-2x$

2) $\left(x+1\frac{1}{2}\right)^2+(y-12)^2=38\frac{1}{4}$

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

4) $y^2=24x$

5) $x+11y+4=0\ ,\ 7x+13y-8=0$

6) $y^2=16-8x\ ,\ -4<x\ ,y<4$

7) $y=6x-16$

8) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$

9) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

10) $y=3x-16\ ,\ x\neq 5\frac{1}{3}$

11) $y=3x-7$

12) $(x-2)^2+(y-1)^2=12$

13) $(x-a)^2+(y-b)^2=4R^2$

14) $x=6\ ,\ -10<y<10$

15) $3x+8y-12=0\ ,\ 0<y<3\ ,\ 0<x<4$

16) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

17) $(x+4)^2+y^2=16$

18) א. $b^2x^2+(a+b)^2y^2=R^2b^2$ ב. $PQ=\frac{2bR}{a+b}$

שאלות הוכחה:

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x=R$ ו- $x=-R$ בנקודות A ו-B. הוכח: $y_A \cdot y_B = R^2$.

2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2+y^2=R^2$, שחותך את ציר ה- y בנקודות $A(0,R)$ ו-$B(0,-R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y=R$ בנקודה T. הוכח: $OT \parallel BP$.

3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, ש-F_1 ו-F_2 הם מוקדיה. הוכח: $PO^2+PF_1 \cdot PF_2 = a^2+b^2$ (O ראשית הצירים).

4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר $x=-a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x=a$ בנקודה L. הוכח: $y_K \cdot y_L = 4b^2$.

5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1. הישר AP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x=\frac{a^2}{c}$ בנקודה N.
הוכח: $\sphericalangle MF_1N = 90°$.

7) נתונה האליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{a^2}$.

8) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים נורמל.
הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה-x הוא גודל קבוע.

9) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B.
המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח: $y_A+y_B=2y_C$.

10) בנקודה A, שעל הפרבולה $y^2=2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח: $FB=FC$ (F - מוקד הפרבולה).

11) בפרבולה $y^2=2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B.
המיתר חותך את ציר ה-x בנקודה C. הוכח: $x_A\cdot x_B=(x_C)^2$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 13 - וקטורים גיאומטריים

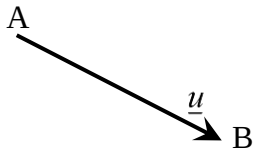
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים 197
2. וקטורים הפורשים מישור 202
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור 206

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



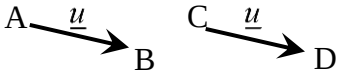
להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

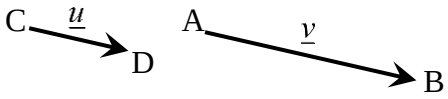
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

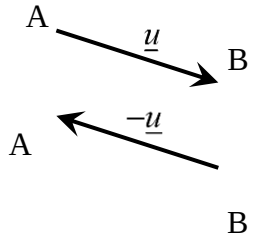


- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.



- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.

- ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$ וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

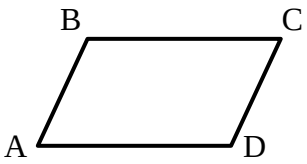


הערה:

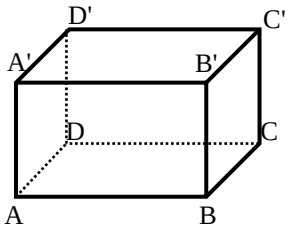
שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha\underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב-$180°$.

שאלות:

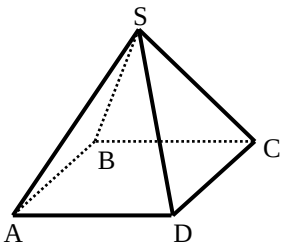
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



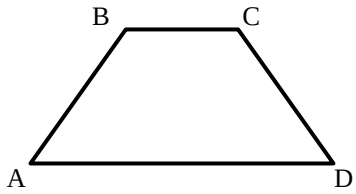
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

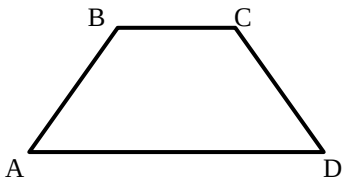


5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

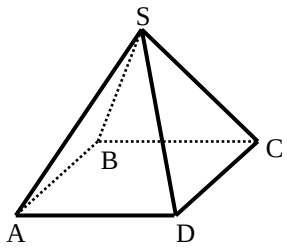
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

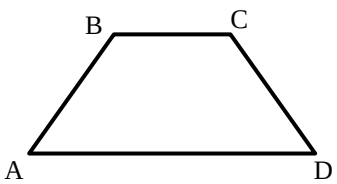
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

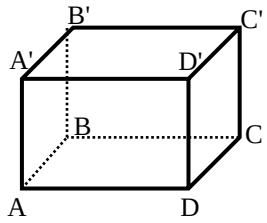
10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.



הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

12) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

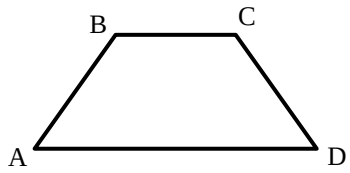


הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.

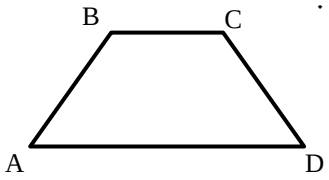


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.

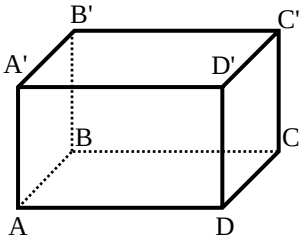


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

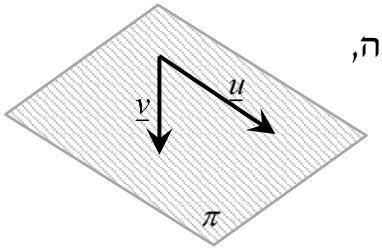
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים

את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

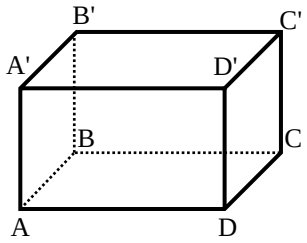
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל

למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: $\alpha,\ \beta$ מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:

16) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

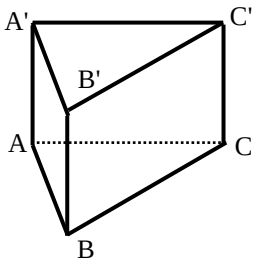
א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה $ADD'A'$?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס $ABCD$?

17) נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$

ובה נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.



הנקודה M נמצאת על המקצוע $A'C'$ ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

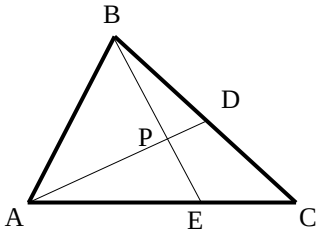
א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ACC'A'$?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ABB'A'$.
הבע את α באמצעות β.

18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.



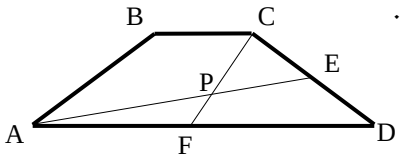
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

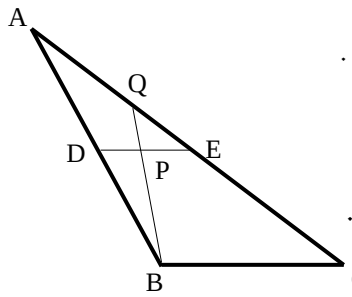
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

19) בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.



הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.

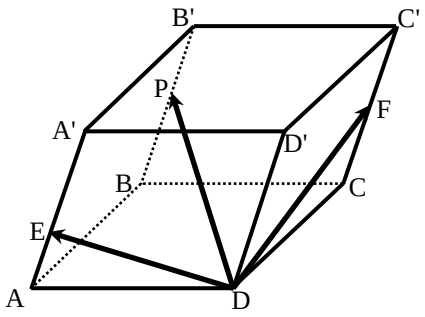
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.



א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.

21) במקבילון $ABCDA'B'C'D'$
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D, E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$, $AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1$, $CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

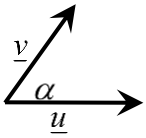
סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.



גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $\alpha=60°\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\alpha=120°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\alpha=30°\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

ד. $\alpha=180°\ ,\ |\underline{v}|=3\ ,\ |\underline{u}|=8$

ה. $\alpha=0°\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=3$

ו. $\alpha=90°\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=7$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=6\ ,\ |\underline{v}|=4\ ,\ |\underline{u}|=3$

ב. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}\ ,\ |\underline{v}|=2\ ,\ |\underline{u}|=4$

ג. $\underline{u}\cdot\underline{v}=0\ ,\ |\underline{v}|=5\ ,\ |\underline{u}|=9$

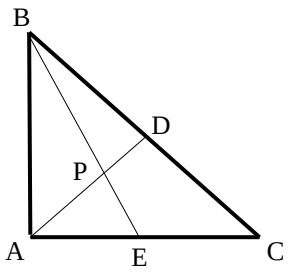
ד. $\underline{u}\cdot\underline{v}=12\ ,\ |\underline{v}|=6\ ,\ |\underline{u}|=2$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

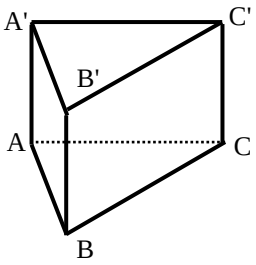
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

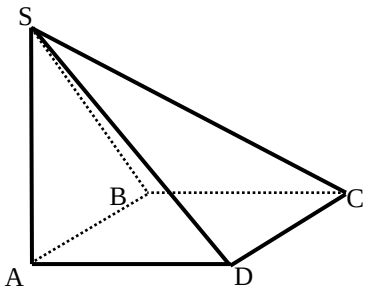
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



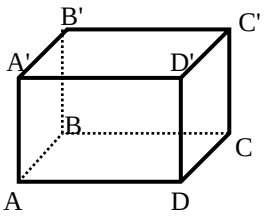
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C'
שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע $ABCD$ מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן $ABCD$. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת $SABC$ שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

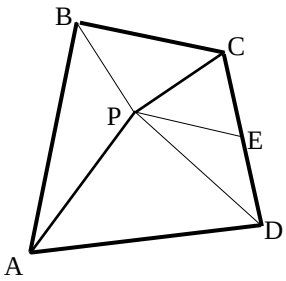
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$, $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

23) א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$

26) $31.87°$

27) $55.49°$

28) $70.623°$

29) $24.095°$

30) א. $\alpha=\frac{3}{4}$ ב. $\cos\left(\sphericalangle PAQ\right)=\frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha=\frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha+2\beta=1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

כלים מתמטיים 71001

פרק 14 - וקטורים אלגבריים - מבוא להצגה של וקטור במערכת צירים

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים 211
2. פעולות אלגבריות בין וקטורים 215
3. גודל של וקטור 217
4. וקטורים מקבילים ושווים 218
5. זווית בין וקטורים 219

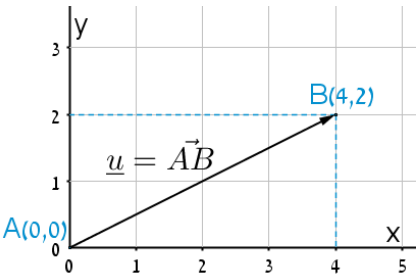
שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

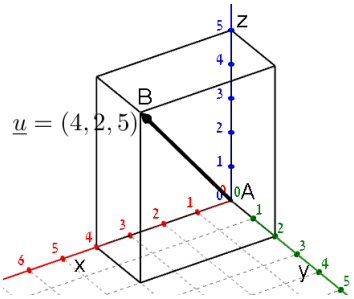
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:



- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

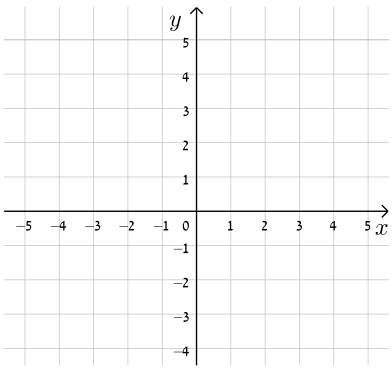
ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:



א. $\underline{u}=(4,2)$

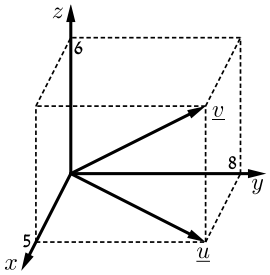
ב. $\underline{v}=(-5,1)$

ג. $\underline{w}=(3,-4)$

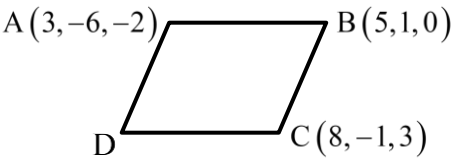
ד. $\underline{a}=(0,3)$

ה. $\underline{b}=(-5,0)$

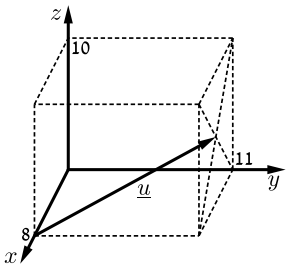
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.



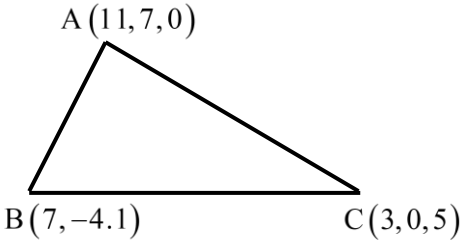
3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



6) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:

$\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו-$B(6,1)$.

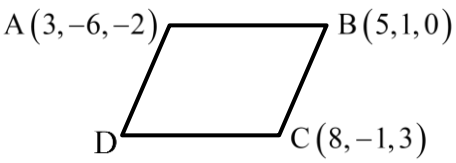
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

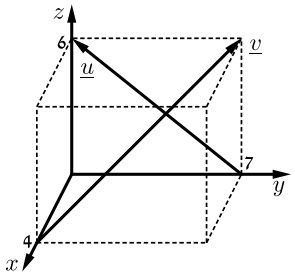
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$
והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

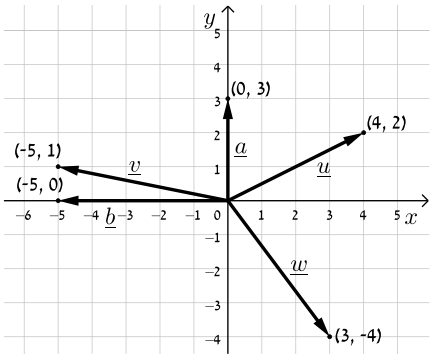


10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{u}=(5,8,0)$, $\underline{v}=(5,8,6)$.

3) $D(6,-8,1)$.

4) $\underline{u}=(4,11,5)$.

5) $(7,1,2)$.

6) $x=5$, $y=-2$, $z=6$.

7) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

8) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

9) $D(6,-8,1)$.

10) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$.

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

שאלות:

11) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u}=(4,0,9)$, $\underline{v}=(-1,3,-5)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $3\underline{u}+2\underline{v}$, $\underline{u}-2\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}+\underline{v}$.

12) נתונים הווקטורים: $\underline{w}=(2,6,-5)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{u}=(-3,1,4)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$ ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

14) נתונים שלושה וקטורים: $\underline{w}=(x,5,-10)$, $\underline{v}=(0,y,4)$, $\underline{u}=(6,-1,z)$.

א. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.

ב. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{w}=(x,2z,-10)$, $\underline{v}=(y\text{-}1,2,x)$, $\underline{u}=(6,y,z)$?

15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$, $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$\underline{v}=(2,y,4)$, $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

11) $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

12) א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

13) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

14) א. $x=6$, $y=3$, $z=-18$ ב. $x=-1$, $y=9\frac{2}{3}$, $z=72$

ג. $z=-\frac{2}{9}$, $y=-4\frac{4}{9}$, $x=-4\frac{8}{9}$.

15) א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$.

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

שאלות:

16) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$, $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$, $2\underline{v}+\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

17) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16) $|\underline{u}|=\sqrt{14}$; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$; $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$.

17) הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

שאלות:

20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

22) נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

20) א. $92.277°$ ב. $90°$ ג. $180°$.

21) 10.173 יח"ש.

22) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 15 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של ישר 220
2. מצב הדדי בין ישרים 223
3. הצגה פרמטרית של מישור 225
4. משוואת מישור 226
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור 227
6. מישורים המקבילים לצירים 228
7. מצב הדדי בין ישר ומישור 229
8. מצב הדדי בין מישורים 230
9. ישר חיתוך בין מישורים 231
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים 232
12. זווית בין ישר ומישור 233
13. זווית בין שני מישורים 234
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב 235
16. מרחק בין נקודה לישר 236
17. מרחק בין נקודה למישור 237
18. מרחק בין ישרים מקבילים 238
19. מרחק בין ישר למישור 239
20. מרחק בין מישורים מקבילים 240
21. מרחק בין ישרים מצטלבים 241
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. היטלים ונקודות סימטריה 242
24. שאלות מסכמות 243

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?

3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו-$B(1,6)$.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו-$D(4,1,1)$.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.

6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו-z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x = 1+2t$, $y = 10$, $z = 4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-y במרחב.

9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה-z.

10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \ \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \ \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

7) מצאו את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות $D(-2,3,k)$, $C(-6,3,-1)$, $B(k,-1,3)$, $A(3,-1,5)$.
הראו כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

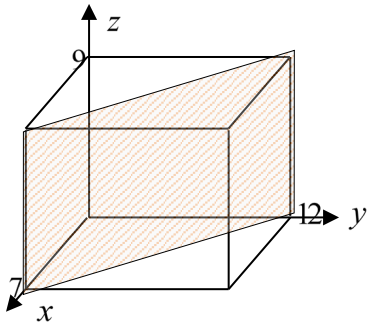
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$, $\ell_1 : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה-x.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x} = (1,-4,0) + t(2,10,2) + s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4) + s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3) + s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x} = t(1,0,0) + s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x} = t(1,0,0) + s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x} = (7,0,0) + t(0,0,9) + s(-7,12,0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת מישור

שאלות

1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi: -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi: x-3y+8z=0$

4) $\pi: 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+\left(k^2-2k-3\right)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$, $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $B(6,0,-2)$, $A(3,4,6)$ וישר העובר דרך הנקודות $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו-$E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $B(-2,y,-1)$, $A(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\pi: 3x-2y+2z+9=0$, $\ell: \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x+y-2z-6=0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B=z_B=-1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$
2) $44.83°$
3) $14.9°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$

2) $87.539°$

3) $32.312°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשבו את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi:2x+4y-4z+15=0$, $\ell:\underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $D(12,11,-8)$, $C(6,1,4)$, $B(12,-5,2)$, $A(15,0,-4)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B
ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1:\underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2:\underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$
$$l_3:\underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4:\underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_2: x-2y-2z-12=0$, $\pi_1: x-2y-2z+6=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:
$\pi_3: 2x-2y+z+3=0$, $\pi_2: x+2y+2z+5=0$, $\pi_1: 2x+y-2z-11=0$
$\pi_6: kx+qy+z+p=0$, $\pi_5: x+2y+2z-1=0$, $\pi_4: 2x+y-2z+7=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים k , q ו- p, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_2: 3x-4y+5z-30=0$, $\pi_1: 3x-4y+5z+10=0$

2) $\pi_3: x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

2) 1.567 יח"א.

3) $\sqrt{2}$ יח"א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

1) נתונה נקודה $A(1,-1,3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.

ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לישר.

2) נתונה נקודה $A(0,0,1)$ ונתון מישור $7x+7y-z=8$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.

ב. מצאו את הנקודה C, הסימטרית ל-A, ביחס למישור.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1,3,2)$ ביחס למישורי הצירים.

ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x,y,z)$ ביחס למישורי הצירים.

4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0,2,4),\ B(-2,6,-2),\ C(2,-4,8),\ D(10,2,0)$.

מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC.

תשובות סופיות

1) א. $B(0,1.5,-1.5)$ ב. $C(-1,4,-6)$

2) א. $B\left(\frac{7}{11},\frac{7}{11},\frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11},\frac{14}{11},\frac{9}{11}\right)$

3) א. $B_{xy}(1,3,-2),\ C_{xz}(1,-3,2),\ D_{yz}(-1,3,2)$

ב. $B_{xy}(x,y,-z),\ C_{xz}(x,-y,z),\ D_{yz}(-x,y,z)$

4) $\underline{x}=(0,2,4)+t(0,1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $C(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $A(1,1,3)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$, $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$

ב. $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$

ג. $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$, $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$

ד. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$, $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$

3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה קובייה 'ABCDA'B'C'D, שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:\ x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:\ 2x+y+z-5=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

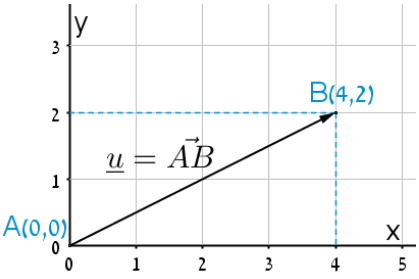
סיכום כללי

הגדרה כללית

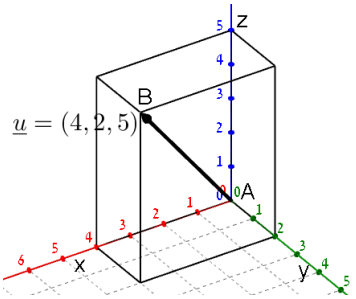
וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.



ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$
  הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של ווקטור בהצגה אלגברית

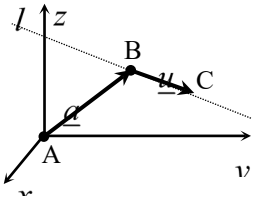
מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{v}$ ו- α תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **ווקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$; $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

***הערות:**

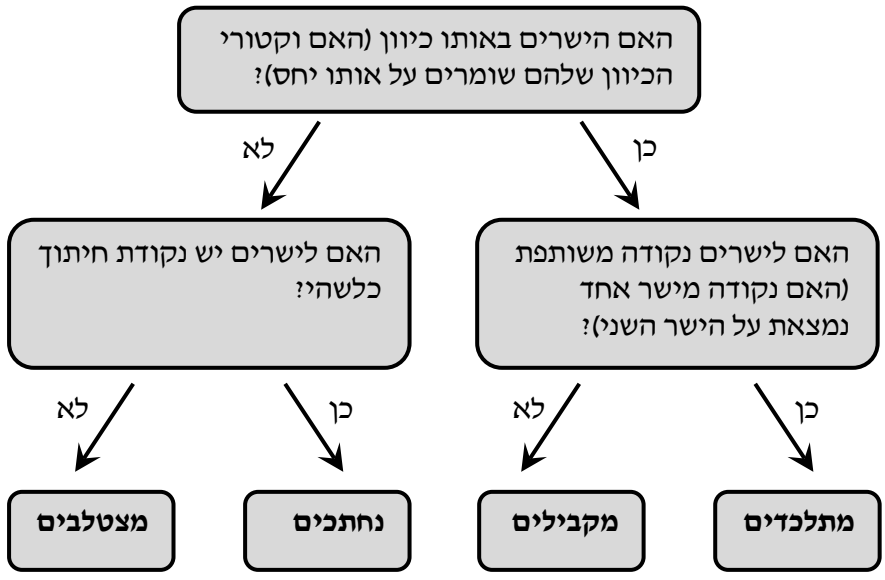
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

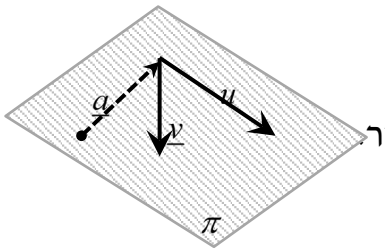
- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}\ ,\ \underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלים מתמטיים 71001

פרק 16 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. הגדרת המספר המרוכב 252
2. המספר הצמוד 255
3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת 258
4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב 259
5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב 263
6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים 265
7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים 266

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3\ ,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו-$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_2=5-2i$, $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$ ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5-(3-2i)$

ה. $(i-3)+6i$ ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$ ד. $i\cdot(i-1)$

ה. $(2i+3)\cdot i$ ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו-w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו-b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$. ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $w=5+i$, $z=2-3i$.

21) א. $a=5$, $b=-3$ ב. $a=2$, $b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i$, 1 ב. $z_{1,2}=-2-i$, $2-5i$.

25) $z_1=-2-5i$, $z_2=3i$.

26) $z_1=-3i$, $z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

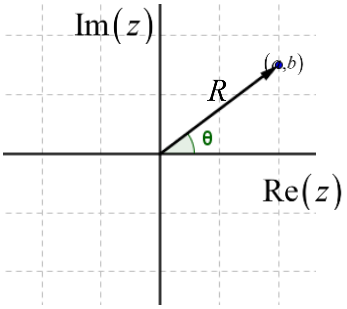
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה-x מייצג את a, גודל הערך הממשי של z, וציר ה-y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$, $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\overline{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\overline{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$ ב. $z\cdot\overline{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$ ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\overline{z}}$ ד. $z\cdot\overline{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40°)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2 , $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2 , $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה : $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס
המתקבל בעבור המשוואה : $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60° \ , \ z_1=6\text{cis}240°$.

ב. $z_0=3\text{cis}40° \ , \ z_1=3\text{cis}130° \ , \ z_2=3\text{cis}220° \ , \ z_3=3\text{cis}310°$.

ג. $z_0=\text{cis}12° \ , \ z_1=\text{cis}84° \ , \ z_2=\text{cis}156° \ , \ z_3=\text{cis}228° \ , \ z_4=\text{cis}300°$.

42) סכום : 0 , מכפלה : -1 .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $-2\ ,\ 2\text{i}\ ,\ 2$ או $6-8i\ ,\ 4-2i\ ,\ 2$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\mathrm{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\mathrm{cis}\theta_1\cdot R_2\mathrm{cis}\theta_2=R_1R_2\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.

כלים מתמטיים 71001

פרק 17 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות ..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה ..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום ..... (ללא ספר)

כלים מתמטיים 71001

פרק 18 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה 268
2. הרכבת פונקציות 270
3. הפונקציה ההפוכה 273
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 277
5. פונקציה מחזורית 282
6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית 285
7. תרגילים משולבים 286

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y=x^3-x^2-4x+1$

2) $y=\frac{1}{x^2-4}$

3) $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{1}{x^3-x}$

5) $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

6) $y=\sqrt{x-4}$

7) $y=\sqrt{x^2+x-2}$

8) $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

11) $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

12) $y=e^{x^2+x+1}$

13) $y=\log_x\left(x+4\right)$

14) $y=\tan\left(10x\right)$

15) $y=\cot\left(4x\right)$

16) $y=\arctan\left(x+4\right)$

17) $y=\arcsin\left(x-4\right)$

18) $y=\arccos\left(x+1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל x.

4) $x \neq 0,1,-1$

5) $x \neq 2,-1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2$, $x \geq 1$

8) כל x.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2$, $x > 1$

11) $x > 0$, $x \neq 1$

12) כל x.

13) $x > 0$, $x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל x.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $f(x)=x^2-7x,\ g(x)=\ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון: $f(x)=e^{2x}$ $g(x)=\ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+3 & x>4\\ 3x & x\le 4\end{cases}$.

חשבו $f(g(x)),\ g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\ge 1\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\le -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונות הפונקציות:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\geq 1\end{cases}$$ ו- $$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\leq -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\leq -3$
2. $n\geq 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))))}_{n\text{ times}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) $\frac{69}{13}$

4) -10

5) 4

6) $$f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ \left(3x\right)^2 & x\le 0\end{cases},\quad g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$$

7) $$z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$$

8) $$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$$ א. ב. $n\le -3$

9) $$f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

1) $f(x)=\frac{x-1}{3}$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

4) $f(x)=x^2-4 \quad (x\geq 0)$

בתרגילים **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

6) $f(x)=x^2-x$

7) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

9) $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

10) $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\} \quad f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2-4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו-g חח"ע, אז h חח"ע.

ב. אם f ו-g חח"ע, אז h על.

ג. אם f ו-g על, אז h על.

ד. אם f ו-g על, אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו-g על, אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו-g על, אז h על.

ז. אם f על ו-g חח"ע, אז h חח"ע.

ח. אם f על ו-g חח"ע, אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$.
נתון כי h חח"ע.
הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y.

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$, $y\neq 3$

4) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$, $y\geq -4$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.

ג. תחום הגדרה $[1,\infty)$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

7) $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=f\left(x^2\right),\ k(x)=-f(x)$.

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f\left(x^4\right)$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

14) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.

ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.

קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נגדיר: $f_{odd}(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $f_{even}(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.

ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.

ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x=0$ אז $f(0)=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

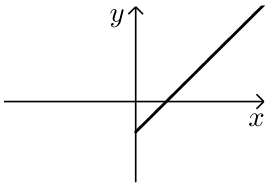
א. $y=\arctan x$

ב. $y=\arcsin x$

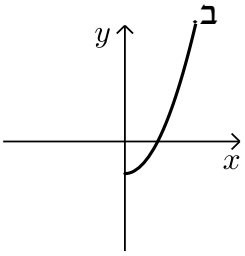
21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

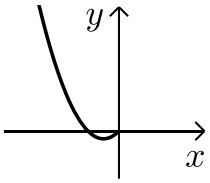
א.



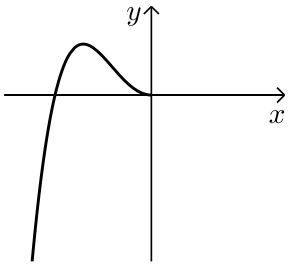
ב.



ג.



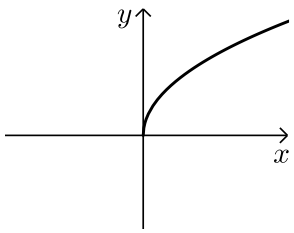
ד.



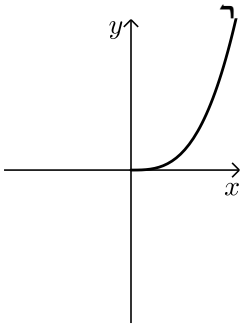
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

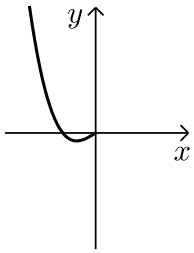
א.



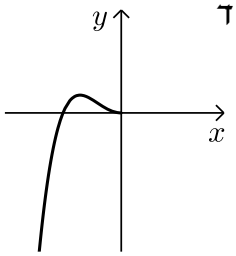
ב



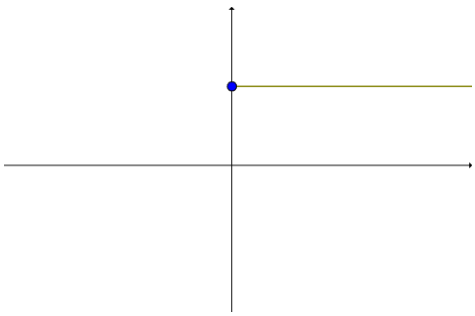
ג.

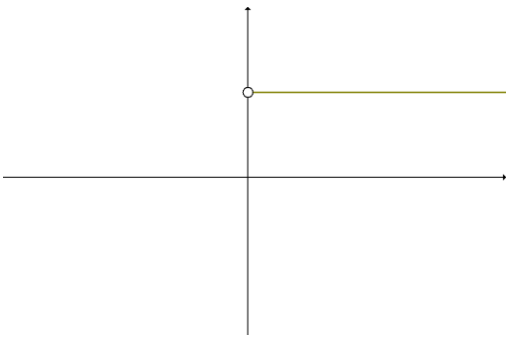


ד



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

שאלות **1-8** : זוגית : **2,3,5,8** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **6,7**.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב'.

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

16) א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x)=\underbrace{x}_{odd}+\underbrace{x^2+1}_{even}$

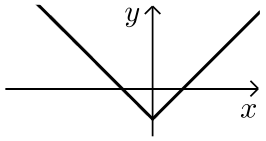
17) שאלת הוכחה.

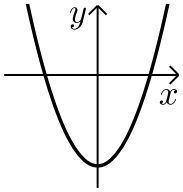
18) שאלת הוכחה.

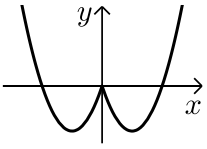
19) שאלת הוכחה.

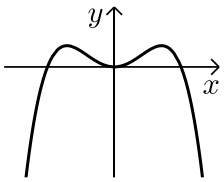
20) שאלת הוכחה.

21) להלן הגרפים :

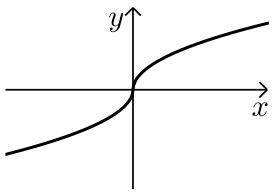
א. 

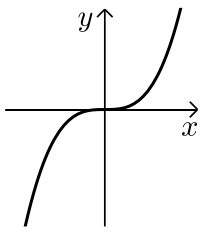
ב. 

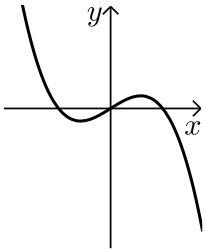
ג. 

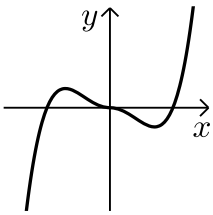
ד. 

22) להלן הגרפים :

א. 

ב. 

ג. 

ד. 

23) ראו בסרטון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

1) $y=1+10\sin(0.5x+4)$

2) $y=1+14\cos 20x$

3) $y=-4+20\tan 4x$

4) $y=-1+14\sec 2x$

5) $y=\sin^2 4x$

6) $y=\cos^2 2x$

7) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

8) $y=(\sin x+\cos x)^2$

9) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

10) $y=\cot^2 x$

11) $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

12) $y=\sin 4x+\sin 14x$

13) $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

14) $y=\cos 2x\cos x$

15) $y=\sin^3 x$

16) $y=\sin^4 x$

17) $y=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

18) $y=|\sin x|$

19) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

20) $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

21) $y=x+\sin x$

22) $y=x+\cos x$

23) $y=x\sin x$

24) $y=x^2\cos x$

25) $y=\frac{\sin x}{x}$

26) $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5x}$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

27) הוכיחו:
אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p,
אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

28) הוכיחו: אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x+nT)=f(x)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) נתון כי f,g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$ $f \pm g,$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4π	**2)** $\frac{\pi}{10}$	**3)** $\frac{\pi}{4}$	**4)** π	**5)** $\frac{\pi}{4}$
6) $\frac{\pi}{2}$	**7)** π	**8)** π	**9)** $\frac{\pi}{2}$	**10)** π
11) 40π	**12)** π	**13)** 2π	**14)** 2π	**15)** 2π
16) π	**17)** π	**18)** π		

19) הפונקציה היא למעשה $y=1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

20) $\frac{\pi}{2}$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

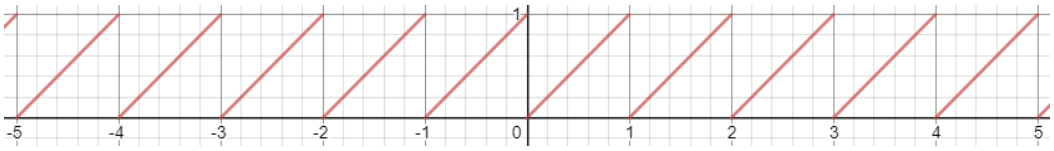
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

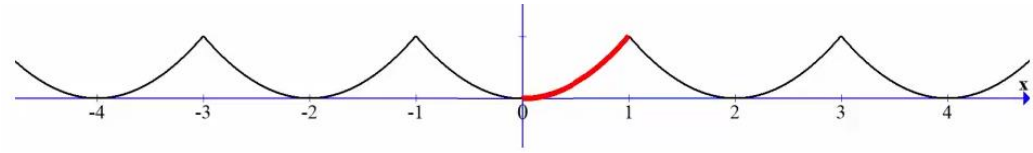
30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

31) $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.

32) $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$

2) $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$

4) $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 4\\ -x & x<0\end{cases}$.

א. חשבו $f(7),\ f(0),\ f(-4),\ f(4),\ f(1)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

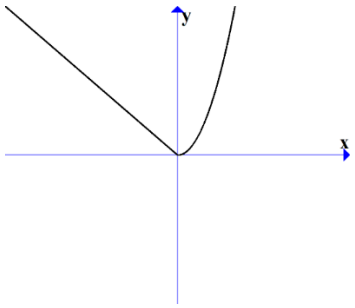
2) $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

5) א. $f(7)=\text{undefind},\ f(0)=0,\ f(-4)=4,\ f(4)=16,\ f(1)=1$

ב.



ג. כללית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ x^3+1 & -1\le x\le 1\\ x+1 & x<-1\end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x} & x>1\\ x^5+1 & -1\le x\le 1\\ x+1 & x<-1\end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f\left(g(x)\right)$.
איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\geq 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\leq 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$, $f(x)=x^3$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f\left(g(x)\right)$ היא:

א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g\left(f(x)\right)$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=\left(3\lfloor x\rfloor\right)^3+27\lfloor x\rfloor$.
$g(x)=f(x)+x^3-28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב' נכונה.

4) טענה א' נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלים מתמטיים 71001

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

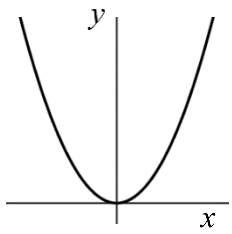
תוכן העניינים

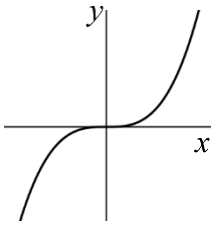
1. הקדמה כללית 290
2. גזירת פונקציות 291
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה 297
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה 298
5. שאלות עם פרמטרים 301
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית 303

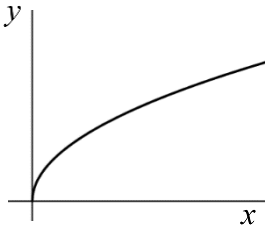
הקדמה כללית:

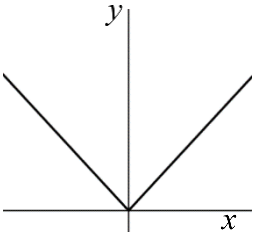
סיכום כללי:

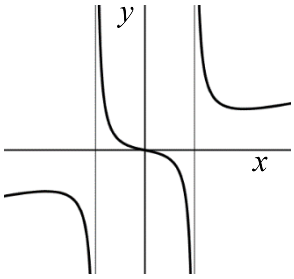
פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$: 

הפונקציה $f(x)=x^3$: 

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$: 

הפונקציה $f(x)=|x|$: 

פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$: 

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$	ב. $f(x)=x^7$	ג. $f(x)=x^2$
ד. $f(x)=x$	ה. $f(x)=x^{-3}$	ו. $f(x)=x^{-1}$
ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$	ב. $f(x)=3x^7$	ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$	ה. $f(x)=8x$	ו. $f(x)=3x^{-2}$
ז. $f(x)=\frac{4}{x}$	ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$ ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$ ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$ ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$ ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$ ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$ ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$ י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. 0 ב. 0.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

10) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

11) א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

12) א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

13) א. $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$, $f''(x)=\frac{4}{x^3}$.

ב. $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$, $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$.

ג. $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$.

ד. $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

ה. $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$.

ו. $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$, $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

14) $m=17$
15) $m=4$
16) $m=2$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

22) נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית של $135°$.

29) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$, $y=x^2$.

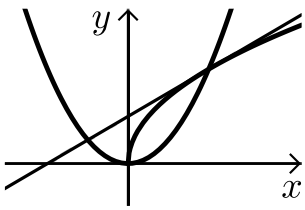
30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

17) $y=24x+22$

18) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

19) $y=6x-24$, $y=-6x-12$

20) $y=2x-3$

21) $y=-12x+9$

22) $(1\ ,\ 3)$

23) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

24) $y=22x-56$

25) א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

26) $y=-2x+8$

27) $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

28) $y=-x+1\frac{1}{3}$, $y=-x-1\frac{1}{3}$

29) $y=2x-1$, $y=-2x-1$

30) א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

31) א. $(1\ ,\ 1)$, $(0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר a.

34) נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a.

35) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

36) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-c.

39) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא 6-.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

42) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

32) $a=2\ ,\ y=8x-18$

33) $a=2$

34) $a=4$

35) $A=1$

36) $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

37) $a=2\ ,\ y=-4x-2$

38) $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

39) $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

40) $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

41) $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

42) $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

תשובות סופיות:

43) א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

44) $y=-3x+16$, $y=x+4$

45) $y=x-10$, $y=9x-10$

46) $y=-15x+54$, $y=12x$

47) $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

49) $y=-x+5$

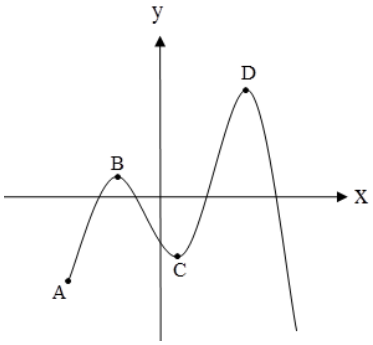
כלים מתמטיים 71001

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות 305
2. חקירת פונקציה פולינומית 308
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית 312

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-y.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5) לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.
מצא את ערכו של הפרמטר a .

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע a

7) לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה : $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים B , A.

8) לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב-$x=-1$ ו-$x=4$.
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה-y של שתי נקודות הקיצון.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים a , b .

10) לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a , b .

תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$, $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$, $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$, $b=6$.

10) $a=2$, $b=-16$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

11) נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

17) נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ (d פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את d.

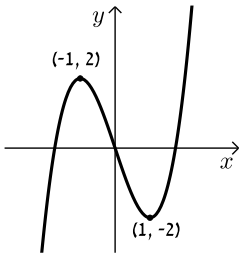
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:



א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

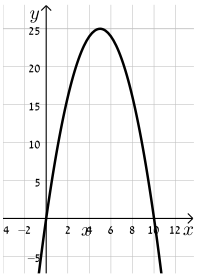
ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

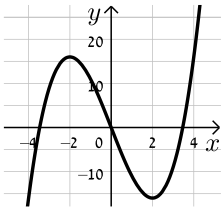
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



12) א. כל x ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

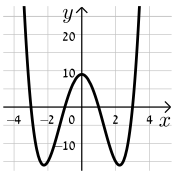
ד. $(-\sqrt{12},0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



13) א. כל x ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

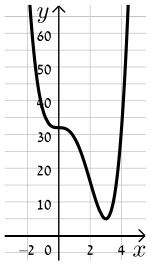
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm 3,0)$, $(\pm 1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



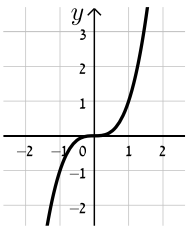
14) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

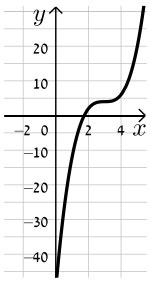


15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

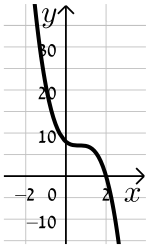


16) א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל x, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:



17) א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2$, $k<-2$

ה. $k=\pm2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

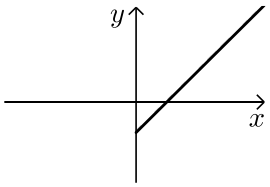
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

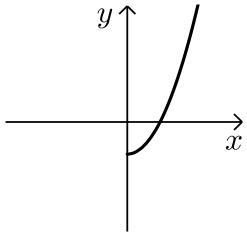
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

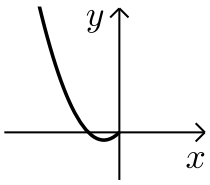
א.



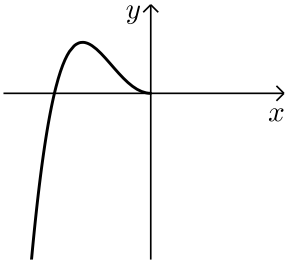
ב.



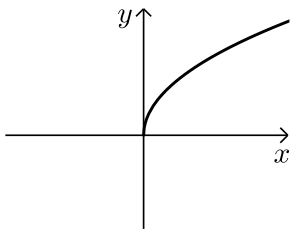
ג.

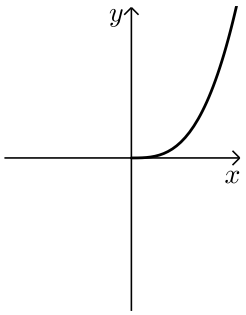


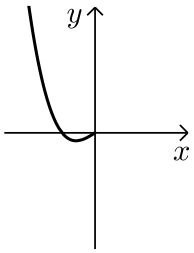
ד.

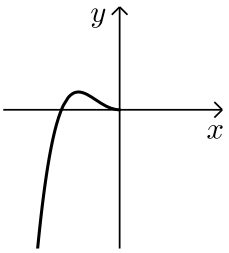


3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

א.


ב.


ג.


ד.


4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
   i. תחום הגדרה.
   ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
   iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
   iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
   v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

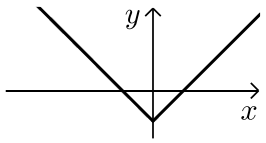
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

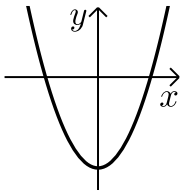
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

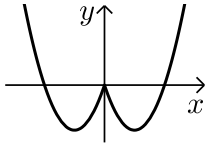
תשובות סופיות:

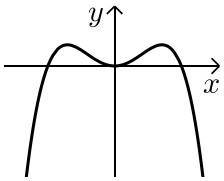
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

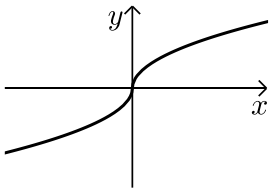
א.


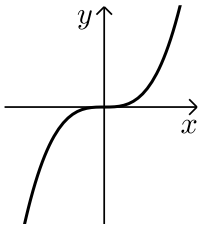
ב.


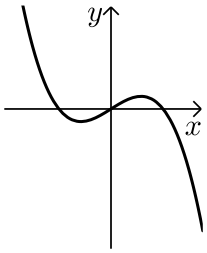
ג.


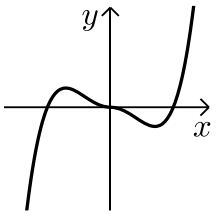
ד.


3) להלן הגרפים:

א.


ב.


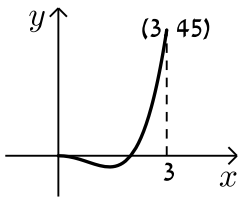
ג.


ד.


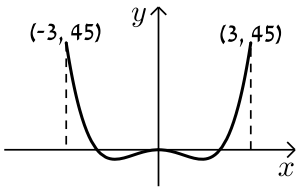
4) א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ג:



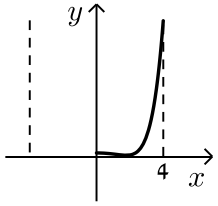
5) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-y: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

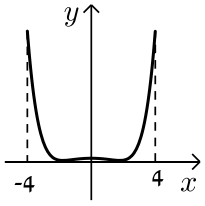
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף א:

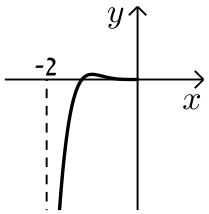


סרטוט עבור סעיף ג:

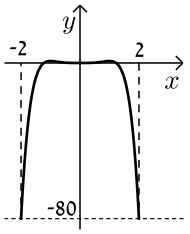


6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

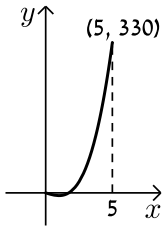


סרטוט עבור סעיף ד:

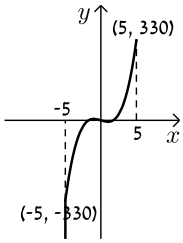


7) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),\left(\sqrt{3},0\right)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

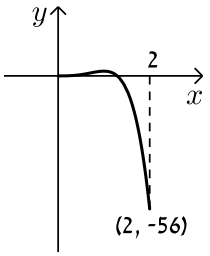


סרטוט עבור סעיף ג:

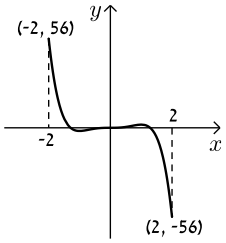


8) א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$ ii. $(0,0),(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$
ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:

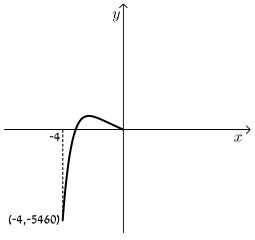


סרטוט עבור סעיף ד:

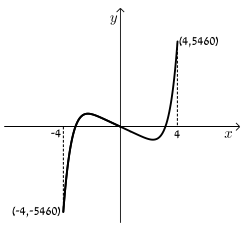


9) א. i $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ד:



כלים מתמטיים 71001

פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה 318
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה 320
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים 321
4. חקירת פונקצית מנה 326
5. חקירת פונקצית שורש 335
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול 343
7. חקירת פונקציה עם פרמטר 349
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת 352

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$
ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל x י. כל x יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

2) א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -5\ ,\ x\geq 2$
ו. $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ ז. $x>-4$ ח. $x\leq -3\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x>1$ ט. $x\leq -1.5\ ,\ x\geq 1$
י. $-3<x<0\ ,\ x>3$ יא. $-6\leq x<-2\ ,\ x>-2$ יב. $x<1\ ,\ 1<x\leq 2$
יג. $-1<x<1$ יד. $x\geq 7$.

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

3) א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$, $x<-3$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$.
- הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

19) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $x=1\ ,\ y=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)\right)=3\ ,\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.

ו. סרטוט סקיצה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, (a קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x ועם ציר ה-y.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-y.

א. מצא את הערך של a.

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34) נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3\ ,\ 0.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

36) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

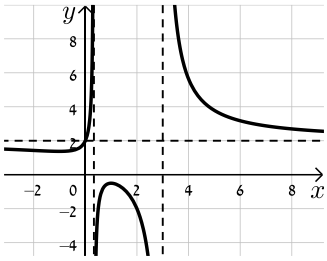
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

20) א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq\frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

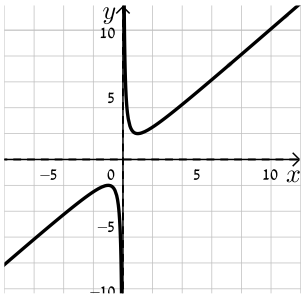
ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$. ו. להלן סקיצה:



21) א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)\ ,\ \min(1,2)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$, יורדת: $-1<x<1\ ,\ x\neq 0$ ד. אין

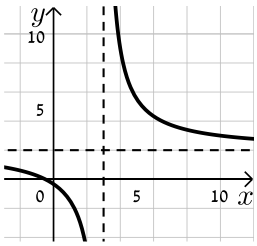
ה. להלן סקיצה:



22) א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3\ ,\ y=2$.

ו. להלן סקיצה:

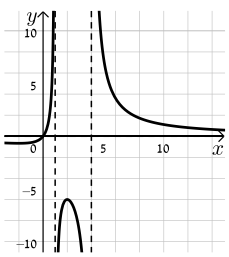


23) א. $x\neq 1\ ,\ x\neq 4$ ב. $\max(2,-6)\ ,\ \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2\ ,\ x\neq 1$, תחומי ירידה: $x>2\ ,\ x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $y=0\ ,\ x=1\ ,\ x=4$).

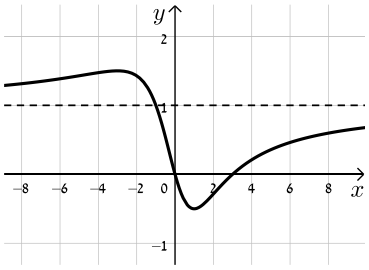
ה. להלן סקיצה:



24) א. כל x ב. $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$, יורדת: $-3<x<1$ ד. $(3,0),(0,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

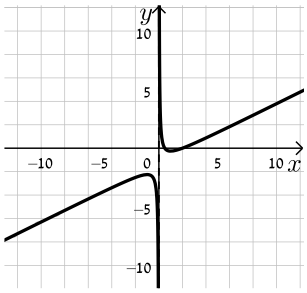
ה. להלן סקיצה:



25) א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-0.25)$, $\max(-1,-2.25)$

ג. עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$, $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

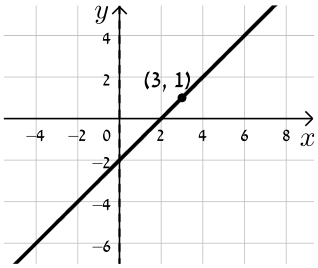
ו. להלן סקיצה:



26) א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

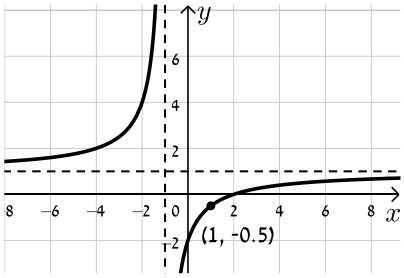
ו. להלן סקיצה:



27) א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$, $y=1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

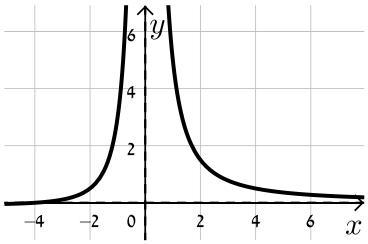
ו. להלן סקיצה:



28) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$, $x>0$

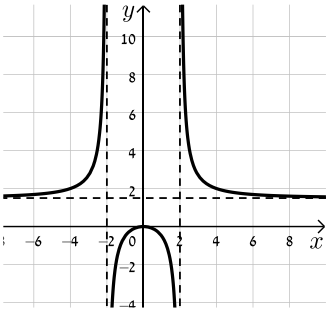
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$, $y=0$.

ה. להלן סקיצה:



29) א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$, $x\neq2$ עולה: $x<0$, $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$, $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



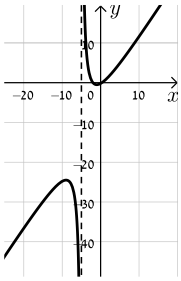
30) א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$, $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

31) א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$, $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x<-9$, $x>-1$ יורדת: $-9<x<-1$, $x\neq-5$

ד. $(-2,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,-0.2)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



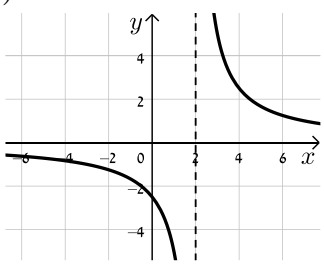
32) א. $x\neq1$ ב. $x=1$, $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

33) א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$, $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

34) א. A $=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:



ו. לא

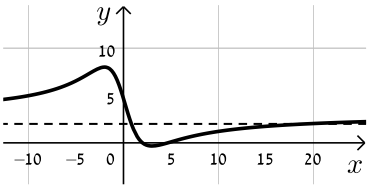
35) א. $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$, כל x.

ב. $\max(-2,8)$, $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

ג. עולה: $x>3$, $x<-2$; יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:

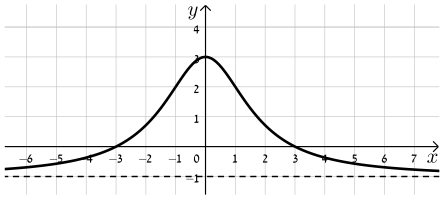


ו. 3 , $-\frac{1}{3}$, $k=8$.

36) ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



חקירת פונקצית שורש:

שאלות:

37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-x? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-x? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, a פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ (k פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את k.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, k פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x. (בטא באמצעות k).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר k.

49) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-x באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-y.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

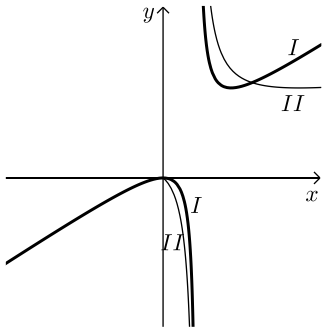
50) לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.



מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$.

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף
מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$. נמק את בחירותיך.

51) לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ $(k>0)$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך
באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן
(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

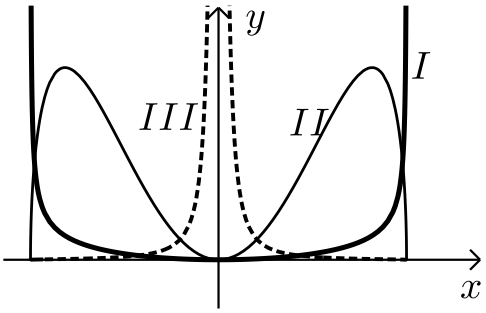
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x שאינה בראשית הוא: $d=6$.

ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

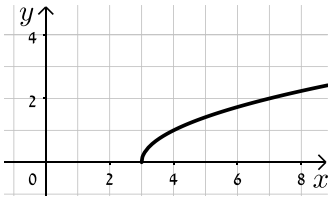
ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של
שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף
שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

37) א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

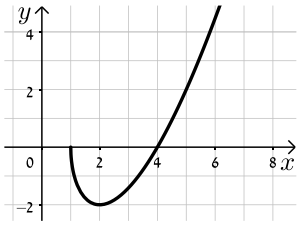
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



38) א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$, $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$, יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

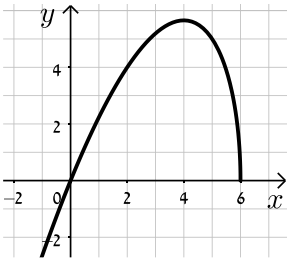
ו. להלן סקיצה:



39) א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$, $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$, ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:



40) א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)$, $\max(1,1)$ קצה

ג. עולה: $0<x<1$, יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

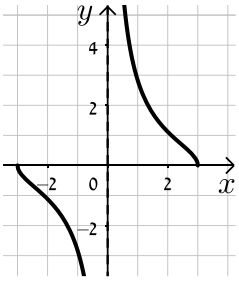
ו. להלן סקיצה:



41) א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

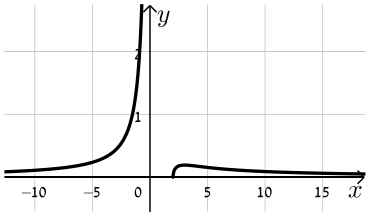
ג. עולה: אף x, יורדת: $-3\le x\le 3$, $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:



42) א. $x<0$, $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$, $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



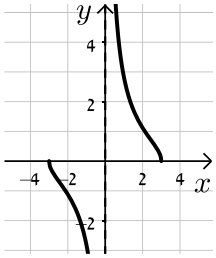
43) א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

44) א. $x\ge 0$, $x\ne 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

45) א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף x, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:



46) א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$, עולה: $-1.5<x<3$.

47) א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

48) א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

49) א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

50) א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\mathrm{I}=h(x)$, $\mathrm{II}=f(x)$.

51) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$, $\min(0,0)$

ד. $\mathrm{I}=g(x)$, $\mathrm{II}=f(x)$, $\mathrm{III}=h(x)$.

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$, a,b פרמטרים.
הנקודה $(-1\ ,\ 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a,b.

57) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

52) $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

53) $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

54) קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

55) קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

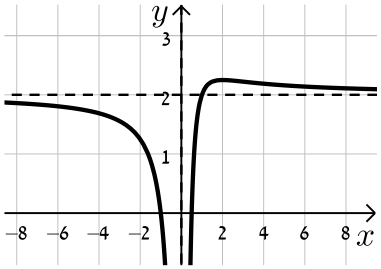
56) $a=4$, $b=3$.

57) א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$, $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

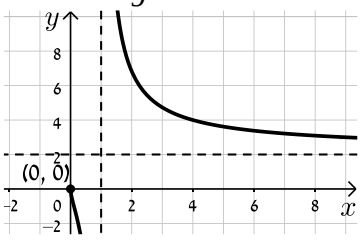


58) א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:



59) א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$, $x>0$, יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$, $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$, $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$, $x<-\sqrt{12}$, יורדת: $2<x<\sqrt{12}$, $-2<x<2$, $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$, $-2<x<0$, קעורה כלפי מטה: $0<x<2$, $x<-2$.

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$, $x<-3$, יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$, $x<-1$.

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$, $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$, $x>1$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$, $x<-3$.

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$, $x=5$, $y=1$

iv. $\min(0.359,-0.11)$, $\max(2.78,-3.89)$

v. עולה: $2<x<2.78$, $0.359<x<2$, יורדת: $x>5$, $2.78<x<5$, $x<0.359$.

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$, $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

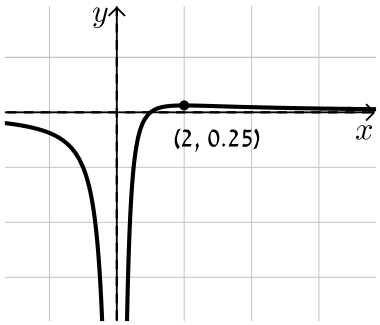
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$, $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$, $x<-2$, $x\neq1$, יורדת: $-1<x<0$, $-2<x<-1$

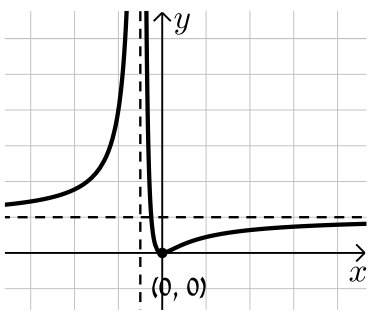
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$, $x\neq1$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

סקיצות:

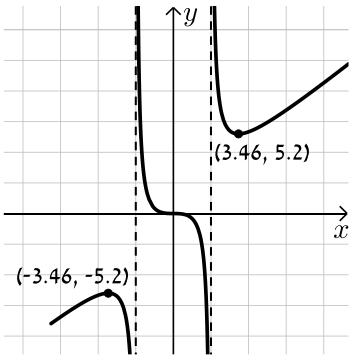
א.



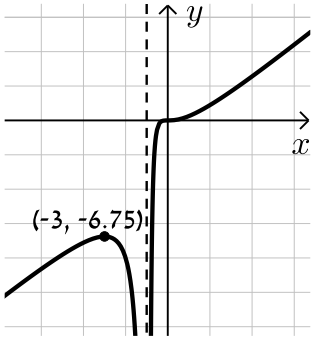
ב.



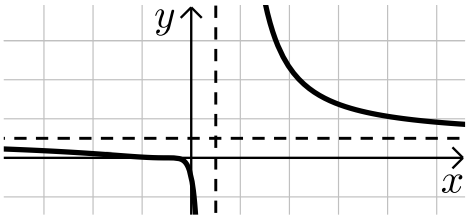
ג.



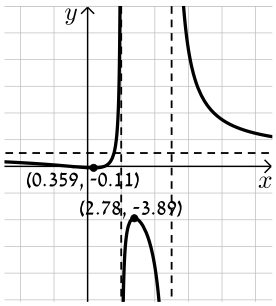
ד.



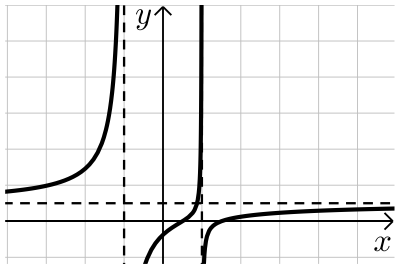
ה.



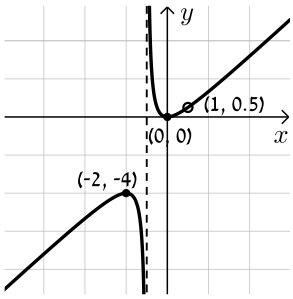
ו.



ז.



ח.



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y" :

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-12x$.

2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^2-6x-16$.

3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-3b^2x$, $b>0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$, $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$, a,m פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y.

א. מצא את הערך של הפרמטר m.

ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

1) $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\max(-b,2b^3)$, $\min(b,-2b^3)$

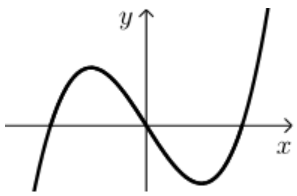
4) א. כל x ב. $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$.
ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$, $x<-a$.
ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

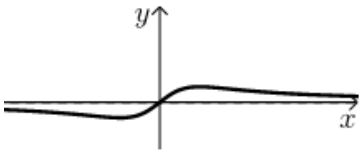
5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$, $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.
ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ה. $x=b$, $y=-1$.

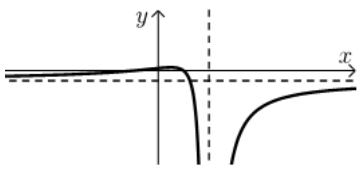
6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$, $\min(-b,0)$ קצה,
$\min(b,0)$ קצה. ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$, $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$.
ד. $(0,0)$, $(-b,0)$, $(b,0)$.

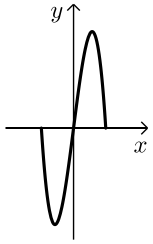
7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$, $\max(0,0)$
iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

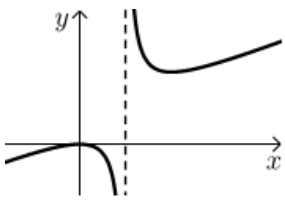
סקיצות לשאלות:

3)


4)


5)


6)


7)


פונקציות ללא תבנית מפורשת:

סיכום כללי:

הגדרת פונקציה:

פונקציה f היא התאמה בין ערך x לערך y ומסומנת באופן הבא: $f:x\to y$.
כך שלכל x מתאים ערך אחד בלבד של y. סימון אחר: $y=f(x)$.
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת: $\left(f(x)\right)'=f'(x)$.
- גזירה של פונקציה בחזקה: $\left(f^2(x)\right)'=2f(x)f'(x)$.
- גזירה של הרכבת פונקציות: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

שאלות:

1) הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1)=3$ ו-$f'(1)=-2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1)+4$.

ב. $f'(1)+4$.

ג. $\dfrac{f(1)+1}{f'(1)-1}$.

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$.

2) נתונה פונקציה f המקיימת: $f(4)=0$ ו-$f'(4)=1$.
מגדירים: $g(x)=2x+f(2x)$.
חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

3) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-1$ ו-$f'(8)=1$.

א. נתון: $g(x)=x^2\sqrt{f(4x)+f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x)=\dfrac{f(x+2)+x+2}{f'(14-x)-14+x}$. חשב את $h(6)$.

4) נתונה פונקציה המקיימת: $f(9)=-4$, $f'(9)=3$.

מגדירים: $g(x)=f^2(3x)+f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

5) פונקציה f מקיימת: $f(4)=2$, $f'(4)=1$.

מגדירים: $g(x)=f^2(x)+f(x)+x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

6) פונקציה f מקיימת: $f(1)=-3$, $f'(1)=3$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{x+f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

7) פונקציה f מקיימת: $f(-2)=6$, $f'(-2)=2$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f^2(x)+1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

8) פונקציה f מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x)=3x\cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

9) פונקציה f מקיימת: $f(6)=\frac{2}{3}$, $f'(6)=-\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

10) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-3$. מגדירים: $g(x)=\frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=\left(f'(8)\right)^2$ וכי $f'(8)<0$.

11) נתונה פונקציה המקיימת: $f(3)=-2$.

מגדירים: $g(x)=\frac{x^2\cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5)=-15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

12) נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4)=\frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x)=x^2\cdot f\left(x^2\right)+f'^2\left(x^2\right)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות f.

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4)=1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2)=11$ ו- $f''(4)=\frac{1}{4}$.

תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.

2) $g(2)=4\,,\,g'(2)=4$.

3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$.

4) $g(3)=19$.

5) $g(4)=10\,,\,g'(4)=6$.

6) $g(1)=1.5\,,\,g'(1)=3$.

7) $g(-2)=\sqrt{37}\,,\,g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$.

8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}\,,\,g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$.

9) $g(3)=1\frac{9}{11}\,,\,g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$.

10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$.

11) $g(5)=25\,,\,f'(3)=-2$.

12) א. $g'(x)=2x\,f\left(x^2\right)+2x^3 f'\left(x^2\right)+4x\,f'\left(x^2\right)f''\left(x^2\right)$

ב. $g(2)=3\,,\,g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 22 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

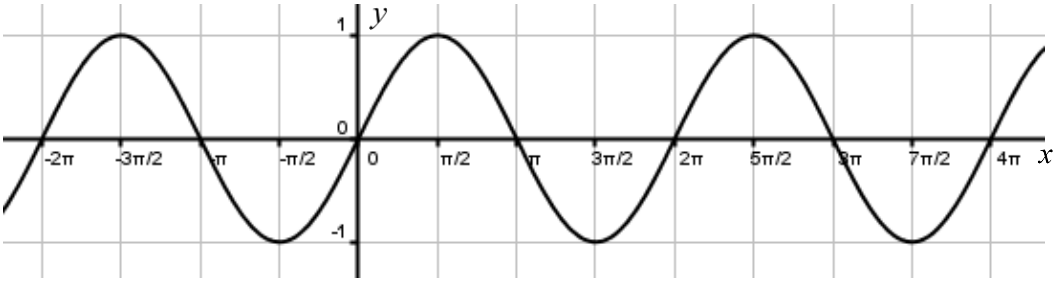
תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות 356
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות 358
3. שאלות עם משיקים 360
4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות 362
5. מציאת נקודות קיצון 363
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים 364
7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות 365
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית 366

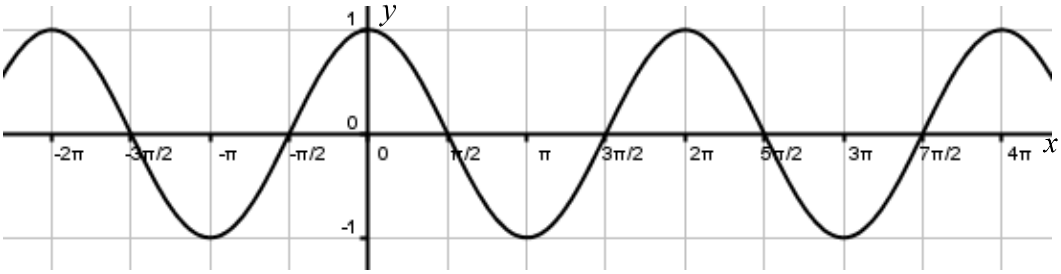
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

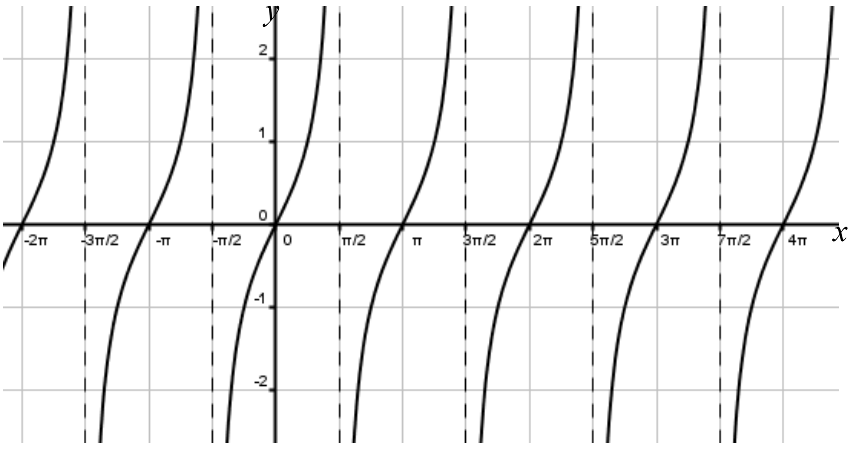
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y=\sin x$:



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y=\cos x$:



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y=\tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.
2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin x+3\cos x+x$

ב. $f(x)=2x\sin x+4\tan x$

ג. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$

ב. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^3 x$

ב. $f(x)=2\cos^4 x$

ג. $f(x)=\sin^2 x$

ד. $f(x)=\sin^3 2x$

ה. $f(x)=\cos^2 2x$

ו. $f(x)=\tan^2 4x$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

ב. $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

ג. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

תשובות סופיות:

1) א. $\cos x-3\sin x+1$ ב. $2\sin x+2x\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

2) א. $3\cos 3x-10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1+\sin 2x}$.

3) א. $3\sin^2 x\cdot\cos x$ ב. $-8\cos^3 x\sin x$ ג. $\sin 2x$

ד. $6\sin^2 2x\cos 2x$ ה. $-2\sin 4x$ ו. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.

4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5) א. $2\sin 2x$ ב. $4\sin 4x$ ג. $-\sin 4x$.

שאלות עם משיקים:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\tan 3x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{9}$.

9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום $[0,\pi]$.

10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sin x+a}$, (a פרמטר) בנקודה שבה $y=1$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
מצא את ערך הפרמטר a.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$, ($a$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.
ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m=2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2?
נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$, $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi<x<\pi$.

ג. ישר $x=t$, $(0<t<1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור t.

תשובות סופיות:

6) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7) $y=-2x+\pi$.

8) $y=12x-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

9) $y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+1$, $y=-2\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}+1$.

10) $a=\frac{1}{2}$.

11) א. $a=2$, $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$.

12) ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},6.05\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ ג. $t=\frac{\pi}{12}$.

מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}\ ,\ [0,2\pi]$

ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}\ ,\ [-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=\tan x\ ,\ [0,2\pi]$

תשובות סופיות:

13) א. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

ב. $-\pi\le x\le \pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

מציאת נקודות קיצון:

שאלות:

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

16) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

17) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$
בתחום: $[0,1.5\pi]$.

18) לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$, (a,b פרמטרים) יש נקודת קיצון
ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

14) $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi,1)$ קצה.

15) $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)$, $\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

16) $\min(2\pi,-1)$ קצה, $(0,-1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

17) $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$

18) $a=3$, $b=-4$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\tan x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

תשובות סופיות:

19) $x=\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=0$.

20) $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

21) $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

תשובות סופיות:

22) נקודות פיתול: $\left(\frac{11}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0<x<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$.

חקירת פונקציה טריגונומטרית:

שאלות:

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin 2x-2$ בתחום $0\le x\le\pi$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מעבירים את הישר $y=k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה.
כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x.
מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{m}\sin mx$, $1<m<3$ (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x=-\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m.

ב. האם הנקודה שבה: $x=-\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0<x<2\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

28) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\cos x\cdot(\sin x+1)$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא בתחום $[0,\pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה
ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan\left(x^2-4x\right)$ בתחום $[0,4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $-3\pi\le x\le 3\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(-3.67)=0$, $f'(3.67)=0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון.
מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

34) נתונה הפונקציה: $y=\left(\cos x+k\right)^2$, k פרמטר, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.

ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=m\sin x+k\cos^2 x$ (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ שמשוואתו: $y=-6x+6\pi+\sqrt{7}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו-m.

ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi\le x\le 1.5\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בתחום הנ"ל.

36) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\tan x+kx$ (k פרמטר) בתחום: $0\le x\le \pi$.

א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.

הפונקציה: $g\left(x\right)=\tan^2 x+kx$ חותכת את הפונקציה $f\left(x\right)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ב. מצא את ערך הפרמטר k, $\left(k\ne 0\right)$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{-\cos x}$, $g(x)=\sqrt{\cos x+1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \le x \le 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם הגרפים חותכים את ציר ה-x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.

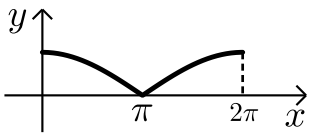
ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.

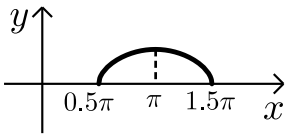
ד. לפניך ארבעה איורים: i , ii , iii , iv.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.

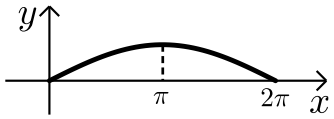
i.



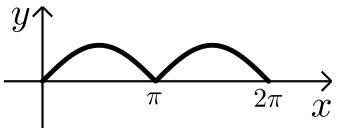
ii.



iii.



iv.



תשובות סופיות:

23) א. $0 \le x \le 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

24) א. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

25) א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, $(0,-2)$.

ב. $\max(\pi,-2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right) \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0,-2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \ne -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

26) א. $(\pi,0), (0,-2)$.

ב. $\max(2\pi,-2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi,0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0,-2)$.

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

27) א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

28) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ב. $(0,1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

29) א. חיתוך: $(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0,0)$ קצה.

30) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right),\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$ קצה

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$, קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

31) א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$. ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right),\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

32) א. $0\le x\le 4$ וגם $x\ne 3.56$, $x\ne 0.44$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16),\max(4,0)$ קצה.

33) א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$

ב. ii. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

34) א. $k=0.5$, $y=(\cos x+0.5)^2$ ב. $(\pi,0.25)$

ג. לא.

35) א. $m=6$, $k=\sqrt{7}$ ב. $(-0.5\pi,-6),(0.5\pi,6),(1.5\pi,-6)$. ג. בשתי נקודות.

36) א. $x=0.5\pi$ ב. $k=-\frac{4}{\pi}\approx -1.27$

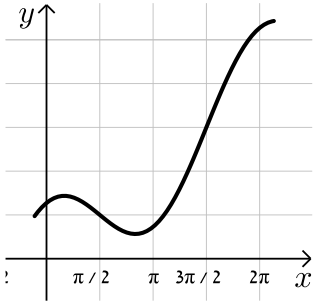
ג. $\max(0,0),\min(0.15\pi,-0.07),\max(0.84\pi,-3.9),\min(\pi,-4)$.

37) א. כן. $f(x):(0.5\pi,0),(1.5\pi,0)$, $g(x):(\pi,0)$. ב. כן, $\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

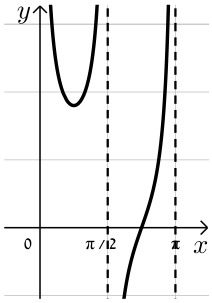
ג. $\max(0.5\pi,0),\min(1.5\pi,0),\max(\pi,1)$ ד. איור I - $g(x)$, איור II - $f(x)$.

סקיצות לשאלות החקירה:

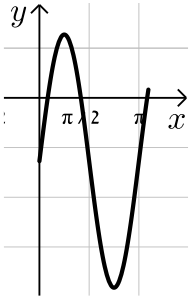
(23



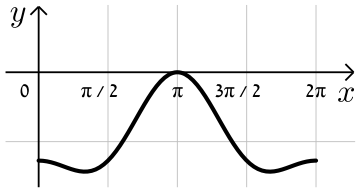
(24



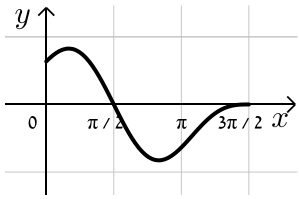
(25



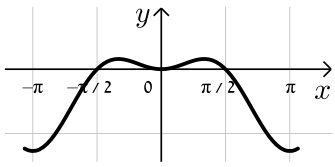
(26



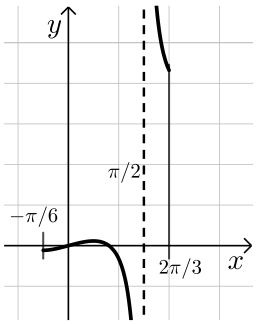
(28



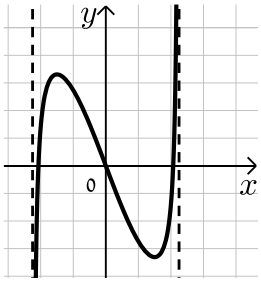
(29



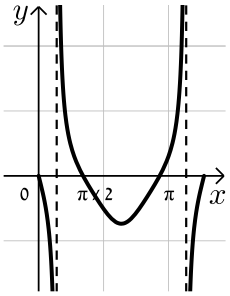
(30



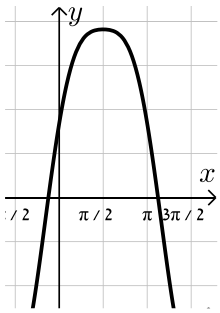
(31



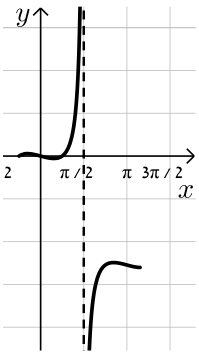
(32



(35



(36



כלים מתמטיים 71001

פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט

תוכן העניינים

1. כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט 374
2. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט 379
3. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט 380
4. חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים 383
5. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט 387

כתיבה וסרטוט של פונקצית ערך מוחלט:

סיכום כללי:

פונקציה הערך המוחלט מוגדרת: $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

כדי לסרטט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

1. יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
2. יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
3. עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטט אותה במערכת צירים.

הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון: $f(x)=x^2|x|-3|x|=|x|\left(x^2-3\right)$.

שאלות:

1) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=|x+4|-|4x|+1$.
כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=3x-\left|x+|3-x|\right|$.
כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

3) $f(x)=|x|-1$

4) $f(x)=|x+2|$

5) $f(x)=|2x+1|+|x-3|$

6) $f(x)=|x-1|+|2-x|-3\cdot|x+1|+x$

7) $f(x)=2|x|+x$

8) $f(x)=x|x|$

9) $f(x)=x^2+2|x|-3$

10) $f(x)=|x^2+6x-8|$

11) $f(x)=-2x|x|+|7x|-5$

12) $f(x)=(x-3)|x+1|$

13) $f(x)=|9x-x^3|$

14) $f(x)=x^3-|x|$

15) $f(x)=|x|^3-4x^2$

16) $f(x)=2x^2|x|-7x|x|+3|x|$

17) לפניך הפונקציה: $f(x)=6x-2x^2$.

א. סרטט את $f(x)$ במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את $g(x)=6|x|-2x^2$.

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה: $h(x)=|6|x|-2x^2|$.

18) לפניך הפונקציה: $f(x)=9x^2-8x-1$.

מגדירים: $g(x)=9x|x|-8x-1$ ו- $h(x)=9x^2-8|x|-1$.

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה $|h(x)|$.

19) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ו- $g(x)=\frac{x}{|x|}$.

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?
אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

20) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: $f(x)=|x^2-4|$, $g(x)=|x+1|+|x-2|$.

21) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=|(x-2)(x+4)|$, $g(x)=|(x-5)(x+4)|$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום $g(x)$ ניקח: $h(x)=|(x-5)(x-4)|$?

22) נתונות הפונקציות: $f(x)=|x|x+3$ ו- $g(x)=ax^2$, $(a\neq 0)$.

מצא עבור אלו ערכים של a הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

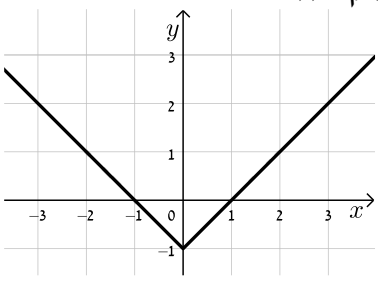
תשובות סופיות:

1) $f(x)=|x+4|-|4x|+1=\begin{cases}-3x+5 & x\geq 0\\ 5x+5 & -4\leq x<0\\ 3x-3 & x<-4\end{cases}$.

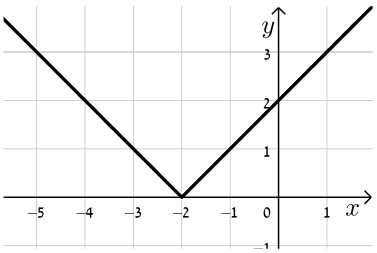
2) $f(x)=3x-|x+|3-x||=\begin{cases}x+3 & x\geq 3\\ 3x-3 & x<3\end{cases}$.

להלן סקיצות של הפונקציות:

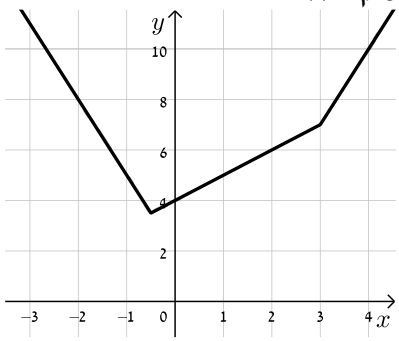
3) סקיצה:



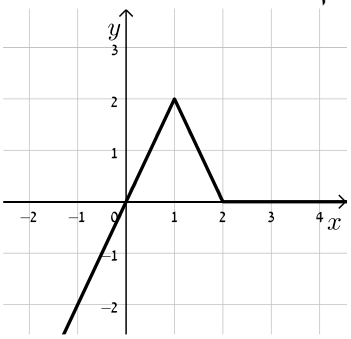
4) סקיצה:



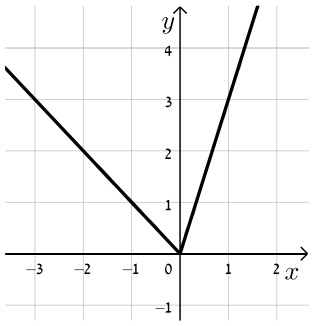
5) סקיצה:



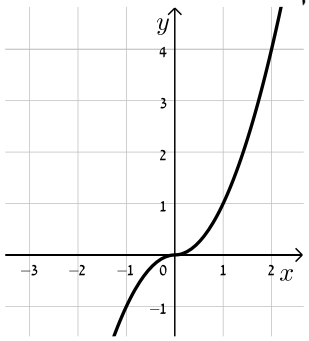
6) סקיצה:



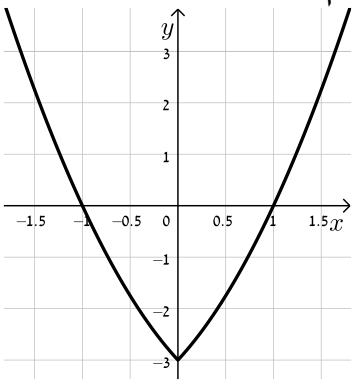
7) סקיצה:



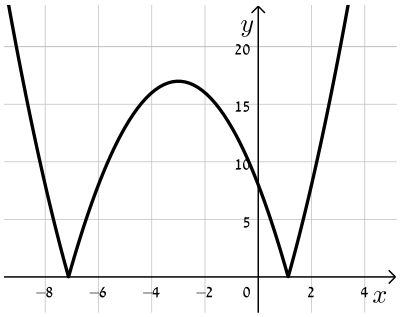
8) סקיצה:



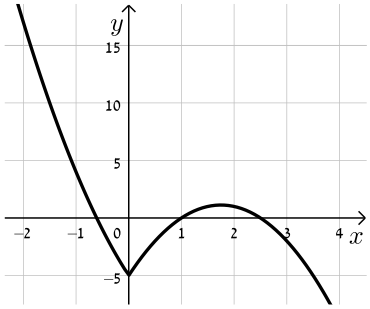
9) סקיצה:



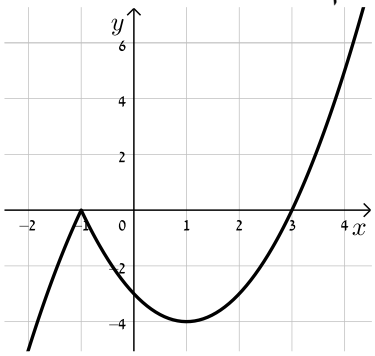
10) סקיצה:



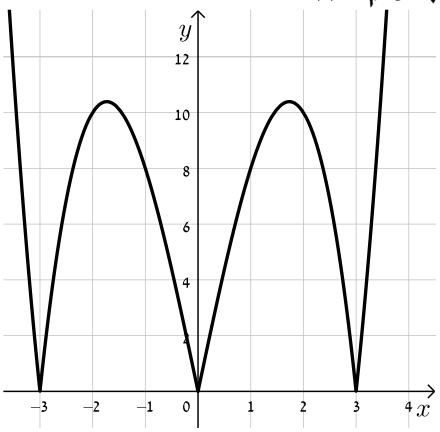
11) סקיצה:



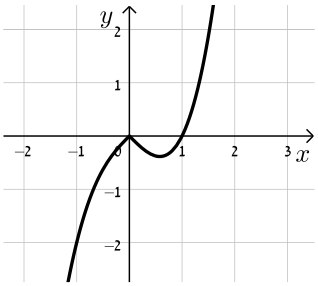
12) סקיצה:



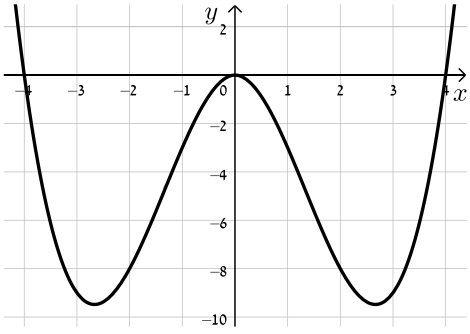
13) סקיצה:



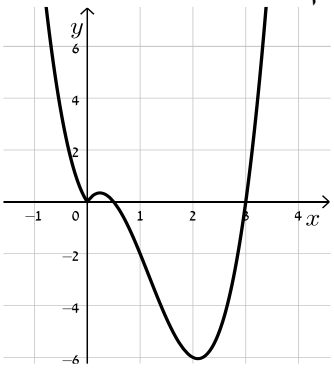
14) סקיצה:



15) סקיצה:



16) סקיצה:



17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.

18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.

19) כן, מדובר באותה הפונקציה.

20) $(-3.45,7.9)$, $(3,5)$, $(-1,3)$, $(1,3)$.

21) א. $(-4,0)$, $(3.5,11.25)$. ב. יהיה רק פתרון אחד והוא: $(2.55,3.57)$.

22) שני פתרונות: $a>1$, פתרון יחיד: $-1<a<1$ וגם $a\neq 0$ מת.ה., אף פתרון: $a\leq -1$.

תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=\left|x^2-1\right|+x+3$

2) $f(x)=\frac{|3-x|}{x-1}$

3) $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{|x|-4}$

4) $f(x)=\sqrt{|x|-2}$

5) $f(x)=\frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}}$

6) $f(x)=\frac{3}{2|\sin x|-1}$

תשובות סופיות:

1) כל x.

2) $x\neq 1$.

3) $x\neq 0\ ,\ \pm 4$.

4) $x\leq -2\ ,\ x\geq 2$.

5) $-4<x<4$.

6) $x\neq \frac{\pi}{6}+\pi k\ ,\ x\neq \frac{5\pi}{6}+\pi k$.

גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

נגזרת של פונקצית הערך המוחלט: $f(x)=|x|$ היא: $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

עבור פונקציה פנימית $f(x)=|g(x)|$ נעזר בכלל השרשרת: $f'(x)=\begin{cases}g(x) & g(x)>0\\ -g(x) & g(x)<0\end{cases}$.

הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- x_0 ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה **גזירה** בנקודה x_0, אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

דוגמא:

לפונקציה: $f(x)=|x|$ יש נקודת אפס $x_0=0$ והנגזרת: $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

ערך הנגזרת הימני הוא $f'(x=0^+)=1$ והשמאלי הוא $f'(x=0^-)=-1$.

היות ו- $f'(x=0^-)\neq f'(x=0^+)$ נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$.

שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=|x^2-3x+2|$

2) $f(x)=x^3+\frac{2}{3}|x|+1$

3) $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$

4) $f(x)=\frac{x^2+1}{|x|+2}$

5) $f(x)=\sqrt{3x-|3-x|}$

6) $f(x)=\frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}}$

7) $f(x)=\sin|x|$

8) $f(x)=\sqrt{3|x|-\cos x+1}$

9) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x\cdot|x+2|+3$ בנקודות:

א. $x=-3$.

ב. $y=3$.

10) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+|x|}{x+1}$.

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת: $0\le f(x)<2$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=3$.

11) לפניך הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$.

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x.

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך של הישר $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ וגרף הפונקציה ברביע השני.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=\begin{cases}2x-3 & x<1\,,\,x>2\\ -2x+3 & 1<x<2\end{cases}$, בנקודות $(1,0)$, $(2,0)$ הנגזרת לא קיימת.

2) $f'(x)=\begin{cases}3x^2+\frac{2}{3} & x>0\\ 3x^2-\frac{2}{3} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,1)$ הנגזרת לא קיימת.

3) $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{(x-1)^2} & x>0\,,\,x\neq 1\\ \frac{1}{(x-1)^2} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

4) $f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x>0\\ \frac{-x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x<0\end{cases}$, בנקודה $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ הנגזרת לא קיימת.

5) $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4}<x<3\\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x>3\end{cases}$, בנקודה $(3,3)$ הנגזרת לא קיימת.

6) $f'(x)=\begin{cases}\frac{-x-17}{2\left(\sqrt{x+6}\right)^3} & x>0\\ \frac{-x-7}{2\left(\sqrt{-x+6}\right)^3} & x<0\end{cases}$, בנקודה $\left(0,\frac{5}{\sqrt{6}}\right)$ הנגזרת לא קיימת.

7) $f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ -\cos x & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

8) $f'(x)=\begin{cases}\frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x>0\\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x<0\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

9) א. $y=4x+12$ ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה $(0,3)$ ולכן נמצא את משוואת המשיק רק שם ונקבל: $y=2x+3$.

10) א. הוכחה. ב. $y=\frac{1}{8}x+1\frac{1}{8}$.

11) א. הוכחה. ב. 6. ג. $y=\frac{3}{\sqrt{2}}x+3\sqrt{2}$.

חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים:

סיכום כללי:

כדי לחקור פונקציה שמכילה ביטויים עם ערכים מוחלטים נבצע את פעולות החקירה הרגילות תוך תשומת לב לחלוקת הפונקציה למקטעים לפי ערכי המשתנה המאפסים את הערכים המוחלטים.

- מציאת תחום הגדרה של פונקציה.
- גזירה של פונקציה, מציאת נקודות אי-גזירות, וקביעת סוג הקיצון.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת אסימפטוטות של גרף הפונקציה (במידה וישנן).
- מציאת נקודות פיתול ותחומי קמירות כלפי מעלה ומטה (במידה ונשאלים).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה תוך הקפדה על נקודות אי רציפות, נקודות אי-גזירות וסימון מקטעים שונים על הגרף לפי המתבקש.

שאלות:

1) לפניך הפונקציה: $f(x)=x^3-\frac{3}{4}|x|+2$.

א. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=|x^2-4|+|x^2+x|$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתון הישר $y=x+k$, k פרמטר. מצא לאלו ערכים של k:

i. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות.

ii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

iii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-2 נקודות שונות.

iv. הישר יחתוך את גרף הפונקציה באינסוף נקודות.

v. הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה כלל.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{|x-2|}$.

א. כתוב את הנגזרת של הפונקציה והוכח כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{|x|+a}$, a פרמטר.

ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-1<x<1$.

א. מצא את a.

ב. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.

ג. הראה כי הפונקציה עולה בתחום: $x>1$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0<x<9$.

ה. היעזר בממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שציירת את גרף הפונקציה בתחום: $-9<x<0$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=|\cos x|+\cos 2x$.

א. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0:\pi]$ וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[0:\pi]$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[-\pi:0]$.

6) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{\cos x}$, $g(x)=\frac{x}{|x|}$.

א. הוכח כי $f(x)$ הינה פונקציה זוגית וכי $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x)\cdot g(x)$ בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

תשובות סופיות:

1) א. $\min\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$, $\max(0,2)$ ב. עולה: $x<0$, $x>\frac{1}{2}$, יורדת: $0<x<\frac{1}{2}$.

ג. עיין סקיצה.

2) א. $\min(0,4)$, $\max\left(-\frac{1}{4},4\frac{1}{8}\right)$, $\min(-2,2)$ ב. עיין סקיצה.

ג. i. $4<k<4.5$ ii. $k=4.5$ iii. $k>4.5$ iv. $k=4$ v. $k<4$.

3) א. הוכחה. ב. עולה: $x<2$, יורדת: $x>2$ ג. עיין סקיצה.

4) א. $a=-1$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. עיין סקיצה. ה. עיין סקיצה.

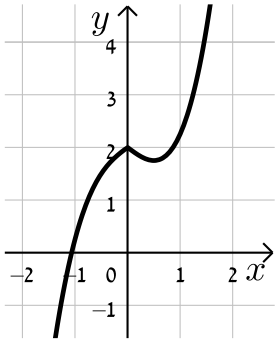
5) א. הוכחה. ב. $\max(\pi,2)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, $\max(0,2)$ ג. עיין סקיצה.

ד. עיין סקיצה.

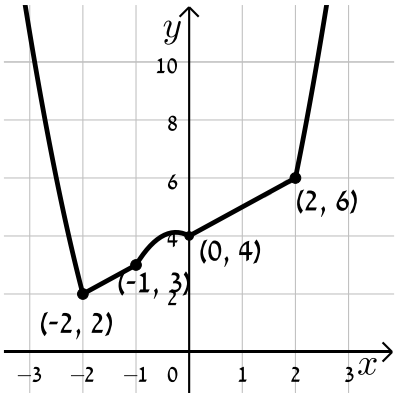
6) א. הוכחה. ב. עיין סקיצה. ג. עיין סקיצה.

סקיצות לשאלות החקירה:

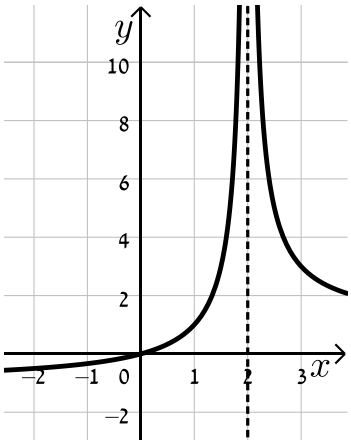
שאלה 1



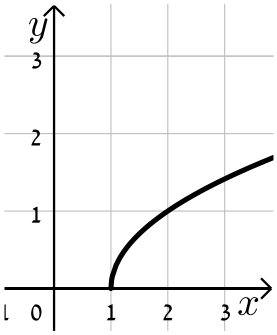
שאלה 2



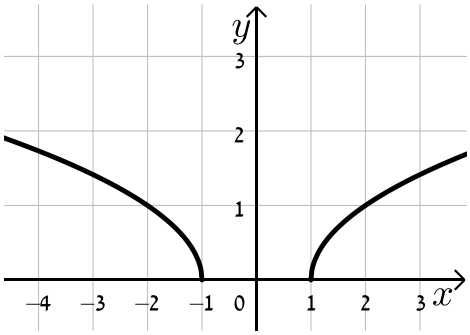
שאלה 3



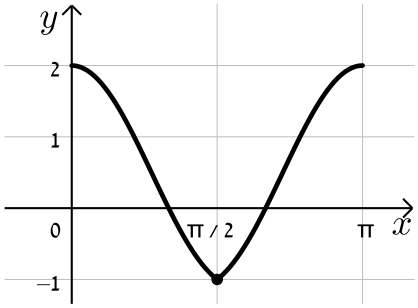
שאלה 4 סעיף ד



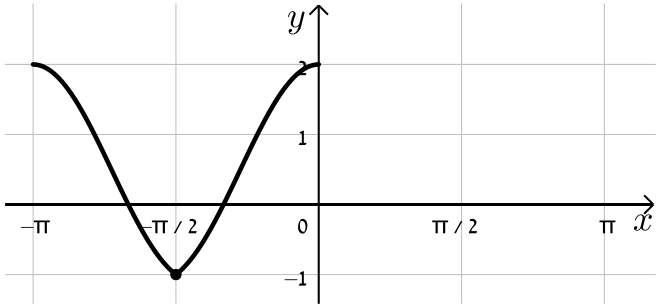
שאלה 4 סעיף ה



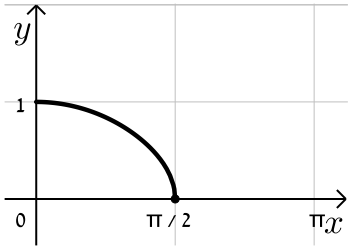
שאלה 5 סעיף ג



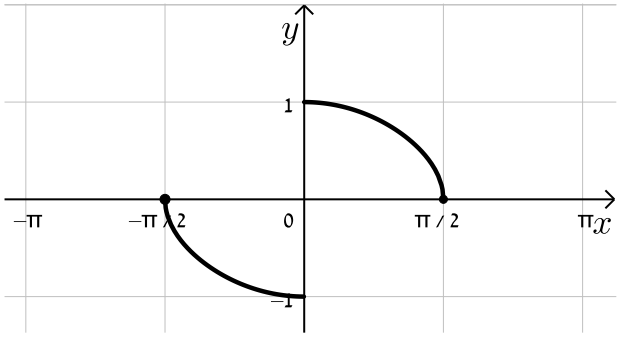
שאלה 5 סעיף ד



שאלה 6 סעיף ב



שאלה 6 סעיף ג



פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטוי/ים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

שאלות:

1) עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $|x^2-2x-3|=m-1$ שלושה פתרונות?

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=|x^2-x-2|+x|x|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי k יש למשוואה: $|x^2-2x-3|+k=x-x|x|-1$ פתרון אחד בלבד.

3) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-9}+\frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של a יהיה למשוואה: $f(x)=a$ פתרון אחד בלבד.

4) לפניך הפונקציה: $f(x)=|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|$ והישר: $y=m$.

א. סרטט גרף של $f(x)$ במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של m עבורם לישר $y=m$ יהיו יותר משתי נקודות חיתוך שונות עם גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) $m=5$.

2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $k=-1$.

3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $a\geq\frac{7}{6}$, $-1<a\leq 1$, $a<-\frac{7}{6}$.

4) $3\leq m\leq 5$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 24 - חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית 388
2. הוספת קבוע לפונקציה 390
3. הכפלת פונקציה בקבוע 398
4. הזזת פונקציה ימינה ושמאלה 405
5. מתיחה וכיווץ של פונקציה 409
6. היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y 414
7. ערך מוחלט של פונקציה 419

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

- הוספת קבוע לפונקציה:
בהינתן פונקציה $y=f(x)$, כל הנקודות שעל גרף הפונקציה: $g(x)=f(x)+k$ מתקבלת ע"י הוספת קבוע k לערך ה-y. במילים אחרות, אם נקודה (x_0,y_0) נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ אז הנקודה (x_0,y_0+k) תִּמָּצֵא על גרף הפונקציה $g(x)$. הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- k יחידות.

- הכפלת פונקציה בקבוע:
בהינתן פונקציה $y=f(x)$ ועליה נקודה כללית (x_0,y_0), הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ מתקבלת ע"י הכפלת $f(x)$ בקבוע k $(k\neq 0)$. נקודה על $g(x)$ תהיה מהצורה: $(x_0,k\cdot y_0)$. הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה-x.

- הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:
כדי להזיז פונקציה $y=f(x)$, k יחידות ימינה נציב: $g(x)=f(x-k)$
וכדי להזיז אותה שמאלה ב-k יחידות נציב: $g(x)=f(x+k)$.

- מתיחה וכיווץ אופקיים של פונקציה:
כדי לכווץ פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(k\cdot x)$.
כדי להרחיב פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(x/k)$.

- שיקוף גרף פונקציה ביחס לציר y:
כדי לשקף את גרף הפונקציה $y=f(x)$ סביב ציר ה-y נכפיל את ערך ה-x פי 1-.
הגרפים של הפונקציות $y_1=f(x)$ ו-$y_2=f(-x)$ מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה-y.

- ערך מוחלט של פונקציה:

הערך המוחלט של: $y=f(x)$, מתקבל ע"י לקיחת ערכי ה- y בגודלם בלבד.

במילים אחרות, הערך המוחלט של $f(x)$ הוא: $y=|f(x)|$. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $|f(x)|$ זהים לחלוטין בערכם החיובי (ז"א בחלקם שמעל לציר ה- x) וסימטריים לחלוטין בערכם השלילי ביחס לציר ה- x כאשר הגרף של $f(x)$ נמצא מתחת לציר ה- x והגרף של $|f(x)|$ נמצא מעל לציר ה- x.

הוספת קבוע לפונקציה:

שאלות:

1) סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ואת הגרף $y=f(x)+k$ עבור $k=1$ ו-$k=-4$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=-2x^2$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+b$

א. מהו ערך הפרמטר b עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יעבור בנקודה $(2,10)$?

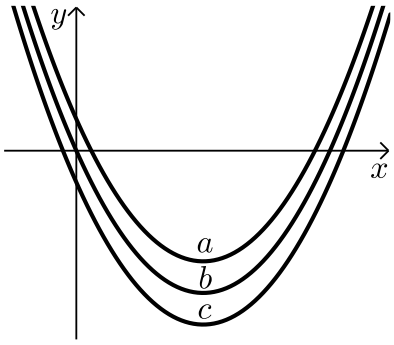
ב. מצא את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 4.

ג. מצא את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 3-.

3) לפניך שלוש גרפים של פונקציות:

$h(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2-6x-2$, $f(x)=x^2-6x$.

התאם כל גרף מבין הגרפים a, b ו-c לכל פונקציה:



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+A$

כאשר A הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הבע באמצעות A את הפונקציה $g(x)$.

ב. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יהיה נמוך משל $f(x)$ ב-5 יחידות?

ג. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=3$?

5) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{3-2x}{x}$ ו- $g(x)=\frac{3}{x}$.

א. הראה כי גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$ לכל ערך של x וחשב בכמה יחידות $f(x)$ מתחת ל-$g(x)$.

ב. כתוב פונקציה שערכיה יהיו גדולים משל $g(x)$ ב-4 יחידות לכל x.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+B$, $B\neq 0$.

א. מהן האסימפטוטות האופקיות של $f(x)$ ושל $g(x)$?

ב. סרטט במערכת צירים אחת באופן איכותי את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ עבור $B>0$.

ג. האם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x עבור $B>0$?
נמק אלגברית וגרפית (היעזר בסעיף הקודם).

ד. מצא את B עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=2$ וקבע איזה גרף מבין השנים יהיה מעל השני ובכמה יחידות.

7) מצא בכמה יחידות יש להוריד את גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ על מנת שהיא תהיה אי-חיובית בכל תחום הגדרתה.

8) הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+b$, (b פרמטר) חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=9$.
מצא בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה: $g(x)=\sqrt{x}$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נקודת הקיצון המקומית שלה ונקודות החיתוך שלה עם הצירים.

ב. מגדירים את הפונקציה $g(x)=f(x)+3$.
סרטט במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+b}{(x+a)^2}$, $a,b\neq 0$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

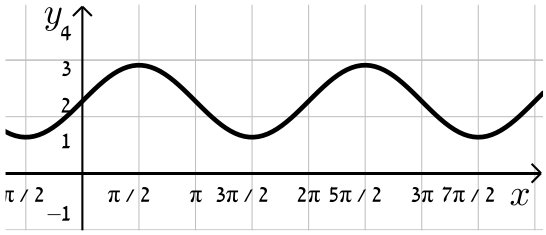
ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום ההגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה.

ג. מגדירים: $g(x)=f(x)+k$. מצא לאלו ערכי k יהיה גרף הפונקציה $g(x)$ כולו מתחת לציר ה- x.

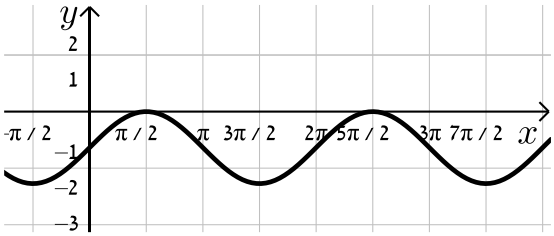
11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin x+b$.

קבע את הערך של b בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



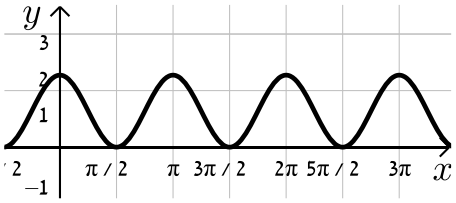
ב.



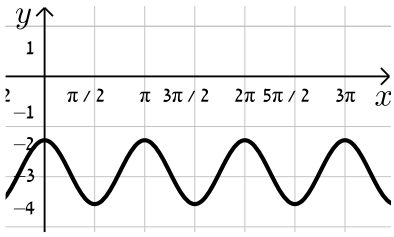
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos 2x+b$.

קבע את הערך של b בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



ב.



13) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{x+1}{x+b}$ (a,b פרמטרים).

ידוע כי הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ מקיימת: $f(x)=g(x)+k$

כאשר k הוא ערך קבוע כלשהו.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a , b ו- k.

ב. מצא את נק' הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות.

ג. הראה כי לפונקציות אין נקודות פיתול.

ד. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
ציין על הגרפים את נקודות הקיצון והחיתוך עם הצירים.

14) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+1}$, a פרמטר.

ידוע כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי של $-\sqrt{2}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מגדירים פונקציה: $g(x)=f(x)+k$. מצא את הערכים של k עבורם לפונקציה $g(x)$ ולציר ה-x לא יהיו נקודות משותפות כלל.

15) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{a}{\sqrt{ax^2+2x+2}}$, $a\neq 0$ פרמטר.

א. עבור אלו ערכים של a הפונקציה מוגדרת לכל x?

ב. הבע באמצעות a את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה אם נתון שהפונקציה מוגדרת לכל x.

ג. ידוע כי לפונקציה: $g(x)=f(x)-a$ יש נקודת קיצון על ציר ה-x.
מצא את ערכו של a.

16) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sin x+a}{\cos x+1}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, ($a$ פרמטר).

א. עבור אילו ערכים של a אין לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון.

ב. מגדירים פונקציה נוספת ע"י הוספת הקבוע k באופן הבא: $g(x)=f(x)+k$.
ידוע כי ל-$g(x)$ נקודת קיצון $\left(-\frac{\pi}{4},3\right)$.
מצא את ערכו של הפרמטר k.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{(2x-1)^2}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

iii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\frac{9x-8x^2}{(2x-1)^2}$.

i. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ii. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים?

iii. הראה כי לכל נקודה $A(x_0,y_0)$ שבתחום ההגדרה של $f(x)$, מתקיים: $f(x_0)-g(x_0)=k$ ומצא את k.
מה ניתן לומר על הקשר שבין שתי הפונקציות?

ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x+a}}$, כאשר a הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הבע את תחום ההגדרה של $f(x)$ באמצעות a (הבחן בין שני מקרים).

ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון והבע את סוגה כתלות ב-a.
עבור הסעיפים הבאים הנח כי $a=3$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

ii. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\frac{bx+3b+\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x+3}+2x+6}{x+3}$.
b פרמטר.

i. הבע באמצעות b את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

ii. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם ניתן לכתוב את $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+k$. אם כן, הבע את k באמצעות b.

תשובות סופיות:

1) סרטוט בסוף.

2) א. $b=18$ ב. $b=4$ ג. $b=-3$.

3) ההתאמה: $h(x)\to a$, $g(x)\to c$, $f(x)\to b$.

4) א. $g(x)=x^3-4x+A$ ב. $A=-5$ ג. $A=3$.

5) א. הוכחה. ב. $h(x)=\dfrac{3+4x}{x}$.

6) א. $f(x)\to y=0$, $g(x)\to y=B$ ב. סרטוט בסוף ג. לא.

ד. $B=-\dfrac{1}{2}$. $f(x)$ נמצאת מעל $g(x)$ ב- $\dfrac{1}{2}$ יחידה.

7) $\dfrac{1}{2}$ יחידה (לפחות).

8) 3 יחידות.

9) א. תחום הגדרה: $-3\le x\le 3$, נקודת קיצון: $\max(0,3)$,

נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,3)$, $(3,0)$, $(-3,0)$ ב. סרטוט בסוף.

10) א. $a=3,b=2$ ב. תחום הגדרה: $x\ne -3$, נקודת קיצון: $\max\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$,

עולה: $-3<x<-1$, יורדת: $-1<x$, $x<-3$, חיתוך עם הצירים: $\left(0,\dfrac{2}{9}\right)$, $(-2,0)$,

אסימפטוטות: $x=-3$, $y=0$ ג. $k<-\dfrac{1}{4}$.

11) א. $b=2$ ב. $b=-1$.

12) א. $b=1$ ב. $b=-3$.

13) א. $a=1,b=2,k=1$ ב. נקודת קיצון של $f(x)$ $\max\left(-1\dfrac{1}{2},-3\right)$,

נקודת קיצון של $g(x)$ $\max\left(-1\dfrac{1}{2},-4\right)$. תחום עלייה: $x<-2$ או $-2<x<-1\dfrac{1}{2}$,

תחום ירידה: $-1\dfrac{1}{2}<x<-1$ או $-1<x$.

ג. סעיף הוכחה, אין נקודות פיתול. ד. סרטוט בסוף.

14) א. $a=-2$. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x+1}$.

ב. תחום הגדרה: $x\le -\sqrt{2}$ או $\sqrt{2}\le x$,

נקודת קיצון $\min\left(-2,-\sqrt{2}\right)$, $\min\left(\sqrt{2},0\right)$, $\max\left(-\sqrt{2},0\right)$.

תחום עלייה: $\sqrt{2}<x$ או $-2<x<-\sqrt{2}$, תחום ירידה $x<-2$.

נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(\sqrt{2},0\right),\left(-\sqrt{2},0\right)$.

אסימפטוטות: יש אסימפטוטה אופקית $y=1$ כאשר $x\to\infty$, $y=-1$ כאשר $x\to-\infty$.

סרטוט בסוף.

ג. $k>\sqrt{2}$ או $k\le-1$.

15) א. $a>\frac{1}{2}$ ב. $\max\left(-\frac{1}{a},\sqrt{\frac{a^3}{2a-1}}\right)$ ג. $a=1$.

16) א. $a=0$ ב. $k=3$.

17) א. i. $x\neq0.5$ ii. אין. iii. $(0,2)$ iv. $x=0.5$, $y=0$

ב. i. $x\neq0.5$ ii. $\left(\frac{9}{8},0\right)$, $(0,0)$ iii. $k=2$, $g(x)=f(x)-2$.

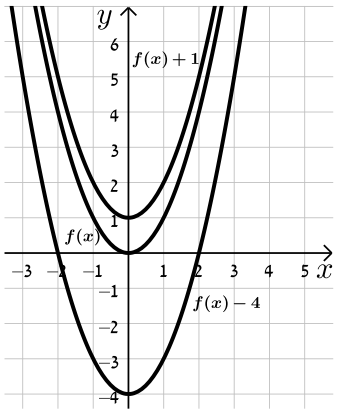
18) א. $a>0$: $x\ge0$, $a<0$: $x>-a$ ב. אם $a>0$, אז: $\max\left(1,\sqrt{a+1}\right)$

אם: $-1<a<0$ אז: $\min\left(1,\sqrt{a+1}\right)$ אם: $a\le-1$ אז: אין קיצון.

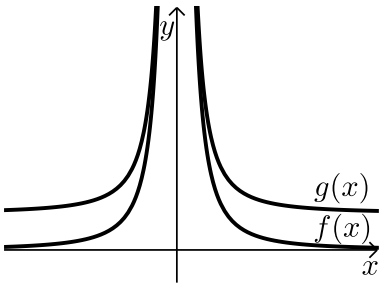
ג. i. $y=1$ ii. $\left(0,\sqrt{3}\right)$ ד. i. $y=b+3$ ii. כן, $k=b+2$.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

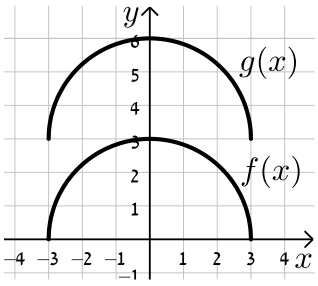
1)



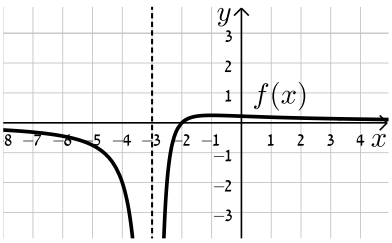
6)



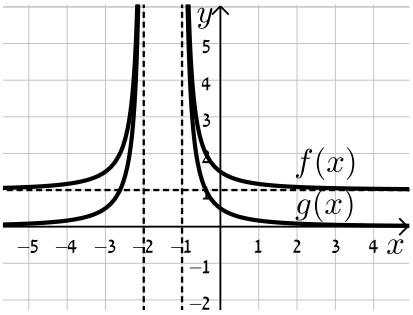
9)



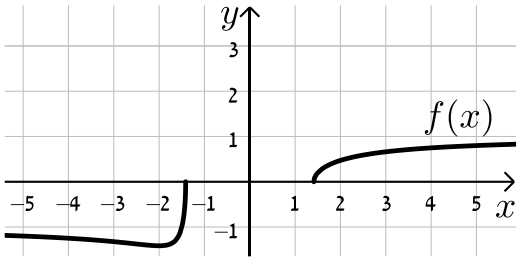
10)



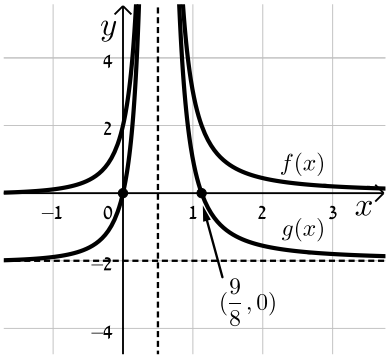
(13



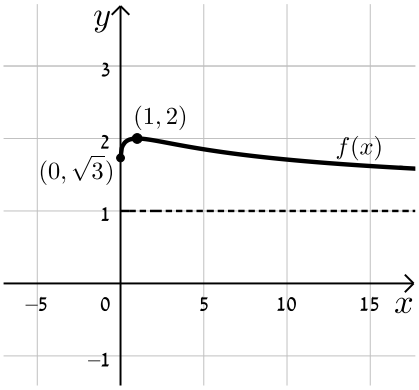
(14



(17



(18



הכפלת פונקציה בקבוע:

שאלות:

19) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$, $h(x)=4x^2$.

20) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, $h(x)=\frac{1}{4}x^2$.

21) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=-2x^2$, $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

22) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=8-x^3$.

א. מגדירים פונקציה חדשה: $g_1(x)=m\cdot f(x)$, $m>1$.
סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_1(x)$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה: $g_2(x)=m\cdot f(x)$, $0<m<1$.
סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_2(x)$.

ג. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y,
ב- B_1 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_1(x)$ עם ציר ה- y
וב- B_2 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_2(x)$ עם ציר ה- y.

i. מצא את ערך הפרמטר m עבור סעיף א' שמקיים: $y_{B_1}-y_A=24$.

ii. מצא את ערך הפרמטר m עבור סעיף ב' שמקיים: $y_A-y_{B_2}=4$.

23) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+8}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=3\cdot f(x)$. ענה על השאלות הבאות:

i. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

ii. מהן נקודות הקיצון של $g(x)$?

iii. מהם תחומי העלייה והירידה של $g(x)$?

iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של $g(x)$ עם הצירים?

v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של $g(x)$?

ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$ לצד $f(x)$.

24) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+8}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=-2\cdot f(x)$. ענה על השאלות הבאות:

i. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

ii. מהן נקודות הקיצון של $g(x)$?

iii. מהם תחומי העלייה והירידה של $g(x)$?

iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של $g(x)$ עם הצירים?

v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של $g(x)$?

ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$ לצד $f(x)$.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$, $a\neq 0$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון עבור $x=1$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$ ואת תחום הגדרתה.

ב. האם יש ל-$f(x)$ נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מהן האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)$?

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה של $f(x)$.

ו. מגדירים את הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$.
ידוע כי ל-$g(x)$ יש נקודת קיצון $(1,1)$.
מצא את k ואת נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה $g(x)$.

ז. מוסיפים קבוע B לפונקציה $g(x)$ כך שמתקבלת הפונקציה $h(x)=g(x)+B$
ובה אחת מנקודות הקיצון נמצאת על ציר ה-x.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור הקבוע B.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x^3-x$ ומגדירים גם את הפונקציה: $g(x)=-f(x)$.

א. מצא את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. התייחס לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ וענה על השאלות הבאות:

i. הוכח כי לשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

ii. מה הקשר בין נקודת החיתוך עם ציר ה-y של כל פונקציה?

iii. מה הקשר בין נקודות הקיצון של כל פונקציה?

iv. האם, ואם כן – כיצד, משתנים תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ ביחס ל-$f(x)$? נמק.

27) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=k\cdot\frac{x-1}{x^2+3}$, $k>0$.
ידוע כי הנקודה הגבוהה ביותר על גרף הפונקציה מקיימת: $y=1$.

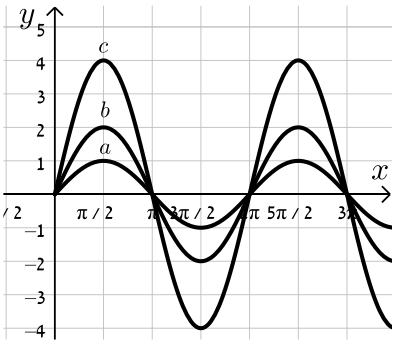
א. מצא את k וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוסף באותו הסרטוט סקיצה של הפונקציה: $g(x)=-f(x)$.

28) נתונה הפונקציה: $f(x)=k\sin x$.
באיור שלפניך 3 גרפים שונים.
קבע מה צריך להיות ערכו של הפרמטר k
עבורו כל גרף יתאים לפונקציה $f(x)$:



29) מהפונקציה $f(x)=\cos x$ בונים פונקציה חדשה $g(x)$ המתקבלת ע"י הכפלת הפונקציה המקורית פי 3 והזזתה כלפי מעלה ב-2 יחידות.

א. סרטט סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

ב. בהנחה וסדר הפעולות של יצירת הפונקציה $g(x)$ היה הפוך, כלומר תחילה היינו מזיזים את הפונקציה המקורית כלפי מעלה ב-2 יחידות ורק לאחר מכן הפונקציה הייתה מוכפלת פי 3, האם הפונקציה המתקבלת הייתה זהה לזו שקיבלת בסעיף הקודם? נמק.

תשובות סופיות:

19) סרטוט בסוף.

20) סרטוט בסוף.

21) סרטוט בסוף.

22) א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. i. $m=4$ ii. $k=\frac{1}{2}$.

23) א. תחום הגדרה: כל x ב. נקודת קיצון: $\max\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x<-2$

יורדת: $x>-2$ ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

ה. אסימפטוטות: $y=0$ ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל x.

ii. נקודת קיצון: $\min\left(-2,\frac{3}{4}\right)$ iii. עולה: $x<-2$, יורדת: $x>-2$

iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{3}{8}\right)$ v. אסימפטוטות: $y=0$

ח. סרטוט בסוף.

24) א. תחום הגדרה: כל x ב. נקודת קיצון: $\max\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x<-2$

יורדת: $x>-2$ ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

ה. אסימפטוטות: $y=0$ ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל x

ii. נקודת קיצון: $\min\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ iii. עולה: $x>-2$, יורדת: $x<-2$

iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ v. אסימפטוטות: $y=0$

ח. סרטוט בסוף.

25) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, תחום הגדרה: כל x

ב. נקודות קיצון: $\min\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\max\left(1,\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $-1<x<1$, יורדת: $x>1$, $x<-1$ ד. אסימפטוטות: $y=0$

ה. סרטוט בסוף. ו. $k=2$, $\min(-1,-1)$ ז. $B=\pm 1$.

26) א. נקודות קיצון: $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},0.192\right),\min\left(\frac{1}{\sqrt{12}},-0.192\right)$, נקודות חיתוך עם

הצירים: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ב. סרטוט בסוף.

ג. i. הוכחה. ii. זו אותה נקודה.
iii. שיעורי ה-x של נקודות הקיצון זהים, אך שיעורי ה-y הפוכים בסימנם וסוג הקיצון הפוך. iv. כל תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

27) א. $k=6$, $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$

ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: $\max(3,1)$, $\min(-1,-3)$, עולה: $-1<x<3$,
יורדת: $x>3$, $x<-1$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-2)$, $(1,0)$, אסימפטוטות: $y=0$.

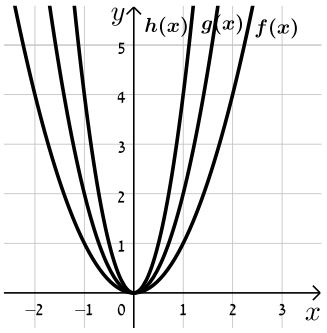
ג. סרטוט בסוף. ד. סרטוט בסוף.

28) $c:k=4$, $b:k=2$, $a:k=1$.

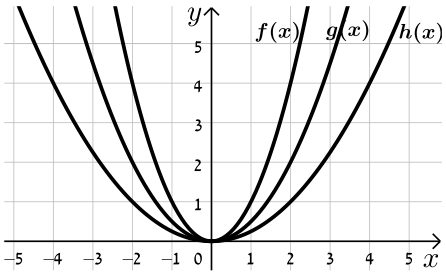
29) א. סרטוט בסוף. ב. לא הייתה מתקבלת אותה הפונקציה.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

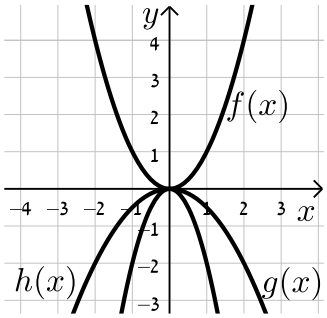
19)



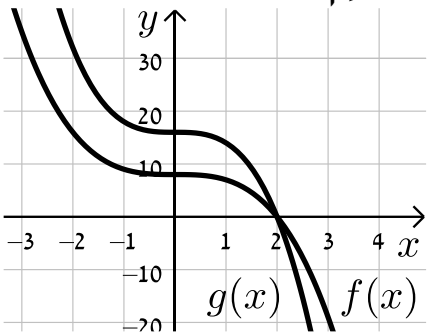
20)



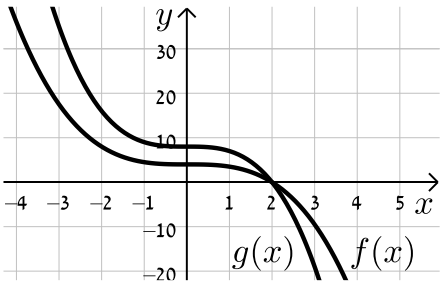
21)



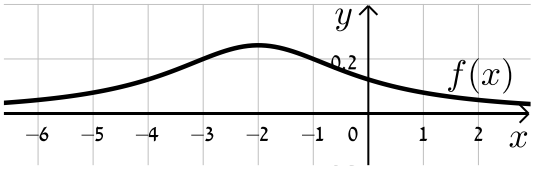
22) סעיף א



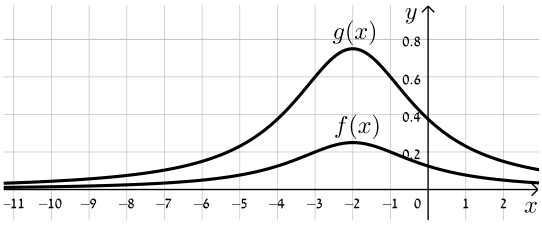
22) סעיף ב



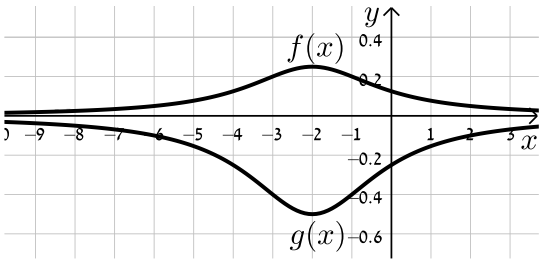
23) סעיף ו



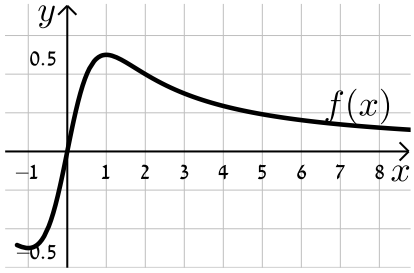
23) סעיף ח



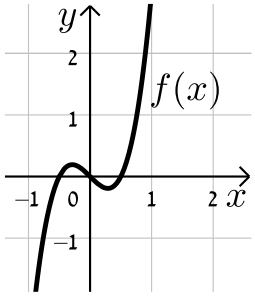
24) סעיף ח



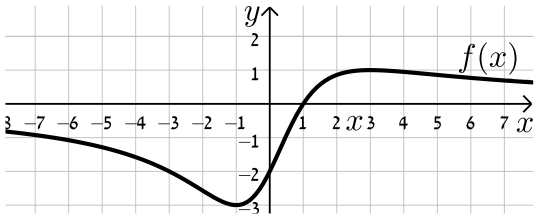
25)



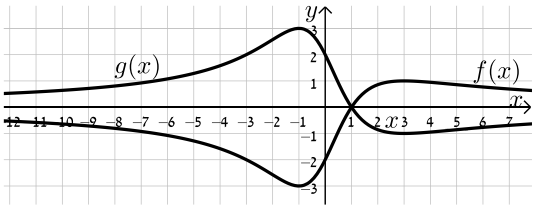
26)



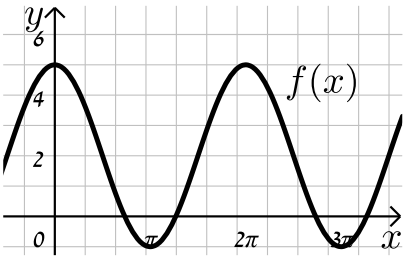
27) סעיף ג



27) סעיף ד



29)



הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

שאלות:

30) לפניך הפונקציה: $f(x)=x^2$.
סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הגרפים של הפונקציות: $g(x)=f(x-2)$ ו-$h(x)=f(x+3)$.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$.

א. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ $\frac{1}{2}$ יחידה שמאלה ולמעלה.

32) נתונה פונקציה $f(x)=x^2$. מזיזים את הפונקציה ומקבלים: $g(x)=f(x+a)+b$
כאשר a ו-b הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b אם ידוע כי: $g(x)=x^2+2x$.

ב. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b אם ידוע כי: $g(x)=x^2-4x+7$.

33) מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ 5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$.

א. כתוב באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$ שמאלה על מנת שיחתוך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=1$.

34) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x-1)$.

i. כתוב באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ii. על סמך ממצאיך מהסעיפים הקודמים, סרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

35) לפניך הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{x-4}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות קיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

iv. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

vi. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. סרטט את גרף הפונקציה $g(x)=\frac{(x+2)^3}{x-2}$ על סמך הסעיפים הקודמים.

36) מזיזים את הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ במספר יחידות a כך שיש לה נקודת מקסימום על ציר ה- y.

א. מצא בכמה יחידות יש להזיז את הפונקציה $f(x)$ על מנת שתקיים את הדרישה וקבע האם התזוזה היא ימינה או שמאלה. נמק.
האם קיים רק ערך אחד של הפרמטר a אשר מקיים את דרישה זו?

ב. היעזר בזהות: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ והראה כי הפונקציה $g(x)=k\cos x$ המוזזת יכולה להיות מיוצגת ע"י k ומצא את ערך הפרמטר.

תשובות סופיות:

30) סרטוט בסוף.

31) א. $g(x)=x^2-6x+13$ ב. $g(x)=x^2+8x+14$ ג. $g(x)=x^2+x+\frac{3}{4}$.

32) א. $a=1\ ,\ b=-1$ ב. $a=-2\ ,\ b=3$.

33) א. $g(x)=\sqrt{x-5}$ ב. 1.

34) א. תחום הגדרה: $x\neq -1$, אסימפטוטות: $x=-1$

ב. נקודות קיצון: $\min(1,-1)\ ,\ \max(-3,-9)$

ג. עולה: $x>1\ ,\ x<-3$, יורדת: $-1<x<1\ ,\ -3<x<-1$

ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)\ ,\ (3,0)$

ה. סרטוט בסוף ו. i. $g(x)=\frac{x^2-5x+4}{x}$ ii. סרטוט בסוף.

35) א. i. תחום הגדרה: $x\neq 4$ ii. נקודת קיצון: $\min(6,108)$

iii. עולה: $x>6$, יורדת: $4<x<6\ ,\ x<4$

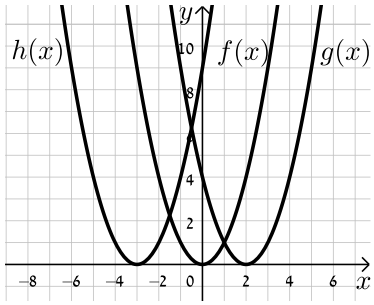
iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

v. אסימפטוטות: $x=4$ vi. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

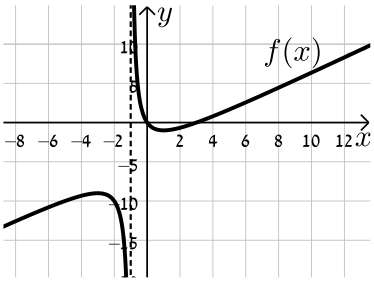
36) א. יחידות $\frac{\pi}{4}$ ב. $k=\sqrt{2}$

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

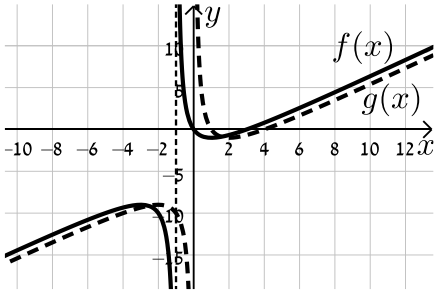
30)



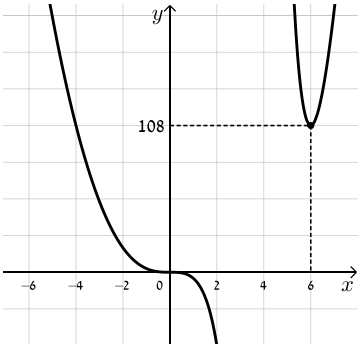
34) סעיף ה



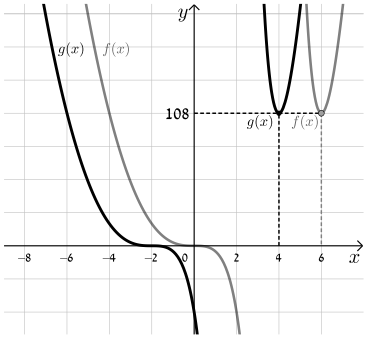
34) סעיף ו.ii



35) סעיף א.iv



35) סעיף ב



מתיחה וכיווץ של פונקציה:

שאלות:

37) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$. כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$.

38) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-2x^2$. כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f\left(\frac{x}{4}\right)$.

39) נתונה הפונקציה: $f(x)=12x-3x^3$. רוצים לכווץ את הפונקציה כך שנקודת החיתוך החיובית שלה עם ציר ה-x תקטן פי 4. כתוב פונקציה מפושטת המתארת את הכיווץ הנ"ל.

40) הפונקציה: $f(x)=\frac{x^4-8x}{16}$ חותכת את ציר ה-x בחלקו החיובי בנקודה A.
מצא כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו $(1,0)$.

41) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-x^2$. רוצים לכווץ אותה פי k כך שנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב-g.

א. מצא את ערכו של הפרמטר k.

ב. כתוב את הפונקציה המכווצת $g(x)$ בצורה מפורשת.

ג. סרטט את הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. הראה כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

42) גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax-x^2}$, $a\neq 0$ חותך את ציר ה-x בנקודה A שאינה בראשית הצירים, וגרף הפונקציה $g(x)=f(4x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה B שאינה בראשית הצירים. ידוע כי $x_B=3$.

א. מצא את ערך הפרמטר a וחקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון (מקומיות ומוחלטות אם ישנן) וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. היעזר בתוצאות הסעיף הקודם וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק כל שלב בקביעותיך.

43) מותחים את הפונקציה $f(x)=\sqrt{4-3x-x^2}$ פי k , $(k>1)$ כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$. ידוע כי תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $-16\le x\le 4$.

א. מצא את k.

ב. האם לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ אותה נקודת קיצון מקומית? אם כן – מהי? אם לא – נמק קביעותיך.

44) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{3}{x^2+8x+12}$ ומגדירים את: $g(x)=f(x/4)$ ו- $h(x)=f(3x)$.

א. חקור את $f(x)$ לפי: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה.

ב. היעזר בסעיפים הקודמים וענה על השאלות הבאות:

i. מהו הקשר בין האסימפטוטות של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ לבין האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$?

ii. מהו הקשר בין נקודות הקיצון של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ לבין נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$?

ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$ ו-$h(x)$.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{a\sin^2 x+1}$, $a>0$.

א. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי לפונקציה ערך מינימלי של $\frac{1}{5}$.

ב. הראה כי לפונקציה נקודות מקסימום המקיימות: $x_{max}=\pi k$, k שלם.
וכי הערך המירבי של הפונקציה הוא 1.

ג. מגדירים פונקציה: $g(x)=B\cdot f(x/m)$ אשר מקיימת:

i. נקודות המקסימום של הפונקציה מקיימות: $x_{max}=\frac{\pi}{2}k$, k שלם

ii. הערך המירבי של הפונקציה הוא 2.
מצא את ערכי הפרמטרים m ו- B.

תשובות סופיות:

37) $h(x)=\frac{x^2}{4}$, $g(x)=4x^2$.

38) $h(x)=1\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}$, $g(x)=12x-8x^2$.

39) $f(4x)=48-192x^3$.

40) $f(2x)=x^4-x$.

41) א. $k=3$ ב. $g(x)=18x-9x^2$ ג. סרטוט בסוף

ד. ערך ה-x של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום $\max(3,9)$ הופך ל-$\max(1,9)$).

42) א. $a=12$ i. תחום הגדרה: $0\le x\le 12$ ii. נקודת קיצון: $\min(12,0)$

קצה, $\max(6,6)$, $\min(0,0)$ קצה, iii. עולה: $0<x<6$, יורדת: $6<x<12$ iv. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

43) א. $k=4$ ב. לגרפים אין את אותה נקודת קיצון. ערך ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ גדל פי 4 ביחס ל-$f(x)$ (מ-$x_{max}=-1.5$ ל-$x_{max}=-6$) עקב חלוקת ה-x ב-4, כמו כל הנקודות בפונקציה (וערך ה-y נותר ללא שינוי).

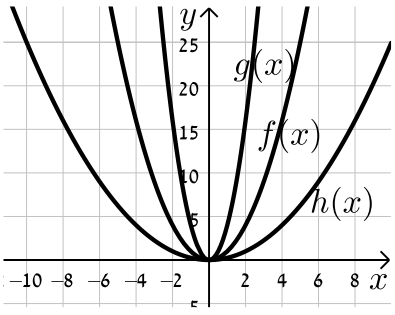
44) א. תחום הגדרה: $x\ne -2,-6$, אסימפטוטות: $y=0$, $x=-2,-6$, נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, נקודת קיצון: $\max\left(-4,-\frac{3}{4}\right)$, עולה: $x<-6$, $-6<x<-4$ יורדת: $x>-2$, $-4<x<-2$ ב. i. האסימפטוטה האופקית נותרת ללא שינוי. האסימפטוטות האנכיות משתנות ב-$g(x)$ הן מוכפלות ב-4 וב-$h(x)$ הן מחולקות ב-3.

ii. ערך ה-x של נקודת הקיצון משתנה: ב-$g(x)$ הוא מוכפל ב-4 וב-$h(x)$ הוא מחולק ב-3. ערך ה-y של נקודת הקיצון נותר ללא שינוי וכך גם סוג הקיצון. ג. סרטוט בסוף.

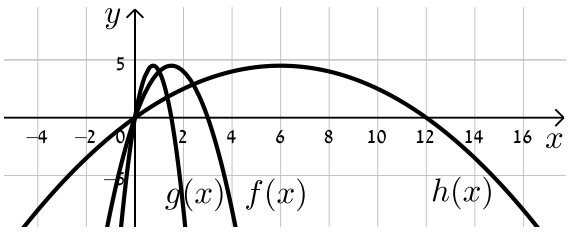
45) א. $a=4$ ב. הוכחה. ג. i. $(0,2)$ ii. $B=2$, $m=\frac{1}{2}$.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

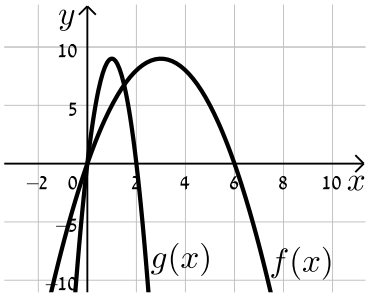
37)



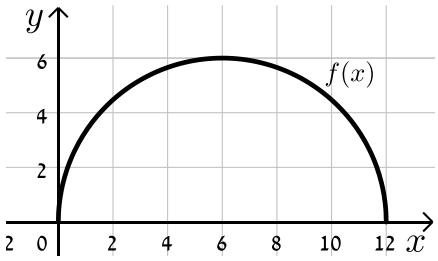
38)



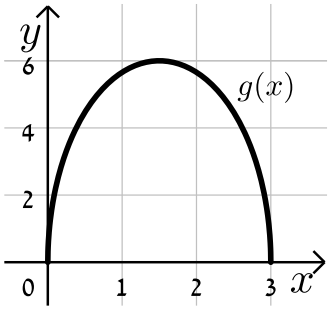
41)



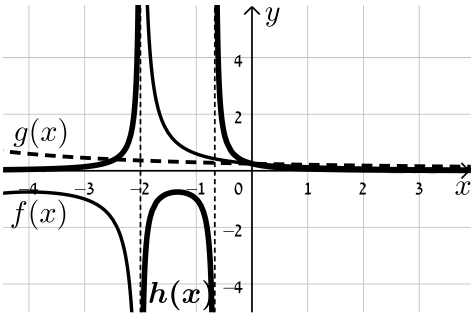
42) סעיף א. iv



42) סעיף ב



44)



היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y:

שאלות:

46) סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות: $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=f(-x)$
והראה כי ציר ה- y מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

47) שקף כל אחת מהפונקציות הבאות וכתוב ביטוי מפושט לכל אחת מהן:

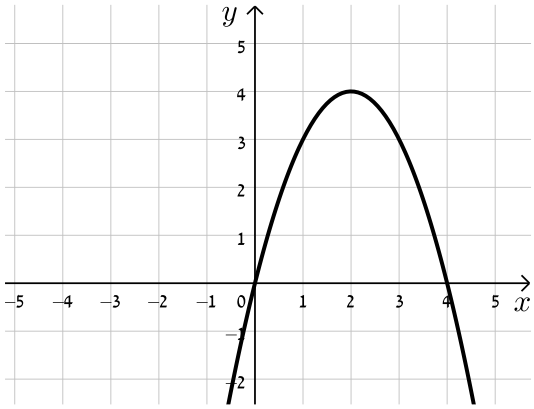
א. $f(x)=x^3+2x-1$.

ב. $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$.

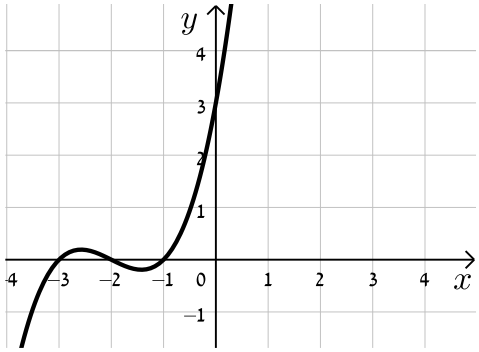
ג. $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$.

48) לפניך סרטוטים של פונקציות שונות.
הוסף לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה- y.

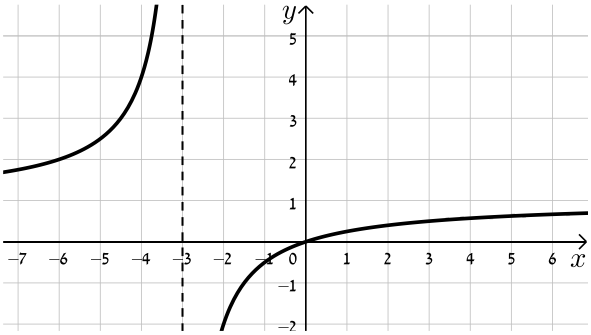
א.



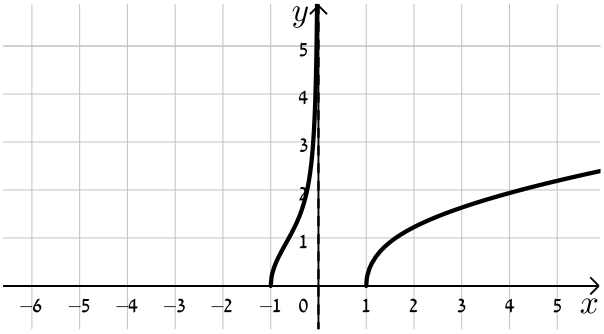
ב.



ג.



ד.



49) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-3x^3+2x^2$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

ב. שקף את הפונקציה וכתוב ביטוי מפושט של הפונקציה המתקבלת.

ג. הראה כי נקודות החיתוך עם ציר ה-x של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ושל הפונקציה המשוקפת שלה הם מספרים נגדיים.

50) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{10x-x^2}$.

סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)=f(-x)$ ו-$h(x)=-f(x)$ והסבר איזה ציר מהווה סימטריה בכל מקרה ביחס ל-$f(x)$.

51) הראה כי הפונקציה $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$ זהה לפונקציה $g(x)=f(-x)$ והסבר מה ניתן לומר על הגרפים של הפונקציות הללו ועל הסימטריה שלהן זו לזו ביחס לציר ה-y.

52) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{18\sqrt{x}}{x^2+7x+10}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

ג. הראה כי הפונקציה חותכת את הצירים רק בראשית הצירים וכי ציר ה-x הוא האסימפטוטה האופקית שלה.

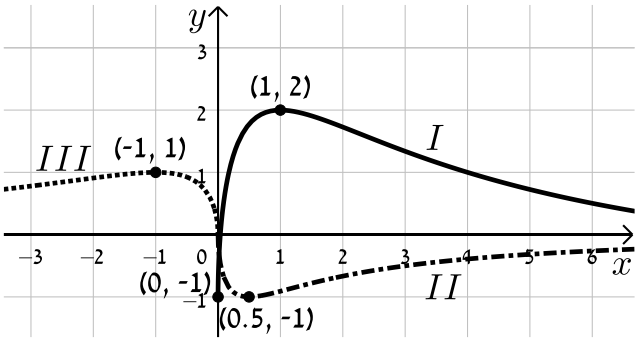
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. לפניך מספר פונקציות:

- $g_1(x)=f(-x)$.
- $g_2(x)=k\cdot f(x)+B$ כאשר: $k>1$, $B\neq 0$.
- $g_3(x)=-f(ax)$ כאשר: $a>1$.

באיור שלפניך מופיעים הגרפים של שלוש הפונקציות. התאם כל גרף לכל פונקציה ומצא את ערכי הפרמטרים a, k ו-b על בסיס הנתונים המספריים.

נמק.



53) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^3}$, $a\cdot b<0$.

מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(ax)$.

א. בטא באמצעות a ו-b את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?

ג. הוכח כי לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון (x_0,y_0) המקיימת: $x_0>3$.

ד. נתון כי $x_0=7$. מצא את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה (ללא פרמטרים).

ה. נתון כי $y_0=-\frac{4}{81}$.

i. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b.

ii. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

היעזר בהגדרת הפונקציה $g(x)$.

54) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x-2}-2x+1}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$?

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)$.

ג. מצא את נקודת הקיצון של $f(x)$ ורשום את תחומי העלייה והירידה שלה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. מגדירים את הפונקציות: $g(x)=f(ax)$ ו-$h(x)=f(x+a)$, a פרמטר.

הנח $a=1.5$ וענה על הסעיפים הבאים:

i. האם לכל הגרפים אותו תחום הגדרה? נמק.

ii. האם לכל הגרפים אותו סוג קיצון? נמק.

iii. לאיזה מבין הגרפים של הפונקציות הנ"ל תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור x הקטן ביותר ולאיזה תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור x הגדול ביותר? נמק איכותית.

תשובות סופיות:

46) סרטוט בסוף.

47) א. $f(-x)=-x^3-2x-1$ ב. $f(-x)=\frac{x}{x-3}$ ג. $f(-x)=\sqrt{-4x-x^2}$.

48) סרטוט בסוף.

49) א. $(2,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$ ב. $f(-x)=x^4+3x^3+2x^2$ ג. הוכחה.

50) סרטוט בסוף. ציר ה-y מהווה את ציר הסימטריה בין $f(x)$ ל-$g(x)$ וציר ה-x מהווה את ציר הסימטריה בין $f(x)$ ל-$h(x)$.

51) הפונקציות זהות. עבור שתיהן ציר ה-y מהווה ציר סימטריה.

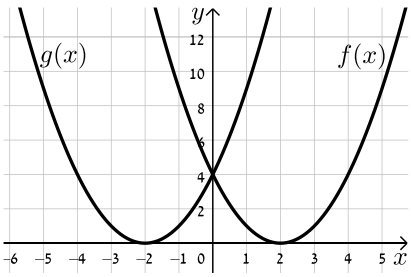
52) א. תחום הגדרה: $0\le x$ ב. נקודות קיצון: $\max(1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $0<x<1$, יורדת: $x>1$ ג. הוכחה. ד. סרטוט בסוף.
ה. $g_1(x)\leftrightarrow III$, $g_2(x)\leftrightarrow I$, $g_3(x)\leftrightarrow II$, $a=2$, $B=-1$, $k=3$.

53) א. תחום ההגדרה: $x\ne\frac{b}{a}$ ב. אסימפטוטות מאונכות: $y=0$, $x=\frac{b}{a}$
ג. הוכחה ד. $x=-2$ ה. i. $a=-1$, $b=2$
ii. סרטוט בסוף.

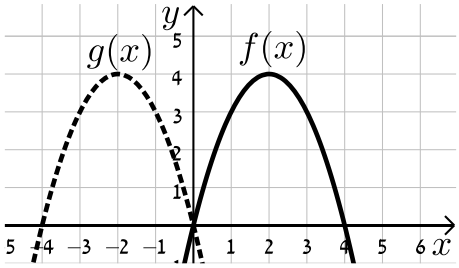
54) א. $2\le x$ ב. אסימפטוטות מקבילות: $y=-1$
ג. נקודות קיצון: $\min(3,-2)$, $\max\left(2,-1\frac{1}{3}\right)$, תחום עלייה: $3<x$,
תחום ירידה: $2<x<3$ ד. סרטוט בסוף.
ה. i. לא: $h(x)x\ge\frac{1}{2}$, $g(x):x\ge1\frac{1}{3}$, $f(x):x\ge2$ ii. כן.
iii. ל-$f(x)$ השיעור הגבוה ביותר, ל-$h(x)$ השיעור הקטן ביותר.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

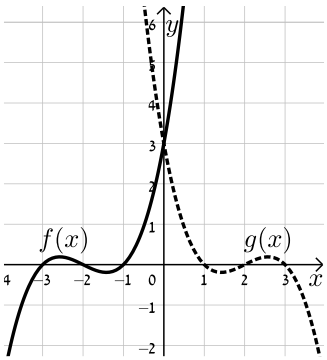
46)



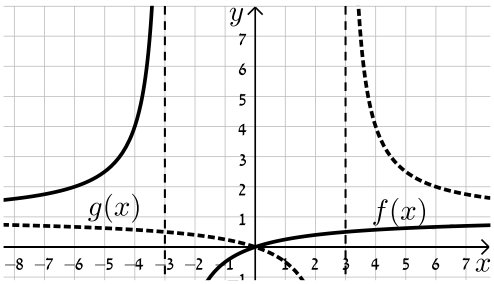
48) סעיף א



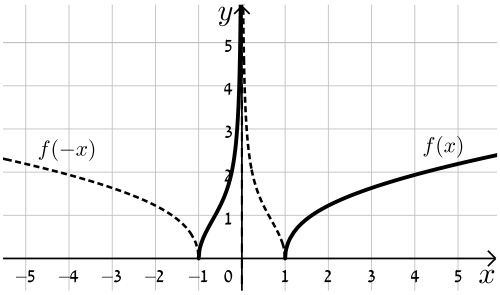
48) סעיף ב



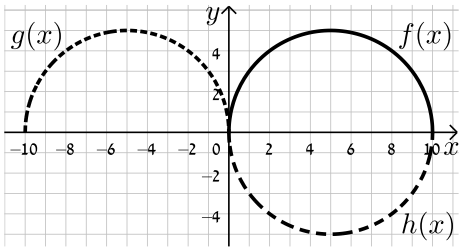
48) סעיף ג



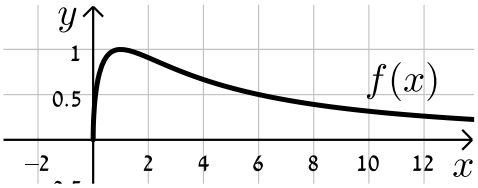
49) סעיף ד



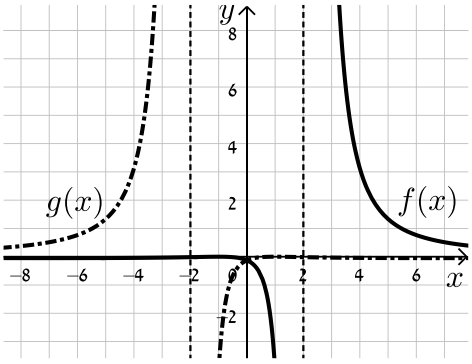
50)



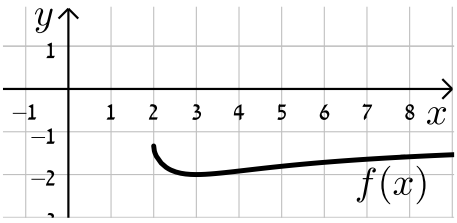
52)



53)



54)



ערך מוחלט של פונקציה:

שאלות:

55) נתונות הפונקציות: $f(x)=x$ ו- $g(x)=|x|$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים עם ציר ה- x.

ב. סרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת והסבר מה ההבדל ביניהם.

ג. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=x-2$?

ד. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3(x-2)$?

ה. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3x-2$?

56) סרטט במערכת צירים אחת את זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2-2x$ ו- $g(x)=|x^2-2x|$.

ב. $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=|x^3|$.

ג. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו- $g(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$.

57) סרטט את הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\tan x$ ו- $g(x)=|\tan x|$.

58) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$ ועליה מבצעים את הפעולות הבאות:

- מזיזים את הפונקציה $f(x)$ ב-3 יחידות ימינה.
- מורידים 4 יחידות מערך הפונקציה.
- לוקחים את הערך המוחלט של הפונקציה.

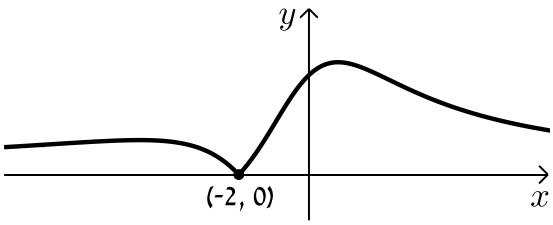
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה המתקבלת.

ב. האם תשתנה התוצאה אם נחליף בין שתי הפעולות הראשונות?

59) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+2}{x^2+ax+6}$, $a\neq 0$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.



60) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון מקומיות וקצה (אם ישנן).

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. נקודות חיתוך עם הצירים (אם ישנן).

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוסף לאותה מערכת הצירים את הסקיצה של גרף הפונקציה: $g(x)=|f(-x)|$.
נמק את שיקוליך.

61) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+1}$ בתחום $[-2\pi:2\pi]$.

א. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. נתון כי לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות בתחום הנתון.
מצא את משוואותיהן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. קבע בכמה נקודות חותך הישר $y=1$ את גרף הפונקציה $|f(x)|$ בתחום הנתון.
מצא את נקודות החיתוך.

תשובות סופיות:

55) א. $(0,0)$ ב. סרטוט בסוף.

56) א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. סרטוט בסוף

57) סרטוט בסוף.

58) א. סרטוט בסוף ב. התוצאה לא תשתנה.

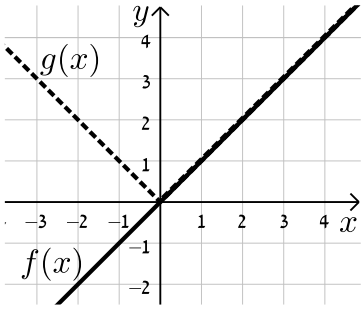
59) $a=1$.

60) א. i. תחום הגדרה: $0<x$ ii. נקודת קיצון: אין.
iii. עולה: $x>0$ iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$
v. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

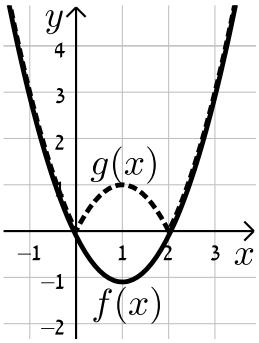
61) א. הוכחה. ב. $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,1)$ ג. $x=\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
ד. סרטוט בסוף. ה. 2 נקודות: $(\pi,-1)$, $(-\pi,-1)$.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

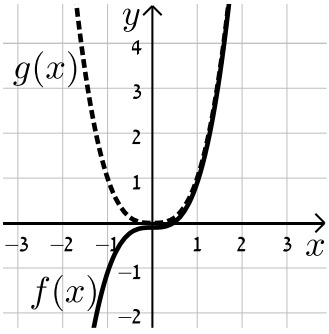
55)



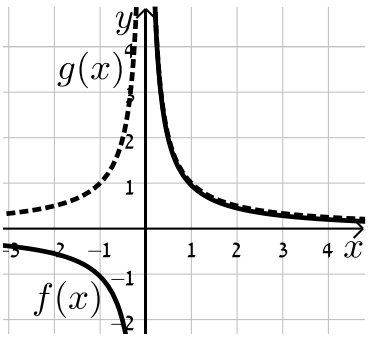
56) סעיף א



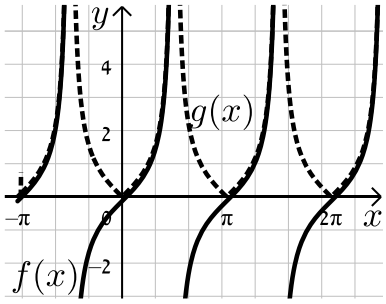
56) סעיף ב



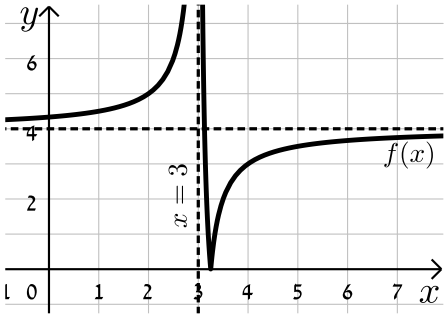
56) סעיף ג



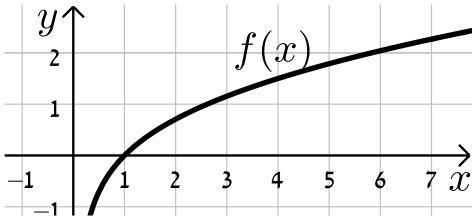
57)



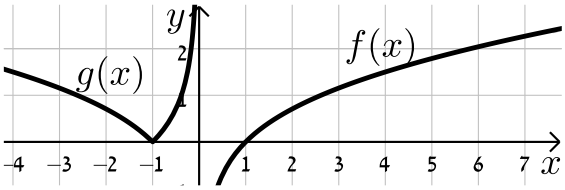
58)



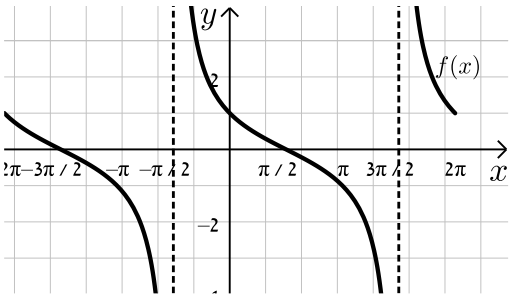
60) סעיף א. v



60) סעיף ב



61)



כלים מתמטיים 71001

פרק 25 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

כלים מתמטיים 71001

פרק 26 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה מעריכית 423
2. שימושי הנגזרת 427
3. חקירה של פונקציה מעריכית 428

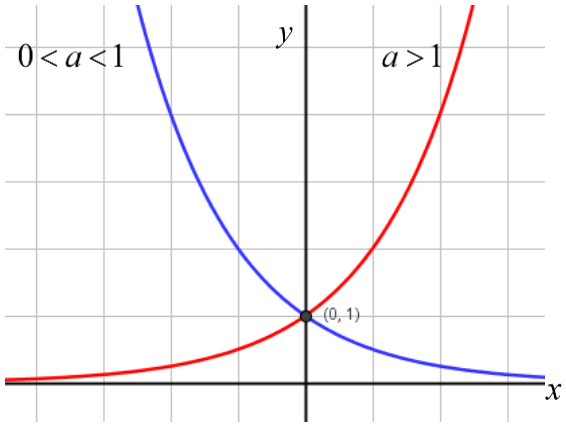
הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x)=a^x$

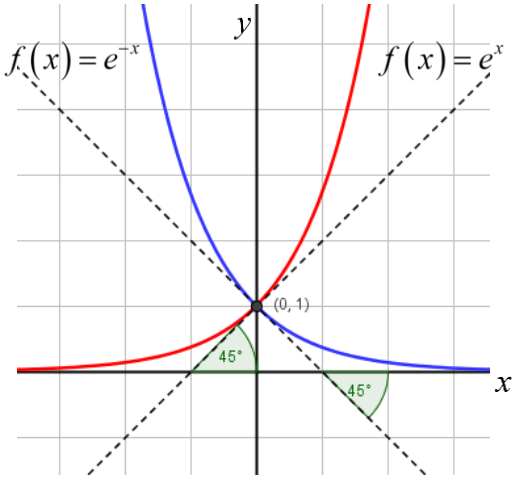
עבור: $a>1$ ו-$0<a<1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x.
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=e^x$ ו- $f(x)=e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1-.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$
$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y=a\cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y'=a\cdot f'(x)$
2.	$y=f(x)+g(x)$	סכום פונקציות	$y'=f'(x)+g'(x)$
3.	$y=f(x)\cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4.	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y=f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x)=3e^{x}+e^{2x}+e^{-x}+2x+1$

ב. $f(x)=e^{x^2-3x}+ex$

ג. $f(x)=2^{3x}$

ד. $f(x)=3^{x^2}+4^{-x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x)=x\cdot e^{x}$

ב. $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$

ג. $f(x)=(x+1)\cdot 2^{x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x)=\frac{x^2}{e^{x}}$

ב. $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x)=5\left(e^{2x}-1\right)^{3}$

ב. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$

ג. $f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{x}+1}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=e^{2x}$

ב. $f(x)=e^{x}+1$

ג. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ד. $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{x}$

ה. $f(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+1\right)$

ו. $f(x)=e^{3x-2}$

ז. $f(x)=e^{x}\cdot\frac{1}{x}$

ח. $f(x)=x^3e^{2x}$

ט. $f(x)=e^{-2x}(x+4)$

י. $f(x)=e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

יב. $f(x)=\frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x)=\frac{2+x^2}{e^{x^2}}$

יד. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}$

טו. $f(x)=\frac{x^2+1}{e^{-x}}$

טז. $f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x+1}}$

תשובות סופיות:

1) א. $3e^x+2e^{2x}-e^{-x}+2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x}+e$ ג. $3\ln 2\cdot 2^{3x}$ ד. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}-\ln 4\cdot 4^{-x}$

2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2+\ln 2)$

3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $A(1,e)$.

7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ בנקודה שבה $x=0$.

8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^x-e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

9) נתונה הפונקציה: $y=e^{2x}+3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x=2$.
מצא את משוואת המשיק.

10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ בנקודה $(1,15)$ הוא $21\ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

6) $y=ex$

7) $y=3x+1$

8) $y=(e-1)x+e$, $y=(-e^2+e)x+e^2$

9) $y=2e^4x+3ex-3e^4$

10) $a=2$, $b=-1$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x)=\frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x)=\frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2e^x$.

13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.
הפונקציה משיקה לציר ה-x בנקודה שבה $x=1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה: $f(x)=8^x+p\cdot 2^x+q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3,-19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו-q.

16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+e^x$.

17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$.

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+5}{e^x-1}$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x}-5}$.

20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}-2}{e^{2x}-5e^{x}+6}$.

22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$.

23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^{3}-1}{e^{x}}$.

24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{e^{3x}-e}$.

25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=(x-3)e^{x}$.

26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^{2}+a}{be^{x}}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1,\frac{2}{e}\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x)=(x-1)e^x$

ב. $f(x)=(x^2+1)e^x$

ג. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$

ד. $f(x)=e^{x^2-x}$

ה. $f(x)=\frac{2}{e^{x^2}+1}$

ו. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x+1}}$

29) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x+10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

31) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

32) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

34) נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק פתרון אחד?

35) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{3x}}{12x^2+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

37) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0<\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}\le e^2$.

38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^x+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=8$.

א. מצא את a.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=16x+7-16\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

39) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=6x-e^x$ ו- $g(x)=ae^x-e^{2x}+b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה-y.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b.

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40) לגרף הפונקציה: $f(x)=ax^2\cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2,\frac{4}{e}\right)$, $a,b\neq 0$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מעבירים ישר: $y=k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41) לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) הישר $x=\sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2+m}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$.

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x)=0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=-0.01$ את גרף הפונקציה?

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=12$.

א. מצא את a.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=22x+28-22\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-x? אם כן מצא את הנקודות.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot a^{x}$, $(a>0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=-\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x=2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x)=x^{2}\cdot 2^{x}-kx\cdot 2^{x}$.

ג. מצא את k.

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46) נתונה הפונקציה: $f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $x\neq 0$ ג. $x\neq \ln 5$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq \ln 2$ ה. כל x

ו. $0\le x\neq \frac{2}{5}$ ז. $x\le 0\ ,\ x\ge \ln 3$

12) $\min(0,0)\ ,\ \max\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

13) $\min\left(3,e^3\right)$

14) $a=4\ ,\ b=-12\ ,\ \max(3.5,0.483)\ ,\ \min(1.5,0)$

15) $q=35\ ,\ p=-27$

16) $y=0$

17) $y=0$

18) $y=1\ ,\ y=-5\ ,\ x=0$

19) $y=-\frac{1}{5}\ ,\ x=\ln 5$

20) $y=1\ ,y=-1$

21) $y=0\ ,\ y=-\frac{1}{3}\ ,x=\ln 3$, נקודת אי הגדרה: $(\ln 2,-1)$

22) $y=0\ ,\ x=0$

23) $y=0$

24) $y=0\ ,\ x=\frac{1}{3}$

25) $y=0$

26) $x=0$, נקודת אי הגדרה: $(0,0)$

27) $a=1\ ,\ b=1\ ,\ \left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

28) א.1. כל x .2 $(0,-1)\ ,\ (1,0)$ .3 $\min(0,-1)$ .4 עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

ב.1. כל x .2 $(0,1)$ .3 פיתול $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ .4 עולה: $x<-1\ ,\ x>-1$

ג.1. כל x .2 $(0,0)$ .3 $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max\left(2,\frac{4}{e}\right)$

.4 עולה: $0<x<2\ ,\ x<-2$ יורדת: $-2<x<0\ ,\ x>2$

ד.1. כל x .2 $(0,1)$ .3 $\min\left(0.5,e^{-0.25}\right)$ .4 עולה: $x>0.5$ יורדת: $x<0.5$

ה. 1. כל x 2. $(0,1)$ 3. $\max(0,1)$ 4. עולה: $x<0$ יורדת: $x>0$

ו. 1. כל x 2. $(0,2e^{-1})$ 3. $\min(0,2e^{-1})$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

29) א. כל x ב. $\min(2,-e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x>2$ תחומי ירידה: $x<2$

ד. $(0,-3)$, $(3,0)$

30) א. כל x ב. $\min(\ln 3,1.59)$, $\max(0,3)$

ג. תחומי עלייה: $x>\ln 3$ או $x<0$ תחומי ירידה: $0<x<\ln 3$ ד. $(0,3)$

31) א. כל x ב. $\max\left(1,\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\min\left(-1,-\frac{4}{e^{0.5}}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ תחומי ירידה: $x>1$ או $x<-1$ ד. $(0,0)$

32) א. כל x ב. $\max\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x<3$, יורדת: $x>3$

ד. $(0,0)$

33) א. כל x ב. $\min(-0.91,-0.67)$ ג. עולה: $x>-0.91$ יורדת: $x<-0.91$

ד. $(0,0)$

34) א. כל x ב. $\min\left(-1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$, $\max(1,2\sqrt{e})$ ג. עולה: $-1<x<1$ יורדת:

$x<-1$, $x>1$ ד. $(0,2)$ ה. $y=2$ ז. $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$, $m=2\sqrt{e}$, $m=2$

35) א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$, יורדת: $0\neq x<\frac{1}{2}$

ד. אין

36) א. כל x ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^{1.5}}{4}\right)$, $\max\left(\frac{1}{6},\frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ג. עולה: $x<\frac{1}{6}$, $x>\frac{1}{2}$ יורדת:

$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$

37) א. $k=1$, $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1,e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0<f(x)\le e^2$

38) א. $a=4$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=-5$ ד. $(0,0)$

39) א. $b=-12$, $a=12$ ב. עולות: $x<\ln 6$ יורדות: $x>\ln 6$

40) א. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ ב. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0<k<\frac{4}{e}$

41) א. $a=\frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11,\frac{48}{e^{2\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1<x<11$ יורדת: $x<1$, $x>11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

42) א. $m=-6$ $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-6}$ ב. $\min\left(3,\frac{e^6}{3}\right)$, $\max\left(-2,-\frac{1}{2e^4}\right)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

43) א. $x=0,-1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5,-3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y=0$

ד. 2 נקודות.

44) א. $a=7$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=10$ ד. לא.

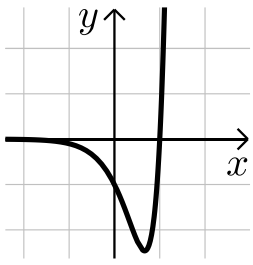
45) א. $a=2$ ב. עולה: $x>-\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x<-\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k=1$

ד. $(0,0)$

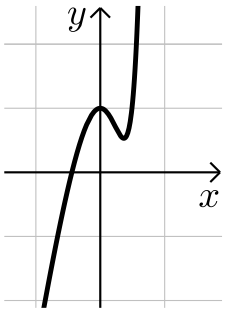
46) א. $y=-x\ln 81+7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:

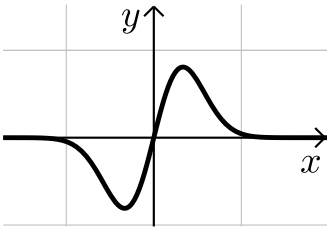
29)



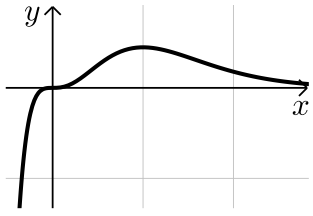
30)



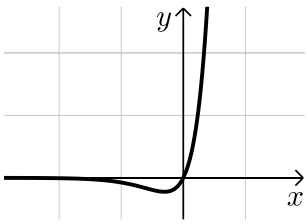
31)



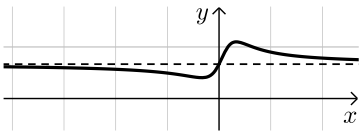
32)



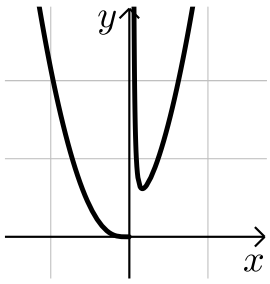
33)



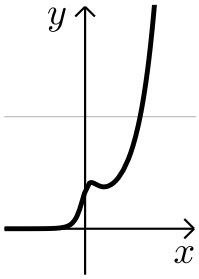
34)



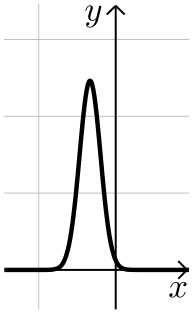
(35



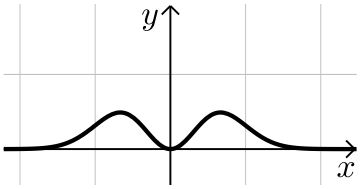
(36



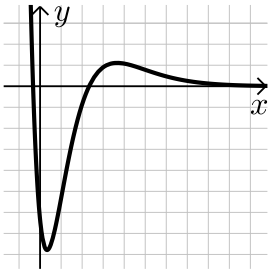
(37



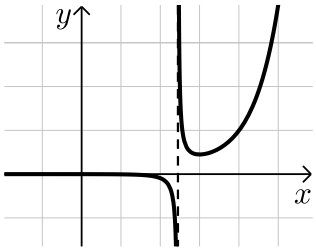
(40



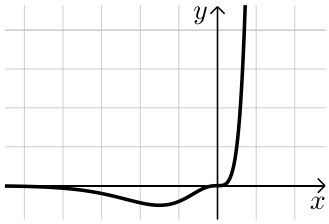
(41



(42



(43



כלים מתמטיים 71001

פרק 27 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

תוכן העניינים

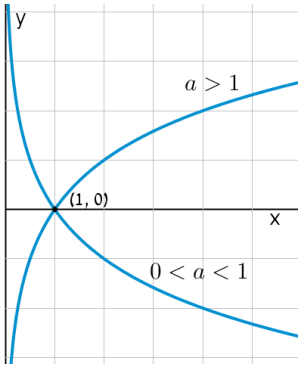
1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית 439
2. שימושי הנגזרת 444
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית 445

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

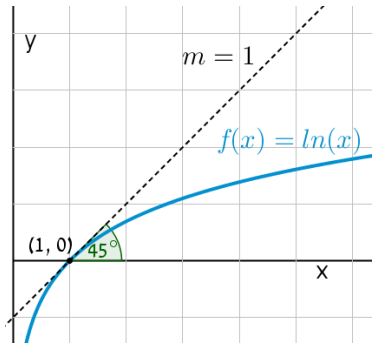
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x)=\log_a x$ עבור $a>1$ ו- $0<a<1$:



תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x>0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1,0)$.
- עבור $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=\ln x=\log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:



תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y=\log\left(f(x)\right)$ הוא: $f(x)>0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x)=3\ln x+4\ln(x+2)-\ln(5x-1)$ ב. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

ג. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x)=\ln(e^x+1)$

ה. $f(x)=\ln(\cos x)$ ו. $f(x)=\log_2 x+5\log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x)=x\ln x$ ב. $f(x)=(3x+1)^2\ln x$ ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+2}$ ה. $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x)=\ln^3 x$ ב. $f(x)=3\ln^2 x$

ג. $f(x)=x^2\ln^2 x$ ד. $f(x)=\frac{\ln^2 x+1}{(\ln x+1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=\ln(x+2)$

ב. $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

ג. $f(x)=x^2\ln x$

ד. $f(x)=x^3\ln x$

ה. $f(x)=\ln e^{2x}$

ו. $f(x)=e^x\ln x$

ז. $f(x)=e^{-x^2}\ln x$

ח. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$

ט. $f(x)=\ln(x^2)$

י. $f(x)=\ln(x^4)$

יא. $f(x)=(\ln x)^4$

יב. $f(x)=x\ln x-\ln x^2$

יג. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

יד. $f(x)=\ln\sqrt{x}$

טו. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

טז. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x}$

ב. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

ג. $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{x+3}$

ד. $f(x)=\ln\dfrac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$

ו. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

ז. $f(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ח. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

ט. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

י. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+5x}{1-5x}}$

יא. $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$

יב. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x}$

יג. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

יד. $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

טו. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^4 x}$

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}-\frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x)=-\tan x$ ו. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}+\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$

2) א. $f'(x)=\ln x+1$ ב. $f'(x)=(3x+1)\left(6\ln x+\frac{3x+1}{x}\right)$ ג. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ה. $f'(x)=\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$.

3) א. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$ ג. $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$

ד. $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3}$.

4) א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2\ln x+2}{x}$ ג. $x(2\ln x+1)$

ד. $x^2(3\ln x+1)$ ה. 2 ו. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

ז. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$ ח. $4x\ln x$ ט. $\frac{2}{x}$ י. $\frac{4}{x}$

יא. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יב. $\ln x+1-\frac{2}{x}$ יג. $\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

יד. $\frac{1}{2x}$ טו. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ טז. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

5) א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

י. $\frac{5}{1-25x^2}$

יא. $\frac{1-3\ln\sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יב. $\frac{3\ln^2 x-\ln^3 x}{x^2}$

יג. $\frac{\ln\left(x^2\right)-2}{\ln^2\left(x^2\right)}$

יד. $\frac{2\left(\ln^4 x-1\right)}{x\ln^3 x}$

טו. $\frac{\ln x-4}{\ln^5 x}$.

שימושי הנגזרת:

שאלות:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

8) הגרפים של הפונקציות $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

9) לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\ln\left(x^2+1\right)$ בנקודה שבה $x=1$.

תשובות סופיות:

6) $y=\frac{1}{e}x$.

7) $a=2\ ,\ b=-2$.

8) $y=\frac{1}{e}x$.

9) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$.

10) $y=\ln 2\cdot x+x-1$.

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\ln x$

ב. $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

ג. $f(x)=\log_3\left(x^2-8x-20\right)$

ד. $f(x)=\ln\left(e^x-4\right)$

ה. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$

ו. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3}$

ז. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=2\ln x-x^2$.

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2\ln x$.

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$. הנקודה $\left(e^2,\dfrac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln^2 x+b\ln x}{\left(\ln x+1\right)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e},-\dfrac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(x-3)$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$.

20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$.

21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x-4}$.

22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln^2 x+1}$.

24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=x\ln x+2$.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x$
ב. $y=x\ln x$
ג. $y=x\ln x-x$
ד. $y=\sqrt{x}\ln x$
ה. $y=x^2\ln x$
ו. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

27) נתונה הפונקציה $f(x)=2x\ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y=k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

29) נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x, $(x_A=x_B)$.
מצא את שיעור ה-x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.

iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה-x שלהן זהה.
הוכח כי מכפלת שיעורי ה-y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

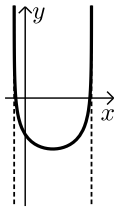
32) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\left(x^2-6x-7\right)$.

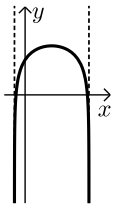
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

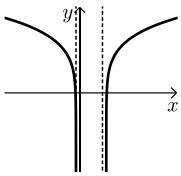
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-y?

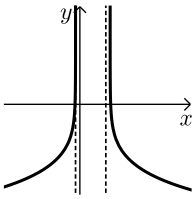
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.


II.


III.


IV.


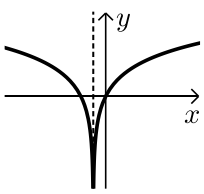
33) נתונה הפונקציה: $y=\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

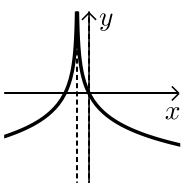
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

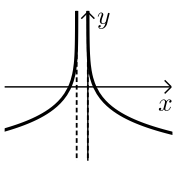
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-y?

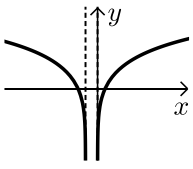
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.


II.


III.


IV.


ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\frac{2x+1}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x\right)$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\ln^3 x+5\ln^2 x+4\ln x$.

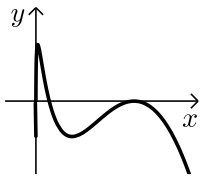
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

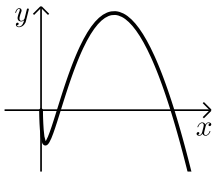
ג. ענה על השאלות הבאות:

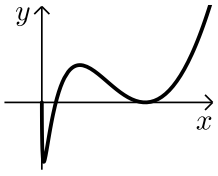
i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

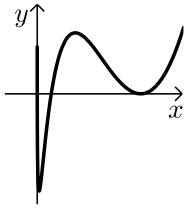
ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.

I.


II.


III.


IV.


37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x)=\ln x$.

38) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)=\ln 2-0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=e$.

39) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a\neq 1$.

א. הבע באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y'=0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x>e-2$. מצא את a.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x>-1$.

ד. נתון הישר: $y=k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln x+\frac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y?
אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

11) א. $x>0$ ב. $x\neq 0$ ג. $x>10$ או $x<-2$ ד. $x>\ln 4$
ה. $0<x\neq e$ ו. $x>0$ וגם $x\neq e^3,e^{-1}$ ז. $x\geq e$.

12) $\max(1,-1)$.

13) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

14) $\min\left(\sqrt{e},0\right)$ קצה, $\max\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

15) $\min(4,-1)$.

16) $a=1$, $b=-1$.

17) $a=1$, $b=-1$.

18) $x=3$.

19) נקודת אי הגדרה $(0,0)$, $y=0$, $x=e$.

20) נקודת אי הגדרה $(0,2)$, $x=\frac{1}{e}$, $y=2$.

21) נקודת אי הגדרה $\left(e^2,\frac{1}{4}\right)$; $(0,0)$, $x=\frac{1}{e^2}$, $y=0$.

22) $x=0$, $y=0$.

23) נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

24) נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

25) $\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

26) א. i. $x>0$ iii. $\max(1,-3.5)$, $\min(3,\ln 27-7.5)$
iv. עולה: $0<x<1$, $x>3$ יורדת: $1<x<3$.
ב. i. $x>0$ ii. $(1,0)$
iii. $\min\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-1}$ יורדת: $0<x<e^{-1}$.
ג. i. $x>0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1,-1)$ iv. עולה: $x>1$ יורדת: $0<x<1$
ד. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2},-\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-2}$ יורדת: $0<x<e^{-2}$

ה. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ iv. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$.

27) א. $x>0$ ב. $\min(1,0)$, $\max\left(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}\right)$

ג. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2}<x<1$. ד. $(1,0)$.

28) א. $0<x\neq e$ ב. $\min\left(e^2,e^2\right)$ ג. עלייה: $x>e^2$, ירידה:

$0<x<e^2$ וגם $x\neq e$ ד. אין. ו. $k>e^2$.

29) א. $x>0$ ב. $\min(4,-1)$ ג. עלייה: $x>4$, ירידה: $0<x<4$

ד. $(16,0)$, $(1,0)$.

30) א. $x\geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ ג. $(e,1)$, $(1,0)$.

ד. $x=\sqrt[4]{e}$.

31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x>0$, $x\neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x>0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x>e$ יורדת: $0<x<e$, $x\neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0<x<e$ יורדת: $x>e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-y שלה הוא: $y=\frac{x}{\ln x}$ ו-$y=\frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=1$.

32) א. $x<-1$, $x>7$ ב. $x=-1,7$ ג. עולה: $x>7$ יורדת: $x<-1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

33) א. $x\neq -1$ ב. $x=-1$. ג. עולה: $x>-1$ יורדת: $x<-1$

ד. I. <u>הסבר</u>: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2<x<0$, $x\neq -1$.

34) א. $0<x<e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1-\ln x>0$ וגם $x>0$).

ב. $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1,0)$.

35) א. $x>1$, $x<-\frac{1}{2}$ ב. $x=-\frac{1}{2},1$ ג. $(-2,0)$

ד. מתקבל: $y'=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}<0$.

36) ב. $e^{-4}<x<e^{-1}$, $x>1$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(1,0)$, $(e^{-2},0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x>e^{-2}$, $x\neq 1$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37) א. $x>0$ ב. $(1,0)$, $(e^{\sqrt{3}},0)$, $(e^{-\sqrt{3}},0)$. ג. $\min(e,-2)$, $\max(e^{-1},2)$

ה. $(1,0)$, $(e^{2},2)$, $(e^{-2},-2)$.

38) א. $x=e$ ב. מתקבל: $y'=\frac{-e}{x(x+e)}<0$ ג. $y=-\frac{1}{2e}x+\ln 2$.

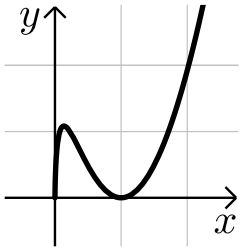
39) א. i. $x>-a$, $x\neq 1-a$ ii. $(e-a,e)$ iii. $\left(0,\frac{a}{\ln a}\right)$

iv. $x=1-a$ ב. $a=2$ ד. $k<e$.

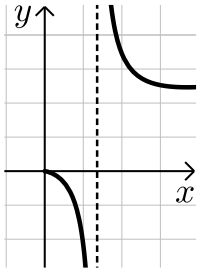
40) א. i. $x>0$ ii. $x=0$ ב. $\min(1,1)$ ג. עולה: $x>1$, יורדת: $0<x<1$.

סקיצות לשאלות:

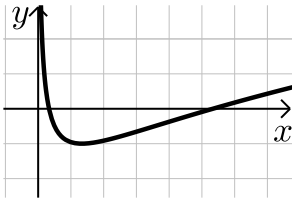
(27



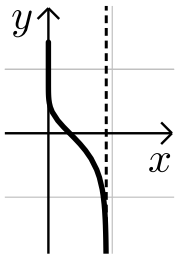
(28



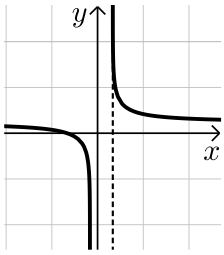
(29



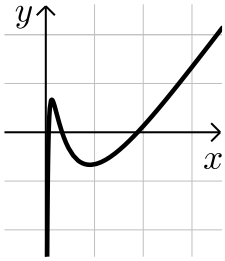
(34



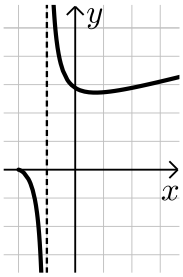
(35



(37



(39



כלים מתמטיים 71001

פרק 28 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי 455
2. שימושי הנגזרת 458
3. חקירה של פונקצית חזקה 460

הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

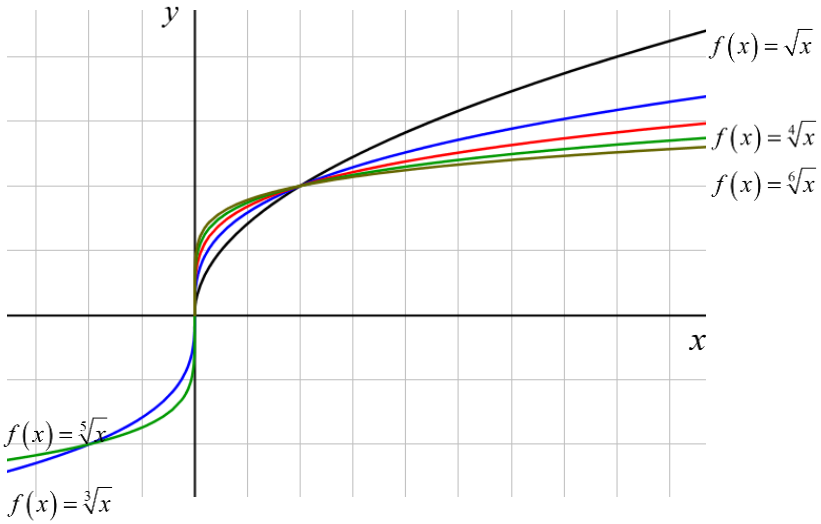
סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי: $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$.

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$.

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה: $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$:



תכונות כלליות:

1. פונקציית חזקה: $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור: n אי-זוגי ומוגדרת לכל $x\geq 0$ עבור n זוגי.
2. הפונקציה: $f(x)=(ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור: n אי-זוגי ולכל $x\geq -\frac{b}{a}$ עבור n זוגי.

נגזרת של פונקצית חזקה:

הפונקציה	הנגזרת
$y=x^{\frac{m}{n}}$	$y'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
$y=(ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y'=a\cdot\frac{m}{n}(ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

שאלות:

1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=\sqrt[4]{x}$ ב. $y=\sqrt[7]{x}$ ג. $y=\sqrt[3]{x+1}$ ד. $y=\sqrt[8]{2-3x}$

ה. $y=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ ו. $y=\frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ ז. $y=\frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$ ח. $y=\frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=4x+\sqrt[4]{x}$ ב. $y=27-\sqrt[3]{x+1}$

ג. $y=(x+2)^2\cdot\sqrt[3]{x}$ ד. $y=(3-x^3)\cdot\sqrt[6]{x}$

ה. $y=\sqrt[3]{(3x+1)^5}$ ו. $y=\sqrt[10]{(8-7x)^7}$

ז. $y=(x^2-4)\cdot\sqrt[8]{(4x+3)^3}$ ח. $y=x^3\cdot\sqrt[7]{1-x}$

ט. $y=\frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$ י. $y=\frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ב. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

ג. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

תשובות סופיות:

1) א. $x\geq 0$ ב. כל x ג. כל x ד. $x\leq \frac{2}{3}$

ה. $x>0$ ו. $x\neq 0$ ז. $x\neq -\frac{7}{3}$ ח. $x>2$

2) א. $y'=4+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ ב. $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ ג. $y'=\frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ד. $y'=\frac{3-19x^3}{6\sqrt[6]{x^5}}$ ה. $y'=5\sqrt[3]{(3x+1)^2}$ ו. $y'=-\frac{49}{10\sqrt[10]{(8-7x)^3}}$

ז. $y'=\frac{9.5x^2+6x-6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}$ ח. $y'=\frac{21x^2-22x^3}{7\sqrt[7]{(1-x)^6}}$ ט. $y'=-\frac{6}{5\sqrt[5]{(x+2)^6}}$

י. $y'=\frac{24}{7\sqrt[7]{(4-3x)^{11}}}$

3) א. $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

ב. $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}\frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$

ג. $f'(x)=\frac{2-5x}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

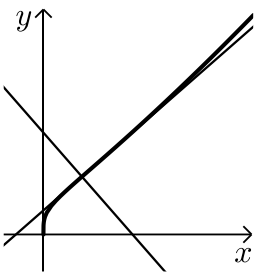
4) לפניך מספר פונקציות.
מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

א. $y=\frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$; $x=1$

ב. $y=2x+\sqrt[3]{3x-1}$; $x=3$

5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\sqrt[4]{6-x}-x$ בנקודה שבה: $x=-10$.

6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(2x+4)\cdot\sqrt[4]{x}$.

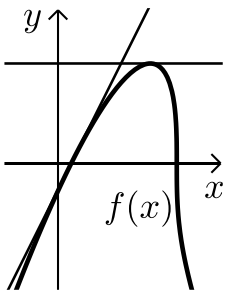


א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך $(1,6)$.

ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה $(1,6)$.

ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.

7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{9-x}$.



א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.

ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x הקרובה יותר לראשית.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה-y.

8) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt[4]{2x+7}-Ax^2$ (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=4.5$ הוא: $m=-\frac{1}{2}$.

מצא את A.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$, (A,B פרמטרים). משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה: $x=2$ היא: $45y=2x-19$. מצא את A ואת B.

תשובות סופיות:

4) א. -8 ב. 2.25.

5) $33x+32y-54=0 \leftarrow y=-\frac{33}{32}x+1\frac{11}{16}$.

6) א. $y=3.5x+2.5$ ב. $y=-\frac{2}{7}x+6\frac{2}{7}$ ג. 67.25 סמ"ר

7) א. $\left(7,6\sqrt[3]{2}\right)$ ב. $y=6\sqrt[3]{2}$ ג. $y=2x-2$ ד. 22.84 סמ"ר

8) $A=\frac{1}{16}$

9) $A=B=1$

חקירה של פונקצית חזקה:

שאלות:

10) חקור את הפונקציה: $f(x)=\left(x^2-36\right)\sqrt[4]{x}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
ג. מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
ד. מציאת תחומי העלייה והירידה.
ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
ו. סרטוט סקיצה.

11) חקור את הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
ג. מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
ד. מציאת תחומי העלייה והירידה.
ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
ו. סרטוט סקיצה.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-6$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ג. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=-f(x)$.
קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
ii. שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
iii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+k\sqrt[3]{x}+8$, k פרמטר.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=-2.741$.

א. מצא את ערך הפרמטר k, עגל למספר שלם.

ב. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה-x.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה: $x^3-9\sqrt[3]{x}=8$.

14) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=\sqrt[5]{2x+2.6}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה-x.

ב. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$.
כתוב מפורשות את הפונקציה $h(x)$ ואת תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. מצא עבור אלו ערכים של k יחתוך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

15) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{5x^2-66x-440}{\sqrt[6]{x}}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?

ב. האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום: $[0:18]$? נמק ע"י חישוב.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x)=-f(x)$.
לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה $g(x)$. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.

i. $g(x)$ חיובית בכל התחום $[0:18]$.

ii. ל-$g(x)$ אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו $f(x)$.

iii. ל-$g(x)$ אותו תחום הגדרה כמו ל-$f(x)$.

16) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{9-x}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.

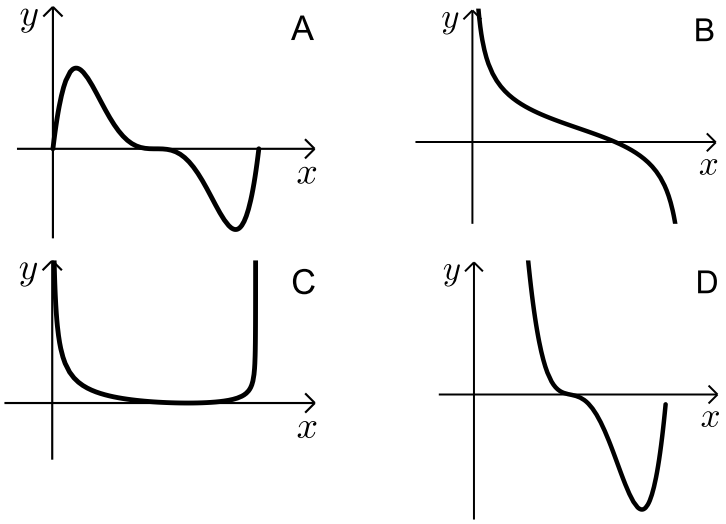
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה: $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{9-x}=k$ כאשר:

i. $k=-2$

ii. $k=1$

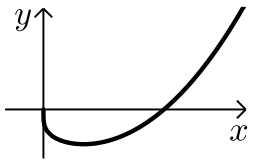
ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים (A-D) מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



תשובות סופיות:

10) א. $x\geq 0$ ב. $(0,0)$, $(6,0)$ ג. $\min(2,-38)$

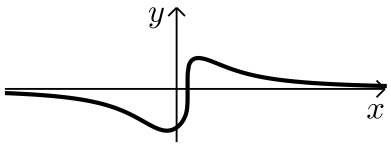
ד. יורדת: $0<x<2$, עולה: $x>2$ ה. אין. ו.



11) א. כל x ב. $(0.25,0)$, $(0,-1.14)$ ג. $\min\left(-\frac{2}{9},-1.24\right)$, $\max(0.5,0.91)$

ד. יורדת: $x>\frac{1}{2}$, $x<-\frac{2}{9}$, עולה: $-\frac{2}{9}<x<\frac{1}{2}$ ה. אין

ו.



12) א. $x\geq 0$ ב. $(0,-6)$, $(64,0)$ ג. הנגזרת: $f'(x)=\frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}}>0$ בת.ה.

ה. i. נכון ה. ii. לא נכון, החיתוך עם ציר ה-y שונה. ה. iii. לא נכון.

13) א. $k=-9$ ב. $\max(-1,16)$, $\min(1,0)$ ג. עולה: $x<-1$, $x>1$

יורדת: $-1<x<1$ ה. 2.

14) א. $(-1.3,0)$, $(2,0)$ ב. $h(x)=(x-2)^2\sqrt[5]{2x+2.6}$, כל x.

ג. $\max(-1,8.126)$, $\min(2,0)$ ה. $0<k<8.126$.

15) א. $x>0$, $x=0$ אסימפטוטה אנכית. ב. לא

ג. $\max(2,-491.77)$, $\min(4,-495.27)$ ה. i. נכון ה. ii. לא נכון.

ה. iii. נכון.

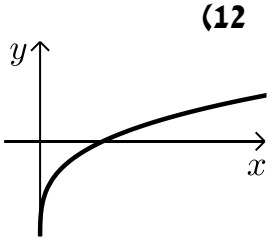
16) א. $0\leq x\leq 9$ ב. $\max(6,3.22)$, $\min(0,0)$ קצה, $\min(9,0)$ קצה.

ג. עולה: $0<x<6$, יורדת: $6<x<9$ ד.i. $k=-2$ אין פתרון.

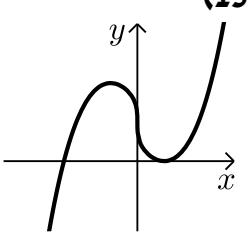
ii. $k=1$ שני פתרונות. ה. B.

סקיצות לשאלות:

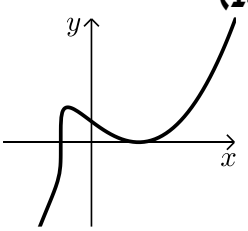
(12



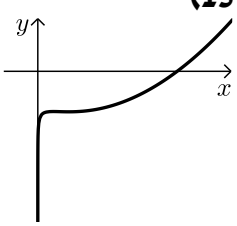
(13



(14



(15



כלים מתמטיים 71001

פרק 29 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

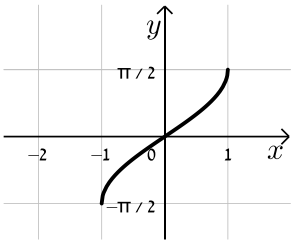
תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות 464
2. הנגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות 467

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

סיכום כללי:

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arcsin(x)$:

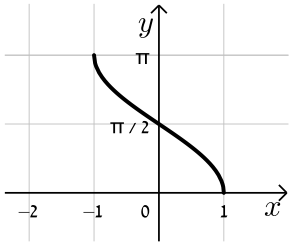


סימון נוסף: $f(x)=\sin^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}\le f(x)\le\frac{\pi}{2}$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arccos(x)$:

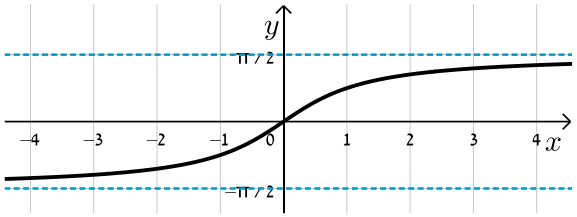


סימון נוסף: $f(x)=\cos^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-1\le x\le 1$.

טווח: $0\le f(x)\le\pi$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\arctan(x)$:

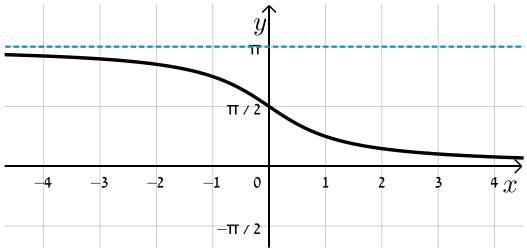


סימון נוסף: $f(x)=\tan^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty<x<\infty$.

טווח: $-\frac{\pi}{2}<f(x)<\frac{\pi}{2}$.

תיאור גרפי של הפונקציה: $f(x)=\operatorname{arccot}(x)$:



סימון נוסף: $f(x)=\cot^{-1}(x)$.

תחום הגדרה: $-\infty<x<\infty$.

טווח: $0<f(x)<\pi$.

קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

הפונקציה	הזהות
סינוס	$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\sin^{-1}\left(\sin(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & -\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ \pi(k+1)-x & \frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$
קוסינוס	$\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)=x \qquad -1\le x\le 1$
	$\cos^{-1}\left(\cos(x)\right)=\begin{cases} x-2\pi k & 2\pi k\le x\le\pi(1+2k) \\ 2\pi k-x & \pi(1+2k)\le x\le 2\pi(k+1) \end{cases}$
טנגנס	$\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\tan^{-1}\left(\tan(x)\right)=x-\pi k \qquad -\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$
קוטנגנס	$\cot\left(\cot^{-1}(x)\right)=x \qquad -\infty<x<\infty$
	$\cot^{-1}\left(\cot(x)\right)=x-\pi k \qquad \pi k<x<\pi+\pi k$

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ב. $\arccos(-1)$

ג. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ד. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

ה. $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

ו. $\arcsin(-0.5)$

2) חשב ללא מחשבון:

א. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ב. $\sin\left(\arcsin(-0.5)\right)$

ג. $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

ד. $\cos\left(\operatorname{arccot}(1)\right)$

ה. $\sin\left(2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$

ו. $\tan\left(-\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)\right)$

3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y=\arcsin\frac{2x+1}{3-3x}$

ב. $y=\arccos\frac{x+3}{2x+1}$

ג. $y=\arctan\frac{1}{1-\ln x}$

4) הוכח כי לכל x מתחום ההגדרה מתקיים:

א. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

ב. $\sin\left(2\arccos x\right)=2x\sqrt{1-x^2}$.

ג. $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

ד. $x\neq 0\ ,\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$.

5) הראה את הקשר הבא: $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$.

תשובות סופיות:

1) א. $-\frac{\pi}{4}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{3}$ ד. $-\frac{\pi}{3}$ ה. ϕ ו. $-\frac{\pi}{6}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}$ ב. $-\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. 1 ה. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) א. $x\geq 4\ ,\ x\leq\frac{2}{5}$ ב. $x\geq 2\ ,\ x\leq-\frac{4}{3}$ ג. $x>0\ ,\ x\neq e$.

4) שאלות הוכחה.

5) הוכחה.

הנגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

סיכום כללי:

נוסחאות הגזירה של הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

$$f(x)=\arcsin(x)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arccos(x)\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arctan(x)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x)=\operatorname{arccot}(x)\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

שאלות:

1) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$.

2) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(\sin^{-1}(x)\right)^2$.

3) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

4) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\left(\cos^{-1}\left(x^2\right)\right)^2$.

5) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x}{\arccos(x)}$.

6) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

7) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$.

8) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}$.

9) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\cos\left(\arcsin\left(x^2\right)\right)$.

10) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\sin\left(\sqrt{x}\right)}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=\dfrac{-3}{2x\sqrt{x-9}}$

2) $f'(x)=\dfrac{2\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $f'(x)=\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x<0\end{cases}$

4) $f'(x)=\dfrac{-4x\arccos\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}$

5) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^{-1}(x)}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\cos^{-1}(x)\right)}$

6) $f'(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x}{x^2+1}$

7) $f'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

8) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}}$

9) $f'(x)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

10) $f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(1+\sin\sqrt{x}\right)\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

כלים מתמטיים 71001

פרק 30 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות היפרבוליות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות 469
2. זהויות עם פונקציות היפרבוליות 471
3. נגזרות של פונקציות היפרבוליות 472
4. הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות 473
5. גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות 474

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות:

סיכום כללי:

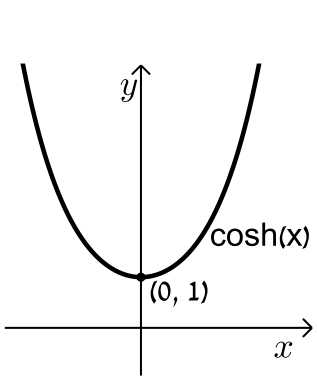
הגדרה:

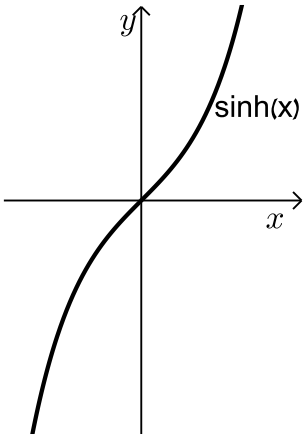
הפונקציות ההיפרבוליות הן:

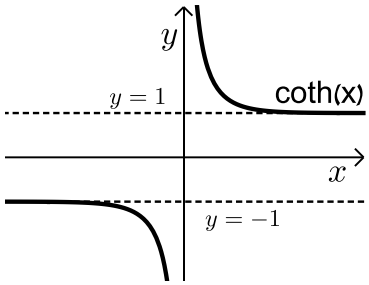
$$\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

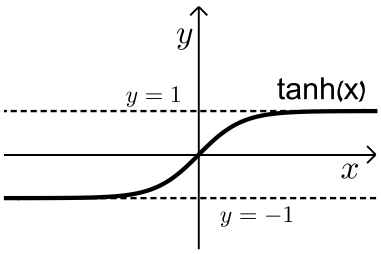
$$\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \coth(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים:









שאלות:

1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית: $\sinh(x)$ עבור $x=1$.

2) נתון כי: $\sinh(x_0)=-1$. חשב את ערכן של: $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$, $\coth(x_0)$.

3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

4) חשב: $\tanh(-3\ln 2)$.

תשובות סופיות:

1) 1.175.

2) $\coth(x_0)=-\sqrt{2}$, $\tanh(x_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cosh(x_0)=\sqrt{2}$.

3) 2.4.

4) $-\frac{63}{65}$.

זהויות עם פונקציות היפרבוליות:

סיכום כללי:

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות:

ארגומנט שלילי	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	סינוס וקוסינוס היפרבוליים
$\cosh(-x)=\cosh(x)$	$1+\tanh^2(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(x)\pm\sinh(x)=e^{\pm x}$
$\sinh(-x)=-\sinh(x)$	$\coth^2(x)-1=\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x\pm y)=\sinh(x)\cosh(y)\pm\cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)=2\sinh^2(x)+1=2\cosh^2(x)-1$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$.

2) הוכח את הזהות הכפולה הבאה: $\sinh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}=\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$ בתחום: $x\geq 0$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cosh^4(x)-\sinh^4(x)=\cosh(2x)$.

4) הוכח את הזהויות הבאות: $\cosh(x\pm y)=\cosh(x)\cosh(y)\pm\sinh(x)\sinh(y)$.

נגזרות של פונקציות היפרבוליות:

סיכום כללי:

להלן הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$$\left(\sinh\left(x\right)\right)'=\cosh\left(x\right)$$

$$\left(\tanh\left(x\right)\right)'=\frac{1}{\cosh^2\left(x\right)}$$

$$\left(\cosh\left(x\right)\right)'=\sinh\left(x\right)$$

$$\left(\coth\left(x\right)\right)'=\frac{-1}{\sinh^2\left(x\right)}$$

שאלות:

1) גזור את הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\cosh\left(\ln x\right)$.

2) גזור את הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\sinh\left(\tanh\left(x\right)\right)$.

3) גזור את הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\cosh\left(\ln\left(\sin x\right)\right)$.

4) גזור את הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=\sinh^2\left(x^3\right)$.

תשובות סופיות:

1) $f'\left(x\right)=\frac{\sinh\left(\ln x\right)}{x}$.

2) $f'\left(x\right)=\frac{\cosh\left(\tanh\left(x\right)\right)}{\cosh^2\left(x\right)}$.

3) $f'\left(x\right)=\sinh\left(\ln\left(\sin\left(x\right)\right)\right)\cdot\cot\left(x\right)$.

4) $f'\left(x\right)=3x^2\sinh\left(2x^3\right)$.

הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות:

סיכום כללי:

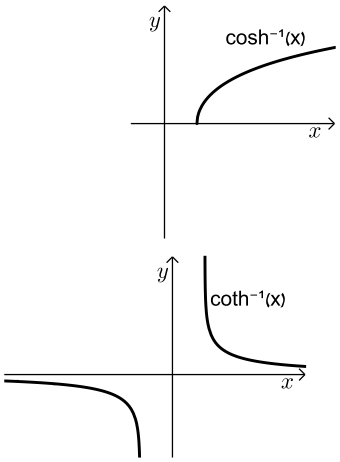
הגדרה:

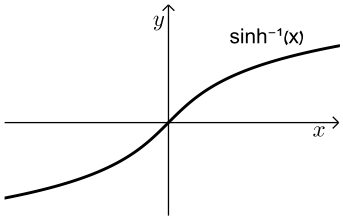
הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות הן:

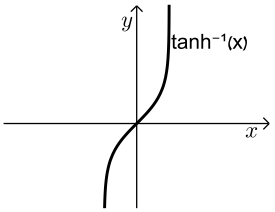
$$\sinh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \coth^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים:







הערה:

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc, כגון: $\sinh^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}(x)$.

שאלות:

1) הוכח כי: $\sinh\left(\operatorname{arccosh}(x)\right)=\sqrt{x^2-1}$ לכל $|x|>1$.

2) הוכח כי: $\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ לכל $|x|<1$.

גזירה של פונקציות היפרבוליות הפוכות:

סיכום כללי:

להלן הנגזרות היסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$\left(\tanh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert<1$	$\left(\sinh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\left(\coth^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1-x^2}\ ,\ \lvert x\rvert>1$	$\left(\cosh^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,x>1$

שאלות:

1) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right)$.

2) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln\left(\cosh\left(\operatorname{arctanh}(x)\right)\right)$.

3) גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\operatorname{arcsinh}\left(\operatorname{arccosh}\left(\tan(x)\right)\right)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$.

2) $f'(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

3) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\cosh^{-1}(\tan x)\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

כלים מתמטיים 71001

פרק 31 - קוים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור 475
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית 479
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית) 485
4. משטחים במרחב 490
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית (ללא ספר) 492
6. גופים במרחב 492
7. קואורדינטות גליליות וכדוריות 495
8. נספח – משטחים ממעלה שנייה 499

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,||\,y-2x\,|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,||\,x\,|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\geq 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 4\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq\sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,y\geq 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\leq 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y+1\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||\,x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x^2+y^2\le 16\right.\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ y\ge \frac{1}{4}x^2\right.\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ x^2+y^2\ge 4\right.\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\ y=t^2$ $\quad t\geq 0$

ב. $x=\sin t,\ y=\cos^2 t$ $\quad 0\leq t\leq \pi$

ג. $x=\cos t,\ y=4\sin t$ $\quad \pi\leq t\leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x=t-4\ ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\ ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\ ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\ ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\ ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\ ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2+y^2=8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2,\ -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le\frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases}x(u,v)=u\cos v\\ y(u,v)=u\sin v\end{cases}\quad \sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$: מרכז : $(0,0)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל : $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

הצגה פרמטרית של העיגול : $\begin{cases}x(u,v)=5u\cos v\\ y(u,v)=5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$: מרכז : $(8,4)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל : $\begin{cases}x(t)=8+5\cos t\\ y(t)=4+5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$.

הצגה פרמטרית של העיגול : $\begin{cases}x(u,v)=8+5u\cos v\\ y(u,v)=4+5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

ב. מקרה 1 : $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases},\ 0\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

מקרה 2 - $\begin{cases}x=8+5\cos t\\ y=4+5\sin t\end{cases},\ \pi\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le\sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases}x(t)=2\cos t,\ y(t)=\sqrt{2}\sin t & 0\le t\le 2\pi\\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ y(t)=2\sin t & 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ג. המסילה DA: $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

המסילה BC: $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$.

המסילה AB: $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $\arctan\left(\sqrt{2}\right)\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$.

המסילה CD: $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$.

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

$$D_1:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

ד.

$$D_4:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $\begin{cases}x=\cosh t\\y=2\sinh t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, שמאלית: $\begin{cases}x=-\cosh t\\y=2\sinh t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $D_1:\begin{cases}x(u,v)=u\cosh v\\y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$ $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$

$D_2:\begin{cases}x(u,v)=-u\cosh v\\y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$ $0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$

7) א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $\begin{cases}x=\cosh t\\y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ וענף שמאלי $\begin{cases}x=-\cosh t\\y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

ג. $C:\begin{cases}x=-\cosh t\\y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ ד. 1

8) 8

9) $6\pi\sqrt{29}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

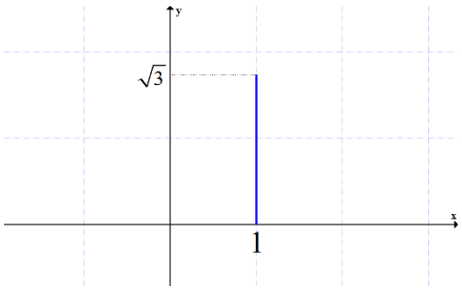
ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

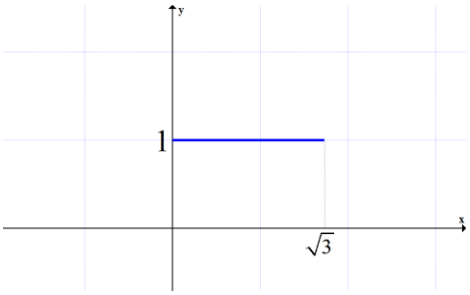
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א



איור ב



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\}$

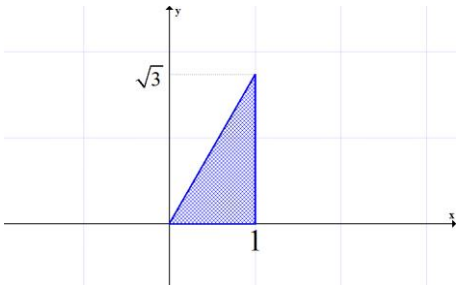
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

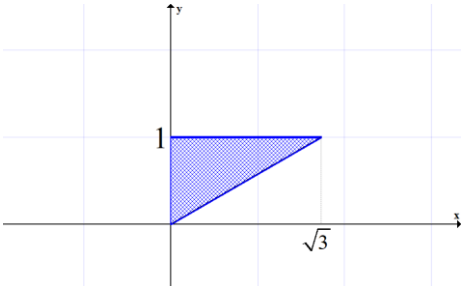
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $r=\frac{1}{\cos\theta}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ ב. $r=\frac{1}{\sin\theta}\quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le 0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le 1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le 1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0.5\pi\le\theta\le 1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le 2\\-0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ or $\begin{cases}1\le r\le 2\\1.5\pi\le\theta\le 2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $1\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le\arctan 2$ ב. $0\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le 1.25\pi$

12) $\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le 5$, $\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

14) א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונים שני משטחים: $Q: 2x^2-y^2+z^2=3,\ R: x^2-y^2+2z^2=3$.

א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.

ב. הראו כי החיתוך בין R ו-Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.

ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל-Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו-$B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C. כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה-y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.

8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-y.

ב. $\ell_2:(x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)$

10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=x, z=-x$

ג. $C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t \quad \ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ ד. $\sqrt{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0,y\ge 0\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x^2+y^2\le 1\right\}$

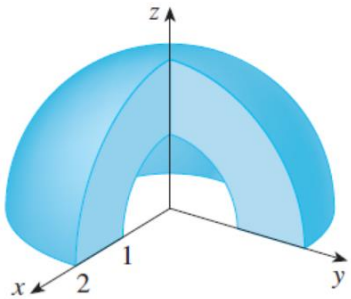
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0,y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

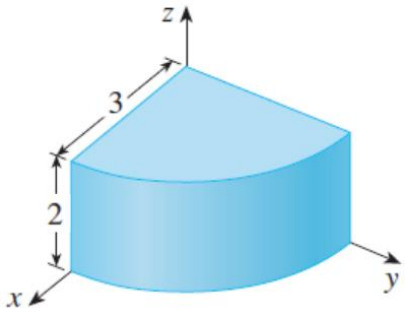
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)|\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי $\begin{matrix}M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3\\ N:2x^2-y^2+z^2\le 3\end{matrix}$.

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.

שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz), וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

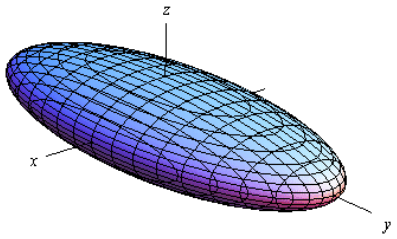
ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

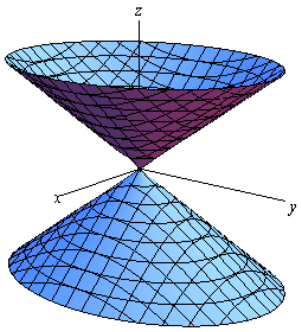
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

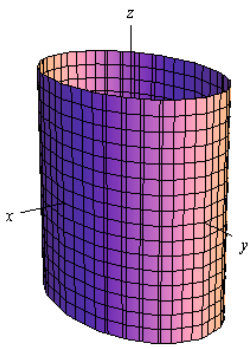


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



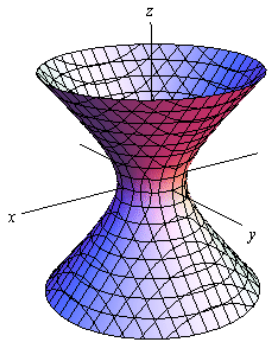
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

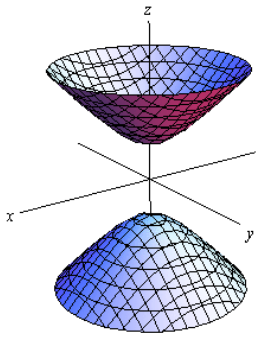


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

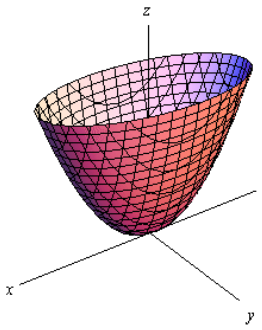


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

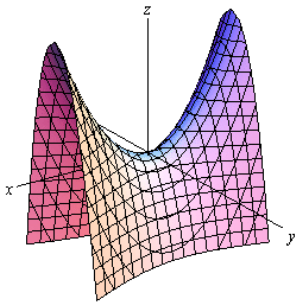
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



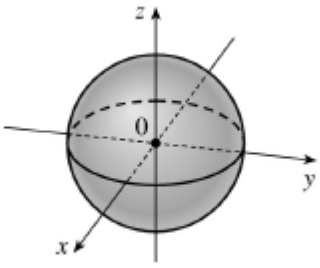
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

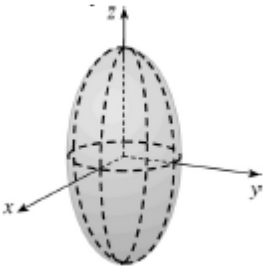
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

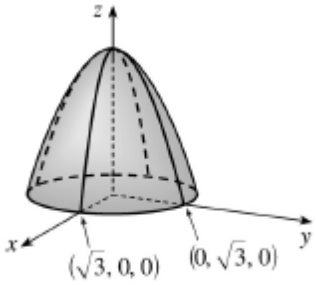
דוגמאות שונות



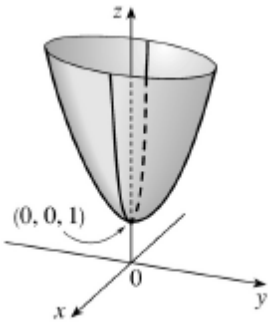
$x^2+y^2+z^2=1$



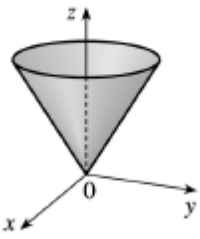
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



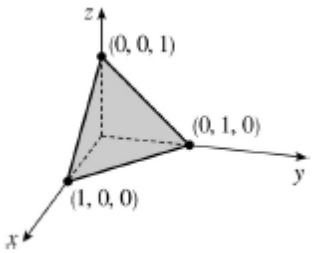
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלים מתמטיים 71001

פרק 32 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 502
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 504
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 506
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 507

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\ \right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\ \right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\ \right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2=4\ \right\}$

8) $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\}$

11) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|\,x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\left\{(x,y)\middle|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $(k=0,4)\quad f(x,y)=(x-y)^2$

12) $(k=0,2)\quad f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\}$

13) $(k=1)\quad f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\geq y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y.

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:

א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$

ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

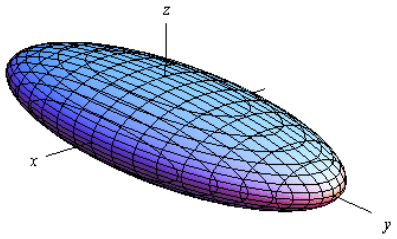
4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

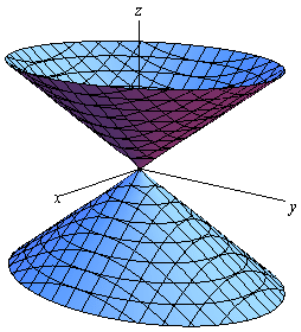
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

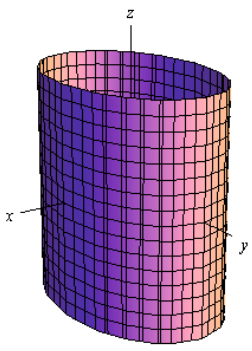


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



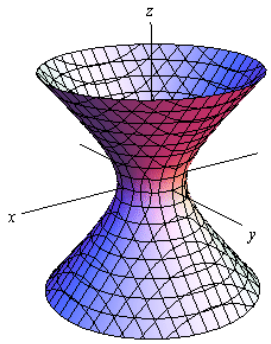
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

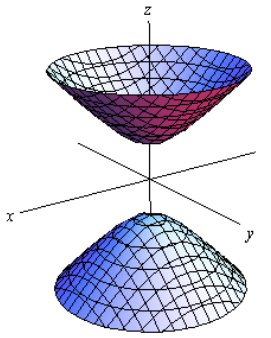


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

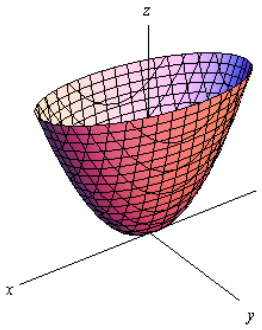


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

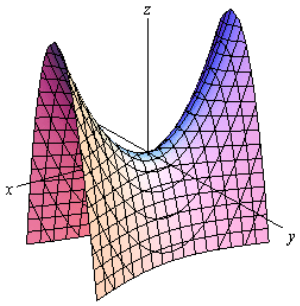
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



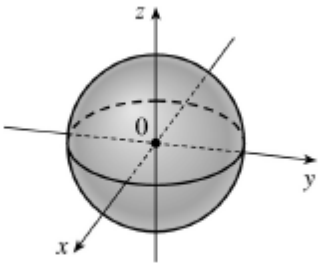
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.
החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

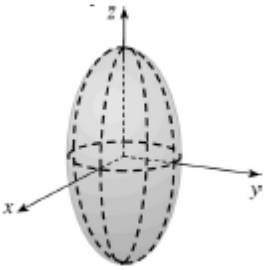
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

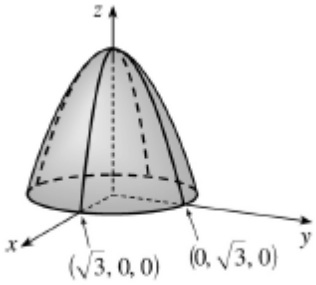
דוגמאות שונות



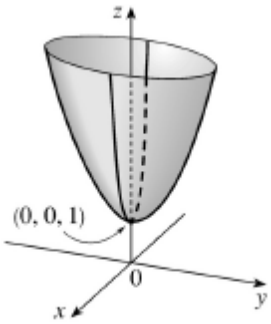
$x^2+y^2+z^2=1$



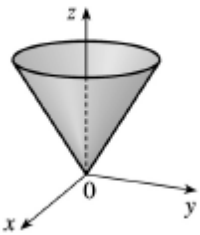
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



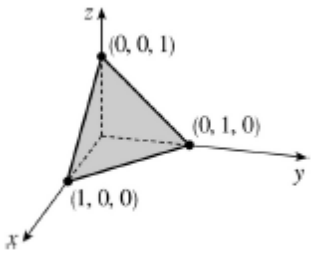
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©