

חשבון דיפרנציאלי 10142



תוכן העניינים

1. רענון - מבוא לממן 11	(ללא ספר)
2. פונקציות - ממן 11	(ללא ספר)
3. בעיות גדילה ודעיכה - ממן 11	1
4. חישוב נגזרת של פונקציה - ממן 21	14
5. המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת - ממן 21	(ללא ספר)
6. חקירת פונקציה	20
7. בעיות מינימום מקסימום כלכליות	(ללא ספר)
8. פונקציות של שני משתנים. עקומות שוות ערך. נגזרות חלקיות - ממן 31	31
9. קיצון ללא אילוץ - ממן 31	41
10. גזירה סתומה - ממן 31	43
11. קיצון עם אילוצים (כופלי לגרנז) - ממן 41	44
12. פונקציות הומוגניות - ממן 51	47
13. אינטגרלים - ממן 51	54
14. המשך אינטגרלים - ממן 51	(ללא ספר)
15. פתרון ממן 11 לדוגמה	(ללא ספר)
16. פתרון ממן 21 לדוגמה	(ללא ספר)
17. פתרון ממן 31 לדוגמה	59
18. פתרון ממן 41 לדוגמה	(ללא ספר)
19. פתרון ממן 51 לדוגמה	(ללא ספר)
20. חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 70.9.6	(ללא ספר)
21. חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 70.11.91	(ללא ספר)
22. חדו"א לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר א 70	(ללא ספר)
23. חדו"א לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר ב 70	(ללא ספר)

תוכן העניינים

24. חדוא לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות ג 70 ו-א 80 (ללא ספר)
25. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) 62

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 1 - רענון - מבוא לממן 11

תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה (ללא ספר)
2. שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ללא ספר)
3. משוואה ממעלה שנייה (ללא ספר)
4. משוואות עם מכנה (ללא ספר)
5. משוואות מעריכיות (ללא ספר)
6. משוואות לוגריתמיות (ללא ספר)
7. משוואות עם שורשים (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 2 - פונקציות - ממן 11

תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית (ללא ספר)
5. פונקציות בסיסיות וההזזות (שיקופים) שלהן (ללא ספר)
6. תרגול הפונקציה הריבועית (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 3 - בעיות גדילה ודעיכה - ממך 11

תוכן העניינים

1. שאלות חימום..... 1
2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית..... 5
3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית..... 6
4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה..... 7
5. שאלות העוסקות במציאת הזמן..... 8
6. שאלות שונות..... 9

שאלות חימום:

סיכום כללי:

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן t , המסומנת M_t , כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב הגידול/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- | | |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$ | ב. $q = 1.6$ |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את M_0 :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$ | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ | |

(4) מצא את q :

א. $25 = 10 \cdot q^6$
 ב. $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$
 ג. $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$
 ד. $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$
 ה. $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{31}{3}}$
 ו. $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(5) מצא את t :

א. $10 \cdot 1.05^t = 70$
 ב. $62.08^t = 39.68$
 ג. $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.
 בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.
 א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?
 ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?
 ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.
 במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.
 א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?
 ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?
 ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.
 מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.
 ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.
 כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.
 כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.
 א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?
 ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
כיום יש באגם $2 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?
ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?
ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?
ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?
ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5 \cdot 10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.
בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?
ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.
א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?
ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.
ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

1.15 .ד	1.05 .ג	0.6 .ב	1.2 א. (1)
	0.5 .ח	0.75 .ז .ו .3	ה. 2.
28% דעיכה. ד	15% דעיכה ג	60% גדילה ב	20% גדילה א. (2)
	150 .ג	45 .ב	80 .א. (3)
1.028 .ד	0.732 .ג	0.7469 .ב	1.165 .א. (4)
		1.03 .ו	0.22 .ה
	33.01 .ג	0.89 .ב	39.88 .א. (5)
	52,428,800 .ג	200 .ב	100 .א. (6)
	456.747 גרם. ג. כן	1422.4 גרם. ב	1889.56 גרם. א. (7)
			592.6 ₪. (8)
			1.41 ק"מ. (9)
	467,304 תושבים. ב		578,642 תושבים. א. (10)
	4,525,483.4 ק"ג. ג	50,000 ק"ג. ב	3,200,000 ק"ג. א. (11)
		9.6 מיליון תושבים. ב	1.029 .א. (12)
		2117 תוכים. ב	1.032 .א. (13)
			14.16% (14)
		70.35 גרם. ב	0.9671 .א. (15)
		77.1% .ב	0.90657 .א. (16)
		6.15 .ב	3.18% .א. (17)

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

שאלות:

(1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

(2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

תשובות סופיות:

(1) 5,062 חסידות.

(2) 101,342 תושבים.

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

שאלות:

3) מספר הזכרות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זכרות. כמה זכרות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

תשובות סופיות:

3) 34,907 זכרות.

שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

שאלות:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

תשובות סופיות:

- (4) 2.3%
- (5) 3.5%
- (6) 921 חיידקים.

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

שאלות:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

תשובות סופיות:

- (7) 9.41 שנים.
(8) 7.47 שנים.
(9) 16.43 שעות.
(10) 12.43 שעות.
(11) 9.43 ימים.
(12) 16:00

שאלות שונות:

שאלות:

(13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

(14) נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.
 t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.
 חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

(15) מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבות וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבות. הבע את t באמצעות p .

הערה:

שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

(16) נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$. מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

(17) נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

(18) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

- (19)** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- (20)** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
- רפי משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
- למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
- נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
- (21)** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
- מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
- ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
- וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
- א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
- ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
- איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- (22)** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
- (23)** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.

- (24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .
- (25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
- (26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים. א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות. ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.
- (27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪. א. מצא את t . לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪. ב. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה. א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'. ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

- (29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
- (30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- (31)** אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .
- (32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
- ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים.
- המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

תשובות סופיות:

(13) בנק א'.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad (15)$$

(16) $x = 17.04$, מינימום.

(17) 11 חודשים.

(18) 100,000 עצים.

(19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

(20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

(21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

(22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

(23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

(24) 14.82%

(25) ב-5.95%

(26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

(27) א. $t = 4$ ב. $p = 20\%$

(28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

(29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

(30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.

(31) 16.63%

(32) ב-6.6%

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה - ממך 12

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה 14
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 17

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2\ln x + 1), \quad f''(x) = 2\ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2\ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 3x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x \\ \text{ד.} & f'(x) = 1 & \text{ה.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 6x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה.} & f'(x) = 8 & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. (4)} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. (5)} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. (6)} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ז.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x)$$

$$\text{א. (7)} \quad f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ג.} \quad f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \\ \text{א. (8)} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ח.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ט.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2}$$

$$\text{א. (9)} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \\ \text{ד.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 5 - המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת - ממך 12

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 6 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד	20
2. חקירת פולינום	21
3. חקירת פונקציה לוגריתמית	22
4. חקירת פונקציה – שאלות כלליות	25
5. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה	30

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינוכית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x > 9$ or $x < 3$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

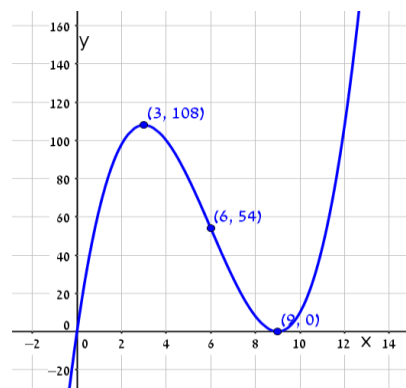
תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.

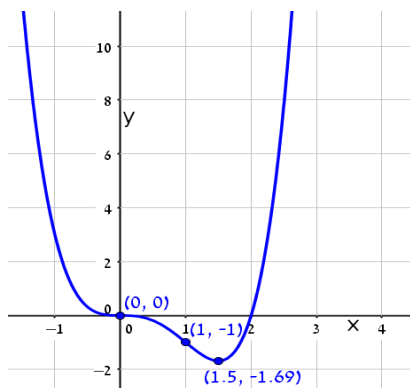
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)



(2)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

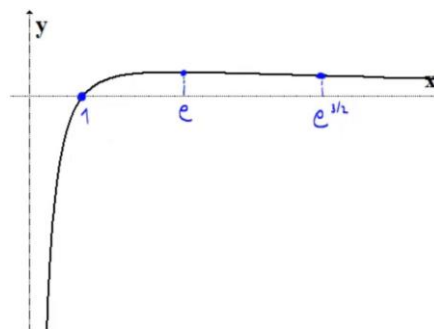
$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (3)$$

תשובות סופיות

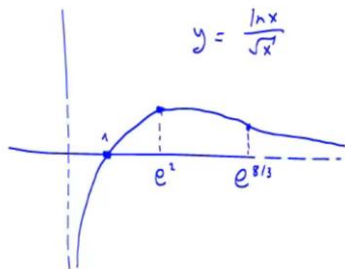
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

גרפים

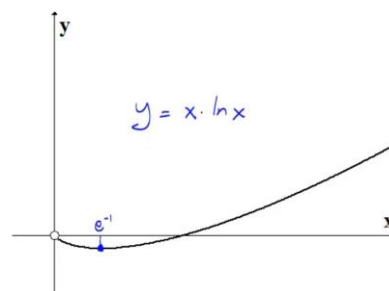
(1)



(2)



(3)



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

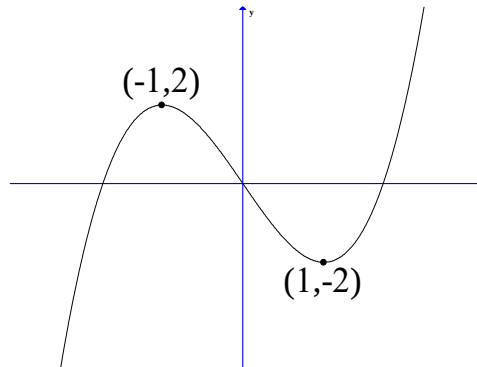
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

(18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

(19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$.

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x = e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

(20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x > 0$.

ד. z יורדת לכל $x > 0$.

(21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

חשבו את הגבול

(22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x = 0$.

$$g(x) = (f(x))^2$$

נגדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

(23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x) = a \cdot f(x)$, כאשר $a < 0$.

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n, 0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(4) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

$$(5) \quad \text{נתון כי } f \text{ רציפה לכל } x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \text{ לכל } x > 0, \text{ וכן } f(0) = 0.$$

$$\text{הוכיחו כי לכל } x > 0 \text{ מתקיים } f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x)).$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 7 - בעיות מינימום מקסימום כלכליות

תוכן העניינים

1. בעיות מינימום ומקסימום כלכליות במשתנה יחיד (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 8 - פונקציות של שני משתנים. עקומות שוות ערך. נגזרות חלקיות - ממן
13

תוכן העניינים

1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה 31
2. נגזרות חלקיות 35

פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

שאלות

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = \frac{y}{x}$?
שרטט מפת קווי גובה.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = \ln x + \ln y$?
שרטט מפת קווי גובה.

(3) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = x^2 + y^2$?
שרטט מפת קווי גובה.

(4) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$?
שרטט מפת קווי גובה.

(5) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$?
שרטט מפת קווי גובה.

(6) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x, y) = x\sqrt{y}$?
שרטט מפת קווי גובה.

(7) תהי: $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקציית תועלת של פרט.
הנקודות: $(0, 14)$, $(3, 2)$, $(1, 6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.
א. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקציית התועלת.
ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

(8) שרטט לפונקציה: $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases}$
את קו הגובה: $f(x, y) = 1$

(9) נגדיר: $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$. הנח כי: $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך: $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

(10) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f: R_+^2 \rightarrow R_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$.

(11) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = \min\{3x, y\}$.

(12) שרטט לפונקציה: $f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\}$,

את קווי הגובה: $f(x, y) = 2$, $f(x, y) = 0$.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה: $f(x, y) = C$ יהיה קו רציף?
צייר את קו הגובה במקרה זה.

(14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים x ו- y

היא: $u(x, y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases}$

א. שרטט את קו הגובה: $u(x, y) = 3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות $(4, 8)$.

האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות $(7, 9)$?

(15) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f: R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f ?

16) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = 3x - y + 3$.

17) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = x^3 - y$.

18) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$.

19) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = e^{x-y}$.

20) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$.

21) שרטט לפונקציה: $f(x, y) = (x-y)^2$,

את קווי הגובה: $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 4$.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.
- (7) א. $u(x, y) = (x+1) \cdot (y+2)$, $p=1, q=2$
 ב. $y = \frac{16}{x+1} - 2$
- (8) ראה סרטון.
- (9) ראה סרטון.
- (10) ראה סרטון.
- (11) ראה סרטון.
- (12) ראה סרטון.
- (13) א. ראה סרטון.
 ב. $C=1.5$
- (14) א. ראה סרטון.
 ב. ראה סרטון.
 ג. הפרט לא אדיש.
- (15) ראה סרטון.
- (16) ראה סרטון.
- (17) ראה סרטון.
- (18) ראה סרטון.
- (19) ראה סרטון.
- (20) ראה סרטון.
- (21) ראה סרטון.

פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

(2) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = x^5 \cdot \ln y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

(3) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$.
חשב את הנגזרת לפי x .

(4) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$.
חשב את הנגזרת החלקית לפי x ואת הנגזרת לפי y .

(6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
 $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1 - y)(x - y)$

(8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x, y) = xy(x - y)$.

(9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
 $f(x, y) = (x - 9)(2y - 6)(4x - 3y + 12)$

(10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.

(11) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2)$

(12) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

(13) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(14) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(15) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$

(16) חשב : $f'_{xy}(1, 1)$ עבור : $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

(17) חשב : $f'_{xy}(1, 1)$ עבור : $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(18) חשב : $f'_{xy}(1, 1)$ עבור : $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(19) נתון : $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

הוכח כי : $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

(20) נתון : $f(x, y, z) = e^x \cdot \left(y^2 - \frac{1}{z}\right)$

חשב : $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$

(21) נתון : $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשב : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

(22) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$$

(23) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y) = x^4 \cdot \ln y$

(24) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור : $f(x, y, z) = xyz$

תשובות סופיות

$$f_y(x, y) = -6x^2y + 3, \quad f_x(x, y) = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^5}{y}, \quad f_x(x, y) = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x(x, y) = \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \cdot 2x \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = (2x + 3y) + 3(x^2 + y^2), \quad f_x(x, y) = 2x(2x + 3y) + 2(x^2 + y^3) \quad (4)$$

$$f_y(x, y) = \frac{-3x - 3y^2 - 2x^2y + 6y^2}{(x + y^2)^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x(x + y^2) - 1(x^2 - 3y)}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6x, \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$$

סדר שני:

$$f_{yx} = -6, \quad f_{xy} = 0 - 6, \quad f_{yy} = 6y - 0, \quad f_{xx} = 6x - 0$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, \quad f_x(x, y) = 3x^2 + 3 - 3y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xx} = 6x$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = x^2 - 2xy, \quad f_x(x, y) = 2xy - y^2$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xx} = 2y$$

סדר ראשון:

$$f_x(x, y) = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0]$$

$$f_y(x, y) = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

סדר שני:

$$f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0], \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = e^{xy}(x^2 + xy + 1), \quad f_x(x, y) = e^{xy}(xy + y^2 + 1)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x \cdot (x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}, \quad f_{xx} = e^{xy} \cdot y \cdot (xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} \cdot x \cdot (xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

(11) סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y), \quad f_x(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x)$$

סדר שני:

$$f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2) \cdot e^{x+y}, \quad f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{x+y} \cdot (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

(12) סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3), \quad f_x(x, y) = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2)$$

סדר שני:

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{-x^2-y^2} (-2y) \cdot (2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y) \cdot e^{-x^2-y^2}$$

(13) סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2x(1+x^2+y^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

(14) סדר ראשון:

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

(15) ראה סרטון.

$$f_{xy}(1,1) = -2 \quad (16)$$

$$f_{xy}(1,1) = 1 \quad (17)$$

$$f_{xy}(1,1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad (18)$$

(19) הוכחה.

$$f_z = 4, \quad f_y = -2, \quad f_x = -1 \quad (20)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e}, \quad f_{yy} = \frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right), \quad f_{xx} = \frac{1}{4} \quad (21)$$

סדר ראשון: (22)

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 10, \quad f_x(x, y) = 8x - 2xy^2 + 4$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy, \quad f_{yy} = -2x^2, \quad f_{xx} = 8 - 2y^2$$

סדר ראשון: (23)

$$f_y(x, y) = x^4 \cdot \frac{1}{y}, \quad f_x(x, y) = 4x^3 \ln y$$

סדר שני:

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y}, \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}, \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$$

סדר ראשון: (24)

$$f_z(x, y, z) = xy \cdot 1, \quad f_y(x, y, z) = xz \cdot 1, \quad f_x(x, y, z) = yz \cdot 1$$

סדר שני:

$$f_{yz} = x \cdot 1, \quad f_{xz} = y \cdot 1, \quad f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1, \quad f_{zz} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xx} = 0$$

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 9 - קיצון ללא אילוץ - ממך 13

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 41

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $Q_2 = 116 - 30P_1 + 20P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- 14) מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1) $(-0.5, 1)$ אוכל; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכל.
- 3) $(0, 0)$ אוכל; $(1, 1)$ מינימום.
- 4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכל.
- 5) $(0, 2)$ מקסימום.
- 6) $(4, 4)$ מקסימום.
- 7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8) אין נקודות קריטיות.
- 9) $z = 4$, $z = 3$
- 10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- 12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי \$288.
- 13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכל; $-2 < a < 2$ מינימום.
- 14) $a = -6$, $b = 4$

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 10 - גזירה סתומה - ממך 13

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפך הטכני 43

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ חשבו את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

תשובות סופיות

- (1) $y'(0) = \frac{1}{5}$
- (2) $y'(1) = 5$
- (3) $y'(e) = -\frac{2}{e^2}$, $y''(e) = \frac{6}{e^3}$
- (4) $z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2}$
- (5) $y_x(0,0) = 0$, $y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4}$

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 11 - קיצון עם אילוצים (כופלי לגרנז) - ממך 14

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ..... 44

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנז)

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
 נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.
 היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$.
 תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
 הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$(14) \text{ שאלת הוכחה.}$$

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 12 - פונקציות הומוגניות - ממן 15

תוכן העניינים

47	1. פונקציות הומוגניות.....
50	2. משפט אוילר.....

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

(4) נתון כי $z(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.
 במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמיטו ממנה חלק,
 כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
 מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

(5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
 כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + xy^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

(6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות :
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות :

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא :

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$,

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

(7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה. קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה :

$$\text{א. } f \cdot g \quad \text{ב. } \frac{f}{g} \quad \text{ג. } \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{ד. } f + g$$

(8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, \quad f_x(1, 2) = 10$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

(9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.

$$\text{ידוע כי } z \text{ פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי } f(4, 10) = 1.$$

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

תשובות סופיות

- (1) הומוגנית מסדר 3.5.
- (2) הומוגנית מסדר -1.
- (3) הומוגנית מסדר 1.
- (4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
- $$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר } -3.$$
- $$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר } -2.$$
- $$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר } 0.$$
- (5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.
- (6) א. 1. $g(t) = 1 - t + 2t^2$ 2. $g(t) = \sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
- (7) א. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$.
- ג. הומוגנית מדרגה $2r_1 - \frac{r_2}{n}$.
- ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.
- (8) $f_x(2, 4) = 80$, $f_x(1.5, 3) = 33.75$, $f(2, 4) = 64$, $f(0.5, 1) = \frac{1}{4}$
- (9) א. $f(2, 5) = \frac{1}{16}$ ב. $f_x(a, a) = 4a^3$

משפט אוילר

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$.

הוכיחו כי $x \cdot f_x = -y \cdot f_y$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

ונגדיר $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון: $f(8, 1) = 16$, $h'_x(6, 3) = 9$.

מצאו את $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(5) g ו- h הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4, 32) = 16$, $f'_y(1, 8) = 3$, $f'_x(2, 16) = 12$.

מצאו את $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

נגדיר פונקציה $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $p(1, 2) = \frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $f'_x(2, 4) = 64$.

חשבו את $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בשרטוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$,

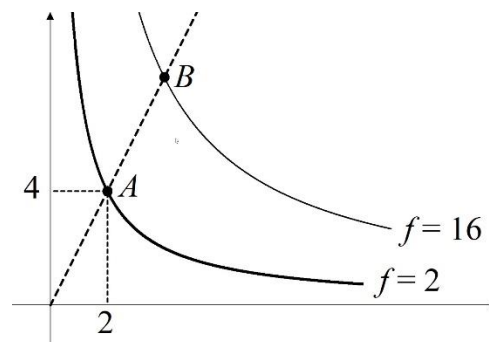
$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$.

הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$.

היעזרו בסעיף הקודם ובנתונים על f .



(8) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$f(2, 1) = 27 \text{ ו- } f(6, 3) = 243.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2, 1)$ עוברת עש"ע של f .

העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.

$$2x + 3y = 7.$$

מצאו את $f_x(2, 1)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(1, 0.5)$.

(9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

$$g(4) = 5, g(1) = 3, g'(8) = 2 \text{ כי ידוע,}$$

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

נגדיר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right).$$

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.

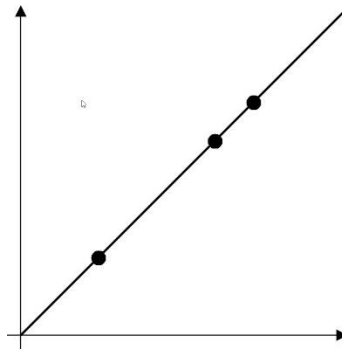
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1, 2) = -16$.



(10) נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכיחו כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0.$$

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$, אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2, 1) = 4$ $h'_y(2, 1) = 8$

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1, 8) = 0$, $f(1, 8) = 9$

(6) $-\frac{3}{4}$

(7) א. $B(4, 8)$ ב. 12 ג. שאלת הוכחה והסבר.

(8) א. 2 ב. $f_x(1, 0.5) = \frac{54}{7}$, $f_y(2, 1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2, 1) = \frac{108}{7}$

(9) א. 5 ב-ד. שאלות הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 13 - אינטגרלים - ממך 15

תוכן העניינים

- 1. אינטגרלים מידיים 54
- 2. מציאת פונקציה קדומה 57

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \quad \int x^4 dx \quad (2) \quad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \quad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \quad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \quad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \quad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \quad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \quad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \quad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \quad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} \quad (19) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + 1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \quad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \quad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \quad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \quad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$)

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (30) \text{ חשבו את האינטגרל :}$$

(פתירה על ידי הכלל : $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & 4x + c \quad (1) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & -\frac{1}{x} + c \quad (3) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \\ & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \\ & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \\ & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \\ & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \\ & -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \\ & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \\ & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + \ln|x+2| + c \quad (25) \\ & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \\ & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \\ & \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31) & \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \end{aligned}$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$,
ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$.

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

- (8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
 ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 14 - המשך אינטגרלים - ממן 15

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 15 - פתרון ממן 11 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 16 - פתרון ממין 12 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 17 - פתרון ממן 13 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי 59

פתרון ממך 13 לדוגמה:

שאלות:

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f ?

ב. נגדיר $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$. הנח כי $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x, y) = \min\left(\frac{x}{3}, y\right)$

(2) תהיי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקציית תועלת של פרט.

הנקודות $(0, 14)$, $(3, 2)$, $(1, 6)$ מנוחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מנוחות הנקודות הנתונות?

עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

ג. על העקומה שציירת סמן שתי נקודות כלליות C ו- D

כך ש- C היא הנקודה העליונה.

הוכח כי $\frac{1}{4} \leq MRS(D) < MRS(C) \leq 16$.

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. (1) תהי $g(x, y) = xy$ ותהי $f(t) = e^t$ פונקציה של משתנה אחד.

נגדיר פונקציה חדשה של שני משתנים $h(x, y) = f(g(x, y))$.

מצא את $h_y(x, y)$.

(2) תהי $g(x, y) = 4x + 5y$ ותהי $f(t)$ פונקציה יורדת של משתנה אחד.

נגדיר פונקציה חדשה של שני משתנים $h(x, y) = f(g(x, y))$.

- האם הנקודות $(3, 0)$, $(1, 2)$ מנוחות על אותה עקומה שוות ערך של h ?

- הוכח כי $MRS_z = MRS_h$ בכל נקודה (x, y) .



- (4) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות מחשבון בארץ היא \$6 ועלות מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:
- $$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$
- $$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$
- כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מה רווח זה?

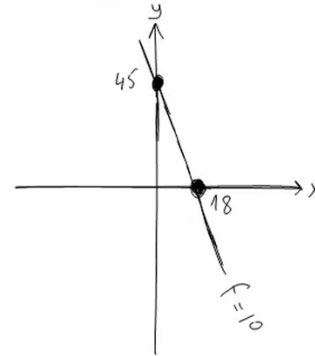
- (5) תהי $D(p)$ פונקציית ביקוש יורדת ותהי $S(p)$ פונקציית היצע עולה. במצב של שיווי משקל בשוק, הביקוש שווה להיצע והמחיר p נקרא מחיר שיווי משקל. מסיבות כלכליות חל גידול ב- a . כלומר, הביקוש החדש הוא $a + D(p)$.
- א. רשום את המשוואה המגדירה את מחיר שיווי המשקל.
 ב. המשוואה שרשמת מגדירה את p כפונקציה סתומה של a . הראה, בעזרת המשפט הפונקציות הסתומות, כי $\frac{dp}{da} > 0$, נסח את התוצאה במילים.

- (6) נתונה התועלת $u(x, y) = 2 \ln x + \ln y$, $x > 0$, $y > 0$. באיור שלפניך עקומת האדישות של u . הנקודה (e, e) מונחת על העקומה.
- א. מצא את רמת התועלת של העקומה הנ"ל.
 ב. על עקומת האדישות 0 יש נקודה בה שיעור החלופה השולי הוא 2. מצא את הנקודה. הגדם עוד נקודה על עקומת אדישות זאת.
 ג. הישר $y = -2x + b$ משיק לעש"ע 3 של הפונקציה. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
 ד. האם הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ היא עש"ע של הפונקציה u ?

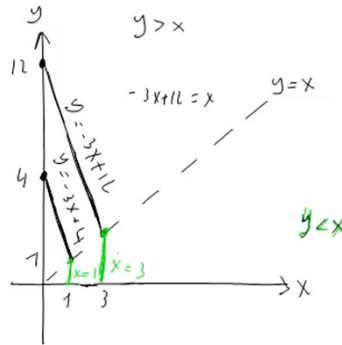
תשובות סופיות:

1. א. $y = 45 - \frac{5}{2}x$

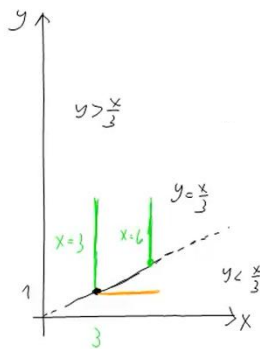
להלן סרטוט:



ב. להלן סרטוט:



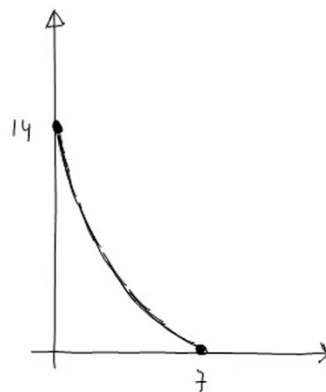
ג. להלן סרטוט:



2. א. $u(x, y) = (x+1)(y+2)$, $p=1$, $q=2$

ב. להלן סרטוט: $y = \frac{16}{x+1} - 2$

ג. ראה סרטון.



א. (2) לא, ראה סרטון.

3. א. (1) $h_y(x, y) = e^{xy} \cdot x$

4. \$288

ב. ראה סרטון.

5. א. $a + D(p) = S(p)$

ב. (e, e^{-2})

ג. $b = 3e$, (e, e)

6. א. 3

ד. הפונקציה אינה עש"ע.

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 18 - פתרון ממן 14 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 19 - פתרון ממך 15 לדוגמה

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 20 - חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 6.9.07

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 21 - חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 19.11.07

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 22 - חדוא לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר א
07

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 23 - חדוא לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר ב
07

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 24 - חדוא לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות ג' 07 ו-א 08

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי 10142

פרק 25 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

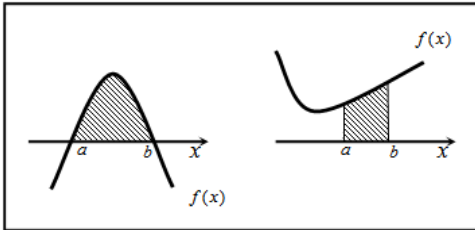
תוכן העניינים

- 1. חישוב שטחים 62
- 2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y 82
- 3. אורך קשת 83

חישוב שטחים

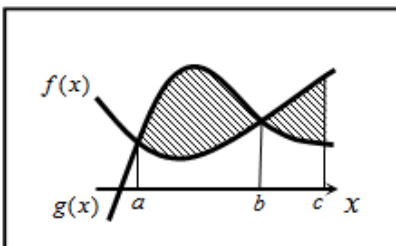
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

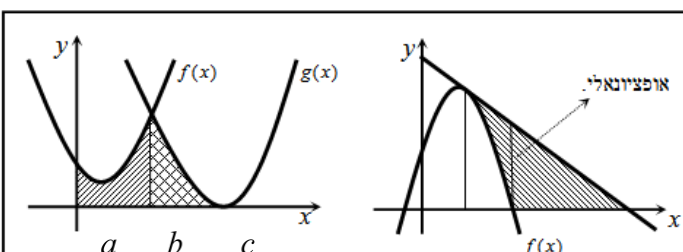


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

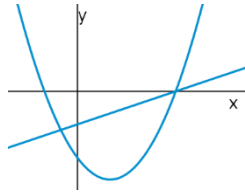
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

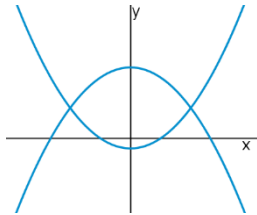


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

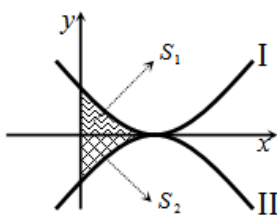
שאלות



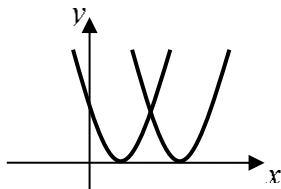
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



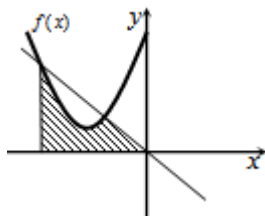
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



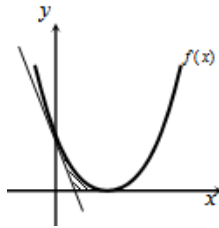
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
כמתואר באיור.
א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
א. מצאו את משוואת הישר.
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



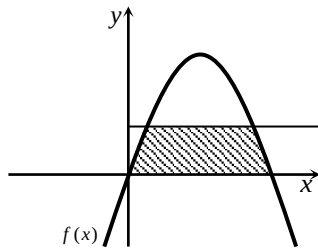
6 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



7 נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.

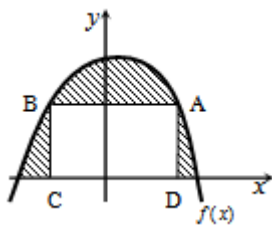
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר k .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



8 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,

היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B .

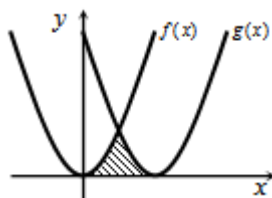
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן $ABCD$.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



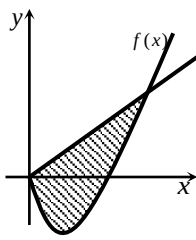
9 באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

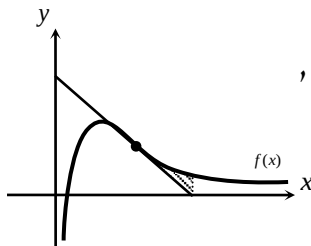
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

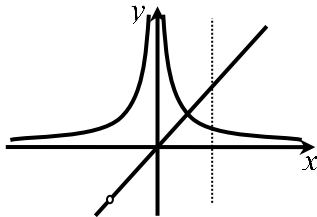
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

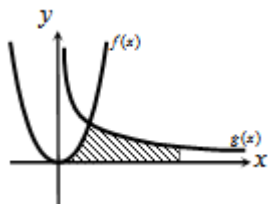


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



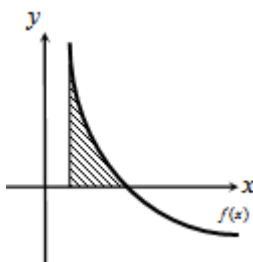
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



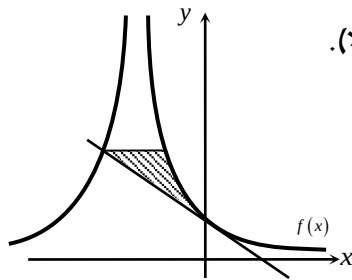
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר A .

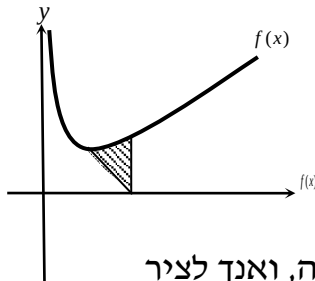
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף

הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

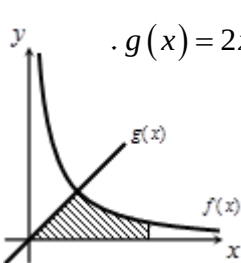
א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר

ישר לנקודה $(2, 0)$, שעל ציר ה- x .

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר

ה- x , היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

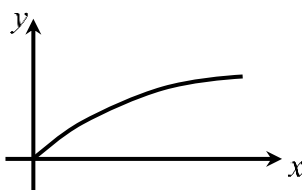
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת

המינימום שלה וציר ה- y .



19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

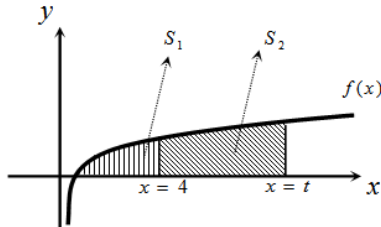
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
מצאו את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

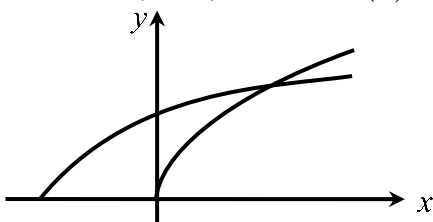
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר $b > 0$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .



(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$.

ברביע הראשון.

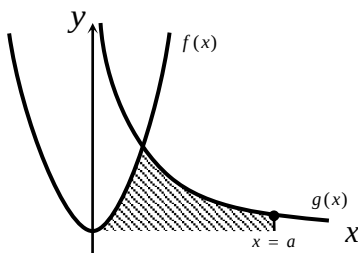
נעביר ישר $x = a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$.

מצאו את a .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x = k$ ו- $x = t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

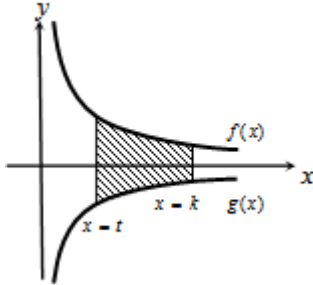
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

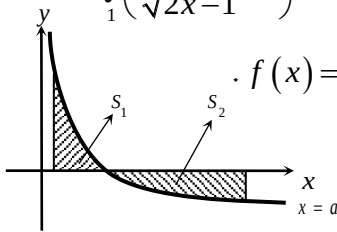
לבין הישרים $x = k$ ו- $x = t$, הוא $S = 12$.

מצאו את t .



(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a , $a > 1$, יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 1$ ו- $x = 13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

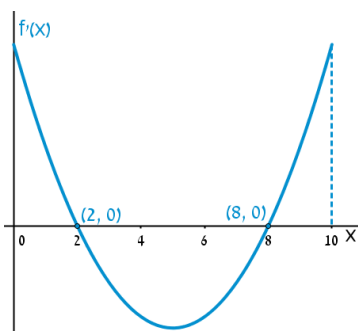
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x = 1$, כלומר את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2 .

נמקו.



(26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

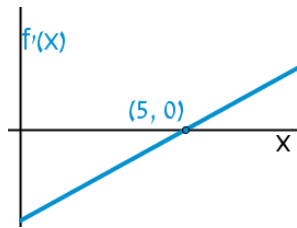
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(5) = 0$, $f(0) = -4$, $f(2) = 6$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



(27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

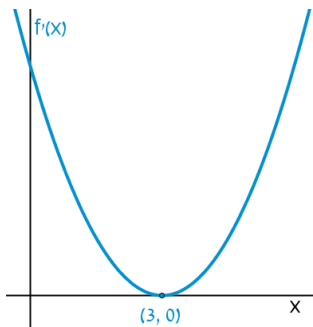
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

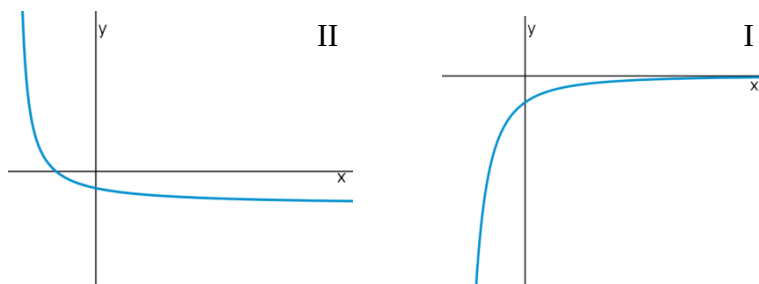
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

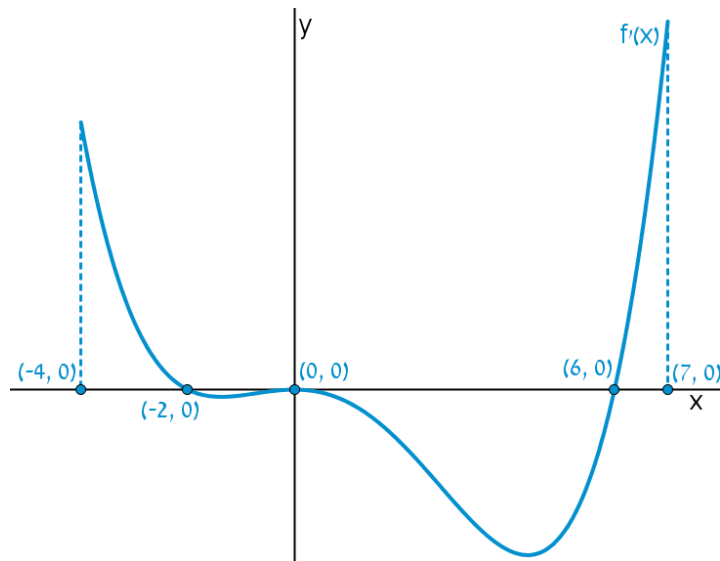


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

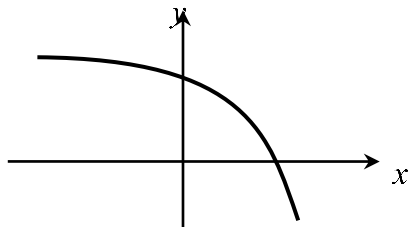


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$,
 לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



(31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים

וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .

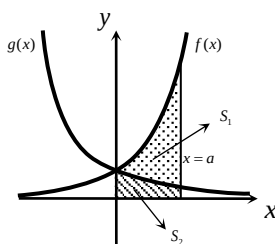
(33) נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני

הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,

ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.

הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



(34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.

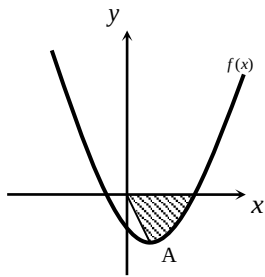
נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x=a$,

כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .

ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .

מצאו את a .



(35) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

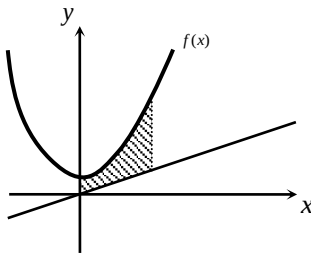
ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה

A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x = 1.7$.



(36) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.

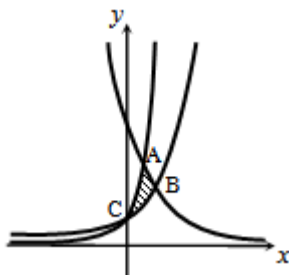
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y

והאנך $x = 2$.



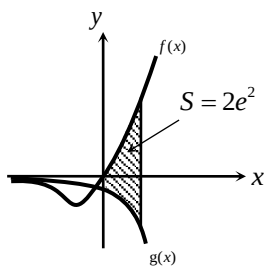
(37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



(38) ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$ ו- $g(x) = -e^x$.

נעביר ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).

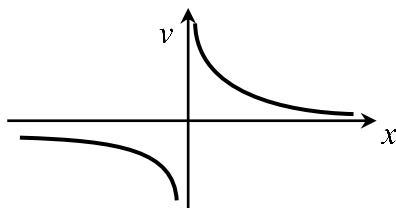
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a.

פונקציות לוגריתמיות

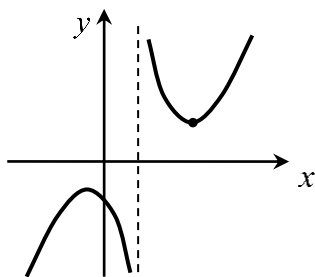
אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



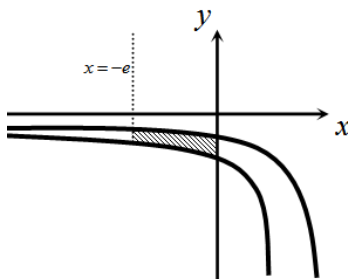
(39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

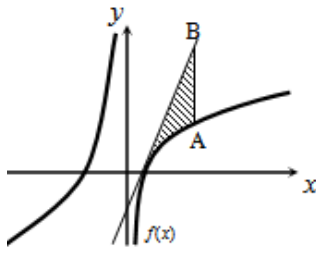


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

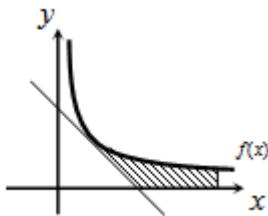


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

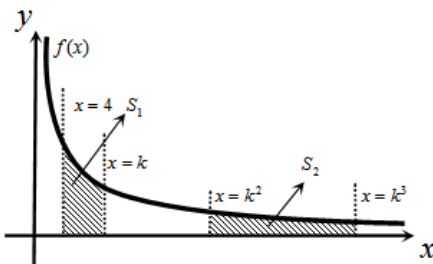
ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.

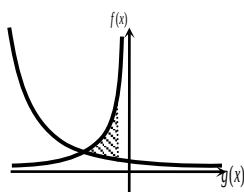


(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$ ($x > 4$).
א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

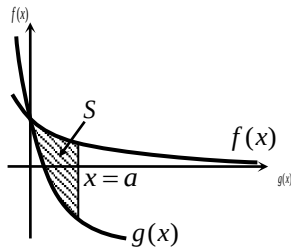
ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשבו את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 .
מצאו את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



(46) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$,
 בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נעביר ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

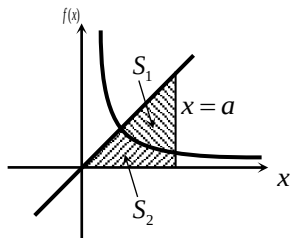
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

(47) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

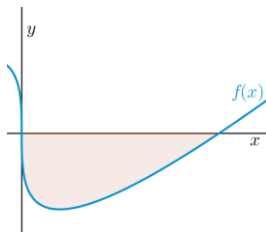
יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

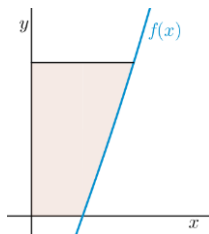
פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

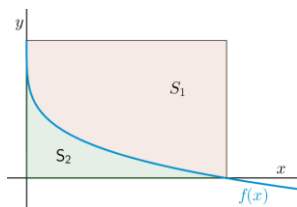
ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

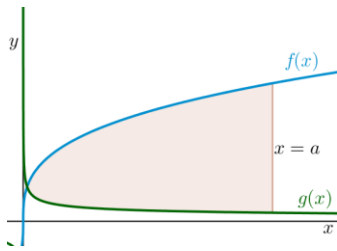
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ,ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

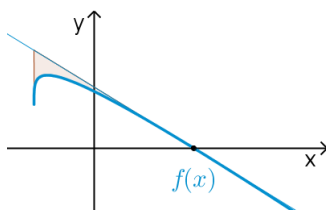
בתחום $x > 0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x , $x=a$ (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

$$\text{הוא } 42\frac{3}{16} \text{ יח"ש.}$$

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה

$$\text{שבה } x=2.$$

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

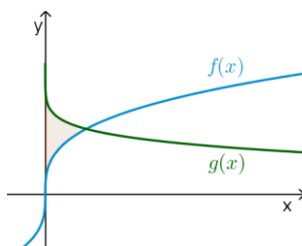
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ ו- } g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- y .

$$54) \text{ הנגזרת של } f(x) \text{ היא } f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

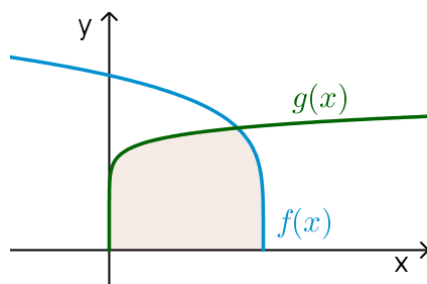
בנקודה שבה $x=1.2$.

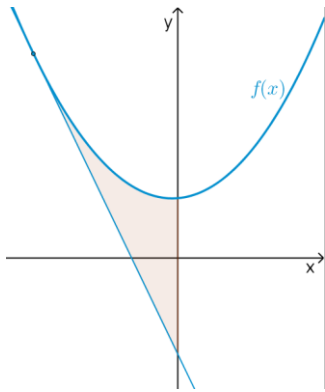
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

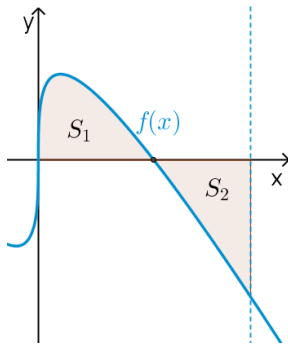
$$g(x) = \sqrt[10]{x} \text{ וציר ה- } x.$$





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור.
מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $g(x) = \Pi$, $f(x) = I$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$. ב. $(5,0)$. ג. i. $S_1=2$. ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$. ג. $\min(5,-2)$. ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ב. 1 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \Pi, f'(x): I$. ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$.
- (35) א. $A(1,-e-2)$. ב. $y=-(e+2)x$. ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$. ב. 1.52.
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$. ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$. ב. $a=2$.
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$. ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$. ב. $x=2$. ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k-\ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$.
- (47) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (48) א. $(0,0), (8,0)$. ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$. ב. $(2,0)$. ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1 \quad \text{א.} \quad (52) \quad \text{ב.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ג.} \quad (-1.2, 1.2)$$

$$y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad \text{ה.} \quad S = 4.56 \quad \text{יח"ש.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad (54)$$

$$f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (55)$$

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x$$

חישוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{ 82^{1.5} - 1 \} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad (9)$$