

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2



## תוכן העניינים

1	וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים
22	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב
54	המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים
57	אינטגרלים לא אמיתיים
68	טורים עם איברים קבועים
82	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות
91	טורי טיילור - מקלורן
106	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב
133	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה
141	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים
148	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות
159	נגזרת מכוונת וגרדיאנט
164	פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים
178	נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים
181	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
183	קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים
185	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
188	קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים
190	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
191	אינטגרלים כפולים
197	שימושי האינטגרל הכפול
200	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)
205	החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

# תוכן העניינים

207	24. אינטגרלים משולשים ושימושיהם
210	25. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

1. וקטורים ..... 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת ..... 8
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב ..... 10
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי ..... 11
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור ..... 20

## וקטורים

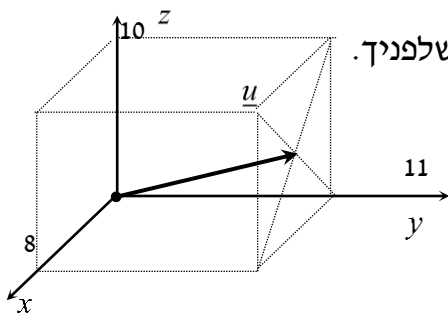
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

### שאלות

- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



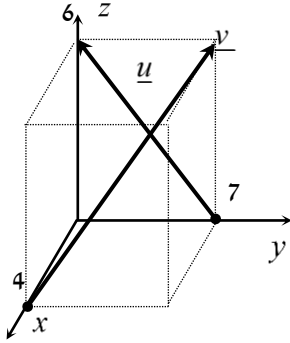
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצאו את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראו כי  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר גם כי  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמקו.

$A(3,-6,-2)$   $B(5,1,0)$

$D$   $C(8,-1,3)$

(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$  ו-  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, ו-16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$ .

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

**(23)** מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$

**(24)** נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצאו וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

**(25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים  $(3, 2, 1)$  ו- $(1, -1, 2)$  ,  
 ושמרחקו מהווקטור  $(1, 1, 0)$  הוא  $\sqrt{3}$ .

**(26)** ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי  $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**(27)** הוכיחו :

א.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב.  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג.  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה.  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

**(28)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר  $a = u - 2v$ ,  $b = 3u + v$ . אם  $\alpha$  היא הזווית בין  $a$  ל- $b$ , אז  $\cos \alpha$  שווה ל-?

**(29)** יהיו  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה  $k$ . יהי  $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$  וקטור שמרחקו מ- $2w_2$  שווה למרחקו מ- $w_1$ . מהו המרחק של  $v$  מ- $w_1$ ?

**(30)** יהיו  $u, v \in \mathbb{R}^n$  וקטורי יחידה המקיימים  $\|u - v\| = 2$ . הוכיחו ש- $u$  ו- $v$  הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשבו:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$. u \times v = 0, \quad u \cdot w = 0, \quad |u| \neq 0$$

הוכיחו כי  $v \cdot w = 0$ .

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$. u \perp v, \quad |u| = 1, \quad |v| = 4$$

חשבו  $|(u+v) \times (u-v)|$ .

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשבו:

$$. \text{א. } u \cdot (v \times w) \quad . \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad . \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) חשבו את נפח:

$$. \text{א. המקבילון שקדקודיו } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$. \text{ב. הפירמידה שקדקודה } A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$$

$$(7) \text{ חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה } A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ . הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a-b, a+b-4c$ , שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב. הוכיחו כי  $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשבו:

א.  $u \cdot (w \times v)$     ב.  $(v \times w) \cdot u$     ג.  $w \cdot (u \times v)$     ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.

מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

$$\begin{matrix} \text{א. } -3 & \text{ב. } -3 & \text{ג. } -3 \end{matrix} \quad (5)$$

$$\begin{matrix} \text{א. } 6 & \text{ב. } 1 \end{matrix} \quad (6)$$

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

$$\begin{matrix} \text{א. } -4 & \text{ב. } 4 & \text{ג. } 4 & \text{ד. } 4 \end{matrix} \quad (10)$$

אין לו נוסחה. (11)

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$  מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$ .

- (3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.  
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

## פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של  $r(t)$  ואת הווקטור  $r(t_0)$ ,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$  כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

(2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \text{ (במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$

בסעיפים א-ג, חשבו:

א.  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב.  $r'(t)$

ג.  $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$ ?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה:  $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$ .

א. חשבו:  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\left| \frac{dr}{dt} \right|$ ,  $\frac{d|r'|}{dt}$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ .

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$  ב- $t = 0$ .

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$  בנקודה  $A(1,1,1)$ .

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$  ב- $t = 0$ .

(6) נתונה העקומה  $r(t) = (t^2, t, 5)$ .

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה  $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$

ב- $t = 0.5\pi$ .

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון  $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$ .

חשבו את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של  $r$ .

(8) תהי  $r(t)$  פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם  $|r(t)|$  קבוע לכל  $t$ , אז  $r(t) \cdot r'(t) = 0$ .

כלומר,  $r(t)$  ו- $r'(t)$  ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה  $N(t)$ , ניצב למשיק היחידה  $T(t)$ .

(9) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$ .

$$(10) \text{ נתון } r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,

$$\text{הוכיחו כי } r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

$$(11) \text{ חלקיק נע לאורך עקום מרחבי } x = t^3 + 2t, y = -3e^{-2t}, z = 2 \sin 5t$$

עבור החלקיק, בזמן  $t = 0$ , חשבו את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

$$(12) \text{ נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן } \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$$

כאשר  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$  המהירות ההתחלתית.

מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

$$(13) \text{ חלקיק נע על העקומה } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t.$$

א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע  $t$ .

ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע  $t = 0.25\pi$ , כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

$$(14) \text{ מהירות } v(t) \text{ של חלקיק נתונה על ידי } v(t) = (2, -1, -10t)$$

ברגע  $t = 0$ , החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (0, 0, 100)$ .

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

$$(15) \text{ תאוצה } a(t) \text{ של חלקיק, נתונה על ידי } a(t) = (18 \cos 3t, -18 \sin 3t, 0)$$

ברגע  $t = 0$  החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (2, 0, 1)$  (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות  $v(0) = (0, 2, 4)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

**16** וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי  $r(t) = (2t^2 - 5t + 3, t - 5, t^2 - 3)$ . עבור איזה ערך של  $t$  גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

**17** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול  $r(t) = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$  שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי  $r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$ . הראו שהזווית בין  $v(t)$  ו- $a(t)$  קבועה ומצאו את הזווית הזו.

**18** הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

**19** חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום  $r(t) = (t^2, 0, t)$ .

**20** וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי  $v(t) = (2, -1, -10t)$ . מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע  $t = 1$ .

**21** וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי  $a(t) = (8 \cos 4t, 8 \sin 4t, 0)$ . ברגע  $t = 0$  החלקיק נמצא במהירות  $v(0) = (0, 2, 4)$ . מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע  $t = \frac{\pi}{4}$ .

**22** העקום  $C$  הוא מעגל שמרכזו בנקודה  $(a, b)$  ורדיוס  $R$ .  
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום  $C$ .  
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.  
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא  $(a, b)$  ורדיוס  $R$ .

**23** נתון העקום  $r(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$  כאשר  $0 \leq t \leq 2\pi$ . באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

$$(24) \text{ נתון העקום } r(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$$

הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה  $y = f(x)$ .

$$\text{הראו שהעקמומיות היא } \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(26) \text{ נתון העקום } y = \frac{1}{x}$$

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי. מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

$$(27) \text{ מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום } x^4 + y^4 = 2 \text{ בנקודה } (1,1).$$

הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.

מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

$$(28) \text{ נתונה הפרבולה } y^2 = 8x$$

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$ .

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

(29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה  $(a,b)$  ורדיוס R.

מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

$$(30) \text{ נתון העקום } x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$$

בנקודה בה  $\theta = \pi/6$ :

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

**(31)** עקומה מישורית מיוצגת על ידי  $r(t) = (x(t), y(t))$ .

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

הראו שהעקמומיות היא

**(32)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ב-  $t = 0$

וב-  $t = \pi/2$ .

ב. הציבו  $a = 3$ ,  $b = 2$  ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

**(33)** הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית  $r = f(\theta)$  היא

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

**(34)** חשבו את העקמומיות של  $r = 2 \sin \theta$  עבור  $\theta = \pi/6$ .

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

**(35)** חשבו את רדיוס העקמומיות של  $r = 1 + \cos \theta$  עבור  $\theta = \pi/2$ .

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

## תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.} \quad (2)$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left( t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4)$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t)$$

$$(7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (21, 20, 10e) \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

א. שאלת הוכחה.

$$24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק}, \quad x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

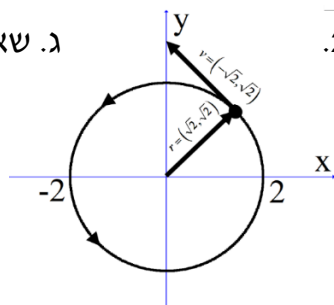
$$76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישור}$$

א. שאלת הוכחה.

$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

ג. שאלת הוכחה.



$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$

$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

$$v_{\min} = v(1) = \sqrt{6} \quad (16)$$

$$(17) \text{ א. } \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right) \quad \text{ב. } \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}_{rad}$$

(18) שאלת הוכחה.

$$(19) \quad \kappa = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$(20) \quad \rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$$

$$(21) \quad \kappa = \frac{2}{13}, \quad \rho = 6.5$$

(22) א.  $\rho = R, \kappa = 1/R$ . מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל-ב. שאלת הוכחה.  $\rho = R$ . ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל-  $\kappa = \frac{1}{R}$ .(23) העקמומיות **מקסימלית** עבור  $t = 0, \pi, 2\pi$  אז העקמומיות תהיה  $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל-  $\frac{9}{4}$ . עקמומיות**מינימלית** עבור  $t = \pi/2, 3\pi/2$  אז העקמומיות תהיה  $\kappa = \frac{3}{16}$  בנקודות אלהרדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל-  $\frac{16}{3}$ .

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$(26) \text{ א. } \rho(x) = \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 |x|}$$

ב. רדיוס העקמומיות **מינימלי** בנקודה (1,1) ובמקרה זה הוא  $\sqrt{2}$ .

$$\text{ג. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

(27) רדיוס:  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ; מרכז העקמומיות:  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ;משוואת המעגל בנקודה:  $(x-2/3)^2 + (y-2/3)^2 = 2/9$ .

$$(28) \text{ א. } y = \pm 3, x = \frac{9}{8} \quad \text{ב. } (x-59/8)^2 + (y+27/16)^2 = (125/16)^2$$

$$(29) \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \rho = R$$

$$(30) \text{ א. } \rho = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ב. } x^2 + (y+1)^2 = \frac{27}{16} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

(31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \quad \kappa(\pi/2) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

(32) א.

$$\rho(0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(\pi/2) = \frac{a^2}{b}$$



ב.

(33) שאלת הוכחה.

(34)  $\kappa = \rho = 1$

(35) ראו שרטוט:



## גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

### שאלות

(1) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כלליים. הוכיחו:

א.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב.  $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי, ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה. הוכיחו כי  $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$ .

(3) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה. הוכיחו כי  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ .

או בניסוח אחר  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$ .

או בניסוח אחר  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ .

(4) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כלליים. הוכיחו כי  $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$ .

(5) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי.

הוכיחו כי  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ .

\* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

### הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ .

הגרדיאנט של  $\varphi$  המסומן  $\text{grad } \varphi$  מוגדר על ידי

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

### הגדרה (דיברגנץ וקורל של שדה וקטורי)

יהי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  מגדירים את הדיברגנץ של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{div } \mathbf{F}$ , כך:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = f_x + g_y + h_z$$

מגדירים את ה- $\text{curl}$  של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{curl } \mathbf{F}$ , על ידי:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h)$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \mathbf{F} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}$$

הערה: יש הרושמים  $\text{rot } \mathbf{F}$  במקום  $\text{curl } \mathbf{F}$ .

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 2 - וקטורים אלגבריים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

22	1. הצגה פרמטרית של ישר
25	2. מצב הדדי בין ישרים
27	3. הצגה פרמטרית של מישור
28	4. משוואת מישור
29	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
30	6. מישורים המקבילים לצירים
31	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
32	8. מצב הדדי בין מישורים
33	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
34	11. זווית בין שני ישרים
35	12. זווית בין ישר ומישור
36	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
37	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
38	16. מרחק בין נקודה לישר
39	17. מרחק בין נקודה למישור
40	18. מרחק בין ישרים מקבילים
41	19. מרחק בין ישר למישור
42	20. מרחק בין מישורים מקבילים
43	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
44	23. היטלים ונקודות סימטריה
45	24. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

## הצגה פרמטרית של ישר

### שאלות

- (1) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?
- (2) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?
- (3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$  ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .
- (6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$  ומאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .
- (7) ענו על הסעיפים הבאים:
  - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ . כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינטות  $x, y$  ו-  $z$ .
  - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ . כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-  $y$  במרחב.
- (9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$  ומקביל לציר ה-  $z$ .
- (10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

11) ישר עובר בנקודה  $(1, -1, 4)$  וכיוונו  $(4, 10, 2)$ .

מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב.  $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד.  $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ו-  $B(4, 0, 1)$ .

תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א.  $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב.  $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג.  $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד.  $\ell: x-1 = y+10, z = 4$

ה.  $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

## תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10)  $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א.  $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$  ב.  $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג.  $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$  ד.  $\ell : \begin{cases} x - 3y = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(13) א.  $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$  ב.  $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$  ג.  $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$  ד.  $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$  ה.  $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

## מצב ההדדי בין ישרים

### שאלות

- (1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$  ,  $l_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$  ,  $l_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$  ,  $l_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$  ,  $l_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $l_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$  ,  $l_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצאו את ערכו של הפרמטר  $k$ , שבעבורו הישרים:  
 $l_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$  ,  $l_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$   
 א. מקבילים.  
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות  $A(3, -1, 5)$  ,  $B(k, -1, 3)$  ,  $C(-6, 3, -1)$  ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראו כי לכל ערך של  $k$ , הישרים  $l_{AB}$  ו- $l_{CD}$  מצטלבים.

**תשובות סופיות**

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .
- (7) א.  $k = 2$       ב.  $k = -2$ .
- (8) שאלת הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור

### שאלות

- (1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:  
 $A(1, -4, 0)$ ,  $B(3, 6, 2)$ ,  $C(0, -3, 1)$ .
- (2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ ,  
 ומכיל את הישר  $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$ .
- (3) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$ .  
 הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$   
 ומכיל את ציר ה- $x$ .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .
- (6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.  
 מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2)  $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3)  $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5)  $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6)  $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

## משוואת מישור

---

### שאלות

(1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$  :

א.  $D(5, 7, 1)$

ב.  $E(2, -1, 1)$

(2) מצאו את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על

המישור  $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$ .

(3) נתונה משוואת מישור  $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$ .

מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(4) נתונה משוואת מישור  $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$ .

מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות

(1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(2)  $k = 3$

(3)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$

(4)  $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

## מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$ . כתבו הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (4) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצאו את משוואת המישור.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, 0, 5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .
- הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד, ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
  - מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
- ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
- ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2)  $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3)  $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4)  $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1.  $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ . 2.  $-2x + 3y + z - 1 = 0$
- ב. למשל:  $(0, 0, 1)$ ,  $(-0.5, 0, 0)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים

---

### שאלות

(1) נתונה משוואת המישור  $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$   
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$   
 ו-  $x+3y+2z-6=0$ .  
 מצאו את נפח הטטראדר.

### תשובות סופיות

(1)  $k = 3$

(2) 6 יח"נ.

## מצב ההדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$  ,  $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$  ,  $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$  ,  $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$  .  
 קבעו את המצב ההדדי שביניהם.  
 אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$  ,  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$  .  
 מצאו את ערכי  $a$  ו- $b$  , עבורם הישר מוכל במישור.

### תשובות סופיות

- (1) הישר חותך,  $(1, -1, 3)$  .
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4)  $a = 1$  ,  $b = -7$

## מצב החדדי בין מישורים

### שאלות

(1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א.  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$  ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$  ,  $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$  ,  $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0 , \pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$$

מצאו את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים      ב. מקבילים      ג. מתלכדים

### תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.

(2) א.  $k \neq 2, -3$       ב.  $k = -3$       ג.  $k = 2$

## ישר חיתוך בין מישורים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (2) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (3) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (4) נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.
- (5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .
- (6) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות

- (1)  $\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$
- (2)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
- (3)  $\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$
- (4)  $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
- (5)  $\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$
- (6)  $\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$

## זווית בין שני ישרים

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א.  $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב.  $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$  ,  $B(6, 0, -2)$  וישר העובר דרך הנקודות  $C(6, 5, 1)$  ,  $D(-1, 4, 2)$  וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$  ,  $B(4, 2, -1)$  ,  $C(3, -1, 2)$ .
- א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו- $E(7, 7, -3)$  נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$ . הנקודות  $A(x, 6, 1)$  ,  $B(-2, y, -1)$  נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$ . מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא  $\sqrt{\frac{13}{76}}$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $78.521^\circ$  ב.  $90^\circ$
- (2)  $63.37^\circ$ . הישרים מצטלבים.
- (3) א. 1.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  א. 2.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. 3.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$  ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$
- (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

## זווית בין ישר ומישור

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:  
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$  ,  $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$  ,  $B(0, 2, -1)$  ,  $C(1, 2, 5)$  ,  $D(-7, 3, -1)$   
 מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה  $2x + y - 2z - 6 = 0$ ,  
 וקדקוד הפירמידה הוא  $S(3, 1, -2)$ .  
 מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,  
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים  $x_B = z_B = -1$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $18.87^\circ$   
 (2)  $44.83^\circ$   
 (3)  $14.9^\circ$

## זווית בין שני מישורים

---

### שאלות

(1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים :  $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$   
 $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם :  
 $A(0, 2, -5)$  ,  $B(3, -1, 1)$  ,  $C(7, -1, -5)$  ,  $D(3, 2, 0)$   
 מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות

(1)  $90^\circ$

(2)  $87.539^\circ$

(3)  $32.312^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב

---

### שאלה

- (1) נתונות הנקודות  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13-k)$ . מצאו ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה שוקיים, כך ש-  $AB = AC$ .

### תשובה

- (1)  $k = 8$  או  $k = 12$ .

## מרחק בין נקודה לישר

---

### שאלות

- (1) מצאו את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $\underline{x} = t(2, 0, -7)$ .
- (2) נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשבו את שטח המשולש  $ABC$ .
- (3) על הישר  $\underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע  $AB$  של ריבוע  $ABCD$ .  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ .  
מצאו את שיעורי הקדקוד  $B$  (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות

- (1)  $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3)  $B(5, 4, -6)$  או  $B(5, -4, 2)$ .

## מרחק בין נקודה למישור

---

### שאלות

- (1) מצאו את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.
- (2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר  $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$  ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .
- (3) נתונים ישר ומישור  $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ . מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות

- (1)  $2\frac{1}{2}$
- (2)  $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$  או  $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3)  $(1, -9, 5)$  או  $(4, 5, 1)$

## מרחק בין ישרים מקבילים

---

### שאלות

(1) נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$ ,  $B(12,-5,2)$ ,  $C(6,1,4)$ ,  $D(12,11,-8)$ .

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

### תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

(2) א. שאלת הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור

### שאלות

- (1) נתונה משוואת המישור  $4x - z + 6 = 0$ .
- א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.  
 ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .
- א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.  
 ב. מצאו את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$
- (2) א. שאלת הוכחה. ב.  $k = 2, 4$

## מרחק בין מישורים מקבילים

### שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ . מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$ . מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:  
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$ ,  $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$ ,  $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$   
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$ ,  $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$   
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$ , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$  חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו  $12x + 4y - 3z - 6 = 0$ . מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2)  $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3)  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$
- (4)  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים

---

### שאלות

- (1) נתונים שני ישרים,  $l_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ , ו-  
 $l_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$ .  
 הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני ישרים מצטלבים,  $l_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ , ו-  
 $l_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$ .  
 מצאו את המרחק שביניהם.
- (3) מצאו את מרחק הישר  $l : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3)  $\sqrt{2}$  יח"א.

## היטלים ונקודות סימטריה

---

### שאלות

- (1) נתונה נקודה  $A(1, -1, 3)$  ונתון הישר  $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ .
- א. מצאו את היטל הנקודה  $A$  על הישר.  
 ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל- $A$  ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה  $A(0, 0, 1)$  ונתון מישור  $7x + 7y - z = 8$ .
- א. מצאו את היטל הנקודה  $A$  על המישור.  
 ב. מצאו את הנקודה  $C$ , הסימטרית ל- $A$ , ביחס למישור.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(1, 3, 2)$  ביחס למישורי הצירים.  
 ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה  $A(x, y, z)$  ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב:  $A(0, 2, 4)$ ,  $B(-2, 6, -2)$ ,  $C(2, -4, 8)$ ,  $D(10, 2, 0)$ .  
 מצאו את היטל הישר  $AD$  על המישור  $ABC$ .

### תשובות סופיות

- (1) א.  $B(0, 1.5, -1.5)$  ב.  $C(-1, 4, -6)$
- (2) א.  $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$  ב.  $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א.  $D_{yz}(1, 3, 2)$ ,  $C_{xz}(1, -3, 2)$ ,  $B_{xy}(1, 3, -2)$   
 ב.  $D_{yz}(-x, y, z)$ ,  $C_{xz}(x, -y, z)$ ,  $B_{xy}(x, y, -z)$
- (4)  $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

## שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את  $B$  עם  $C$ . הראו כי הנקודה  $A$  לא נמצאת על הישר הזה.
  - חשבו את המרחק בין הנקודה  $A$  לבין הישר המחבר את  $B$  עם  $C$ .
  - מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה  $A$  והמאונך לישר המחבר את  $B$  עם  $C$ .
- (2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
  - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
  - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
  - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור, שמרכזו O(1,1,2).  
 מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6 ממישור  $\pi_2$  (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותך את הישר  $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.  
 מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.  
 (הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ )
- (10) נתונים שני מישורים  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$ .  
 מצאו את משוואת המישור  $\pi_3$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07. ג. מתלכדים. ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ . הזווית היא:  $47.6^\circ$ .
- (3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל. ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$ .
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ . ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$  או  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$

## סיכום כללי

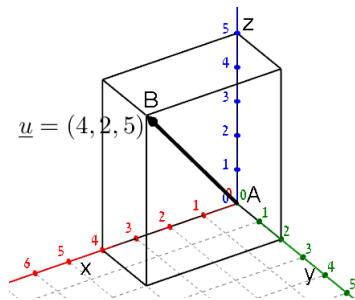
### הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x,y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x,y)$ .



דוגמאות:

- הוקטור  $\underline{u} = (4,2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2)$ .



- הוקטור:  $\underline{u} = (4,2,5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0,0,0)$  וסופו בנקודה:  $B(4,2,5)$ .

### וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

### אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$   
הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ .
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$ .

### מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\alpha$  ו-  $\beta$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

גודלו של וקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ .

### הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ .

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו-  $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $l$ .

**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו-  $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$ .

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$ .



**\*הערות:**

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

**מצב הדדי בין ישרים**

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

## משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ,

כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן:  $\underline{h} = (a, b, c)$ .

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  תחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$ .
- זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$ .

### חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן הבא:  $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .
2. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור:  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב ע"י:  $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
  - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
  - ב. שימוש בנוסחה:  $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ .
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 3 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב ..... 54

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

### שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם  $f(x)$  רציפה וגם  $a(x)$  ו- $b(x)$  גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

**(11)** חקרו את הפונקציה  $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**(12)** נתונה הפונקציה  $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$ , כאשר  $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$

חשבו את  $g'(1)$  (הניחו כי  $f$  רציפה).

**(13)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נגדיר  $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $g''(x) = f(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(14)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ויהי  $\alpha \neq 0$ .

נגדיר  $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה רציפה וחיובית לכל  $x \geq 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$  מונוטונית יורדת בקטע  $[0, \infty)$ .

**(16)** מצאו את  $\int_e^4 f(x) dx$ , אם נתון כי  $\int_2^x \frac{1}{t-1} dt + 2 \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt$

**(17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , בנקודה  $x_0 = 2\pi$ .

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3)  $I'(x) = e^{-x^2}$

(4)  $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5)  $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6)  $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7)  $\frac{1}{2}$

(8)  $\frac{2}{3}$

(9)  $4e^{16}$

(10) 0

(11) תחום הגדרה: כל  $x$ .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל  $x$ .

נקודות פיתול:  $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$ .

תחומי קמירות:  $x > 1, -1 < x < -\frac{3}{7}$ .

תחומי קעירות:  $-\frac{3}{7} < x < 1, x < -1$ .

(12) 40

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e$

(17)  $y = x - 2\pi$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 4 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון ..... 57
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני ..... 59
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי ..... 60
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים ..... 61
5. מבחני השוואה ..... 62
6. התכנסות בהחלט ..... 64
7. מבחן דיריכלה ..... 65
8. התכנסות בתנאי ..... 66

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5 :

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר :  $\infty$ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

(1) מתבדר :  $\infty$ .

(2) מתבדר :  $\infty$ .

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

תשובה

(1) מתבדר:  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

## שאלות

(1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x=1$  וציר ה- $x$ , עבור  $x \leq 1$ .

(2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x=5$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ .

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ . מצאו את הקבוע  $k$ .

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

## מבחני השוואה

## שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- |             |             |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.  | (2) מתבדר.  |
| (3) מתכנס.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.  | (6) מתבדר.  |
| (7) מתכנס.  | (8) מתכנס.  |
| (9) מתבדר.  | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכיחו: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

### תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (2) \quad \text{א.}$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad (2) \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

### תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בהחלט.  
 ג. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .
- (2) א. מתכנס בהחלט.      ב. מתכנס בתנאי.      ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור  $0 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בתנאי עבור  $-3 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 5$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 5$ .
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 5 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

68	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
71	2. מבחן ההתבדרות של טורים
72	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
74	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
76	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
77	6. תרגילי תיאוריה

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

**תכונות אלגבריות של טורים**

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא  $0.123123123\dots + 0.141414\dots$ .

**תשובות סופיות**

- (1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$ .
- (2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$ .
- (3) מתבדר.
- (4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$ .
- (5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$ .
- (6) מתכנס ל- 8.
- (7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$ .
- (8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$ .
- (9) מתבדר.
- (10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$
- (11)  $\frac{1}{12}$
- (12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר. ד. מתבדר. ו. מתכנס.
- (13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
- (14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
- (15)  $\frac{323}{1221}$

## מבחן ההתבדרות של טורים

### שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad \text{ג.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ו.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad \text{ה.}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ד.}$

### תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

## מבחני התכנסות לטורים חיוביים

### שאלות

#### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצאו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראָפֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

### תשובות סופיות

- |               |             |             |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר.    | (2) מתבדר.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.    | (5) מתבדר.  |             |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0        |             |
| (7) מתכנס.    | (8) מתבדר.  | (9) מתכנס.  |
| (10) מתבדר.   | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר.   | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס.   | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס.   | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר.   | (26) מתבדר. |             |

## מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

(7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n}, \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}} \quad (\theta \neq 2\pi k)$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

(10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$  הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$ .

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

**תשובות סופיות**

- |                |             |             |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.     | (2) מתכנס.  | (3) מתכנס.  |
| (4) מתכנס.     | (5) מתכנס.  | (6) הוכחה.  |
| (7) הוכחה.     | (8) מתבדר.  | (9) הוכחה.  |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס.   | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס.    | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר.       | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

## תרגילי תיאוריה

- (1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
- א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.
- ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.
- (2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
- א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.
- ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.
- ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.
- (3) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.
- (4) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס, אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.
- (5) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .
- הוכיחו כי  $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$  מתכנס.
- (6) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .
- הוכיחו כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.
- ב. נתון טור מתכנס  $\sum a_n$ .
- הוכיחו ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.
- הערה: אין קשר בין הסעיפים
- (7) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף.
- הוכיחו כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(8)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  לכל  $n$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(10) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(12) הוכיחו: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי, אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .

א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.

1. הוכיחו כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

2. הוכיחו כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

(17) הוכיחו:

א. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ , אז הטור מתבדר.

ב. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\sum (na_n - k)$  מתכנס (כאשר  $k \neq 0$ ),

אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתבדר.

(18) הוכיחו כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ , אז הטור מתכנס.

(19) נתון  $a_n \geq 0$  לכל  $n$ .

א. נתון כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$ .

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

ב. נתון כי  $\sum (n^3 a_n^2 - k)$  מתכנס (כאשר  $k > 0$ ).

הוכיחו כי  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  מתכנס.

(20) הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת על ידי  $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{21}{20}$ , כאשר  $(n \geq 1)$ .

האם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי. הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

**(28)** פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ , גזירה ב-0 ומקיימת  $f(0) = 0$ . הוכיחו כי אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט, אז  $\sum f(a_n)$  מתכנס בהחלט.

**(29)** נתון  $p(x)$  פולינום.

$\sum a_n$  מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי  $\sum P(a_n)$  מתכנס  $\Leftrightarrow p(0) = 0$ .

**(30)** יהיו  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס. (2)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 6 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

82	.....	1. סדרות פונקציות
85	.....	2. טורי פונקציות
87	.....	3. טורי חזקות
89	.....	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

## סדרות פונקציות

### שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[0, 4]$  ?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, 4]$  ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[0, \infty)$  ?  
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע  $[1, \infty)$  ?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[ n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left( x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\text{כאשר } \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left( n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב-  $[1, \infty)$  ?  
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?  
 ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$ , עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[1, \infty)$  ?

## תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \frac{\pi}{2}$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2}$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום  $[1, \infty)$ , לפונקציה  $\frac{1}{x}$ .  
ב. רק אם  $\alpha < 0$ .

## טורי פונקציות

### שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

### תשובות סופיות

(1)  $x > 0$

(2)  $x \neq 5$

(3)  $x < 3\frac{9}{10}$  or  $4\frac{1}{10}$

(4)  $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5)  $x > 0$

(6)  $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

## טורי חזקות

### שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

### הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

## תשובות סופיות

- |  |  |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2)                               | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1)   |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4)  | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3)  |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6)  | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5)  |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8)                               | $x = 1, R = 0$ (7)   |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10)                    | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9)   |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12)  | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11)   |
| $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14)                         | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13)  |
| $( x  < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16)          | $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15)                       |
| $( x  < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $( x  < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17)                      |
| $( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20)   | $( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

## גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

### שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad (8) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1} \quad (9) \text{ חשבו את סכום הטור}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$  ?

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

### תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2) \qquad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4) \qquad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6) \qquad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8) \qquad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב. } \quad \text{א. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13) \qquad \frac{1}{10} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 7 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 91 ..... 1. טור טיילור וטור מקלורן
- 93 ..... 2. טור טיילור סביב  $X=X_0$
- 94 ..... 3. חישוב סכום של טור
- 95 ..... 4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
- 96 ..... 5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
- 98 ..... 6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
- 99 ..... 7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
- 105 ..... 8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

## טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x=0$  (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות: לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.  
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.  
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

## תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

## טור טיילור סביב $x = x_0$

### שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = x_0$  של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

## חישוב סכום של טור

### שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

## חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$  כאשר  $k$  קבוע שונה מאפס. מצאו את  $n$  ואת  $k$ .

(5) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ .

(6) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x^4 - x^4}{(x - \sin x)^4}$ .

(7) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)^3 - (\sin x^3)^2}{\ln(1 + x^{10})}$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

$$216 \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (7)$$

## חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת  $n$  איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1)\cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4)\ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[3]{9/100} \quad (11)$$

## חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

### שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

## חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt{x+4}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt{5}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $x > 0$  מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\sqrt{x+4} \cong 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$ , עבור  $|x| < 0.1$ ?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[3]{66}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $x > 0$  מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה  $f(x) = \tan x$  סביב  $x_0 = 0$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\tan 0.1$  והעריכו את השגיאה בקירוב.  
ב. הוכיחו שלכל  $0 < x < 1$  מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  סביב  $x_0 = 16$ , כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את  $\sqrt[4]{15}$  והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את  $\sqrt[3]{29}$  ברמת דיוק של  $10^{-3}$ .

(6) חשבו את  $\sin 36^\circ$  בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$ , בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = 0$ .

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב  $x = \frac{\pi}{4}$ .

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את  $\sin 36^\circ$ ? נמקו.

$$(7) \quad f(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{נתונה}$$

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור  $0 \leq x \leq 1$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

$$ב. \quad \text{הוכיחו שלכל } x \geq 0 \text{ מתקיים } \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

$$(8) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{נתונה}$$

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור  $0.1 \leq x \leq 0.9$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\text{עבור } 0.1 \leq x \leq 0.9, \quad \frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3$$

$$ג. \quad \text{הוכיחו כי עבור } -1 < x \text{ מתקיים } \frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$$

$$(9) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad \text{נתונה}$$

א. קרבו את  $f(x)$  על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור  $|x| \leq 0.5$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\text{עבור } |x| \leq 0.5, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$ג. \quad \text{פתרו את אי השוויון } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \text{ עבור } -1 < x$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור  $f(x) = e^x$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את  $\sqrt{e}$  ברמת דיוק של  $10^{-4}$ .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$\text{עבור } 0 \leq x \leq 1, \quad e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(-1, 1)$ , שעבורו  $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$ .

**11** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור  $f(x) = \ln(1+x)$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את  $\ln 1.5$  ברמת דיוק של  $10^{-4}$ .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום  $p(x)$  בקטע  $(0,1)$ , שעבורו  $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$ .
- ה. הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים אי השוויון  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

**12** תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[0,1]$ ,

ונניח ש-  $f(0) = f(1) = 0$  ו-  $|f''(x)| \leq M$  לכל  $0 < x < 1$ .

הוכיחו כי  $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ .

**13** תהי  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים המקיימת  $f(-1) = f(1) = 0$ .

כמו כן, נתון כי קיים  $M$ , כך ש-  $|f''(x)| \leq M$  בקטע.

הוכיחו שלכל  $-1 \leq x \leq 1$  מתקיים  $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$ .

**14** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב-  $(0, \infty)$ , ונניח כי  $|f'(x)| \leq M$  לכל  $0 < x$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ .

**15** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים המקיימת  $f''(x) \geq 0$  לכל  $x \in [a,b]$ ,

ונניח כי  $x_0 \in [a,b]$ .

א. הוכיחו שלכל  $x \in [a,b]$  מתקיים  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

ב. הוכיחו כי  $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$  לכל  $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .

**16** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ ,  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ ,  $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$

הוכיחו כי  $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$ .

**(17)** נניח ש-  $f$  גזירה פעמיים ב-  $(0, \infty)$  ו- " $f$ " חסומה ב-  $(0, \infty)$  ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

הוכח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

**(18)** הוכיחו כי  $e$  הוא מספר אי-רציונלי.

## תשובות סופיות

$$1 \quad \text{א. נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304} \quad \text{שגיאה בקירוב: } \frac{5}{663552}$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה. ג. } \frac{1}{480000}$$

$$2 \quad \text{א. נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ חישוב: } \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$3 \quad \text{א. נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{512}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$4 \quad \text{א. נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{3130}$$

$$5 \quad \sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$$

$$6 \quad \text{א. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} \quad \text{ב. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$7 \quad \text{א. ב. } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{שגיאה הקטנה מ-0.25}$$

$$8 \quad \text{א. } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \quad \text{שגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000}$$

$$\text{ב. שגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

$$9 \quad \text{א. } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \quad \text{שגיאה הקטנה מ-} \frac{7}{27}$$

$$\text{ב. השגיאה המקסימלית היא } \frac{7}{27} \quad \text{ג. ראו בסרטון.}$$

$$10 \quad \text{א. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n \quad \text{ב. } \sqrt{e} = 1.6487$$

$$\text{ג. } \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{ד. } p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \quad \text{ד. } \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.} \quad p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

### הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- $n$  ספרות אחרי הנקודה,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-n}$ .

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ .

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

## נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 8 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

106	1. קווים ותחומים במישור.....
110	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית.....
116	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית).....
121	4. משטחים במרחב.....
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית.....
123	6. גופים במרחב.....
126	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות.....
130	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה.....

## קווים ותחומים במישור

### שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א.  $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג.  $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה.  $0 \leq x \leq 1$   $y = \sqrt{1 - x^2}$

ו.  $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$   $y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א.  $y = 2 + \sqrt{1 - (x-3)^2}$

ב.  $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג.  $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

ז.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ח.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו.  $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10) נתונה המשוואה  $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$ .

- א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.  
 ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.  
 ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.  
 ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?  
 ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א.  $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

### שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א.  $x = t^2 + 1, y = t^2$  ,  $t \geq 0$

ב.  $x = \sin t, y = \cos^2 t$  ,  $0 \leq t \leq \pi$

ג.  $x = \cos t, y = 4 \sin t$  ,  $\pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.

על ידי חילוץ של הפרמטר  $t$ , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים  $x$  ו- $y$  בלבד:

א.  $x = t - 4, y = t^2$

ב.  $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג.  $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד.  $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה.  $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו.  $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$  (קבוע  $k$ ).

3) נתון המעגל  $x^2 + y^2 = 8$ .

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה  $A(2,2)$  לנקודה  $B(-2,-2)$ .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום  $D$ , המוגבל מעל הישר  $AB$  ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום  $E$ , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל  $x^2 + y^2 = 16$ .

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- $y$  הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה  $A(-2, -3)$  לנקודה  $B(-1, 0)$ .
- כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$  למסילה C.

$$(8) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad .0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad .-\pi \leq t \leq 2\pi$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{א. } 0 \leq t \leq 2\pi \\ \text{ב. } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4} \end{matrix}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז } (0, 0) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז } (8, 4) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \text{ : הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = 2\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2\mathbf{u} \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}\mathbf{u} \sin v \end{cases} \quad \cdot \uparrow$$

$$0 \leq \mathbf{u} \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{שמאלית}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ימנית}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$$

$$\cdot \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{וענף שמאלי}, \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} t \in \mathbb{R} : \text{ענף ימני}$$

$$1. \tau \quad C : \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ג.}$$

8 (8)

6π√29 (9)

## קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-1, -1)$  לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית  $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$  לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית  $(0, -4)$  לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית  $(-2, 2)$  לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $4x - x^2 = 1 + xy$  לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה  $r = -4\cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $x^2 + y^2 = 4y$  לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה  $x = 10$  לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה  $y = 4$  לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה  $r = 4$  לקואורדינטות קרטזיות.

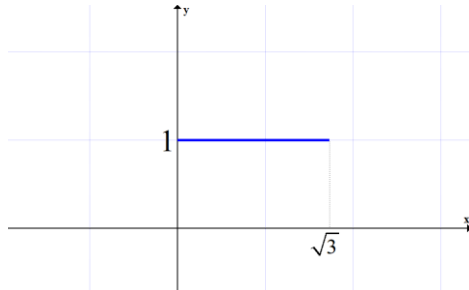
ב. המירו את המשוואה  $\theta = \pi/4$  לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה  $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

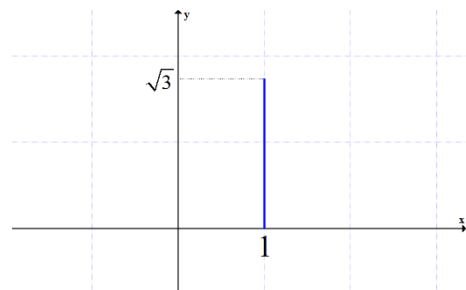
ד. המירו את המשוואה  $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$  לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א.  $y = \sqrt{1-x^2}$

ב.  $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג.  $x = \sqrt{1-y^2}$

ד.  $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה.  $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו.  $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א.  $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב.  $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג.  $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

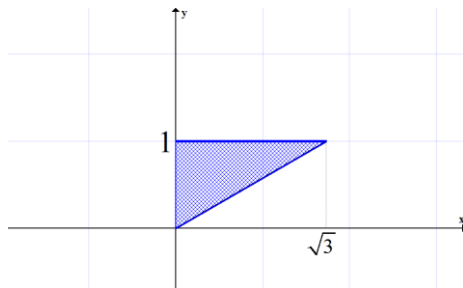
ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

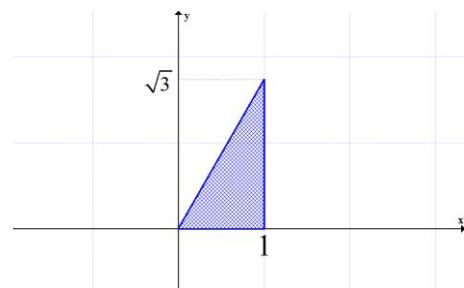
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



## תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. (1)}$$

$$(r, \theta) = \left( \sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left( 4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. (2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. (3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. (4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. (5)}$$

$$6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ ב. } r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ א. (6)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{4}{3} \right) + \pi \end{cases} \text{ ו. } \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ ה. } \begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ ד.}$$

$$r = 6 \sin \theta, 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \text{ ב. } r = 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \text{ א. (8)}$$

$$r = -\frac{1}{\sin \theta}, 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \text{ ד. } \begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ ג.}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (9)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ א. (10)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ ד.}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ ב. } 1 \leq r \leq 2 \text{ א. (11)}$$

$$0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \text{ (12)}$$

$$\arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{3}{4} \right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad (14)$$

## משטחים במרחב

### שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  לבין המשטח  $z = 12$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$  :

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$ .

מצאו את החיתוך בין המשטחים  $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$  ו-  $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ .  
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח  $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$  :

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים:  $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ ,  $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$ .
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
  - הראו כי החיתוך בין  $R$  ו- $Q$  הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
  - המסילה  $C$  היא חלק של החיתוך בין  $R$  ל- $Q$ . נתון כי  $A(-2, -3, 2)$  היא נקודת התחלה של  $C$  ו- $B(-1, 0, 1)$  היא נקודת סיום של  $C$ . כתבו את  $C$  בצורה פרמטרית.
  - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$  למסילה  $C$ .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

### תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 3)$  ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1, 2, 0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 10)$ .
- החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 12)$ .
- א. ספירה שמרכזה  $(4, 1, -10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .
- נקודות החיתוך הן  $A(7, 0, -12)$ ,  $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$ .
- החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$ , שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 7)$ .
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
ב.  $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$   $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב.  $z = -x, z = x$ . ג.  $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$   $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$ . ד.  $\sqrt{2}$ .

## גופים במרחב

### שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד.  $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2+z^2 \leq 4\}$

ה.  $V = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

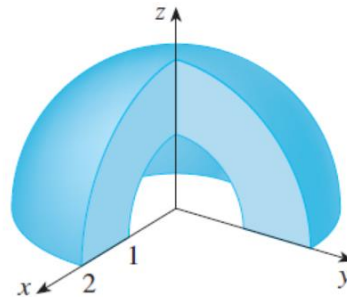
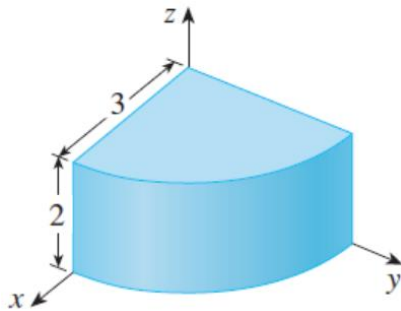
ה.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף  $V$  במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית  $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$ .

א.

ב.



7) נתונים המשטחים  $z = x^2 + y^2$  ו-  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים:  $z = x^2 + y^2 + z^2$  ו-  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(9) תחומים תלת-ממדיים  $M$  ו-  $N$  נתונים על ידי

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

תחום תלת-ממדי  $W$  הוא החיתוך בין  $M$  ל-  $N$ .

שרטטו את  $D$ , החיתוך של  $W$  עם המישור  $y=1$  (במערכת צירים  $xz$ ),

וכתבו את  $D$  בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קואורדינטות גליליות וכדוריות

### שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א.  $z = 3$

ב.  $z = 4x^2 + 4y^2$

ג.  $x^2 + y^2 = 4$

- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א.  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

ב.  $2x + 3y + 4z = 1$

ג.  $x^2 = 16 - z^2$

ד.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א.  $r = 3$

ב.  $z = r^2$

ג.  $z = r$

ד.  $\theta = \frac{\pi}{4}$

ה.  $r = 4 \sin \theta$

ו.  $r^2 \cos 2\theta = z$

- 4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א.  $r = 3$

ב.  $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג.  $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד.  $r = 2 \sec \phi$

ה.  $r = 4 \cos \phi$

- 5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א.  $r \sin \phi = 1$

ב.  $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג.  $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- 6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- 7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- 8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב.  $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג.  $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד.  $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

**תשובות סופיות**

1 א. מערכת גלילית:  $z = 3$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{3}{\cos \phi}$ . שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית:  $z = 4r^2$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$ .

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית:  $r = 2$ . מערכת כדורית:  $r = \frac{2}{\sin \phi}$ . שם המשטח: גליל.

2 א. מערכת גלילית:  $r^2 + z^2 = 9$ . מערכת כדורית:  $r = 3$ . שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית:  $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$ .

מערכת כדורית:  $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$ .

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית:  $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$ . מערכת כדורית:  $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$ .

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית:  $z = r$ . מערכת כדורית:  $\phi = \frac{\pi}{4}$ . שם המשטח: חרוט.

3 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 = 9$ . שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית:  $z = x^2 + y^2$ . שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית:  $y = x$ . שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית:  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ . שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית:  $z = x^2 - y^2$ . שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית:  $y = \sqrt{3}x$ . שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית:  $z = 2$ . שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ .

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, 2)$  ורדיוסה 2.

5 א. מערכת קרטזית:  $x^2 + y^2 = 1$ . שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית:  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית:  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ . שם המשטח: ספירה.

6 א.  $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב.  $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\} \quad \text{א. (7)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{א. (8)}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ב.}$$

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\} \quad \text{ג.}$$

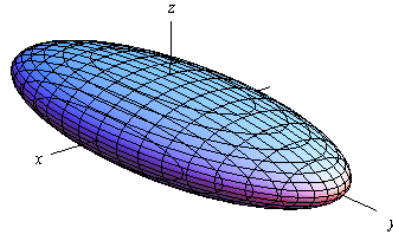
$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\} \quad \text{ד.}$$

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

### אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

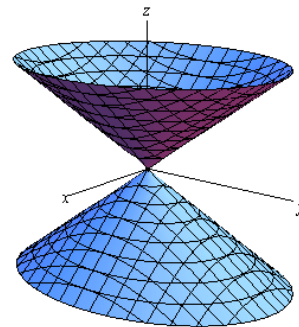
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



### חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

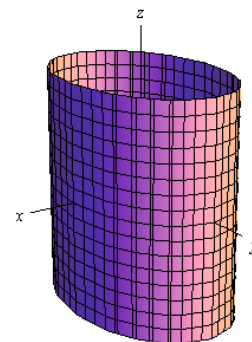
תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



### גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

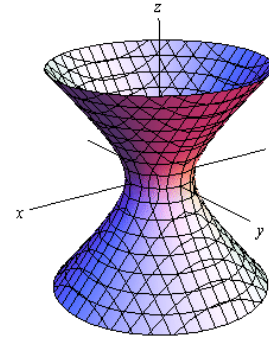


**היפרבולואיד חד-יריעתי**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

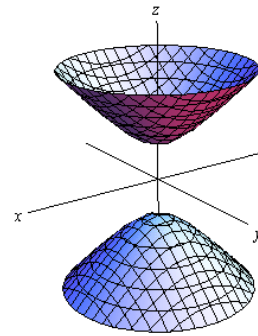
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

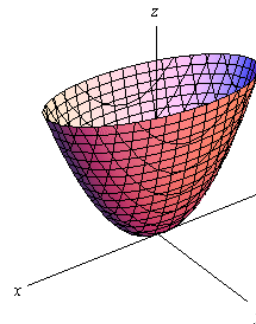
**פרבולואיד אליפטי**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

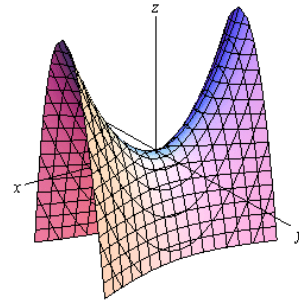
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



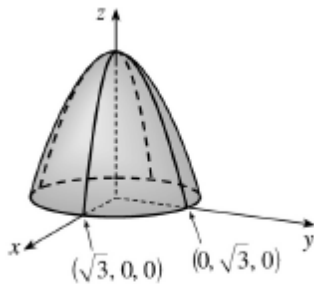
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

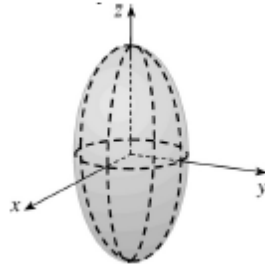
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

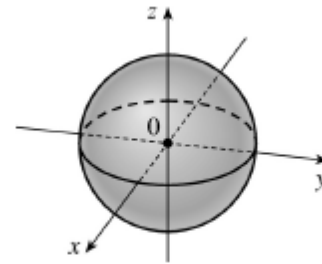
### דוגמאות שונות



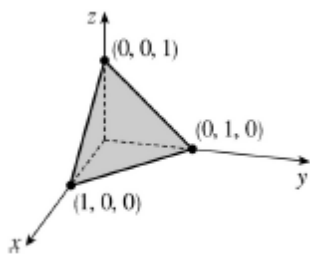
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



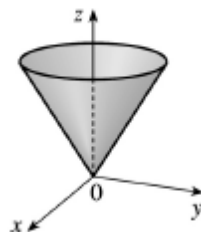
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



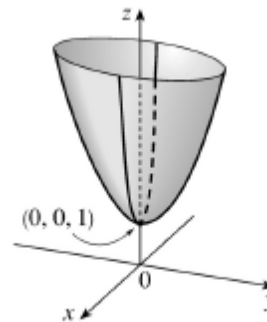
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 9 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 133
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 135
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים ..... 137
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה ..... 138

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

### תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
 ציירו את קו הגובה במקרה זה.

### הערות

- \* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- \*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

### שאלות

- (1) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ . מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ . מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:  
 א.  $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$   
 ב.  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$ . מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$ . מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

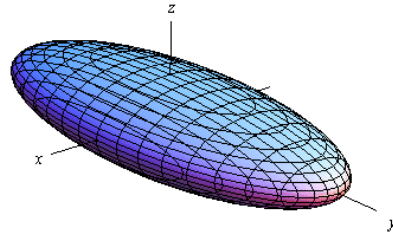
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, -2)$  ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 4)$  ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.  
 ב. משטח רמה  $k$  הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה  $(0, 0, k)$  ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור  $k < 0$  לא קיים משטח רמה  $k$ .  
 עבור  $k = 0$  נקודה  $(0, 0, 0)$ . עבור  $k = 1$  מישורים.  
 עבור  $k > 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
 עבור  $0 < k < 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$ .
- (5) עבור  $k < 0$  היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור  $k = 0$  חרוט אליפטי.  
 עבור  $k < 0$  היפרבולואיד דו-יריעתי.

## נספח – משטחים ממעלה שנייה

### אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

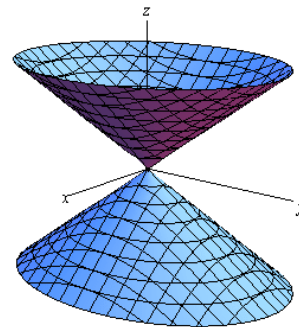
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$ , נקבל כדור עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



### חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

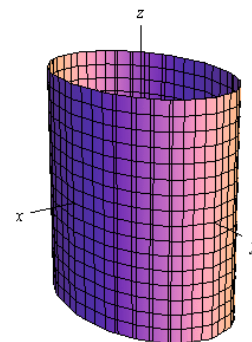
תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



### גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

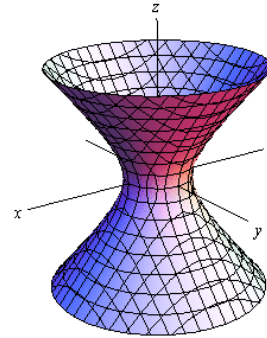


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

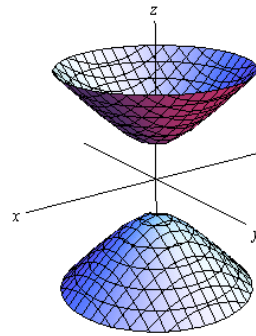
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

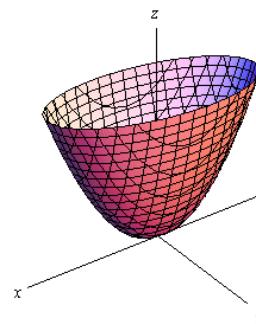
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

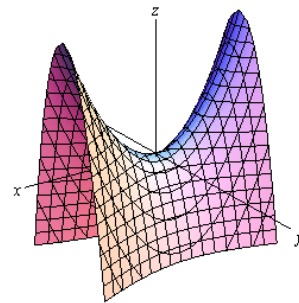
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



### פרבולואיד היפרבולי



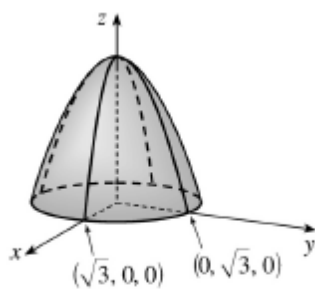
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

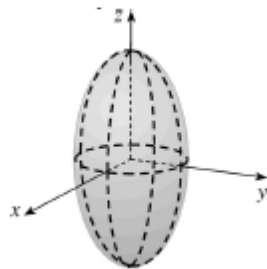
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

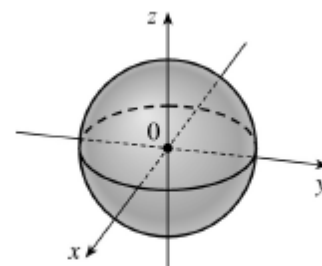
### דוגמאות שונות



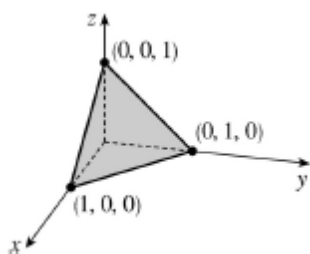
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



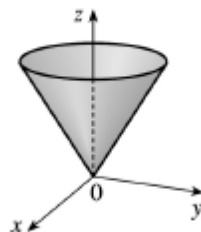
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



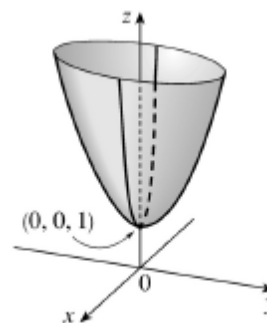
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 10 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

- 1. גבול של פונקציה של שני משתנים ..... 141
- 2. רציפות של פונקציה של שני משתנים ..... 144
- 3. נוסחאות – גבולות ..... 147

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

\* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$ .

ב. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$ .

ג. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$ .

ד. היעזרו בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשבו את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$ .

\* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$ .

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$ .

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$ .

### תשובות סופיות

1 (1)

 $\frac{1}{12}$  (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף. (5)

 $\frac{1}{2}$  (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה  $(0,0)$ .  
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,  
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה  $(1,4)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון}$$

כאשר  $m$  קבוע.

עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?

8 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$  לכל  $y$ ,

וגם  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$  לכל  $x$ ,

אז  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ .

9 פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ , לכל  $(x, y)$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל  $x$  מתקיים  $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $y$ ).

לכל  $y$  מתקיים  $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$  (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה  $x$ ).

הוכיחו כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

12 הוכיחו או הפריכו:

נתון כי  $f(x, y)$  רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי  $z(1, 14) < 0$ ,  $z(14, 1) > 0$ .

אז בתחום ההגדרה של  $z$  קיימת נקודה  $(c_1, c_2)$ , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$ .

**תשובות סופיות**

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0) = 1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור  $m > 1$  הפונקציה רציפה, ועבור  $m \leq 1$  הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

## נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$e$	(from right) 1	$e$
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	$e$	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 11 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

148	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
150	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
154	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה
156	4. דיפרנציאביליות

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (11) \text{ נתון}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{ הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad (12) \text{ נתון}$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

## הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \qquad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \qquad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \qquad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \qquad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \qquad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

שאלת הוכחה. (11)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

## הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## נגזרות חלקיות מסדר שני

### שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ .

16) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

17) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

18) נתון  $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשבו  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$ .

### הערת סימון

$$\begin{array}{l}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 f_y = -2x^2y + 10 & f_{xx} = 8 - 2y^2 & f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \\
 f_{yx} = -4xy & f_{xy} = -4xy & f_{yy} = -2x^2 \\
 f_y = \frac{x^4}{y} & f_{xx} = 12x^2 \ln y & f_x = 4x^3 \ln y \quad (2) \\
 f_{yx} = \frac{4x^3}{y} & f_{xy} = \frac{4x^3}{y} & f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y = 3y^2 - 6x & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 - 6y \quad (3) \\
 f_{yx} = -6 & f_{xy} = 6 & f_{yy} = 6y \\
 f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} = 6x & f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4) \\
 & f_{xy} = -3 & f_{yy} = 6y - 6 \\
 f_y = x^2 - 2xy & f_{xx} = 2y & f_x = 2xy - y^2 \quad (5) \\
 & f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} = -2x \\
 & f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \\
 & & f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 & f_y = e^{xy} (x^2 + xy + 1) & f_x = e^{xy} (xy + y^2 + 1) \quad (7) \\
 f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) & f_x = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & , f_{xx} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & f_{yy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & f_{xy} = e^{x+y} (x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y = e^{-x^2-y^2} (4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x = e^{-x^2-y^2} (2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & f_{xx} = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{yy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & f_{xy} = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{array}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \qquad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \qquad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \qquad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z \qquad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left( 1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

16

## נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

### שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?  
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(3) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה  $(0, 0)$  וחשבו אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.  
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

$$6 \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה  $(0, 0)$ ?

ג. האם  $f_{xyxy}(1, 4) = f_{yxxy}(1, 4)$ .

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

### תשובות סופיות

1 (א.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ . ב. לא רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .)

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2  $f_x(0, 0) = 1$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

3  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$

4 א. שאלת הוכחה. ב.  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ .

$$5 \quad \text{א.} \quad f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב. לא רציפות.

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6 א.  $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה  $(0, 0)$ . ג. כן.

## דיפרנציאביליות

### שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0,0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5)$$

בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6)$$

נתון  $m$ , קבוע.

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה גזירה חלקית בראשית?  
 ג. עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון } f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- $\phi$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות } f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $(0, 0, 0)$ .

$$(10) \quad \text{נתונה } f: R^n \rightarrow R, \text{ המוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם  $f$  דיפרנציאבילית בנקודה  $x = 0$ ?

**תשובות סופיות**

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א.  $m > 1$       ב.  $m > 0$       ג.  $m > 2$
- (7) א.  $m < 1$       ב. לכל  $m$       ג.  $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 12 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט ..... 159

## נגזרת מכוונת וגרדיאנט

### שאלות

(1) תהי  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

א. חשבו את הגרדיאנט של  $f$  ואת אורכו בנקודה  $(3, 4)$ .  
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של  $f$ , העובר דרך  $(3, 4)$ .

(2) תהי  $f(x, y) = 3x^2y$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

(3) תהי  $f(x, y) = x - \sin(xy)$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ .

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ .

(4) תהי  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של  $45^\circ$  עם החלק החיובי של ציר ה- $x$ .

(5) תהי  $f(x, y) = xy^2$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(1, 3)$  בכיוון לנקודה  $(4, 5)$ .

(6) תהי  $f(x, y, z) = x^2y^2z$ .

חשבו את הנגזרת המכוונת של  $f$  בנקודה  $(2, 1, 4)$ ,

בכיוון הווקטור  $\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$ .

(7) אם הפוטנציאל החשמלי  $V$  בנקודה  $(x, y)$ , נתון על ידי  $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ , מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה  $(3, 4)$  בכיוון לנקודה  $(2, 6)$ .

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של  $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה  $(0, 0)$  היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9 מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ , בנקודה  $(1, 2, -1)$  היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10 אם הטמפרטורה נתונה על ידי  $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ , ואני נמצא בנקודה  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$  ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 4x^2y$ .

- א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $30^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $y$ .
- ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, 2)$ , בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12 נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = x^2yz^4$ .

- מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה  $(1, 2, -1)$ , בכיוון וקטור היוצר זווית של  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , ו- $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $z$ . הניחו שהזווית עם ציר ה- $y$  חדה.

13 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$  ונתונה הנקודה  $Q(1, 1)$ .

- א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה  $Q$ , בכיוון וקטור שיוצר זווית  $60^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ב. מצאו וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$ .

ג. האם קיים וקטור  $\vec{u}$ , כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$ ?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ג. חשבו את  $\nabla f(0, 0)$ .
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה  $f$  בנקודה  $(0, 0)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (1, -1)$ .
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z)$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה  $(2, 4, 1)$ ?
- ב. אוסף הנקודות  $(x, y, z)$ , בהן הטמפרטורה שווה  $20^\circ$ , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה  $(2, 4, 1)$  רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור  $z=1$ ), בנקודה  $(2, 4, 1)$ . כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור  $\vec{u} = (a, b, c)$ , המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של  $f$  בנקודה  $(1, 1)$ .

18 נתונה  $f = f(x, y, z)$  דיפרנציאבילית, המקיימת  $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$ .

נתון כי  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$ , כאשר  $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ .  
חשבו את  $\nabla f(0, 2, 4)$ .

19 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ .

א. חשבו את  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$ , בכיוון הווקטור  $\vec{u} = (3, 4)$ .

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

ג. חשבו  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ , בכיוון וקטור  $\vec{v}$ , היוצר זווית  $\alpha$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

ד. באיזה כיוון  $\alpha$ , הנגזרת המכוונת  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$  תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20 נתונה הפונקציה  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של  $m$  מתקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$ , לכל וקטור יחידה  $\hat{u}$ ?

ב. מצאו וקטור יחידה  $\hat{u}$ , המקיים  $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$ .

### הערות סימון

1 במישור  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{i} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$ , ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{או} \quad \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים:  $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , או  $\vec{v} = (x, y, z)$ .

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

2 יש המסמנים וקטור  $\vec{u}$  גם  $\underline{u}$  או  $\mathbf{u}$ .

3 וקטור יחידה יסומן  $\hat{u}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט  $(6, 8)$ . ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2)  $\frac{48}{5}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $7.5\sqrt{2}$
- (5)  $3\sqrt{13}$  (6)  $\frac{88}{3}$  (7)  $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(1, 1)$  ושווה ל- $\sqrt{2}$ .
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור  $(12, 14, -12)$  ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור  $(-2, 2, -2)$ .
- (11) א.  $8\sqrt{3} + 2$ . ב.  $8 + 2\sqrt{3}$ . ג.  $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12)  $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א.  $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$ . ב.  $\vec{u} = (5, 1)$  (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב.  $f_x = 1, f_y = 0$ . ג.  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור  $(8, 32, 2)$ . ד. בכיוון הווקטור  $(8, 32)$ .
- (16) א. פרבולואיד. ב.  $\vec{u} = (4, 4, -32)$
- (17)  $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18)  $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א.  $\frac{67}{5}$ . ב. לא דיפרנציאבילית. ג.  $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד.  $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א.  $m > 29$ . ב.  $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$  (יש אחרים).

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 13 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

164	.....	1. פונקציות סתומות - הפן הטכני
167	.....	2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי
174	.....	3. שימושים גאומטריים

## פונקציות סתומות – הפן הטכני

### שאלות

- (1) מצאו את  $y'$ , כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ ,  
 וחשבו את  $y'(0)$ .
- (2) מצאו את  $y'(1)$ , כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .
- (3) מצאו את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$ , כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .
- (4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$   
 חשבו את  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .
- (5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$   
 חשבו את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .
- (6) נתונה המשוואה  $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$   
 הוכיחו כי  $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$ .
- (7) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$   
 מצאו  $z_{xx}(1,1)$ .
- (8) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2,1,-2)$ . מצאו את:  
 א.  $z_{xx}(2,1)$   
 ב.  $z_{xy}(2,1)$   
 ג.  $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .

ב. הראו כי  $u_{xy} = u_{yx}$ .

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את  $w_x, w_y$ .

ב. חשבו  $y_x, y_w$ .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכיחו כי  $z''(x) + y''(x) = 0$ .

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכיחו כי:

$$א. \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$$

$$ב. \quad z_{xy} = z_{yx}$$

\*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

## תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left( uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (11)$$

שאלת הוכחה. (11)

שאלת הוכחה. (12)

## פונקציות סתומות – הפן התאורטי

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$ .

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה  $(2,1)$ , שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$ .
- ב. חשבו את  $f'(2)$ .
- ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה  $(-2,1)$ .
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$  לכל  $x$  ממשי.

(2) נתונה המשוואה  $x^2 + y + e^y = 17$ .

- א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה  $(4,0)$ , שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x)$ .
- ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה  $x = 4$ .
- ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.
- ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$  לכל  $x$  ממשי.
- ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה  $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$ .

- א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה  $(2,1)$ .
- ב. האם המשוואה מגדירה את  $y$  כפונקציה של  $x$  בסביבת הנקודה?
- ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה  $F(x, y)$  מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה  $(x_0, y_0)$ , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א.  $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב.  $xy - 40x = 100$

ג.  $x^2 - y^2 = 3$

$$(5) \quad 2x^3 + y^3 - 6xy = 0 \quad \text{נתונה המשוואה}$$

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.  
 ב. חשבו את  $y'$  עבור נקודות אלה.  
 ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?  
 ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .

$$(6) \quad \text{נתונה המשוואה הבאה: } x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.  
 ב. חשבו את  $y''$  עבור נקודות אלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } x^2 + y^2 = R^2$$

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.  
 ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה  $y = f(x)$ .  
 עשו זאת בשתי דרכים:  
 1. על ידי תיאור גרפי של העקום.  
 2. על ידי חישוב.

$$(8) \quad \text{נתונה המשוואה } ax^4 + y^4 - xy = 0, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

ידוע שהנקודה  $(x_0, 0.5)$  מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

- א. מצאו את  $x_0$  ואת הקבוע  $a$ .  
 ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.  
 ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .  
 ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את  $y$  כפונקציה של  $x$ .

9 נתונה המשוואה  $xy = \ln y - \ln x + 1$ .

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את  $y'$  עבור נקודות אלה.
- מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה  $y$  הוא פונקציה של  $x$ .
- ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10 נתונה המשוואה  $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$ .

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה  $(e, e)$ .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות  $x = e$ ?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = f(x)$ .
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11 נתונה המשוואה  $y^3 + 6x \sin y = -8$ , ונתונה נקודה  $(0, -2)$ .

- הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x)$  בסביבת הנקודה.
- פתחו את  $y(x)$  לטור מקלורן מסדר 2.

12 ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור  $x = g(y)$ .
- נתונה המשוואה  $x = \ln(x^2 + y^2)$ .
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה  $(0, 1)$ , שבה המשוואה מגדירה את  $x$  כפונקציה של  $y$ ,  $x = g(y)$ .
- חשבו את  $g'(1)$ .

13 נתונה המשוואה  $xy = \ln y - \ln x + 1$ .

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה  $(1,1)$ , שבה המשוואה מגדירה את  $x$

כפונקציה של  $y$ ,  $x = g(y)$ .

ב. הוכיחו שהנקודה  $(1,1)$  היא נקודת מקסימום מקומי של  $g(y)$ .

14 בסעיפים א-ב, האם המשוואה  $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$ :

א. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(-1, 1, 2)$ ?

ב. מגדירה פונקציה סתומה  $y = y(x, z)$  בסביבת הנקודה  $(-1, 1, 2)$ ?

ג. הוכיחו שהפונקציה  $y = y(x, z)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(-1, 2)$ .

15 נתונה המשוואה  $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$ .

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(1, 2, 0)$ ?

ב. מגדירה פונקציה סתומה  $z = z(x, y)$  בסביבת הנקודה  $(4, 4, 1)$ ?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

בסביבת הנקודה  $(4, 4, 1)$ .

16 נתונה המשוואה  $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ .

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה  $y = y(x, z)$ ,

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17 נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $w = w(x, y)$ ,

בנקודה  $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$ .

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $w_x, w_y$ .

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה  $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$ .

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה  $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$ , שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה  $w = w(x, y)$ ?

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $w_x, w_y$ .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור  $w = w(x, y)$ .

**18** נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $\phi = \phi(x, y)$ ,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $\phi_x, \phi_y$ .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור  $z = z(\phi, x)$ ,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את  $z_\phi, z_x$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב.  $\frac{4}{9}$ . ג. כן. ד. הוכחה.
- (2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.
- (3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.
- (4) א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- (5) א. כל נקודה  $(x, y)$  שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות (0,0), (2,2).  
 ב.  $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ . ג. כלום! ד. לא.
- (6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות  $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$ , (0,0).  
 ב.  $y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$
- (7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות  $(R, 0)$ ,  $(-R, 0)$ .  
 ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- (8) א.  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $a = 3$ . ב. כן,  $(0, 0)$ ,  $(-0.5, -0.5)$ . ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- (9) א. כל נקודה  $(x, y)$  שעל  $xy = \ln y - \ln x + 1$ , ואשר שונה מהנקודה (1,1).  
 ב.  $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ . ג. כלום! ד. לא קיימת.
- (10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה (1,1).  
 ה.  $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$  ( $x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1)$ ). ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב.  $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$ . ג.  $g'(1) = -2$ .
- (12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג.  $g'(1) = -2$ .
- (13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- (15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- (16) הנקודה היא  $(0, 0, 0.5\pi)$  והנגזרות הן:  $y_x(0, 0, 0.5\pi) = -1$ ,  $y_z(0, 0, 0.5\pi) = 0$ .

ב. לא מתקיימים.

$$(17) \quad \frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \text{א.}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} \quad \text{ד.}$$

$$w_x(2,2) = -3, \quad w_y(2,2) = 3 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b} \quad \text{א.}$$

## שימושים גאומטריים

### שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$  ( $z < 0$ ).  
 מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה  $x = -2, y = 1$ ?
- (2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח  $xyz = 8$  בנקודה  $(-2, 2, -2)$ ,  
 וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצאו מישור המשיק למשטח  $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$ ,  
 המקביל למישור  $x + 8y + 18z = 0$ .
- (4) למשטח  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.  
 מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות A, B, C, בהתאמה.  
 נסמן:  $O = (0, 0, 0)$ .  
 הוכיחו  $OA + OB + OC = a$ .  
 (למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח  $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ , ונתונה הנקודה  $(1, 2, -1)$ .  
 הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור  $x + 3y - 2z = 10$ .  
 בנקודה Q.  
 מצאו את הנקודה Q.
- (6) הראו שהמשטח  $x^2 - 2yz + y^3 = 4$  מאונך לכל אחד מחברי משפחת  
 המשטחים  $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ , בנקודת החיתוך  $(1, -1, 2)$ .
- (7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום  $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$   
 בנקודה בה  $t = \frac{1}{4}\pi$ .

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום  $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ,

ונתונה נקודה  $P(x_0, y_0, z_0)$ , המתקבלת מהצבת  $t = t_0$  במשוואת העקום. הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה  $t = 0.25\pi$ .

9) נתונות שתי עקומות

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

10) נתונות שלוש עקומות

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח  $S$ , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור  $xy$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח  $S$ ? נמקו!

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה  $P$  שעליו, היא  $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ,

כאשר  $(a, b, c) = \nabla F(P) \times \nabla G(P)$ .

ב. בנקודה  $(1, -1, 1)$ , מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , על ידי  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2 + v^2$ .

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה  $(u, v) = (1, 0)$ .

14) מצאו ביטוי לוקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

עבור  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ .

באיזה משטח מדובר?

## תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (9)$$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא  $P(1, -1, 0)$ . ב. לא.

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad \text{ב.} \quad \text{א. כל נקודה, למעט } (0, 0, 0). \quad (13)$$

$$(14) \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,}$$

$$\text{שנוסחתו: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 14 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

- 178 ..... 1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים
- 180 ..... 2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי.

## נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה  $(a, b)$ :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y)\ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את  $\ln(1.5)$ .

(6) בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את  $e^3$ .

(7) בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את  $\sqrt[3]{2}$ .

### תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

## הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

### שאלות

- (1) חשבו בקירוב:  $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$ .
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של  $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$ .
- (3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן  $a = 10\text{ cm}$ ,  $b = 24\text{ cm}$ . חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע  $a$  יאריכו ב-4 mm ואת הצלע  $b$  יקצרו ב-1 mm.
- (5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

### תשובות סופיות

- (1)  $\cong -0.01$
- (2)  $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 15 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 181

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ . מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור  $-2x - 2y + z = 0$ , וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ . כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .
- א. הוכיחו שהנקודה  $(0, 0)$  היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$  הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- 14** מצאו שני מספרים,  $b > a$ , כך ש-  $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$  יהיה מקסימלי.

### תשובות סופיות

- 1**  $(-0.5, 1)$  אוכל;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- 2**  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוכל.
- 3**  $(0, 0)$  אוכל;  $(1, 1)$  מינימום.
- 4**  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  אוכל.
- 5**  $(0, 2)$  מקסימום.
- 6**  $(4, 4)$  מקסימום.
- 7**  $(-0.5, 4)$  מקסימום.
- 8** אין נקודות קריטיות.
- 9**  $z = 4$ ,  $z = 3$
- 10** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$ .
- 12**  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$  רווח מקסימלי \$288.
- 13** א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = 2$ ,  $a = -2$ , לא ניתן לדעת;  $a > 2$ ,  $a < -2$  אוכל;  $-2 < a < 2$  מינימום.
- 14**  $a = -6$ ,  $b = 4$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 16 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים.....183

## קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

### שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5:

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה  $y = x^2 + 1$ , לפרבולה  $y = -x^2 + 2x$ .  
 \* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות  $n$  נקודות,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , ויש למצוא קו עקום מהצורה  $y = h(x)$ , כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \quad (7)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \quad (8)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \quad (9)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \quad (10)$$

11)  $h(x) = ax^2 + bx + c$ , הדגימו עבור  $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$ .

12) נתונות  $n$  נקודות:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

מצאו ישר  $y = ax + b$ , כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.  
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור  $a$  ו- $b$ .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- $a$  ו- $b$ , המתקבלים מפתרון המשוואות  $f_a = 0, f_b = 0$ ,

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים  $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$ .

### תשובות סופיות

(1)  $(t, t)$  לכל  $t$  ממשי, מקסימום.

(2)  $(0, 0)$  מקסימום.

(3) אין קיצון.  $(1, 2)$  אוסף.

(4) אין קיצון.  $(1, 2)$  אוסף.

(5) מינימום  $(0.5, 1.1)$ .

(6) 0.375

(7)  $y = 0.88x + 0.3$

(8)  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

(9)  $y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$

(10)  $y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$

(11)  $y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 17 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....185

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12 \text{ , כאשר } x, y > 0 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \text{ , כאשר } x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12 \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \text{ , מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0 \quad (9)$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0 \text{ , הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח. מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ , והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ . לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ . דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$  על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ , המביא למינימום את העלות. נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ  $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$ . תהי  $(x^*, y^*)$  נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה. הוכיחו כי כופל לגראנז'  $\lambda$  מקיים  $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$  בנקודת הפתרון של הבעיה.

### תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (14)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 18 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים ..... 188

## קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

### שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצאו על פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה  $(1, 2, 2)$  ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה  $(1, 2, 2)$ .
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .  
 ב. מצאו נקודה על המישור  $-2x - 2y + z = 0$ , שהיא הקרובה ביותר לנקודה  $(1, 2, 3)$ .  
 ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצאו את הנקודות על המשטח  $z^2 = xy + 1$  הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$  למישור  $3x + 4y + 12z = 288$ . רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$ , הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .
- (6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$  והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.
- (7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$  והמישור  $z = x + y$ , לבין ראשית הצירים.

### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

### תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה  $(2, 4, 4)$ , והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה  $(-2, -4, -4)$ .
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.  
ב. הנקודה הקרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ .
- (4)  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר  $\frac{256}{13}$ . המרחק הארוך ביותר  $\frac{320}{13}$ .
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$ .
- (7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$ . מרחק מקסימלי 10.

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 19 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 190

## קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

### שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם  $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$ .
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם  $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$ .
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא העיגול  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$ .
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$ .

### תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט  $\frac{33}{4}$ . מינימום מוחלט  $-\frac{1}{4}$ .
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט  $1 + 6\sqrt{10}$ . מינימום מוחלט  $1 - 6\sqrt{10}$ .

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 20 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

191	.....	1. אינטגרלים כפולים
194	.....	2. החלפת סדר אינטגרציה

## אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x, y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2,2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

## תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{40}$  (2)

$\frac{a^3}{3}\pi$  (3)

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$
 (4)

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$
 (5)

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$
 (6)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$
 (7)

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$
 (8)

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$
 (9)

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx +$$
 (10)

$$+ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$\frac{32}{21}$  (11)

$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$  (12)

$\frac{a^4}{2}$  (13)

$14a^4$  (14)

0 (15)

## החלפת סדר אינטגרציה

### שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{-x^2} y dx dy \quad (9)$$

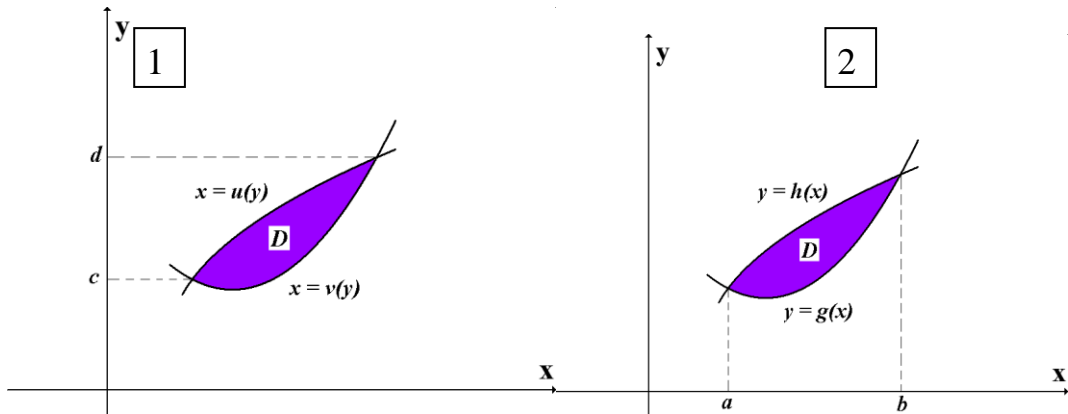
## הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dxdy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישומים  $dxdy$  ו- $dydx$  זהים.

## תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 21 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול.....197

## שימושי האינטגרל הכפול

### שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשבו את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

**11** ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם  $(0,1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,

יש פונקציית צפיפות  $\delta(x, y) = xy$ .

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

**12** ללוח דק בצורת מלבן  $R = \left\{ (x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$ ,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- $z$ .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח,  $M$ .

**13** מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל  $x^2 + z^2 = 4$ , הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$ , שבמישור  $xy$ .

## תשובות סופיות

$$\frac{64}{3} \quad (1)$$

$$a^2 \left( \frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) \quad (2)$$

$$32 \quad (3)$$

$$\frac{64}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (5)$$

$$\frac{88}{105} \quad (6)$$

$$\frac{17}{6} \quad (7)$$

$$16\frac{1}{5} \quad (8)$$

$$\frac{8}{3} \quad (9)$$

$$36 \quad (10)$$

$$\left( \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \text{ ב.} \quad \frac{1}{24} \text{ א.} \quad (11)$$

$$\frac{M(a^2 + b^2)}{12} \quad (12)$$

$$\frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) \quad (13)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 22 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק ..... 200
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות ..... 202

## מבוא מתמטי לפרק

### שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

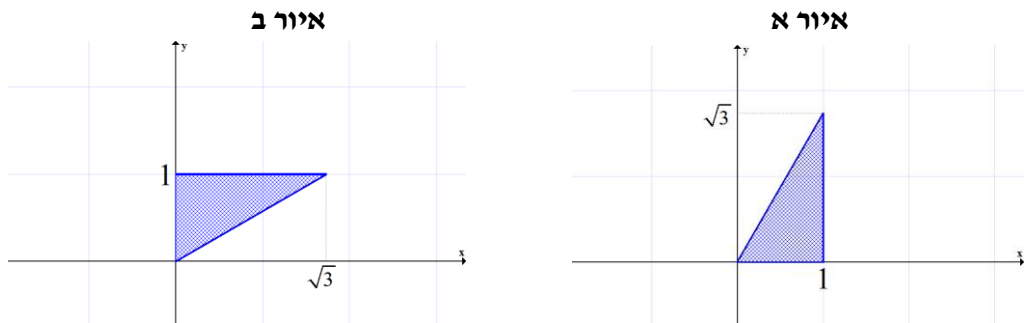
א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.



### תשובות סופיות

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (1)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (2)}$$

or

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ד}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ .ב} \quad \begin{matrix} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{matrix} \text{ .א (3)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (4)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ (5)}$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ .ב} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ .א (6)}$$

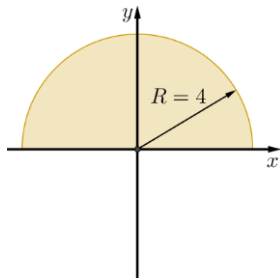
## אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

### שאלות

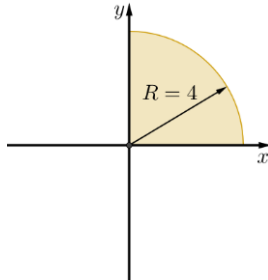
1) חשבו  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ , כאשר  $D$  התחום המתואר בשרטוט.

\* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

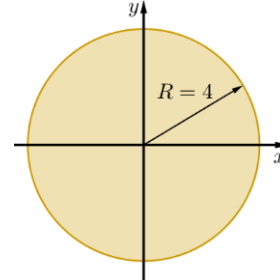
ג.



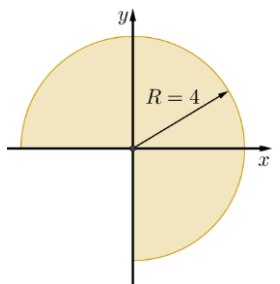
ב.



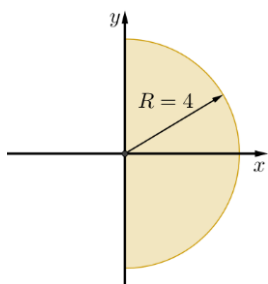
א.



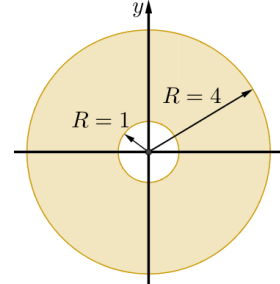
ו.



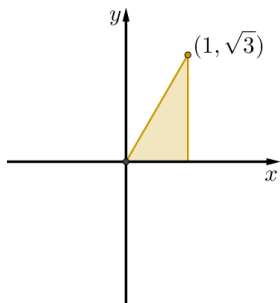
ה.



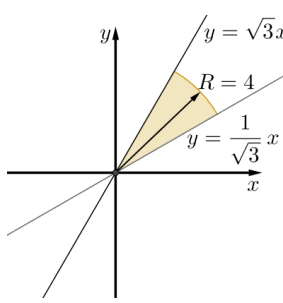
ד.



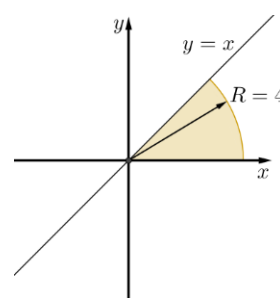
ט.



ח.



ז.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  לבין הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ .

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 2y$ , בין החרוט  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  מלמעלה לבין המישור  $xy$  מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = x$ , בין הפרבולואיד  $z = 1 - x^2 - y^2$  מלמעלה לבין מישור  $xy$  מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $y = 0$ ,  $y = x\sqrt{3}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\frac{128\pi}{3}$     ב.  $\frac{32\pi}{3}$     ג.  $\frac{64\pi}{3}$     ד.  $42\pi$     ה.  $\frac{64\pi}{3}$
- ו.  $32\pi$     ז.  $\frac{16\pi}{3}$     ח.  $\frac{32\pi}{9}$     ט.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א.  $\frac{\pi}{2}$     ב.  $\pi$     ג.  $\frac{\pi}{8}$     ד.  $\frac{\pi}{2}$
- (3)  $\frac{4}{3}$     (4)  $36$     (5)  $\frac{\pi}{2}$     (6)  $\pi a^2$
- (7)  $2\pi$     (8)  $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$     (9)  $\frac{4}{3}$     (10)  $\pi \ln \frac{e}{2}$
- (11)  $\pi(4-\pi)$     (12)  $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$     (13)  $\frac{\pi(e-1)}{4e}$     (14)  $\frac{\pi}{2} + 1$
- (15)  $-\frac{4}{5}$     (16)  $\pi \ln \frac{4}{e}$     (17)  $\pi$     (18)  $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19)  $\frac{32}{9}$     (20)  $\frac{5\pi}{32}$     (21)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 23 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול..... 205

## החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

### שאלות

(1) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי הישרים  $y=3-x$ ,  $y=1-x$ ,  $y=x-1$ ,  $y=x$ .

(2) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R e^{xy} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות  $y=x$ ,  $y=0.5x$ ,  $y=\frac{1}{x}$ ,  $y=\frac{2}{x}$ .

(3) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(1,1)$ .

(4) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R (4x+8y) dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם:  $A(-1,3)$ ,  $B(1,-3)$ ,  $C(3,-1)$ ,  $D(1,5)$ .

(5) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

(6) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R y^2 dA$ , כאשר  $R$  הוא התחום המוגבל על ידי העקומות  $y=\frac{1}{x}$ ,  $y=\frac{2}{x}$ ,  $xy^2=1$ ,  $xy^2=2$ .

(7) חשבו את האינטגרל הכפול  $\iint_R e^{x+y} dA$ , כאשר  $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ .

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 24 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם ..... 207

## אינטגרלים משולשים ושימושיהם

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-4 :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1 + x + y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשבו את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים:

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו  $h$  ורדיוס הבסיס שלו  $r$ . הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה  $\delta(x, y, z) = kz$  ( $k > 0$ ).

(16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)  $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ . סביב ציר ה- $z$ . בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה,  $M$ .

## תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{3}(e^3 - 1)$  (2)

$\frac{27}{4}$  (3)

$\frac{65}{28}$  (4)

$2 \sin 4$  (5)

$3e - 6$  (6)

4 (7)

$\frac{\sin^2 4}{2}$  (8)

$\frac{5}{6}$  (9)

$\frac{88}{100}$  (10)

$\frac{17}{6}$  (11)

$16\frac{1}{5}$  (12)

$\frac{8}{3}$  (13)

36 (14)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi kh^2 r^2$  (15)

$\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$  (16)

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

פרק 25 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

- 210 ..... 1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
- 212 ..... 2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)
- 213 ..... 3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר
- 215 ..... 4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)
- 217 ..... 5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

## תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

### שאלות

$$(1) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ עבור } b > a > 0.$$

$$(2) \text{ חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx \text{ עבור } b, a > 1.$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2) \text{ לכל } a \text{ ו-} b.$$

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

$$(4) \text{ בהינתן הנוסחה } \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } \alpha > 1,$$

$$\text{ הוכיחו כי } \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left( \frac{9}{8} \right)$$

### תשובות סופיות

$$(1) \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$$

$$(2) \pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

## אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

### הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך. בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל. בררו עם מתרגלות וואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

### שאלות

$$(1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(kx) dx \text{ , כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $0 < a \leq \alpha$ .

$$(2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx \text{ , כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור  $\alpha \geq 1$ .

$$(3) \text{ הוכיחו שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$(4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha$ .

$$(5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(6) \quad \text{נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $n$  טבעי ולכל  $\alpha$  המקיים  $\alpha \geq k > 0$ .

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל  $\alpha \geq k > 0$ .

### תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכיחו שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) 2}$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) חשבו את האינטגרל:

א.  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$

ב.  $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג.  $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$  ( $\alpha > 0$ )

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

**תשובות סופיות**

(1)  $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א.  $\sqrt{2\pi}$       ב.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם  $n$  אי-זוגי אז 0, ואם  $n$  זוגי אז  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב.  $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$       ג.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א.  $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$       ב.  $\frac{\pi}{2}$

## אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

### שאלות

(1) חשבו את  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$  עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(2) חשבו את  $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$  עבור  $b > a \geq k > 0$ .

(3) חשבו את  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ .

(4) הוכיחו כי עבור  $b > a > 0$  ו- $r \in \mathbb{R}$  מתקיים  $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$ .

(5) הוכיחו:

א.  $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$

ב.  $(\alpha, r > 0) \int_0^{\infty} \left[ e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{a}{2} \ln \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$

ג.  $(\alpha > 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$

(6) הוכיחו:

א.  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

ב.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשבו את  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

### תשובות סופיות

(1)  $\ln \frac{b}{a}$

(2)  $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3)  $\pi$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב.  $\frac{\pi}{4}$

(8)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$