# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

# תוכן העניינים

1. חישוב נגזרת של פונקציה ..... 1
2. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי ..... 10
3. כלל לופיטל ..... 21
4. חקירת פונקציה ..... 27
5. אינטגרלים מיידיים ..... 50
6. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 55
7. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 57
8. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 61
9. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות ..... 64
10. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) ..... 75
11. פונקציות של שני משתנים ..... 97
12. נגזרות חלקיות ..... 107
13. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 113
14. פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים ..... 117
15. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 124
16. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') ..... 126

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה ..... 1
3. תרגילים נוספים לפי סוגים ..... 5
4. גזירה סתומה ..... 8

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו <u>פעמיים</u> את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $f(x)=\sin(x^3)$

**21)** $f(x)=\cos(x^4)$

**22)** $f(x)=\sin^3 x$

**23)** $f(x)=\tan(x^2)$

**24)** $f(x)=\ln(\cos x^2)$

**25)** $f(x)=\arcsin(2x+3)$

**26)** $f(x)=\arctan(x^2)$

**27)** $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

**28)** $f(x)=(\sin x)^x$

**29)** $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

**30)** $y=x^{\ln x}$

**31)** $y=\sqrt[x]{x}$

**32)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**33)** $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**34)** $y=(x^2+1)^x$

**35)** $y=(x+1)^{(x+1)}$

**הערה:** בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

**2)** $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

**3)** $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

**4)** $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

**5)** $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

**6)** $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

**7)** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

**8)** $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

**9)** $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

**10)** $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

**11)** $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

**12)** $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

**13)** $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(14** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

**(15** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

**(16** $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

**(17** $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

**(18** $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

**(19** $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

**(20** $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

**(21** $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

**(22** $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

**(23** $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

**(24** $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

**(25** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

**(26** $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

**(27** $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28** $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

**29** $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

**30** $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

**31** $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

**32** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

**33** $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

**34** $y'=\left(x^2+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

**35** $y'=(x+1)^{(x+1)}\left[\ln(x+1)+1\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

**5)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

**6)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

**7)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

**8)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

**9)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את $y'$ בנקודה $(1,2)$.

**5)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את $y'$ בנקודה בה $y=0$.

**6)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

**7)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

**8)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y^n$ בנקודה בה $y=1$.

**9)** נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך $y$ אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את $y''$ בנקודה בה $x=1$.

**10)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) $-1$

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 2 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

### תוכן העניינים


1. המשיק ..... 10
2. בעיות משיקים ..... 12
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 14
4. הנורמל ..... 18
5. זווית שבין שתי עקומות ..... 19
6. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם ..... 20

# המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$ , בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ , בנקודה $x=-2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע $a$.

**3)** הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

**4)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ , בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ , בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**6)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ , לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?

לכל ערך $k$ כזה מצאו את נקודת ההשקה.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א', עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה-$x$ של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$.

**10)** פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב-$0$ ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה-$x$ היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

**11)** מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$
עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$, בנקודות $x=1$ ו-$x=0$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 17 ב. 4

**2)** $a=2$

**3)** $(1,3)$

**4)** $a=2,\ b=-1$

**5)** $a=2,\ b=-2$

**6)** לערך $k=6$, בנקודה $x=1$; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

**7)** א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \beta=116.56°$

**8)** $x=5,\ x=-1$

**9)** $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

**10)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**11)** $\alpha=33.69°,\ \beta=90°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים

## שאלות

**1)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**2)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**3)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את $a$ ו- $c$.

**4)** הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**5)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

**6)** $(2,-3),\quad y=x^2-2x+1$

**7)** $(-3,1),\qquad y=\sqrt{x}$

**8)** מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

**9)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את $k$ ואת נקודת ההשקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל $x$.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

## תשובות סופיות

**1)** נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

**2)** נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

**3)** נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

**4)** נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

**5)** משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

**6)** $(0,1)$ , $y=-2x+1$ ; $(4,9)$ , $y=6x-15$

**7)** המשיק $(9,3)$ , $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

**8)** $y=-2x-1$ , $y=2x-1$

**9)** $k=1.5$ , נקודת ההשקה $(1,1)$.

**10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ , בנקודה $x=-1$ .

**2)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ , ששיפועו $2$ .

**3)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ , בנקודה $x=0$ .

**4)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ , בנקודה $x_1=1$ .

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ , בנקודה $y=2$ , הוא $-4$ .
מצאו את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**6)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**7)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ , ששיפועו $-2$ .

**8)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ ,
בנקודה $x_1=2$ .

**9)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ , בנקודה $(1,6)$ , הוא $-6$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ , ואת משוואת המשיק.

**10)** נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$ .
מצאו את משוואת המשיק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ , בנקודה $x=0$ .

**12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$ ,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$ .

**13)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$ , בנקודה $x=1$
.

**15)** הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**16)** מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ , בנקודה $(3,4)$.

**17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^2+y-x=xy$ , דרך הנקודה $(1,1)$.

**18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$ ,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

**20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^2}+y=y^2-1$ ,
דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $y=24x+22$

**2)** $y=2x-3$

**3)** $y=1$

**4)** $y=-12x+9$

**5)** $a=2,\quad y=-4x-2$

**6)** $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

**7)** $y=-2x+8$

**8)** $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

**9)** $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

**10)** $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

**11)** $y=3x+1$

**12)** $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

**13)** $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

**14)** $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

**15)** $y=\frac{1}{e}x$

**16)** $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

**17)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**18)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**19)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

**20)** $y=\frac{4}{3}x+2$

**21)** א. $\left(0,0\right),\ \left(1,0\right)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמל

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$ , בנקודה $(3,2)$.

**2)** מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

**3)** משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$ , בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=-2x+8$

**2)** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

**3)** $(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# זווית שבין שתי עקומות

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f(x)=x^2$ ו- $y=g(x)=\frac{1}{x}$.

**2)** מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$.

**3)** הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

## תשובות סופיות

**1)** $71.57°$

**2)** $71.56°$

**3)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

## שאלות

**1)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:

$\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{27}$

**2)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:

$\ln 2,\ \sqrt[3]{9}$

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{5} \cong 2.25,\ \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6},\ \sqrt{27} = 5\frac{1}{5}$

**2)** $\ln 2 \cong 1,\ \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 3 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 21
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 23
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 24
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 25
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 26

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות **1-3** (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

**2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות בשאלות **4-8** (ביטויים אי-רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

**8)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-12** (פונקציות חזקה):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ \ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

**12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות בשאלות **13-15** (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

**14)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{20}{17}$ 3) $n-1$ 4) $4$ 5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{2}$ 7) $\frac{5}{6}$ 8) $-\frac{3}{2}$ 9) $1$ 10) $\ln\frac{a}{b}$

11) $\frac{1}{2}$ 12) $\frac{1}{6}$ 13) $-\frac{1}{2}$ 14) $2$ 15) $1$

16) $\frac{1}{2}$ 17) $\frac{1}{2}$ 18) $\infty$ 19) $0$ 20) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}\left(x^{2}-9\right)\cdot\ln\left(x-3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0

5) 0 6) 6 7) $\frac{5}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{2}$

**2)** $\frac{1}{2}$

**3)** $-\frac{1}{2}$

**4)** $\frac{1}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

**3)** $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

## תשובות סופיות

**1)** $e$

**2)** 1

**3)** 1

**4)** 1


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

**1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

## תשובות סופיות

**1)** $1$

**2)** $\frac{1}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 4 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

1. מושגי יסוד ..... 27
2. חקירת פולינום ..... 28
3. חקירת פונקציה רציונלית ..... 29
4. חקירת פונקציה מעריכית ..... 33
5. חקירת פונקציה לוגריתמית ..... 36
6. חקירת פונקציה עם שורשים ..... 40
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט ..... 41
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית ..... 44
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות ..... 48

# הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

   בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x(x-9)^2$

**2)** $f(x)=x^4-2x^3$

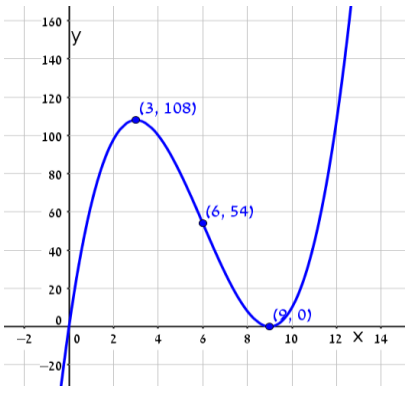
## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0 ו-9.
נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.
תחום עלייה: $x<3$ $or$ $x>9$, ירידה: $3<x<9$.
תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.
נקודת פיתול: $(6,54)$.

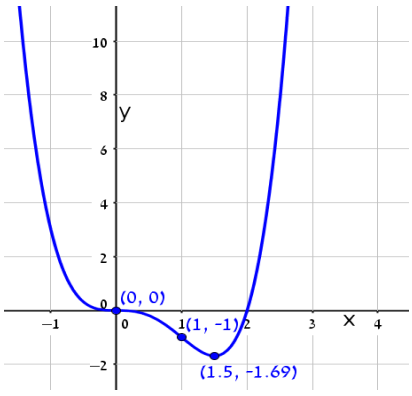
**2)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0 ו-2.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.
תחום קמירות: $x<0$ $or$ $x>1$, קעירות: $0<x<1$.
נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$.

## גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה רציונלית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערות**

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0$ $or$ $x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0$ $or$ $0<x<3$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x>0$ $or$ $x<-1$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2}$, קעירות: $x<-1$ $or$ $x>\frac{1}{2}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq\pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב-$\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12}$ $or$ $x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0$ $or$ $x>2$, קעירות: $0<x<2$ $or$ $x<-2$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב-$\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1$ $or$ $x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0$ $or$ $x<-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1$, עם ציר ה-$x$: $-1$.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 5,\ x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה-$x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=5,\ x=2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

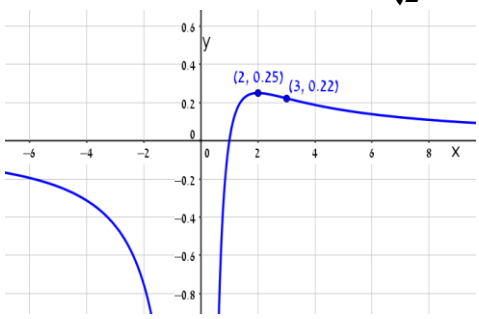
**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq\pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה-$x$: $x=3,\ x=1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

**8)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1,\ x\neq 1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

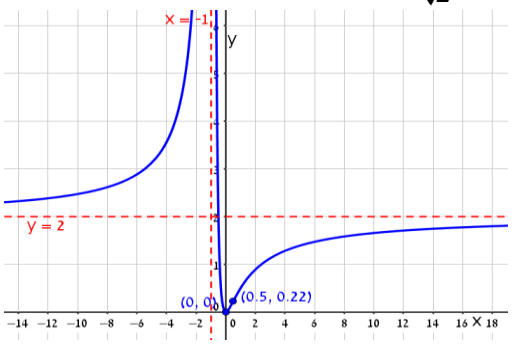

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

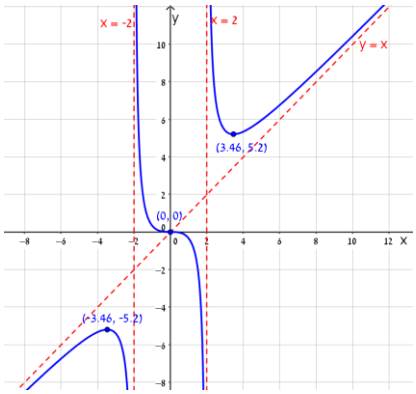
1)



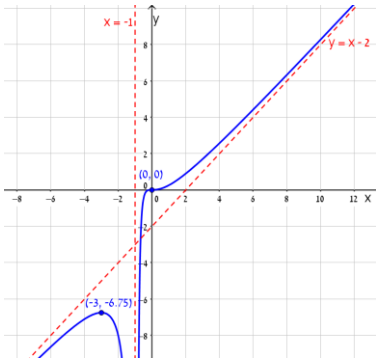

2)



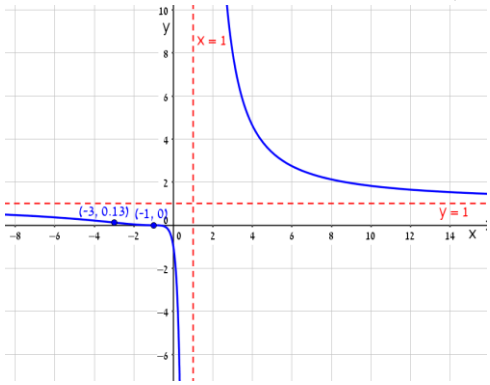

3)



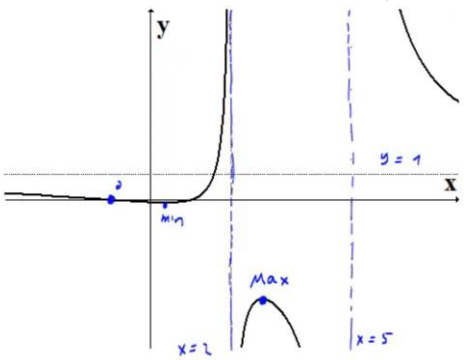

4)



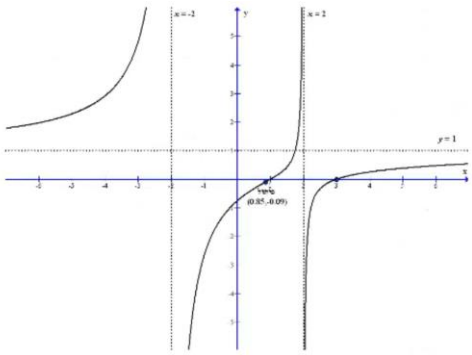

5)



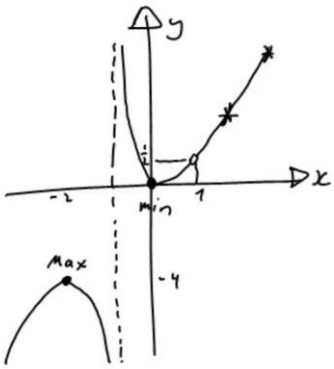

6)




7)



8)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה מעריכית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x-e^{x}$

**2)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**3)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**4)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1$, עם ציר ה-$x$: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב-$-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל $x$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

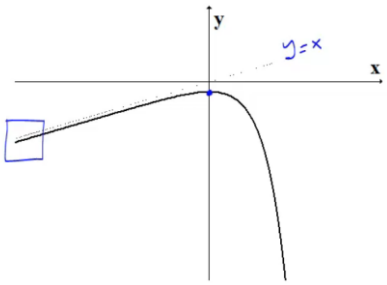
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $-2$.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב-$\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ $or$ $-1<x<0$, ירידה: $x>2$ $or$ $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ $or$ $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ $or$ $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

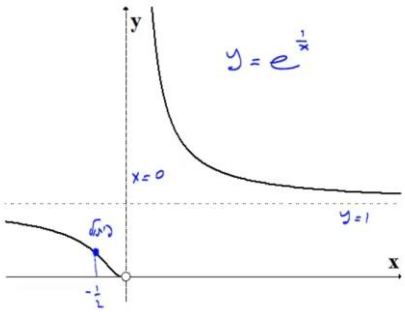

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

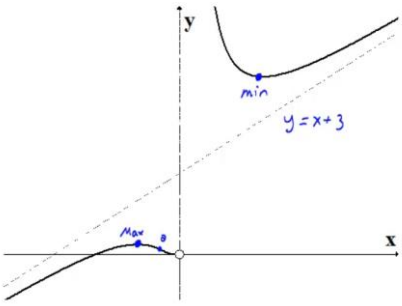
1)



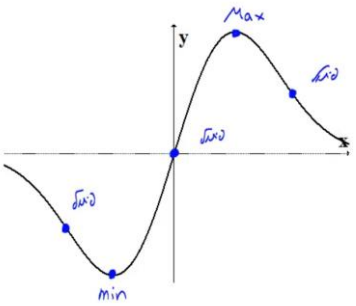

2)




3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לוגריתמית

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**2)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**3)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**4)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**5)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

**6)** $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

**7)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

**הערה**

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עליה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עליה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עליה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עליה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

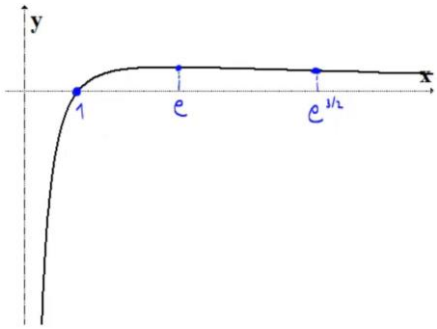
**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: אין.
אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.
תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.
תחום קמירות: $1<x<5.15\ \ or\ \ 0<x<1$, קעירות: $x>5.15$.

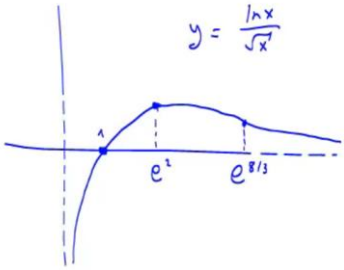

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

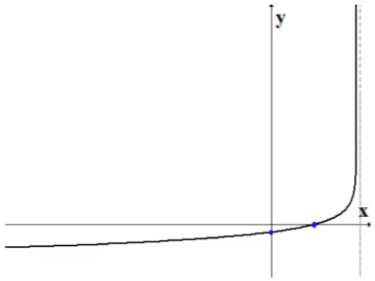
**1)**



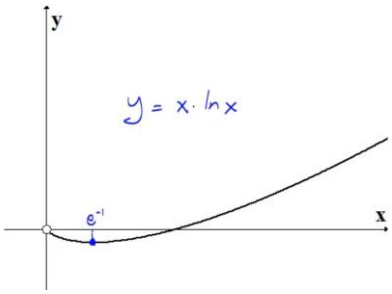

**2)**



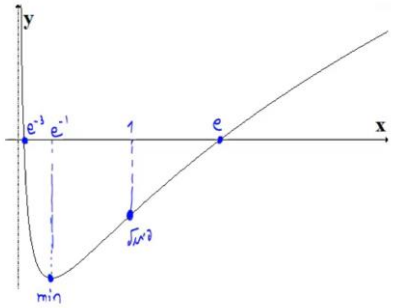

**3)**



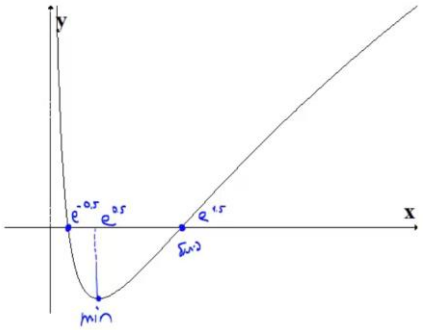

**4)**



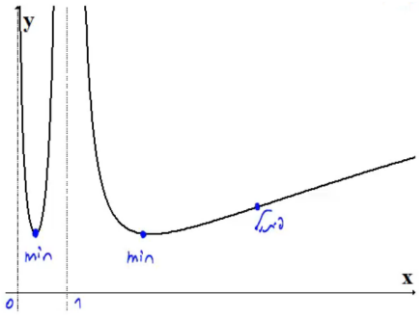

**5)**




**6)**




**7)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה עם שורשים

## שאלה

**1)** חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

## תשובה

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 1, עם ציר ה-$x$: אין.

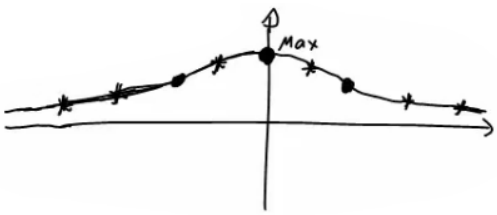
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

**2)** $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

**3)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**4)** $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x>\frac{2}{5}$ $or$ $x<0$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $-0.2<x<0$ $or$ $x>0$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 1, עם ציר ה-$x$: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $x>1$ $or$ $-1<x<0$, ירידה: $0<x<1$ $or$ $x<-1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל $x$.

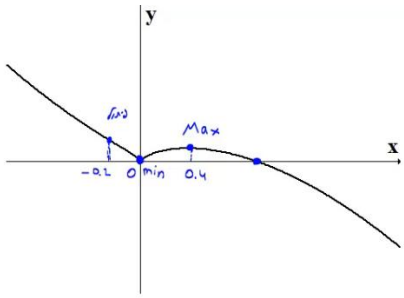
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1$, עם ציר ה-$x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $x>1$ $or$ $0<x<1$, ירידה: $-1<x<0$ $or$ $x<-1$.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $(1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1$ $or$ $x<-1$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1.5$, עם ציר ה-$x$: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\infty$, ו-$y=-1$ ב-$-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ $or$ $x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x<2$ $or$ $x>3$.

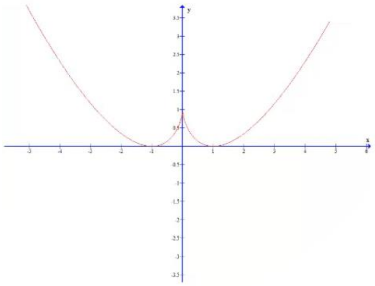

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

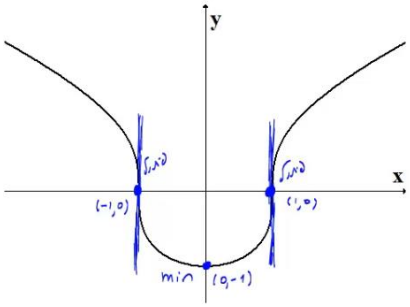
1)



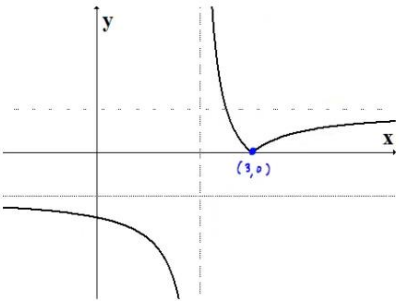

2)



3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה טריגונומטרית

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**8)** $[0,2\pi]$, $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$

**9)** $[0,\pi]$, $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

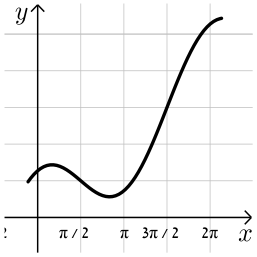
## תשובות סופיות

**1)** א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ .

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



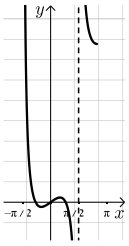

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**2)** א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right),\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

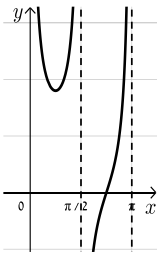



ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$ ,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**3)** א. $0<x<\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

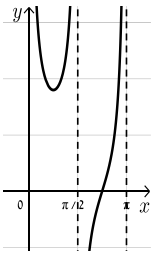



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ , $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$.

**4)** א. $(\pi,0),(0,-2)$.

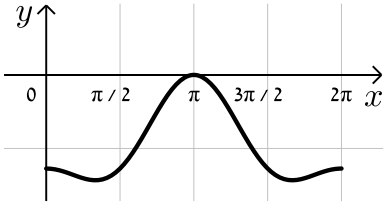
ב. $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right),\max(2\pi,-2),\max(0,-2),\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right),\max(\pi,0)$




ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$ , $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ , יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$ , $0<x<\frac{\pi}{3}$ . גרף:


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

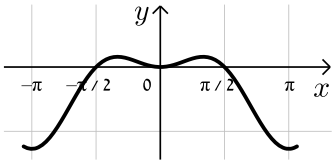
**5)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$




ב. $(0,1),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),(1.5\pi,0)$

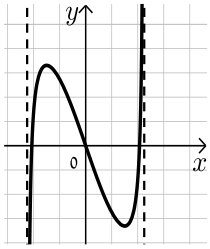
ד. 2 פתרונות.

**6)** א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,




$\min(0,0),\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.

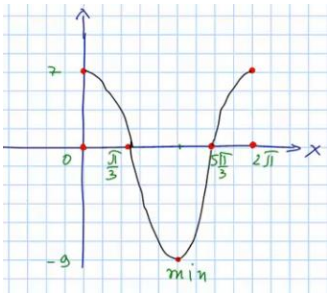
**7)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$.




ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

**8)** נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 7, עם ציר ה-$x$: $x=7$ , $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$.

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7)$ , $(0,7)$.




נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

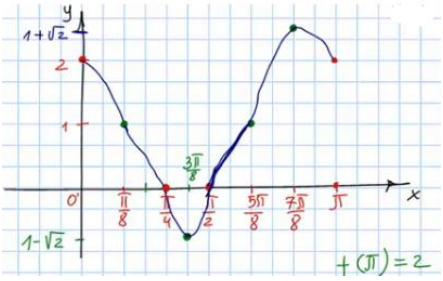
קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ $or$ $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

תחום עלייה: $x>3$ , ירידה: $2<x<3$ $or$ $x<2$.

**9)** נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 2, עם ציר ה-$x$: $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{\pi}{4}$.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ $or$ $0<x<\frac{3\pi}{8}$.




נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{8}$ $or$ $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f\left(x\right)=x-2\arctan x$

**2)** $f\left(x\right)=\arcsin\left(\sin x\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

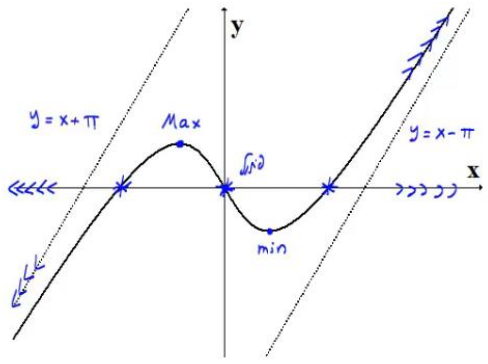
## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב-$-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x>1 \;\; or \;\; x<-1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

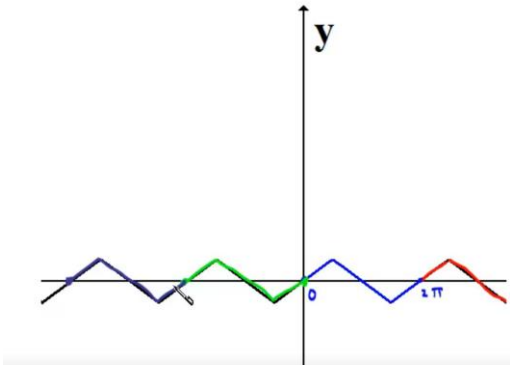
**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור $2\pi$.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב-$-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2} \;\; or \;\; \frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

### גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 5 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 50
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 53

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

**1)** $\int 4dx$

**2)** $\int x^4 dx$

**3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

**4)** $\int \sqrt{x} dx$

**5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

**6)** $\int 4x^{10} dx$

**7)** $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$

**8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

**9)** $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$

**10)** $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x + 2\right) dx$

**11)** $\int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx$

**12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \left(ax+b\right)^n dx = \frac{\left(ax+b\right)^{n+1}}{a \cdot \left(n+1\right)} + c$)

**13)** $\int \left(4x+1\right)^{10} dx$

**14)** $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)^{10} dx$

**15)** $\int \frac{4}{\left(x-2\right)^5} dx$

**16)** $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

**17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

**18)** $\int \frac{x}{\left(x-1\right)^4} dx$

**19)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$

**20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

**21)** $\int \frac{1}{4x} dx$

**22)** $\int \frac{1 + x + x^2}{x} dx$

**23)** $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

**24)** $\int \frac{1}{4x-1} dx$

**25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

**26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$ **29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

**31)** $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$ **32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $4x+c$

**2)** $\frac{x^5}{5}+c$

**3)** $-\frac{1}{x}+c$

**4)** $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

**5)** $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

**6)** $\frac{4x^{11}}{11}+c$

**7)** $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

**8)** $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

**9)** $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

**10)** $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

**11)** $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

**12)** $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

**13)** $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

**14)** $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

**15)** $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

**16)** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

**17)** $10\sqrt{2x+4}+c$

**18)** $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

**19)** $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

**20)** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

**21)** $\frac{\ln|x|}{4}+c$

**22)** $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

**23)** $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

**24)** $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

**25)** $x+\ln|x+2|+c$

**26)** $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

**27)** $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

**28)** $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

**29)** $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

**30)** $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

**31)** $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

**32)** $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

**33)** $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$,
ונתון בנוסף כי לכל $x_0$ ממשי: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$.

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x\to 0} f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
חשבו את הנגזרת $\big(G(x)-f(x)\big)'$.

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$. ב. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 6 - אינטגרלים בשיטת ''הנגזרת כבר בפנים''

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 55

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \cot x dx$ **3)** $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

**4)** $\int \tan x dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **6)** $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

**7)** $\int e^{x^2}2xdx$ **8)** $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ **9)** $\int e^{-2x^2}xdx$

**10)** $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$ **11)** $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x dx$ **12)** $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

**13)** $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$ **14)** $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$ **15)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

**16)** $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **17)** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **18)** $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

**19)** $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **20)** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$ **21)** $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

**22)** $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$ **23)** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ **24)** $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$
2) $\ln\left|\sin x\right|+c$
3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$
4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$
5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$
6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$
7) $e^{x^2}+c$
8) $e^{\tan x}+c$
9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$
10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$
11) $\sin\left(\sin x\right)+c$
12) $\sin\left(\ln x\right)+c$
13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$
14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$
15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$
16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$
17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$
18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$
19) $2\sqrt{x^2+1}+c$
20) $\sqrt{2\sin x}+c$
21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$
23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$
24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 7 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 57

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

**1)** $\int xe^x dx$

**2)** $\int x^4 \ln x dx$

**3)** $\int x\sin x dx$

**4)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

**5)** $\int x^2 \sin 4x dx$

**6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**7)** $\int \ln x dx$

**8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**9)** $\int \arctan x dx$

**10)** $\int \arcsin x dx$

**11)** $\int x\cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

**12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

**13)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

**14)** $\int x\arctan x dx$

**15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

**16)** $\int \ln^2 x dx$

**17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

**18)** $\int e^x \cos x dx$

**19)** $\int e^{2x} \sin 4x dx$

**20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$

**21)** $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2} dx$

**22)** $\int x\tan^2 x dx$

**23)** $\int \left(x+1\right)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**24)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

**25)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

**26)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**27)** חשבו את $\int \cos^4 x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $xe^x - e^x + c$

**2** $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

**3** $x\cos x + \sin x + c$

**4** $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

**5** $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

**6** $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

**7** $x\ln x - x + c$

**8** $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

**9** $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

**10** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

**11** $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

**12** $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

**13** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

**14** $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

**15** $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

**16** $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

**17** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

**18** $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

**19** $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

**20** $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\frac{e^x}{x+1}+c \quad \textbf{(21}$$

$$x\left(\tan x-x\right)+\ln\left|\cos x\right|+\frac{x^2}{2}+c \quad \textbf{(22}$$

$$\frac{2}{9}\left(x+1\right)\left(x+2\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}\left(x+2\right)^{\frac{11}{2}}+c \quad \textbf{(23}$$

$$x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx \quad \textbf{(24}$$

$$e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c \quad \textbf{(25}$$

$$\frac{1}{n}\left\{\left(\cos x\right)^{n-1}\sin x+(n-1)\int\left(\cos x\right)^{n-2}dx\right\} \quad \textbf{(26}$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5\left(\cos x\sin x+x\right)\right)+c \quad \textbf{(27}$$

$$\frac{1}{n}\left(-\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x+\left(n-1\right)\int\left(\sin x\right)^{n-2}dx\right) \quad \textbf{(28}$$

$$\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5\left(x-\sin x\cos x\right)\right)+c \quad \textbf{(29}$$

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\left(2n-1\right)\right) \quad \textbf{(30}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\} \quad \textbf{(31}$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad \int e^{ax}\sin bxdx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2} \quad \textbf{(32}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 8 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה . . . . . 61

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x\right)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{x^2+1}+c$

**2)** $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

**3)** $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

**4)** $\arctan\left(e^x\right)+c$

**5)** $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

**6)** $\arcsin(\ln x)+c$

**7)** $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

**8)** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

**9)** $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

**10)** $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

**11)** $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

**12)** $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

**13)** $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

**14)** $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

**15)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

**16)** $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

**17)** $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18** $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

**19** $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

**20** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

**21** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

**22** $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

**23** $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

**24** $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 9 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים


1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 64
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 66
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 67
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 68
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 71

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

**2)** $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

**3)** $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

**4)** $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

**5)** $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

**6)** $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

**7)** $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

**8)** $\int \tan^2 x dx$

**9)** $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

**10)** $\int \sin 7x\cos 5x dx$

**11)** $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

**12)** $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

**13)** $\int \cos^2 x dx$

**14)** $\int \sin^2 4x dx$

**15)** $\int \cos^3 x dx$

**16)** $\int \sin^3 4x dx$

**17)** $\int \cos^4 x dx$

**18)** $\int \sin^4 4x dx$

**19)** $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

**20)** $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

**21)** $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

**22)** $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

**23)** $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

**24)** $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

**2)** $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

**3)** $-10\cot 10x+c$

**4)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**5)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**6)** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

**7)** $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

**8)** $\tan x-x+c$

**9)** $\tan x-\cot x+c$

**10)** $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

**11)** $\sin x+c$

**12)** $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

**13)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

**14)** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

**15)** $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

**16)** $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

**17)** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

**18)** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

**19)** $-\cot x-x+c$

**20)** $2\sin x+c$

**21)** $\ln\left|\cos x\right|+c$

**22)** $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

**23)** $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

**24)** $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ (x = \arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ (x = \arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin^2 x+\sin x+2\right)\cos x dx$

2) $\int\left(\cos^3 x+\cos x-2\right)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan\left(x/2\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=\frac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

**2)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

**3)** $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

**4)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

**5)** $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**6)** $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

**2)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

**3)** $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

**4)** $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

**5)** $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

**6)** $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

**7)** $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

**8)** $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

**9)** $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

**10)** $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

**11)** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

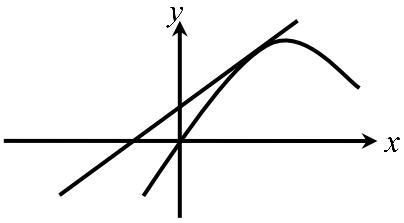

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



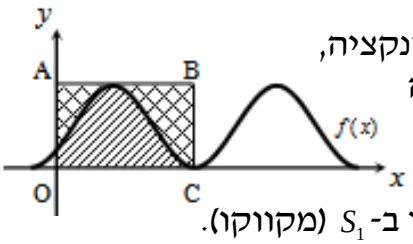

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$, ברביע הראשון והשני.

**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi\le x\le 1.75\pi$.

נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה-$x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.




השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב-$S_1$ (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-$y$ יסומן ב-$S_2$.

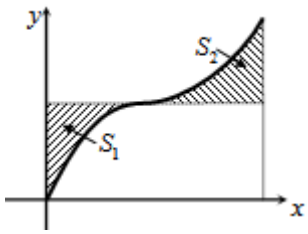
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

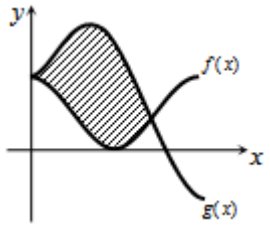
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה-$x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו-$S_2$, שווים.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le \pi$.

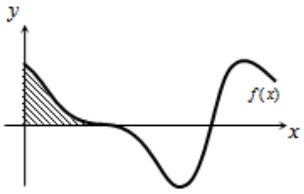



א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



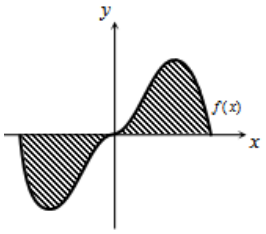

א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות $f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**6)** נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.




א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.

באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ , בתחום $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**1)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

**2)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

**3)** א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

**4)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$ .

**6)** $a=2$ , $b=-2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 10 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

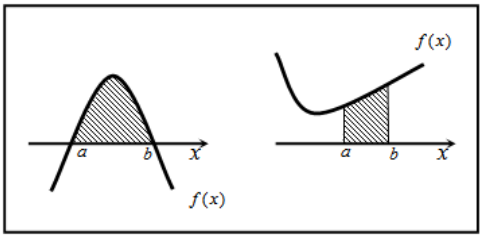
### תוכן העניינים

1. חישוב שטחים ..... 75
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 95
3. אורך קשת ..... 96

# חישוב שטחים

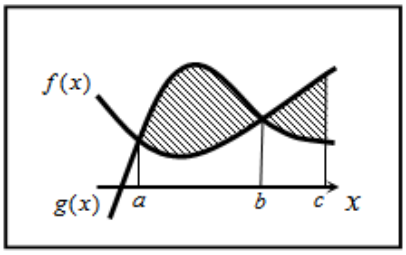
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



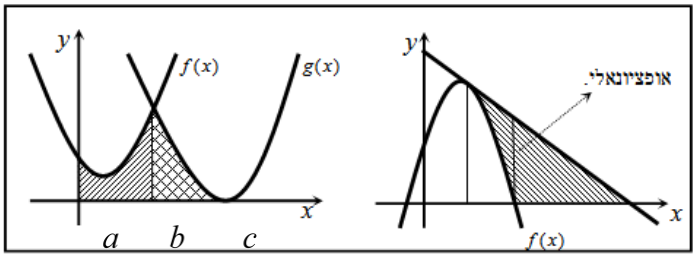

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :




$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

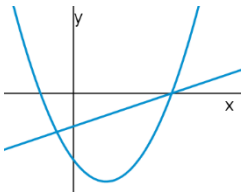



$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

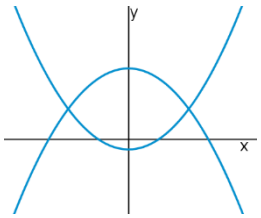

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



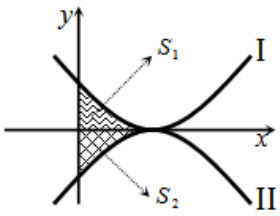

**2)** נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$ , $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



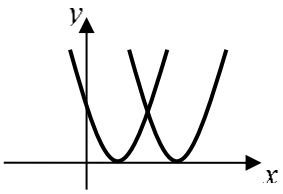

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

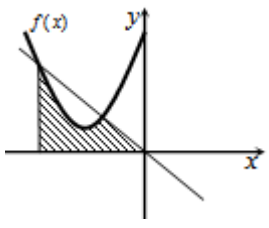



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

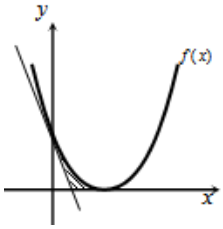
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .



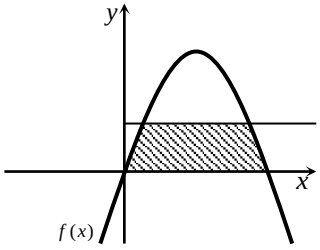

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .




הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

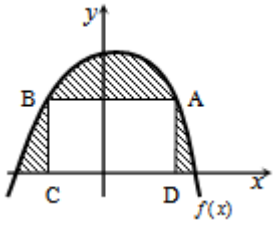
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,




היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,

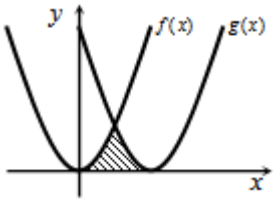
כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$




את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .

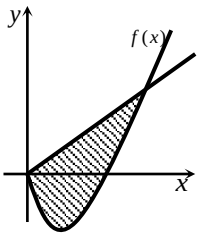
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



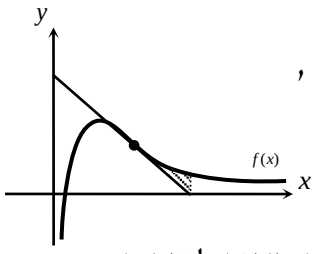

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

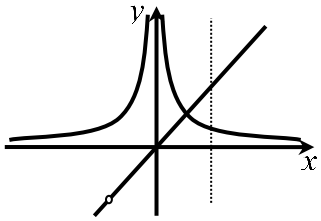
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

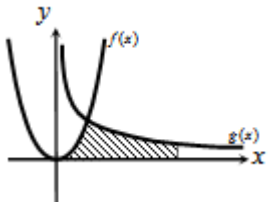
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

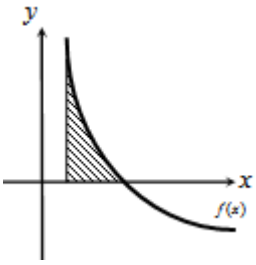



$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)



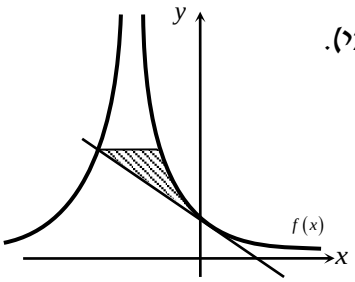

חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$, הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

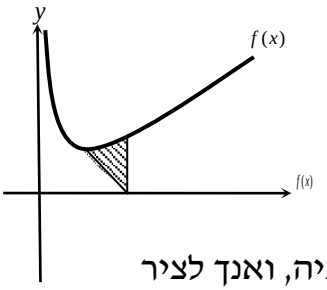
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

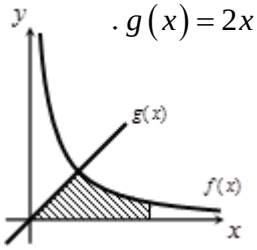



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה-$x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה-$x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



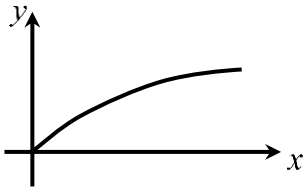

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

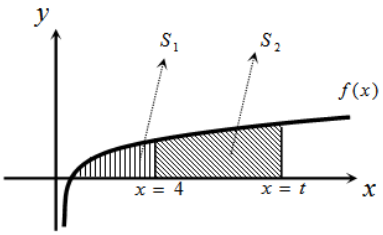

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=4$ ו-$x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ ב-$S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים ב-$S_2$.




ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.

**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

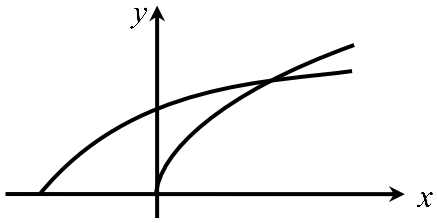
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

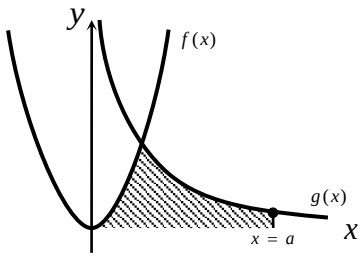
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה-$x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.

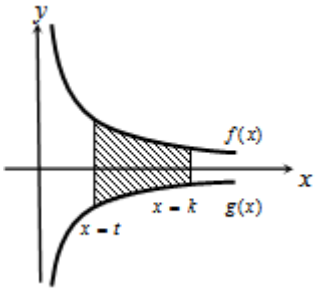




לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.




ידוע כי $AB=2CD$.

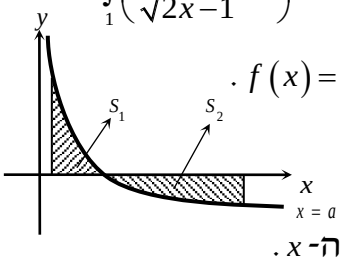
א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$, יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.




נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

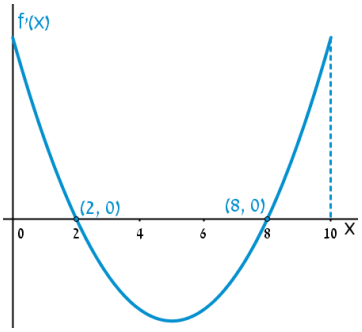
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$. נמקו.

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

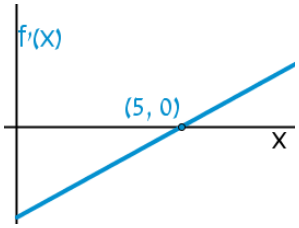



א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

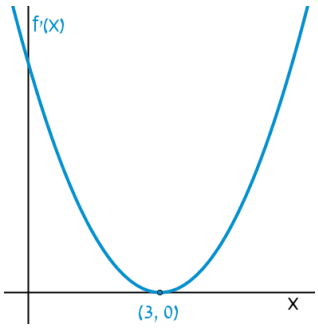
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

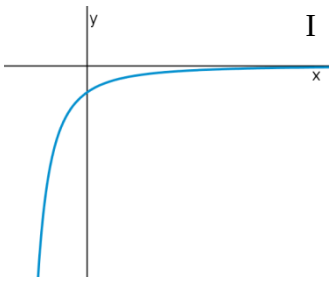


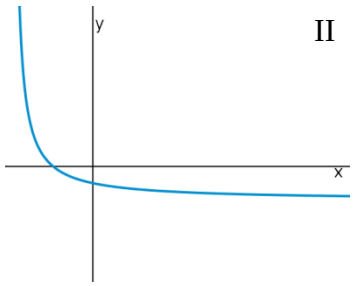

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים בראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:



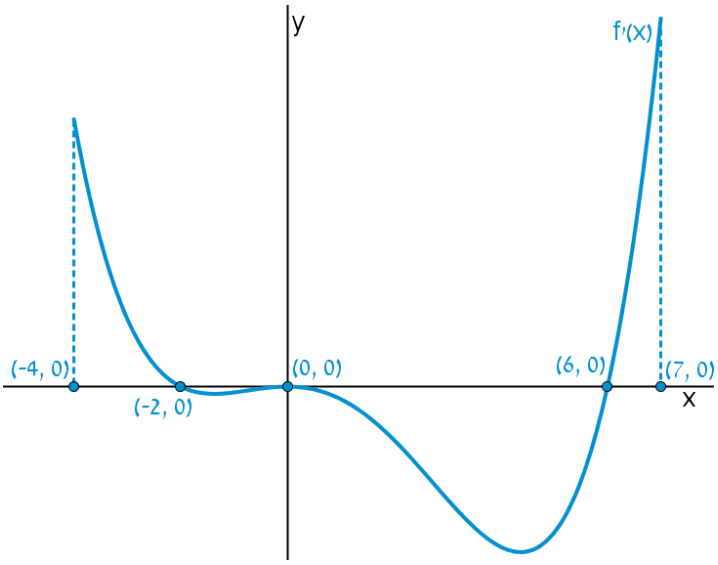




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$. מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ ,

לפי הנתונים $f(0) = -2$ , $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע הרביעי.

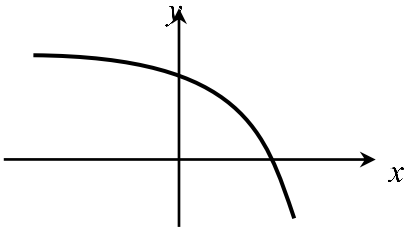

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=5-e^{x}$.

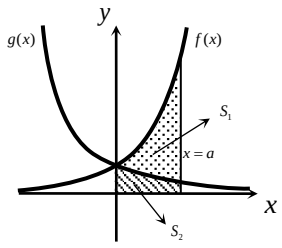



העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.

**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{bx}$, כאשר $b>0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x)=e^{-x}$ ו-$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$, ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה-$x$, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

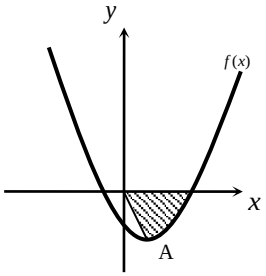
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{-2x}$.




נעביר אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$, כאשר $a>0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצאו את $a$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

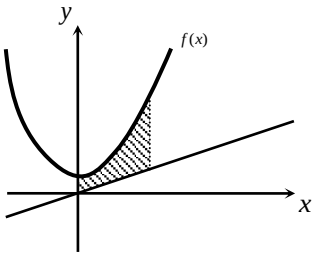
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

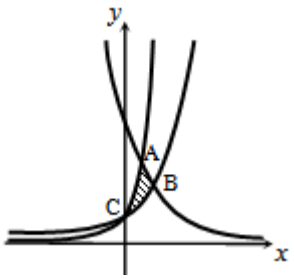
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

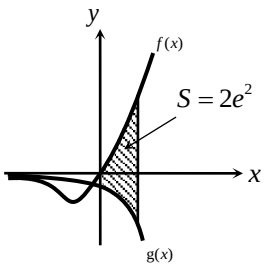



א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

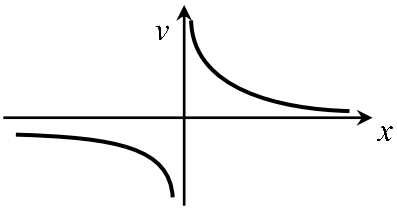

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

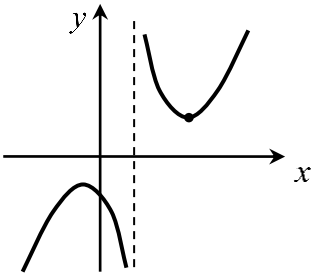
| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.



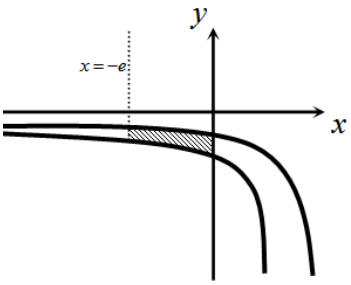

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$



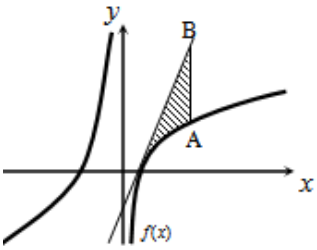

ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.




ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא $y=18x-9$.

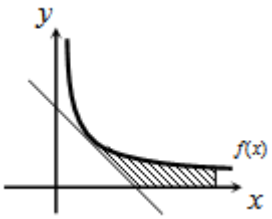
א. מצאו את $a$ ו-$b$ וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה-$y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

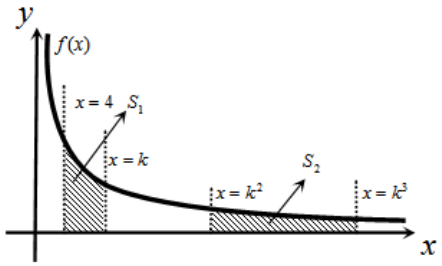



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.



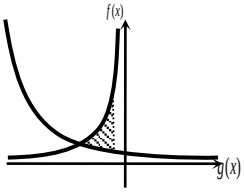

נעביר את הישרים $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$ ו-$x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו-$g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף $g(x)$ חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

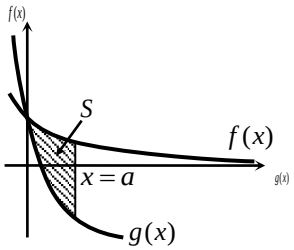
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$, בתחום $x\geq 0$.

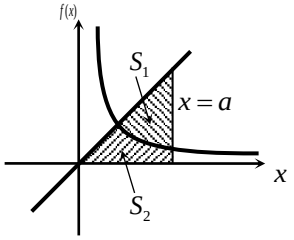



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

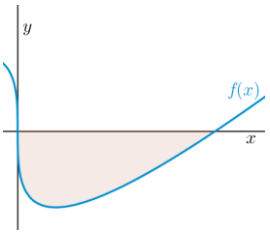
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.

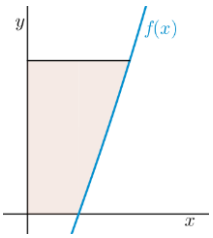
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



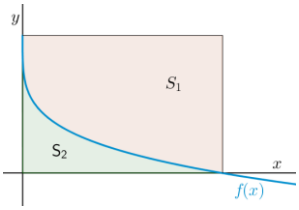

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. נעביר אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.




נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

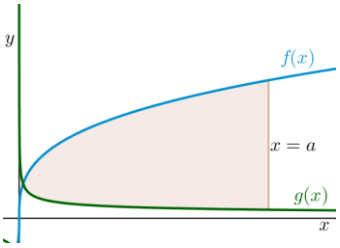
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-$S_1$,

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

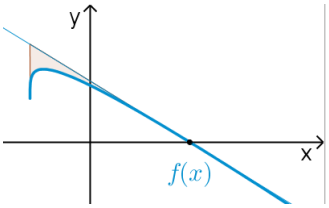
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה-$x$, $x=a$ ($a$ פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש. מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.




ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

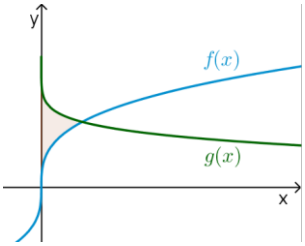
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

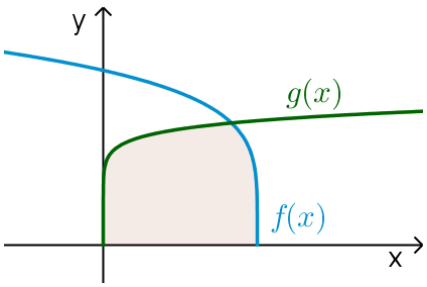
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.



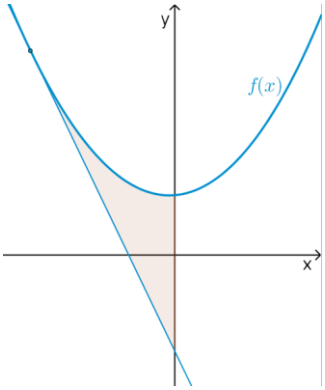

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה-$x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

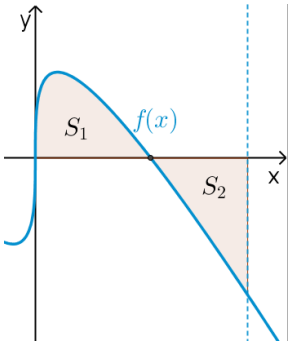
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-$y$.

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ יסומן ב-$S_1$.
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח $S_2$, כמתואר באיור.
מצאו את $k$, אם ידוע כי $S_1=S_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

**2)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

**3)** א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

**6)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**7)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

**8)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**9)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**10)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

**11)** א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

**12)** 1 יח"ש.

**13)** א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

**14)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

**15)** א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

**16)** א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

**17)** א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

**18)** 2.26 יח"ש.

**19)** 0.5 יח"ש.

**20)** $t=16$

**21)** א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

**22)** $b=2$

**23)** $a=9$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=\left|-S_1\right|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f(x):\text{II}$, $f'(x):\text{I}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $C(0,1)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $A(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. $S=6+\ln 256\approx 11.54$ יח"ש.

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f\left(x\right)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $\left(-1.2,1.2\right)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $\left(1,1\right)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f\left(x\right)=\left(6-5x\right)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(0,0\right)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) $21$

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) $9$

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ $\left(\text{Decimal: } 3.16784\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 11 - פונקציות של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 97
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 99
3. משטחים מפורסמים ..... 101
4. נספח - משטחים ממעלה שנייה ..... 103

# מבוא לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$.

**1)** $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

**2)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**3)** $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

**4)** $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

**5)** $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

**6)** $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

**8)** $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

**9)** $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

**10)** $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

## תשובות סופיות

**1)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

**2)** $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

**3)** $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

**4)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\ \right\}$

**5)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\ \right\}$

**6)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\ \right\}$

**7)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2=4\ \right\}$

**8)** $D=\left\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\right\}$

**9)** $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

**10)** $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

**11)** $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

**1)** $f(x,y)=\frac{y}{x}$

**2)** $f(x,y)=\ln x+\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^2+y^2$

**4)** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

**5)** $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

**6)** $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

**7)** $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

**8)** $f(x,y)=e^{x-y}$

**9)** $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

**10)** $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה $k$:

**11)** $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

**12)** $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\} \quad (k=0,2)$

**13)** $f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\geq y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases} \quad (k=1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי $C$ קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

**הערות**

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

## תשובות סופיות

**1)** $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- $y$.

**2)** $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

**3)** כל המישור.

**4)** $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

**5)** $y<x^2$

**6)** $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משטחים מפורסמים

## שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

**2)** $z=5x^2+1.25y^2$

**3)** $20x^2+45y^2=180+36z^2$

**4)** זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

**5)** זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

**6)** מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר
$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

**8)** מצאו את החיתוך בין שני המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$,
ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$ ושרטטו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

- **להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

## תשובות סופיות

**1)** אליפסואיד.

**2)** פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

**3)** היפרבולואיד חד יריעתי.

**4)** א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

**5)** א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

**6)** החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

**7)** א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B(\frac{59}{5},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9})$.

**8)** החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

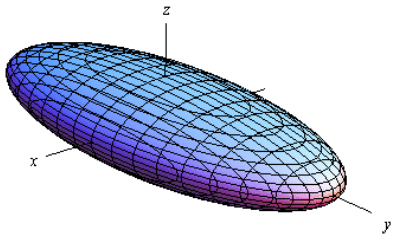
**9)** א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-$y$.

ב. $\ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2:(x,y,z)=(3,2t,t)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

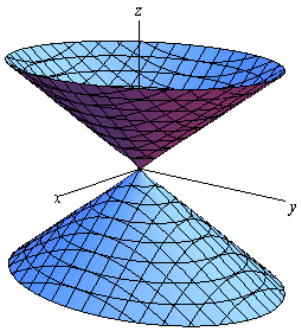
## אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## חרוט אליפטי

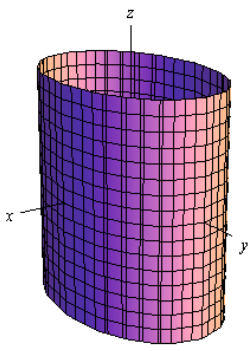



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## גליל אליפטי



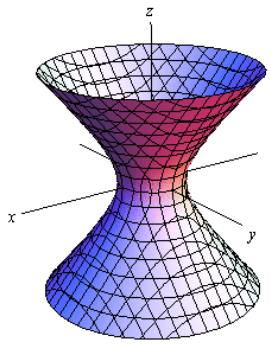

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## היפרבולואיד חד-יריעתי

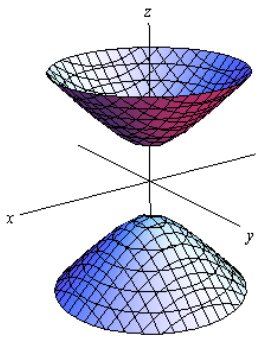



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

## היפרבולואיד דו-יריעתי

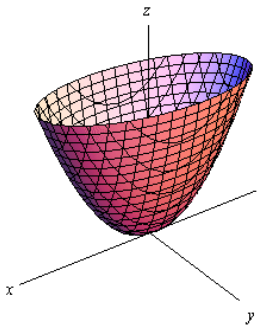



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

## פרבולואיד אליפטי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

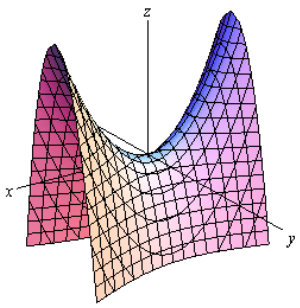
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פרבולואיד היפרבולי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

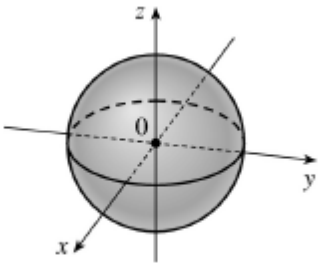
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.

החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

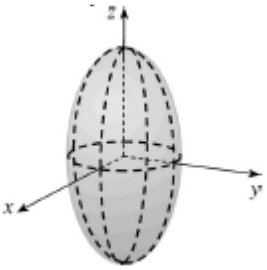
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

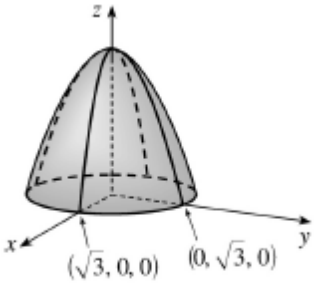
## דוגמאות שונות



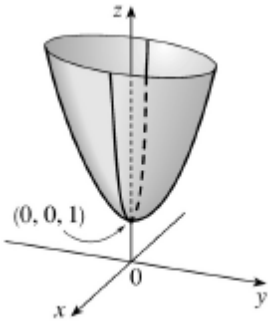

$x^2+y^2+z^2=1$



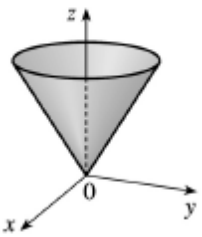

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



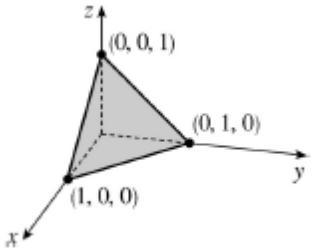

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – גבולות

| | $x \to -\infty$ | $x \to 0$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty} = 0$ | $\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$ |
| $y = e^x$ | $e^{-\infty} = 0$ | $e^0 = 1$ | $e^{\infty} = \infty$ |
| $y = \ln x$ | $---$ | $\ln(0^+) = -\infty$ | $\ln(\infty) = \infty$ |
| $y = a^x, a > 1$ | $a^{-\infty} = 0$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = \infty$ |
| $y = a^x, 0 < a < 1$ | $a^{-\infty} = \infty$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = 0$ |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | $e$ | (from right) 1 | $e$ |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $---$ | $e$ | 1 |
| $y = \sqrt{x}$ | $---$ | $\sqrt{0^+} = 0$ | $\sqrt{\infty} = \infty$ |
| $y = \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ | $\sqrt[3]{0} = 0$ | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ |

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$ , $\infty(-\infty) = -\infty$ , $\infty + \infty = \infty$ , $\infty \pm a = \infty$ , $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$ , $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 12 - נגזרות חלקיות

### תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון ..... 107
2. נגזרות חלקיות מסדר שני ..... 109

# נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

**2)** $f(x,y)=x^5\ln y$

**3)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק $f_x$).

**4)** $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

**6)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$

**7)** נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

**8)** נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

### הערת סימון

$$f=f(x,y)\ \Rightarrow\ f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\qquad f_y = -6x^2y + 3$

**2)** $f_x = 5x^4 \ln y$ $\qquad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

**3)** $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

**4)** $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\qquad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

**5)** $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\qquad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

**6)** $f_x = y^2z^3$ $\qquad f_y = 2xyz^3$ $\qquad f_z = 3xy^2z^2$

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

### הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות מסדר שני

## שאלות

בשאלות **1-13** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

**2)** $f(x,y)=x^4\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

**4)** $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

**5)** $f(x,y)=xy(x-y)$

**6)** $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

**8)** $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

**9)** $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

**10)** $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

**11)** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

**12)** $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

**13)** $f(x,y,z)=xyz$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** חשבו $f''_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$ .

**15)** חשבו $f''_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ .

**16)** חשבו $f''_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**17)** נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$ .

חשבו: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

**הערת סימון**

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $f_x=8x-2xy^2+4$ $f_{xx}=8-2y^2$ $f_y=-2x^2y+10$

$f_{yy}=-2x^2$ $f_{xy}=-4xy$ $f_{yx}=-4xy$

**2** $f_x=4x^3\ln y$ $f_{xx}=12x^2\ln y$ $f_y=\frac{x^4}{y}$

$f_{yy}=-\frac{x^4}{y^2}$ $f_{xy}=\frac{4x^3}{y}$ $f_{yx}=\frac{4x^3}{y}$

**3** $f_x=3x^2-6y$ $f_{xx}=6x$ $f_y=3y^2-6x$

$f_{yy}=6y$ $f_{xy}=6$ $f_{yx}=-6$

**4** $f_x=3x^2+3-3y$ $f_{xx}=6x$ $f_y=3y^2+3-3x-6y$

$f_{yy}=6y-6$ $f_{xy}=-3$

**5** $f_x=2xy-y^2$ $f_{xx}=2y$ $f_y=x^2-2xy$

$f_{yy}=-2x$ $f_{xy}=f_{yx}=2x-2y$

**6** $f_x=2\left[8xy-3y^2\cdot1-24x-0+57y\cdot1+72+0+0\right]$

$f_y=2\left[4x^2\cdot1-3x\cdot2y-0-54y+57x\cdot1+0+27+0\right]$

$f_{xx}=2\left[8y-0-24\right]$ , $f_{yy}=2\left[0-6x\cdot1-54+0+0\right]$

$f_{xy}=2\left[8x\cdot1-6y-0+57+0\right]$

**7** $f_x=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$ $f_y=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right)$

$f_{xx}=e^{xy}\cdot y\left(xy+y^2+1\right)+\left(y+0+0\right)\cdot e^{xy}$

$f_{yy}=e^{xy}\cdot x\left(x^2+xy+1\right)+\left(0+x\right)\cdot e^{xy}$

$f_{xy}=e^{xy}\cdot x\left(xy+y^2+1\right)+\left(x+2y\right)\cdot e^{xy}$

**8** $f_x=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$ $f_y=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)$

$f_{xx}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+\left(2x+2\right)e^{x+y}$

$f_{yy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)+\left(2y+2\right)e^{x+y}$

$f_{xy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$

**9** $f_x=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$ $f_y=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)$

$f_{xx}=e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(-4x\cdot2y\right)e^{-x^2-y^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(10)** $f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$

$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$

$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

**(11)** $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

$f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

**(12)** $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

**(13)** $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$ $\quad f_y=xz$

$f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$ $\quad f_{zx}=y$ $\quad f_z=xy$

$f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

**(14)** $-2$

**(15)** $-1$

**(16)** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

**(17)** $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 13 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

### תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים ..... 113

# כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

## שאלות

**1)** נתון: $z=\ln(x^2-y^2)\ ,\ y=u^2+v^2\ ,\ x=2u-v$.
חשבו: $z_u\ ,\ z_v$.

**2)** נתון: $z=e^{u-v}\ ,\ u=t^2+4m\ ,\ v=4t+k$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

**3)** נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

**4)** נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

**5)** נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

**6)** נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

**7)** נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

**8)** נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

**10)** נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

**11)** נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

**12)** נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

**13)** נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

**14)** נתון: $u = f(x,y)$ , $x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$ , $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_y=-v_x$ , $u_x=v_y$.

הוכיחו כי:

א. $u,v$ מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)\left(h_{uu}+h_{vv}\right)$

**16)** נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

**17)** פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר $n$, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם $f$ הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

**18)** נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $z_u = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2+\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

**2)** $z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1$

**13)** ג. $-e$

**18)** א. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 14 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

### תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני ..... 117
2. שימושים גאומטריים ..... 120

# פונקציות סתומות – הפן הטכני

## שאלות

**1)** מצאו את $y'$ , כאשר $x^2+y^5=xy+1$ ,
וחשבו את $y'(0)$ .

**2)** מצאו את $y'(1)$ , כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$ .

**3)** מצאו את $y'(e)$ , $y''(e)$ , כאשר $2\ln x+\ln y=1$ .

**4)** נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$ .
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .

**5)** נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$ .
חשבו את $y_z(0,0)$, $y_x(0,0)$ .

**6)** נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$ .
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$ .

**7)** נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$ .
מצאו $z_{xx}(1,1)$ .

**8)** נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$ . מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את $u_x, v_x, u_y, v_y$.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

**10)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את $w_x$, $w_y$.

ב. חשבו $y_x$, $y_w$.

**11)** נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

**12)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1}, u_y=\frac{4v+2}{8uv-1}, v_x=\frac{3-2u}{8uv-1}, v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$ $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)$ $\left(u\neq v\right)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}$ $\left(u\neq\pm v\right)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים גאומטריים

## שאלות

**1)** נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3 \quad (z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$ ?

**2)** מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

**3)** מצאו מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

**4)** למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים $x,y,z$ בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכיחו $OA+OB+OC=a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

**5)** נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.

**6)** הראו שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

**7)** מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,

ונתונה נקודה $\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.

הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$C:\ x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,

בנקודה בה $t=0.25\pi$.

**9)** נתונות שתי עקומות $C_1:\ x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t$

$C_2:\ x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1$,

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח $S$, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור $xy$.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

**10)** נתונות שלוש עקומות

$C_1:x=2t+1,\quad y=t^2-1,\quad z=t^2+t$

$C_2:x=s^2,\quad y=-s,\quad z=s-1$,

$C_3:x=u+2,\quad y=u,\quad z=u^2-1$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח $S$, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור $xy$.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח $S$? נמקו!

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ \mathrm{P}+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases}2xz-x^2y=3\\3x^2y+y^2z=-2\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

**13)** נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

**14)** מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $3x-6y+2z+18=0$

**2)** $x-y+z+6=0$ , $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$

**3)** $x+8y+18z=21$ , $x+8y+18z=-21$

**4)** שאלת הוכחה.

**5)** $Q(7,-9,-15)$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$

**8)** א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$

**9)** א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$

**10)** א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$. ב. לא.

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$

**12)** א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$

**13)** כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$

**14)** $\hat{n}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ , כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1, שנוסחתו: $x^2+y^2+z^2=1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 15 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 124

# קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

**1)** $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

**2)** $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

**4)** $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

**5)** $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

**6)** $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

**7)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

**8)** $f(x,y)=e^x\cos y$

**9)** נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

**10)** מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

**11)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8.
מנהל השיווק אומד את הביקוש $Q_1$ למחשבון בארץ, ואת הביקוש $Q_2$ למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, $P_1$ ו- $P_2$, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

**13)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של $a$ הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

**14)** מצאו שני מספרים, $b>a$, כך ש- $\int_a^b\left(24-2x-x^2\right)^{\frac{1}{5}}dx$ יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות

**1)** $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

**2)** $(1,\ 2)$ מינימום ; $(-1,-2)$ מקסימום ; $(-1,\ 2)$ , $(1,-2)$ אוכף.

**3)** $(0,0)$ אוכף; $(1,1)$ מינימום.

**4)** $(-1,\ -1)(-1,\ 1)$ מינימום ; $(1,\ 0)$ מקסימום ; $(1,\ -1)$ $(-1,\ 0),(1,1)$ אוכף.

**5)** $(0,\ 2)$ מקסימום.

**6)** $(4,\ 4)$ מקסימום.

**7)** $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

**8)** אין נקודות קריטיות.

**9)** $z=3$, $z=4$

**10)** רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ.

**11)** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3,4/3,10/3)$.

**12)** $P_1=10\$$, $P_2=12\$$ רווח מקסימלי $288\$$.

**13)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2$, $a=2$, לא ניתן לדעת; $a<-2$, $a>2$
אוכף; $-2<a<2$ מינימום.

**14)** $a=-6$, $b=4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

## פרק 16 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ ..... 126

# קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

## שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

**1)** $f(x,y)=x^2+y^2;\quad 2x^2+3xy=1-2y^2$

**2)** $f(x,y)=x^2-y^2;\quad x^2+y^2=1$

**3)** $f(x,y)=4x+6y;\quad x^2+y^2=13$

**4)** $f(x,y)=x^2y;\quad x^2+2y^2=6$

**5)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\}\quad s.t.\quad x+3y=12$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**6)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\}\quad s.t.\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**7)** מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

**8)** מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

**9)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0)$ מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** מוישל'ה קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, $(x,y)$, נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

**11)** דני קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

**12)** עקומת התמורה בין מנגו, $(x)$, ואננס, $(y)$, היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = $(x,y)$, על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

**13)** ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת $K$ ו- $L$ הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

**14)** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' $\lambda$ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

**2)** $\max\left(\pm1,0\right)$ $\min\left(0,\pm1\right)$

**3)** $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

**4)** $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

**5)** $\max\left(6,2\right)$

**6)** $\max\left(9,36\right)$

**7)** $\left(6,2\right)$

**8)** $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

**9)** $7/\sqrt{45}$

**10)** $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

**11)** $\max\left(6,2\right)$

**12)** $\max\left(2,3\right)$

**13)** $\min\left\{2K+L\right\};\ \sqrt{K}+\sqrt{L}=100$

**14)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©