

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1



## תוכן העניינים

|           |                                                 |
|-----------|-------------------------------------------------|
| 1         | מבוא לאלגברה                                    |
| 47        | משוואות אלגבריות                                |
| 69        | אי שוויונים אלגבריים                            |
| 85        | חוקי החזקות והשורשים                            |
| 95        | משוואות ואי-שוויונים מעריכיים                   |
| 105       | חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים |
| 121       | טריגונומטריה במשולש ישר זווית                   |
| 126       | זהויות טריגונומטריות                            |
| 147       | משוואות טריגונומטריות                           |
| 168       | טריגונומטריה במישור                             |
| (ללא ספר) | 11. הפונקציות האלמנטריות                        |
| 201       | 12. הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות         |
| 227       | 13. גבול של פונקציה                             |
| 245       | 14. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים        |
| 260       | 15. חישוב נגזרת של פונקציה                      |

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

|    |                                           |    |
|----|-------------------------------------------|----|
| 1  | מספרים מכוונים                            | 1  |
| 5  | חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים           | 5  |
| 7  | סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים        | 7  |
| 8  | שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים            | 8  |
| 14 | כפל וחילוק שברים                          | 14 |
| 16 | חיבור וחסור שברים                         | 16 |
| 20 | בעיות יסודיות באחוזים                     | 20 |
| 22 | חזרה על תבניות מספר                       | 22 |
| 24 | כינוס איברים                              | 24 |
| 26 | פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים        | 26 |
| 28 | פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר | 28 |
| 30 | פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים          | 30 |
| 33 | פירוק הטרינום                             | 33 |
| 35 | שברים אלגברים                             | 35 |
| 39 | כפל וחילוק של שברים אלגברים               | 39 |
| 41 | חיבור וחסור של שברים אלגברים              | 41 |
| 45 | שברים כפולים                              | 45 |

## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

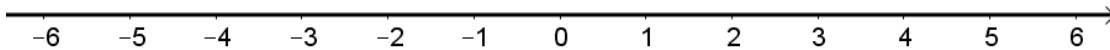
### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א.  $(-5) : (-25)$

ב.  $3 : (-30)$

ג.  $(-10) : 40$

ד.  $(-4) : (-32)$

ה.  $18 : (-6)$

ו.  $4 : (-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א.  $\frac{-60}{12}$

ב.  $\frac{42}{-6}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

א.  $0 : 5$

ב.  $(-2) \cdot 0$

ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

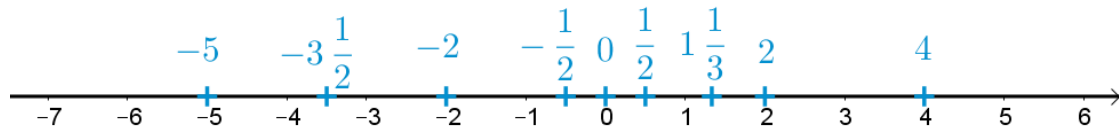
ד.  $6 : 0$

ה.  $0 + 4$

ו.  $0 - 4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



|                   |                   |             |         |        |            |
|-------------------|-------------------|-------------|---------|--------|------------|
|                   | ה. -5             | ד. -1       | ג. 1    | ב. -5  | א. 5 (2)   |
|                   |                   |             | ח. -4   | ז. -1  | ו. 17      |
| ו. -18            | ה. -19            | ד. -4       | ג. -3   | ב. 2   | א. -10 (3) |
|                   | ה. -16            | ד. 15       | ג. 30   | ב. -28 | א. 36 (4)  |
|                   | י. 18             | ט. 18       | ח. 18   | ז. -18 | ו. -40     |
|                   |                   | יד. 16      | יג. -16 | יב. 36 | יא. -18    |
|                   |                   | ד. -        | ג. -    | ב. +   | א. + (5)   |
| ו. $-\frac{1}{4}$ | ה. $-\frac{1}{3}$ | ד. 8        | ג. -4   | ב. -10 | א. 5 (6)   |
|                   |                   | ד. 4        | ג. -8   | ב. -7  | א. -5 (7)  |
| ו. -4             | ה. 4              | ד. לא מוגדר | ג. 0    | ב. 0   | א. 0 (8)   |

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |           |          |             |         |         |         |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9  | ב. 27    | ג. -27      | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125   | ח. 10000 | ט. -81      | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5     | ג. לא מוגדר | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

### סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

### שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 & \text{(1)} \\
 (-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2) & \text{(2)} \\
 \sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 & \text{(3)} \\
 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} & \text{(4)} \\
 (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 & \text{(5)} \\
 -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 & \text{(6)} \\
 -2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5 & \text{(7)} \\
 \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 & \text{(8)} \\
 [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 & \text{(9)} \\
 (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243}) & \text{(10)} \\
 \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} & \text{(11)}
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

|         |          |         |         |
|---------|----------|---------|---------|
| 28 (1)  | 33 (2)   | 19 (3)  | -37 (4) |
| 31 (5)  | -14 (6)  | 5 (7)   | -21 (8) |
| -16 (9) | -44 (10) | 20 (11) |         |

## שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

### סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

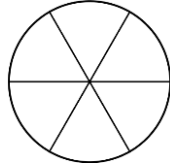
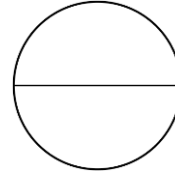
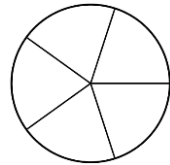
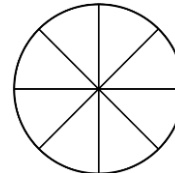
### אחוזים - הגדרה:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.

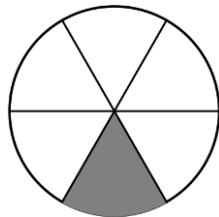
## שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

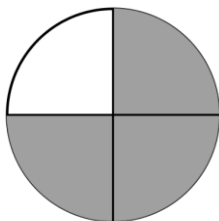
ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגולא. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגולד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגולג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

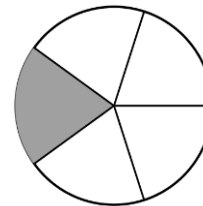
ב. שבר:



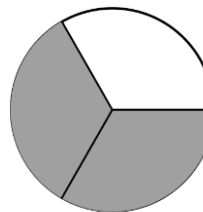
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

|                    |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| א. $\frac{25}{30}$ | ב. $\frac{10}{30}$ | ג. $\frac{6}{24}$  | ד. $\frac{4}{20}$   |
| ה. $\frac{35}{56}$ | ו. $\frac{24}{42}$ | ז. $\frac{36}{48}$ | ח. $\frac{33}{121}$ |

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

|                    |                    |                   |                   |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| א. $-\frac{20}{3}$ | ב. $\frac{19}{4}$  | ג. $\frac{12}{5}$ | ד. $\frac{22}{5}$ |
| ה. $-\frac{34}{6}$ | ו. $-\frac{50}{7}$ | ז. $\frac{47}{8}$ | ח. $\frac{60}{9}$ |

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| א. $1\frac{2}{3}$  | ב. $3\frac{5}{6}$  | ג. $4\frac{1}{2}$  | ד. $6\frac{1}{4}$  |
| ה. $11\frac{3}{4}$ | ו. $-2\frac{5}{8}$ | ז. $-6\frac{2}{7}$ | ח. $12\frac{7}{9}$ |

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

|                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$   |
| ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$   | ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$ |

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

|          |         |          |           |
|----------|---------|----------|-----------|
| א. 0.7   | ב. 0.07 | ג. 0.007 | ד. 0.34   |
| ה. 0.304 | ו. 0.65 | ז. 1.2   | ח. 1.02   |
| ט. 1.42  | י. 3.5  | יא. 6.03 | יב. 5.125 |

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

|                     |                    |                     |                      |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| א. $\frac{3}{10}$   | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$    | ו. $\frac{3}{4}$   | ז. $\frac{2}{5}$    | ח. $\frac{4}{25}$    |
| ט. $\frac{7}{50}$   | י. $\frac{3}{20}$  | יא. $\frac{7}{8}$   | יב. $\frac{9}{16}$   |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$  | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

|                  |                  |                  |                   |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| א. 25%  | ב. 32% | ג. 64%  | ד. 80%  |
| ה. 120% | ו. 5%  | ז. 300% | ח. 150% |

12) המר משברים פשוטים לאחוזים :

|                    |                     |                  |                   |
|--------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{3}{4}$   | ב. $\frac{1}{8}$    | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$  |

## תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.8\bar{3} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.1\bar{8}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

12) א. 75%    ב. 12.5%    ג. 80%    ד. 35%    ה. 27.5%    ו. 56%

ז. 83.333%    ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

#### (1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$   | ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$   | ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$  |
| ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$             | ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$             | ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$           |
| ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ | ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ | ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ |
| י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$      | יא. $\frac{4}{5^3}$                  | יב. $\frac{4^3}{5}$                  |

#### (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                |                                  |                                   |
|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ | ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$   | ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$  |
| ד. $8 : \frac{2}{9}$           | ה. $10 : \frac{2}{3}$            | ו. $\frac{5}{6} : 3$              |
| ז. $\frac{2}{5} : 5$           | ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ | ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ |

## תשובות סופיות:

|                   |                    |                    |                     |                     |                     |
|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $\frac{9}{20}$ | ב. $\frac{5}{21}$  | ג. $\frac{8}{45}$  | ד. $2\frac{2}{5}$   | ה. 4                | ו. $2\frac{2}{5}$   |
| ז. $3\frac{3}{5}$ | ח. $15\frac{2}{5}$ | ט. $8\frac{8}{35}$ | י. $\frac{64}{125}$ | יא. $\frac{4}{125}$ | יב. $12\frac{4}{5}$ |
| א. $\frac{9}{10}$ | ב. $1\frac{1}{2}$  | ג. $\frac{6}{35}$  | ד. 36               | ה. 15               | ו. $\frac{5}{18}$   |
| ז. $\frac{2}{25}$ | ח. $\frac{2}{3}$   | ט. 2               |                     |                     |                     |

## חיבור וחיסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

#### כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.  
 דוגמא:  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$ ,  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.  
 דוגמא:  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$ ,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.  
 דוגמא:  $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$   
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.  
 דוגמא:  $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$   
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

|           |          |              |             |
|-----------|----------|--------------|-------------|
| א. 2 ו-3  | ב. 2 ו-4 | ג. 3 ו-5     | ד. 6 ו-10   |
| ה. 4 ו-10 | ו. 4 ו-6 | ז. 3, 5 ו-10 | ח. 2, 3 ו-8 |

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                              |                                                 |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$               | ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$                  |
| ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$             | ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$                  |
| ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$               | ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$                  |
| ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$             | ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$                  |
| ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ | י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג.  $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד.  $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו.  $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

|                     |                       |                      |                       |                      |                          |
|---------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------|
| 12. ו.              | 20. ה.                | 30. ד.               | 15. ג.                | 4. ב.                | 6. א. (1                 |
|                     |                       |                      |                       | 24. ח.               | 30. ז.                   |
| $\frac{1}{9}$ . ו.  | $\frac{1}{2}$ . ה.    | $1\frac{3}{4}$ . ד.  | 1. ג.                 | $\frac{7}{9}$ . ב.   | $\frac{4}{5}$ . א. (2    |
|                     |                       | $\frac{3}{5}$ . י.   | $1\frac{5}{8}$ . ט.   | $-\frac{4}{5}$ . ח.  | $-\frac{1}{4}$ . ז.      |
| $3\frac{5}{6}$ . ו. | 5. ה.                 | $-\frac{1}{8}$ . ד.  | $\frac{7}{12}$ . ג.   | $\frac{7}{10}$ . ב.  | $1\frac{5}{6}$ . א. (3   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{10}$ . ח. | $\frac{19}{21}$ . ז.     |
| $-\frac{5}{8}$ . ו. | $7\frac{11}{12}$ . ה. | $1\frac{5}{12}$ . ד. | $3\frac{1}{12}$ . ג.  | $1\frac{1}{6}$ . ב.  | $2\frac{5}{6}$ . א. (4   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{20}$ . ח. | $2\frac{13}{18}$ . ז.    |
|                     | $3\frac{5}{18}$ . ה.  | $2\frac{5}{6}$ . ד.  | $-13\frac{3}{4}$ . ג. | $1\frac{1}{10}$ . ב. | $2\frac{11}{24}$ . א. (5 |

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:  $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$ , כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. בפסח מועלה מחירו ב-7%.
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה מחירו בתחילת השנה?

(7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.  
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.  
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- |     |                |             |
|-----|----------------|-------------|
| (1) | א. 18 בנות.    | ב. 12 בנים. |
| (2) | א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| (3) | א. 240 ₪       | ב. 60 ₪     |
| (4) | א. 540 ₪       | ב. 40 ₪     |
| (5) | 4.9755 ₪       |             |
| (6) | 400 ₪          |             |
| (7) | א. 88%         | ב. 60%      |
|     | ג. 50%         | ד. 33.33%   |
|     | ה. 33.33%      | ו. 25%      |

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$       | ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$    |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$  | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$     | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$    |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- א.  $27x^5-2x^3+x$  כאשר  $x=\frac{1}{3}$ .
- ב.  $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$  כאשר  $x=-\frac{2}{3}$ .

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

|                                  |                                                           |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$             | עבור : $a = 3, b = -5$                                    |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$             | עבור : $x = 5, b = -1$                                    |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$            | עבור : $x = -2, y = -1$                                   |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$    | עבור : $a = 2, c = -2$                                    |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$         | עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$                            |
| ו. $\sqrt{c-3a}$                 | עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$                            |

### תשובות סופיות:

|     |                                   |                     |        |        |                  |      |
|-----|-----------------------------------|---------------------|--------|--------|------------------|------|
| (1) | א. 11                             | ב. 10               | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7            | ו. 5 |
|     | ז. -10                            | ח. 45               |        |        |                  |      |
| (2) | א. $\frac{10}{27}$                | ב. $5\frac{22}{27}$ |        |        |                  |      |
| (3) | א. 4                              | ב. -71              | ג. 5   | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ |      |
|     |                                   |                     |        | ז. -37 |                  |      |
|     | ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9 |                     |        |        |                  |      |

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

כנס איברים דומים:

- |                                                                                               |                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2)                                                               | $5x + 7x - 4x$ (1)                             |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4)                                                                     | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3)                  |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6)                                                                | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5)            |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8)                                                    | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7)                 |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10)                                                  | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9)         |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12)                                                                 | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11)                      |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14)                                                             | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13)            |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16)                                                | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15)            |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18)                                                 | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17)         |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20)                                                | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22)                                                     | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21)          |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24)                                                           | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23)         |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26)                                                        | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25)                  |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27)               |                                                |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) |                                                |

## תשובות סופיות:

- |                           |                        |                                             |
|---------------------------|------------------------|---------------------------------------------|
| $4xy$ (3)                 | $2x^2$ (2)             | $8x$ (1)                                    |
| $x^2$ (6)                 | $4a^2 - a$ (5)         | $-x^2y$ (4)                                 |
| $15x^3 - 19$ (9)          | $8mn^2 - 6nm^2$ (8)    | $9xy - 36y$ (7)                             |
| $2xy + x + 1$ (12)        | $7x^2 - 7x + 2$ (11)   | $0$ (10)                                    |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15)    | $-5x - 5y - 5xy$ (14)  | $4x^2 + 3x - 9$ (13)                        |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17)        | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16)                 |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21)     | $-3x^2 - x$ (20)       | $-3x^2 + 2x - 3$ (19)                       |
| $-6x^3y - x^2$ (24)       | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22)                     |
|                           | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25)                    |
|                           |                        | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27)    |
|                           |                        | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

|                      |                         |                                        |
|----------------------|-------------------------|----------------------------------------|
| א. $2x \cdot 3x$     | ב. $-4x \cdot (-7x)$    | ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$        |
| ד. $8m^2 \cdot 4m^3$ | ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$ | ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$ |
| ז. $a \cdot 3b$      | ח. $4a^2 \cdot 7b^2$    | ט. $ab \cdot (-2a^2b)$                 |

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

|                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| א. $2(3x-4)$        | ב. $2(-3x^2+5x-1)$         |
| ג. $(7x-2)4$        | ד. $(1-2x)(-2)$            |
| ה. $a(3a-1)$        | ו. $b(b^2-3b+4)$           |
| ז. $2x(5x+3)$       | ח. $5x(x^2+2x-3)$          |
| ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ | י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$ |

(3) פשט את הביטויים הבאים:

|                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ | ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$ |
| ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$   | ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$ |

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

|                |                  |                    |
|----------------|------------------|--------------------|
| א. $(x+5)^2$   | ב. $(x+2)^2$     | ג. $(4x+5)^2$      |
| ד. $(6x+2)^2$  | ה. $(7x+y)^2$    | ו. $(5x+2y)^2$     |
| ז. $(x^2+7)^2$ | ח. $(x^2+y^2)^2$ | ט. $(x^3+2y^2x)^2$ |

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

|                |                                      |                                    |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| א. $(x-6)^2$   | ב. $(x-2)^2$                         | ג. $(5-x)^2$                       |
| ד. $(6x-1)^2$  | ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$   | ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$ |
| ז. $(3m-2n)^2$ | ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ | ט. $(x^2y^2-7)^2$                  |

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

|                                                             |                                                               |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| א. $(x-5)(x+5)$                                             | ב. $(3+x)(x-3)$                                               |
| ג. $(3x-1)(3x+1)$                                           | ד. $(5-7x)(7x+5)$                                             |
| ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ | ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$ |
| ז. $(x^2+y)(x^2-y)$                                         | ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$                                   |

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א.  $(x+1)(x+2)-3x$       ב.  $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$   
 ג.  $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$       ד.  $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$   
 ה.  $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$   
 ו.  $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $x^2+10x+25$       ב.  $x^2+4x+4$       ג.  $16x^2+40x+25$   
 ד.  $36x^2+24x+4$       ה.  $49x^2+14xy+y^2$       ו.  $25x^2+20xy+4y^2$   
 ז.  $x^4+14x+49$       ח.  $x^4+2x^2y^2+y^4$       ט.  $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$   
 (2) א.  $x^2-12x+36$       ב.  $x^2-4x+4$       ג.  $25-10x+x^2$   
 ד.  $36x^2-12x+1$       ה.  $9x^2-3x+\frac{1}{4}$       ו.  $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$   
 ז.  $9m^2-12mn+4n^2$       ח.  $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$       ט.  $x^4y^4-14x^2y^2+49$   
 (3) א.  $x^2-25$       ב.  $x^2-9$       ג.  $9x^2-1$       ד.  $25-49x^2$   
 ה.  $\frac{1}{4}x^2-36$       ו.  $25y^2-\frac{1}{16}x^2$       ז.  $x^4-y^2$       ח.  $9a^4b^6-16$   
 (4) א.  $x^2+2$       ב.  $5x^2-24x+13$       ג.  $-4x^2-x$   
 ד.  $18x^2-6xy$       ה.  $-6x^2-39x-16$       ו.  $-10x^2+17x+321$

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

- |                                |                           |
|--------------------------------|---------------------------|
| א. $2x^2 - 8x$                 | ב. $3t^2 + 12t$           |
| ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$        | ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$   |
| ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ | ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| א. $x^2 + 10x + 25$  | ב. $x^2 + 12x + 36$   |
| ג. $y^2 - 18y + 81$  | ד. $y^2 - 22y + 121$  |
| ה. $4x^2 + 4x + 1$   | ו. $16y^2 - 8y + 1$   |
| ז. $9x^2 - 24x + 16$ | ח. $25x^2 + 70x + 49$ |

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| א. $r^2 - 25$   | ב. $x^2 - 81$      |
| ג. $25y^2 - 49$ | ד. $121x^2 - 1$    |
| ה. $x^2y^2 - 4$ | ו. $9y^4 - 169x^4$ |

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

- |              |                              |
|--------------|------------------------------|
| א. $y - y^3$ | ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$       |
| ג. $m^4 - 1$ | ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$ |

## תשובות סופיות:

1. א.  $3(x-4)$       ב.  $2(3y-2)$       ג.  $4(5-2a)$   
 ד.  $4(a^3+2b)$       ה.  $5(15m^2+5m+3)$       ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$   
 2. א.  $y(y+5)$       ב.  $x(3-11x^2)$       ג.  $y(6y+5y^2+4)$   
 ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$   
 3. א.  $2x(x-4)$       ב.  $3t(t+4)$       ג.  $5n(n^2-4n+10)$   
 ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$       ה.  $4xy(xy+4x-5y)$       ו.  $3mn(9-n-3n^2)$   
 4. א.  $(x+5)^2$       ב.  $(x+6)^2$       ג.  $(y-9)^2$       ד.  $(y-11)^2$   
 ה.  $(2x+1)^2$       ו.  $(4y-1)^2$       ז.  $(3x-4)^2$       ח.  $(5x+7)^2$   
 5. א.  $(r+5)(r-5)$       ב.  $(x+9)(x-9)$       ג.  $(5y+7)(5y-7)$   
 ד.  $(11x+1)(11x-1)$       ה.  $(xy+2)(xy-2)$       ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$   
 6. א.  $y(1+y)(1-y)$       ב.  $x(x-5)^2$       ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$   
 ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b$  ו- $c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$  אז

נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(x+1)(x+4)$     ב.  $(x-3)(x-5)$     ג.  $(x-2)(x-31)$
- ד.  $(2x-3)(x+5)$     ה.  $(3x-2)(x-3)$     ו.  $(3x+1)(2x+1)$
- ז.  $(x+2)(2x-3)$     ח.  $(x-9)^2$     ט. אין פירוק.
- (2) א.  $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$     ב.  $(x+1)(x+4)$     ג.  $(2x+5)^2$     ד. אין פירוק.

## שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

|                         |                                  |
|-------------------------|----------------------------------|
| א. $\frac{x+4}{x+3}$    | ב. $\frac{5}{x-6}$               |
| ג. $\frac{x+7}{2x-8}$   | ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$        |
| ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$ | ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$           |
| ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$  | ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$ |

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| א. $\frac{ax}{a}$      | ב. $\frac{a-x}{a}$          |
| ג. $\frac{a-ax}{a}$    | ד. $\frac{x+1}{y+1}$        |
| ה. $\frac{x}{x+y}$     | ו. $\frac{6x}{6y}$          |
| ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$ | ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ |
| ט. $\frac{4x^2y}{xy}$  | י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$     |

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

|                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{3x+12}{x+4}$      | ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$         |
| ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$   | ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$         |
| ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$ | ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$       |
| ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$    | ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$ |

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                         |                                             |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$     | ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$        |
| ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$ | ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$     |
| ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$  | ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$ |

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                                              |                                                           |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$                             | ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$                         |
| ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$                           | ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$                       |
| ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$                        | ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$                     |
| ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$                       | ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$                  |
| ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$ | י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$ |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

## כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים:  $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים:  $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                       |                                                                                   |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$                    | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$                                              |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$                           | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$                                                     |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$                  | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$                                            |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$           | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$                                 |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

|                                                         |                                                  |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$                          | ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$                  |
| ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$                                 | ד. $\frac{5}{6a} : a^2$                          |
| ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$                    | ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$              |
| ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$ | ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$ |

תשובות סופיות:

|                            |                       |                                 |                       |                                  |
|----------------------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| א. $\frac{x^2}{24}$        | ב. $\frac{3}{x}$      | ג. $\frac{35}{y}$               | ד. $\frac{9x}{20}$    | ה. $\frac{2x}{3}$                |
| ו. $4(a-5)$                | ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ | ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$ | ט. $\frac{z+15}{z-5}$ | י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$ |
| א. $\frac{3}{4}$           | ב. $\frac{y^2}{125}$  | ג. $6a^3$                       | ד. $\frac{5}{6a^3}$   | ה. $d^2$                         |
| ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ | ח. $\frac{a-8}{a-6}$  | ו. $\frac{1}{3}$                |                       |                                  |

## חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{2a-5}{6}$  ב.  $\frac{4x+8}{x}$  ג.  $\frac{5x+1}{x+1}$  ד. 1
- (2) א.  $\frac{c-5a}{abc}$  ב.  $\frac{z+5x+4y}{xyz}$  ג.  $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד.  $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$  ה.  $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$  ו.  $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א.  $\frac{x-2}{x}$  ב.  $\frac{y^2+3}{y^2}$  ג.  $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד.  $\frac{9x-2}{3x}$  ה.  $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$  ו.  $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א.  $\frac{4x+1}{x(x+1)}$  ב.  $\frac{y-6}{y(y+2)}$  ג.  $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד.  $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א.  $\frac{4}{a-3}$  ב.  $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$  ג.  $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד.  $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$  ה.  $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$  ו.  $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז.  $\frac{x-3}{x-5}$  ח.  $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א.  $\frac{x+1}{2}$  ב.  $\frac{x}{7}$  ג.  $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$  ד.  $\frac{1}{2}$  ה.  $\frac{1}{3(10x+1)}$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ .  
נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

- |                                               |                                                     |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$        | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$                 |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$               |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$          | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$         |
| $\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20} \quad (8)$         | $\frac{3-y}{8c^2} \quad (7)$                        |
| $\frac{\frac{16t+8}{25-t^2}}{2t+1}$           | $\frac{\frac{3c^3-9c^2-12c}{40}}{15c+15} \quad (9)$ |
|                                               | $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)}$     |
|                                               | $\frac{5x+5}{5x+5}$                                 |

**תשובות סופיות:**

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

|    |                                               |
|----|-----------------------------------------------|
| 47 | 1. משוואות ממעלה ראשונה                       |
| 49 | 2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה |
| 52 | 3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון       |
| 53 | 4. משוואה ממעלה שנייה                         |
| 55 | 5. משוואות דו-ריבועיות                        |
| 57 | 6. משוואות עם פרמטרים                         |
| 59 | 7. משוואות עם שורשים                          |
| 61 | 8. משוואות עם ערך מוחלט                       |
| 62 | 9. מערכת משוואות ממעלה שנייה                  |
| 64 | 10. משוואות מתקדמות מסכמות                    |
| 67 | 11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית       |

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4</math></p> <p>ב. <math>\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1</math></p> <p>ג. <math>\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1</math></p> <p>ה. <math>\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2</math></p> <p>ו. <math>5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1</math></p> | <p>א. <math>\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}</math></p> <p>ה. <math>\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}</math></p> <p>ו. <math>\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

|                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>א. <math>\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}</math></p> <p>ב. <math>\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0</math></p> <p>ד. <math>\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12</math></p> | <p>א. <math>\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0</math></p> <p>ב. <math>\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0</math></p> <p>ג. <math>\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}</math></p> <p>ד. <math>\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}</math></p> <p>ה. <math>\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}</math></p> <p>ו. <math>\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}</math></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### תשובות סופיות:

- |                    |                    |                     |                    |            |                    |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$           | ב. $x=0$           | ג. $x=8$            | ד. $x=2$           | ה. $x=2$   | ו. $x=-3$          |
| ז. $x=\frac{1}{2}$ | ח. $x=4$           |                     |                    |            |                    |
| א. $x=3$           | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$           | ה. $x=4$   | ו. $x=-1$          |
| א. $x=-18$         | ב. $x=-30$         | ג. $x=-1$           | ד. $x=1$           | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$         |
| א. $x=8$           | ב. $x=-1$          | ג. $x=-3$           | ד. $x=-2$          | ה. $x=2$   | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$          | ב. $x=-7$          | ג. $x=-7$           | ד. $x=6, x \neq 3$ |            |                    |

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו-  $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

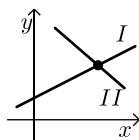
#### פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

#### הצגה גרפית של מערכת משוואות:

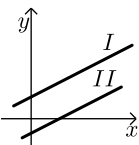
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



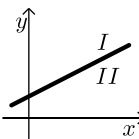
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:  
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.  
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.  
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### (1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \\
 \text{ד. } \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} & \text{ה. } \begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} & \text{ו. } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}
 \end{array}$$

#### (2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \\
 \text{ג. } \begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} & \text{ד. } \begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}
 \end{array}$$

#### (3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

## תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$       ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 2, x_2 = -5$     ב.  $x_1 = 2, x_2 = 8$     ג.  $x = \frac{2}{5}$     ד. אין פתרון.
- (2) א.  $x_1 = 2, x_2 = -1$     ב.  $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$     ג.  $x_1 = 1, x_2 = -10$     ד.  $x_1 = 0.6, x_2 = -2$
- (3) א.  $x = \pm 6$     ב.  $x = \pm \frac{3}{4}$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = \pm 1$
- (4) א.  $x_1 = 0, x_2 = -2$     ב.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$     ג.  $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$     ד.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$
- (5) א.  $x_1 = 2, x_2 = -1.2$     ב.  $x = 5, x \neq -3$     ג.  $x_1 = 0, x_2 = -5$     ד.  $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4  
כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1)  $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3)  $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4)  $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5)  $x^6 + x^3 = 56$
- (6)  $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7)  $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8)  $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9)  $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10)  $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11)  $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12)  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13)  $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14)  $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15)  $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16)  $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17)  $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18)  $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19)  $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20)  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

## תשובות סופיות:

(1)  $x = \pm 1$

(2)  $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3)  $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4)  $x = \pm 2, \pm 5$

(5)  $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6)  $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7)  $x_1 = 4, x_2 = 49$

(8)  $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9)  $x = 5, -1$

(10)  $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11)  $x = -1$

(12)  $x_{1,2} = 1, 3$

(13)  $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14)  $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16)  $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17)  $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18)  $x = -1, 2$

(19)  $x = 3, -1$

(20)  $x = \pm 1, 4, 6$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx = 4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                                |                                                     |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$                           | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$                               |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$                      | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$                          |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$                     | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$                            |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$                     | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$                           |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$                   | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$                          |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$      | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$                    |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$           | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$            | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$               |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$        |
|                                                | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$      |

**תשובות סופיות:**

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

### משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                             |                           |
|-----------------------------|---------------------------|
| $ 3x-24 =x$ (2)             | $ 3x+14 =7$ (1)           |
| $2x- 8-x =10$ (4)           | $ 12-x =3x$ (3)           |
| $ 14-3x =2 x+5 $ (6)        | $ 4x-5 = 2x+13 $ (5)      |
| $ x+2 +6= 2x-4 $ (8)        | $ x +7= 2x $ (7)          |
| $ 10-3x - x+4 = 2x-6 $ (10) | $ x+2 + 2x-6 = 4x+8 $ (9) |

### תשובות סופיות:

- |                           |               |                         |                          |
|---------------------------|---------------|-------------------------|--------------------------|
| $x=6$ (4)                 | $x=3$ (3)     | $x=6,12$ (2)            | $x=-\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x=12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x=\pm 7$ (7) | $x=24, \frac{4}{5}$ (6) | $x=9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
|                           |               | $x=0$ (10)              | $x=0, -12$ (9)           |

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1)  $(2,4), (4,2)$
- (2)  $(\pm 4, -2)$
- (3)  $(\pm 2, \pm 1)$
- (4)  $(5, -2), (-5, 2)$
- (5)  $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6)  $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7)  $(7, 4)$
- (8)  $(5, -3)$
- (9)  $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10)  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12)  $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13)  $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14)  $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

## משוואות מסכמות מתקדמות:

### סיכום כללי:

#### תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \\
 (2) & x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \\
 (3) & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \\
 (4) & 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \\
 (5) & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \\
 (6) & x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \\
 (7) & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \\
 (8) & \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \\
 (9) & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
 (10) & \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} \\
 (11) & \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \\
 (12) & \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור  $a > 0$ :

$$\begin{array}{ll}
 (13) & x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \\
 (14) & x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (15) & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 \\
 (16) & |4 - |5 - x|| = |x + 3| \\
 (17) & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \\
 (18) & \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \\
 (19) & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0
 \end{array}$$

$$(20) \quad \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2$$

### תשובות סופיות:

(1)  $x = 3$

(2)  $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3)  $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4)  $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5)  $x_{1,2} = \pm 1$

(6)  $x_{1,2} = \pm 2$

(7)  $x = 1$

(8)  $x = 3$

(9)  $x = 2$

(10)  $3.5 \leq x \leq 7$

(11)  $x = 4$

(12)  $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13)  $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14)  $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15)  $x \leq 0$

(16)  $x = -1$

(17)  $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18)  $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19)  $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

## ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

### שאלות:

#### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

## מערכת משוואות:

$$(17) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(18) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 72
4. אי שוויונים עם מנה ..... 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 75
6. שאלות מסכמות ..... 76
7. אי שוויונים עם שורשים ..... 78
8. מציאת תחום הגדרה ..... 80
9. אי שוויונים עם ערך מוחלט ..... 82

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                                           |                                               |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $6x > 2(3x-1)$ (2)                                        | $45x - 26 > 109$ (1)                          |
| $(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$ (4)                          | $2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$ (3)           |
| $4(6x-8) < 8(3x-4)$ (6)                                   | $\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$ (5)       |
| $\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$ (7) |

**תשובות סופיות:**

(1)  $x > 3$

(2) כל  $x$

(3) אף  $x$

(4)  $x > -2$

(5)  $x < 5$

(6) אף  $x$

(7)  $x \geq 12$

(8)  $x > -13$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                               |                                        |
|-------------------------------|----------------------------------------|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)         | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)         | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8)  | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)     | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12)  | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ ,  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$  וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$          | (2) $x(x^2 + x + 1) > 0$           |
| (3) $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ | (4) $x^3 - 25x \geq 0$             |
| (5) $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$      | (6) $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$ |
| (7) $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$       | (8) $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$       |
| (9) $(x^2 + 6)(x+3) > 0$           | (10) $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$         |

### תשובות סופיות:

- |                                             |                                  |
|---------------------------------------------|----------------------------------|
| (1) $1 < x < 2, x > 3$                      | (2) $x > 0$                      |
| (3) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ | (4) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ |
| (5) $x > 2$                                 | (6) $x \leq 1\frac{2}{3}$        |
| (7) $x < -2, 1 < x < 3$                     | (8) $x \leq 0, x = 3$            |
| (9) $x > -3$                                | (10) $x < 1, 2 < x < 4$          |

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

|                                   |                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)    | $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)             |
| $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4) | $\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)              |
| $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)       | $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)           |
| $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)      | $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)            |
| $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10) | $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9) |

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

## תשובות סופיות:

- |                                           |                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x$ אף $x$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## אי שוויונים עם שורשים:

### סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

| מקרה       | אי השוויון        | פתרון                  |
|------------|-------------------|------------------------|
| $a \geq 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | $0 \leq f(x) < a^2$    |
| $a < 0$    | $\sqrt{f(x)} < a$ | אין פתרון              |
|            | $\sqrt{f(x)} > a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

## תשובות סופיות:

(1)  $-3 \leq x < 46$

(2)  $x \geq 3$

(3)  $x < -10, x > 1$

(4)  $\emptyset$

(5)  $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6)  $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7)  $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8)  $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9)  $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10)  $-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$  שזה:  $-2.618 < x \leq 1$

(11)  $2.5 \leq x < 3$

(12)  $x < -9, x > 0$

## תחום הגדרה:

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

| מקרה  | $ x  < a$    | $ x  > a$           |
|-------|--------------|---------------------|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$
- ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x^2+6x-4| < 12$       ב.  $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג.  $|x^2-3x| < 4$       ד.  $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה.  $x^2-6|x|+5 \leq 0$       ו.  $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\text{א. } |x-3|+|2x+2|>7 \quad \text{ב. } |x+8|<11-|1-3x|$$

$$\text{ג. } |3-2x|-11>4-|6+x| \quad \text{ד. } |2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$$

$$\text{ה. } |5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\leq 22 \quad \text{ו. } |x+3|+|x^2-5x+4|<19$$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\text{א. } \left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\geq 3 \quad \text{ב. } 1\leq\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\leq 2$$

$$\text{ג. } \frac{|x-6|+8x}{x-12}\leq 12 \quad \text{ד. } \left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

$$\text{א. } \sqrt{x^2-|x-12|}<x \quad \text{ב. } 2-\sqrt{1-x}\leq|x+2|-3$$

$$\text{ג. } \sqrt{|2x+1|-x-1}\leq 4-|3x| \quad \text{ד. } \frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$       ב.  $x < -4$  או  $3 < x$   
 ג.  $2 < x < 6$       ד.  $x < -1$
- (2) א.  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$  או  $-1 < x < 1$       ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$       ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ג.  $-1 < x < 4$       ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$   
 ה.  $-5 \leq x \leq -1$  או  $1 \leq x \leq 5$       ו.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- (4) א.  $x < -2$  או  $2 < x$       ב.  $-1 < x < 1$   
 ג.  $x < -6$  או  $4 < x$       ד.  $x < -1$  או  $4 < x$   
 ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$       ו.  $-2 < x < 6$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$       ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$       ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$       ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$       ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 85 | 1. חוקי החזקות.....           |
| 90 | 2. חוקי השורשים.....          |
| 94 | 3. כתיבה מדעית של מספרים..... |

## חוקי החזקות:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

|                                                            |                                          |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$                   | ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ |
| ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ | ד. $2^3 + 2^5$                           |

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

|                                                   |                                                           |                                                 |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $(a^2)^4$                                      | ב. $(c^3)^{10}$                                           | ג. $(x^3 x^{10})^2$                             |
| ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$                      | ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$                              | ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$      |
| ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$          | ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$               | ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$       |
| י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ | יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ | יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ |

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left((3^2)^3\right)^4$  ו-  $\left((3^6)^n\right)^2$ . מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

|                              |                                                  |                                          |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ | ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ | ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ |
|------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------|

(8) פשט את הביטויים הבאים :

|                                         |                                      |                                                   |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------|
| א. $3^2 9 \cdot 81^2$                   | ב. $64^2 2^3 8^2$                    | ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$                       |
| ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ | ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ | ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ |

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים :  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

### סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

### שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- |                                               |                                                |                                                                     |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$                          | ב. $32^{\frac{3}{5}}$                          | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$                                             |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$         | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$          | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$                     |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                         |                                                                            |                                                                |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$                            | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$                                              | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$                   |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$                         | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$                                      | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$                          |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- |                   |                |                          |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$    | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ |                          |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- |                          |                             |                                 |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$           | ב. $4\sqrt[3]{2}$           | ג. $2\sqrt[5]{3}$               |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$       | ח. $-5\sqrt[4]{2}$          | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$             |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[5]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$  ב.  $\sqrt[5]{2^3}$  ג.  $\sqrt[6]{6^5}$  ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$  ה.  $-\sqrt[3]{-4}$  ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$  ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$  ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח.  $\phi$  ט.  $\phi$  י. 5
- (19) א. 4 ב.  $\frac{1}{8}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד. 125 ה.  $\frac{32}{243}$  ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$  ח.  $\frac{10}{49}$  ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$  ח.  $\sqrt{5}$  ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$  ב.  $\sqrt{75}$  ג.  $\sqrt{9}$  ד.  $\sqrt[3]{24}$  ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$  ב.  $\sqrt[3]{128}$  ג.  $\sqrt[5]{96}$  ד.  $\sqrt{6}$  ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$  ז.  $\sqrt[3]{-250}$  ח.  $-\sqrt[4]{1250}$  ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$  ב.  $4\sqrt{3}$  ג.  $3\sqrt{7}$  ד.  $3\sqrt[3]{2}$  ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$  ב.  $5\sqrt{2}$  ג.  $8\sqrt{5}$  ד.  $3\sqrt[3]{4}$  ה.  $2\sqrt[3]{7}$  ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$  ח.  $3\sqrt[5]{4}$  ט.  $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$  ב.  $4\sqrt{7}$  ג.  $6\sqrt[3]{2}$  ד.  $\sqrt[4]{5}$  ה.  $4\sqrt{5}$  ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$  ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$  ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$  ד. 27 ה.  $\frac{1}{7}$  ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| א. 15,000,000      | ב. 1,500,000     |
| ג. 150,000,000,000 | ד. 23,400,000    |
| ה. 0.0003          | ו. 0.00000042    |
| ז. 0.000000042     | ח. 0.00000000042 |

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

|                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $(3,000,000)^2$ | ב. $(2,000,000)^2$   |
| ג. $(5,000)^3$     | ד. $(50,000)^3$      |
| ה. $(0.0002)^4$    | ו. $(0.00004)^3$     |
| ז. $(0.000005)^3$  | ח. $(0.000000007)^3$ |

### תשובות סופיות:

|                           |                          |                          |                         |                         |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (28) א. $1.5 \cdot 10^7$  | ב. $1.5 \cdot 10^6$      | ג. $1.5 \cdot 10^{11}$   | ד. $2.34 \cdot 10^7$    | ה. $3 \cdot 10^{-4}$    |
| ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$    | ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$   | ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$  |                         |                         |
| (29) א. $9 \cdot 10^{12}$ | ב. $4 \cdot 10^{12}$     | ג. $1.25 \cdot 10^{11}$  | ד. $1.25 \cdot 10^{14}$ | ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$ |
| ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$   | ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$ | ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$ |                         |                         |

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

|     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| 95  | 1. משוואות מעריכיות יסודיות           |
| 97  | 2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים     |
| 99  | 3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס        |
| 100 | 4. משוואות מסכמות שונות               |
| 101 | 5. משוואות עם קבוע אוילר              |
| 102 | 6. מערכת משוואות מעריכיות             |
| 103 | 7. אי שוויונים מעריכיים               |
| 104 | 8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך |

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^0 = 1$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

1 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2 פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

|                                                           |                                                           |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $2^x = 7^x$                                            | ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$               |
| ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$                        | ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$                |
| ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$ | ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$ |
| ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$           |                                                           |

### תשובות סופיות:

|                          |                       |                        |                          |               |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|--------------------------|---------------|
| א. $x = 4$               | ב. $x = -\frac{1}{3}$ | ג. $x = -2$            | ד. $x = 2, 8$            | ה. $x = -4$   |
| ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$ | ז. $x = 9$            | ח. $x = 1$             |                          |               |
| א. $x = -1$              | ב. $x = -2$           | ג. $x = 3, -2$         |                          |               |
| א. $x = -\frac{1}{2}$    | ב. $x = 1$            | ג. $x = -\frac{8}{19}$ | ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$ | ה. $x = 4, 9$ |
| א. $x = 0$               | ב. $x = 4$            | ג. $x = 2$             | ד. $x = 2$               | ה. $x = 5$    |
| ו. $x = 1.5$             | ז. $x = \frac{2}{3}$  |                        |                          |               |

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א.  $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב.  $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א.  $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד.  $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג.  $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו.  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה.  $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 186$

ח.  $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז.  $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב.  $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א.  $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד.  $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו.  $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב.  $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

|                                                     |                                                   |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$ | ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$           |
| ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$     | ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ |
| ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$      | ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$          |
| ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$                 | ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$              |

### תשובות סופיות:

|                                    |                 |                         |                      |
|------------------------------------|-----------------|-------------------------|----------------------|
| א. $x = 3$                         | ב. $x = 2$      | ג. $x = 4$              | ד. $x = 1$           |
| א. $x = \frac{1}{2}$               | ב. $x = 0$      | ג. $x = \frac{1}{3}$    | ד. $x = \frac{1}{4}$ |
| ה. $x = -3$                        | ו. $x = -2$     | ז. $x = -3$             | ח. $x = -2$          |
| א. $x = 2, 3$                      | ב. $x = 1, -2$  | ג. $x = 0$              | ד. $x = 0$           |
| ה. $x = 0, 1$                      | ו. $x = -6, -9$ |                         |                      |
| א. $x = 1, -\frac{1}{2}$           | ב. $x = 1$      |                         |                      |
| א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ | ב. $x = 1, 3$   | ג. $x = 1, 2$           | ד. $x = 1, 0$        |
| ה. $x = -2$                        | ו. $x = 1, -1$  | ז. $x = 0, \frac{1}{2}$ | ח. $x = 0, 2$        |

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.  
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\sqrt[x]{10} = 4 \cdot \sqrt[2x]{10} + 60 \quad (5)$$

$$\sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{\sqrt{x}{32}} \quad (6)$$

$$10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x = 1, 2 \quad (1)$$

$$x = 3 \quad (2)$$

$$x = 1.5 \quad (3)$$

$$x = 1, -1 \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$x = -3 \quad (6)$$

$$x = 1, -2 \quad (7)$$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות  $e$  משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

### שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

### תשובות סופיות:

|                   |            |                  |          |
|-------------------|------------|------------------|----------|
| (1,3) (4          | (1,2) (3   | (0,2) , (2,4) (2 | (2,9) (1 |
| (1,2) , (-1,0) (7 | (-1,-2) (6 | (3,2) (5         |          |

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם:  $f(x) > 1$  אז:  $g(x) > h(x)$ .

אם:  $0 < f(x) < 1$  אז:  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$3 < x < 6 \quad (2)$$

$$1 < x < 3 \quad (3)$$

$$0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$0 < x < 2 \quad (6)$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

|     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| 105 | 1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות    |
| 108 | 2. חוקי הלוגריתמים                    |
| 112 | 3. חישובים עם חזקה לוגריתמית          |
| 113 | 4. מעבר בין בסיסים                    |
| 115 | 5. הלוגריתם הטבעי                     |
| 117 | 6. משוואות עם בסיסים שונים            |
| 118 | 7. מערכת משוואות לוגריתמיות           |
| 119 | 8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות |
| 120 | 9. אי-שוויונים לוגריתמים              |

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4=10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2  
 ו. 4    ז. -1.5
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$   
 ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$   
 ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |                                                                                                  |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$                                                                     | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$                                                                     | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$                                                           |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$                                                             | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$                                               |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$                                                                     | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |                                                             |                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left( \frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left( \frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left( \frac{81}{x} \right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left( \frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

**שאלות הבעה:**

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10)  $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11)  $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12)  $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13)  $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2  
 ו. -2    ז. 1    ח. 6    ט. 1.5    י. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$
- ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[6]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$   
ג.  $x = 2\log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$   
ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{6}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad \text{יתבצע באופן הבא:}$$

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_4 7 \cdot \log_7 4 \\ \text{ב.} & \log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000 \\ \text{ג.} & \log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9 \\ \text{ד.} & \log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625 \end{array}$$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1 \\ \text{ב.} & \log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1 \end{array}$$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 x + \log_{32} x = 6 \\ \text{ב.} & \log_3 x \cdot \log_{27} x = 3 \\ \text{ג.} & \log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3} \\ \text{ד.} & \log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1 \end{array}$$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_2 3 \quad \text{ב.} \log_{32} 36 \quad \text{ג.} \log_{216} 96$$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_3 50 \quad \text{ב.} \log_2 \sqrt{30} \quad \text{ג.} \log_5 22.5$$

(6) נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

### שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7)  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8)  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

### תשובות סופיות:

(1) א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12.

(2) א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

(3) א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

(4) א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

(5) א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$ .

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.  
 למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן.  
 מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) א. 2      ב. -4      ג. -1.5
- (2) א.  $x = e^2$       ב.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א.  $x = 0$       ב.  $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$       ג.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א.  $x = e^3, \frac{1}{e^2}$       ב.  $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3      ב. 9

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                                                   |                                   |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$ (2)                                       | $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6)                                                   | $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$ (5)   |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)                  | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)       |

### תשובות סופיות:

- |                                                           |                             |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)                               | $x > 5$ (1)                 |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)                          | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)  |
| $0 < x < e^3$ (6)                                         | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)  |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 7 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

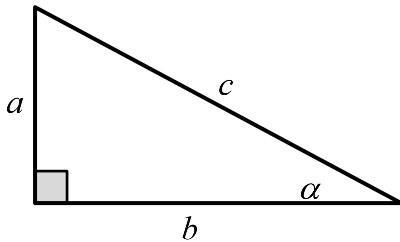
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 121

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

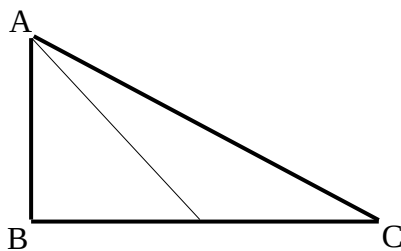
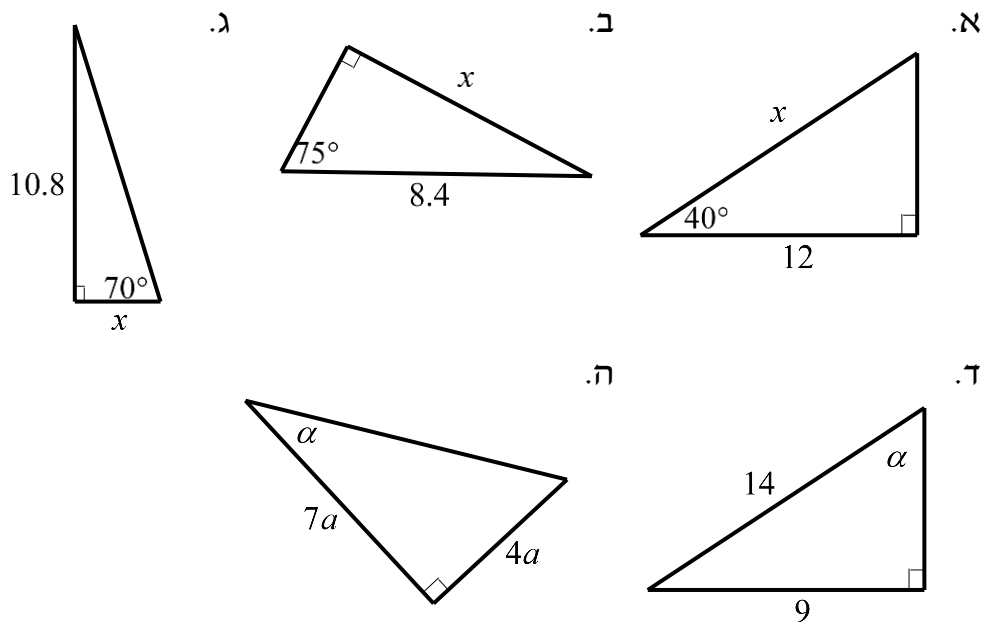
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha / x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



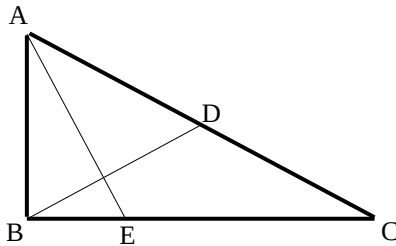
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

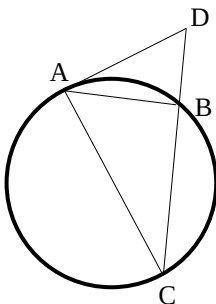
נתון:  $\angle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\angle BAD$ .



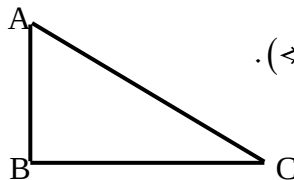
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר AC והוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BD = 5.6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

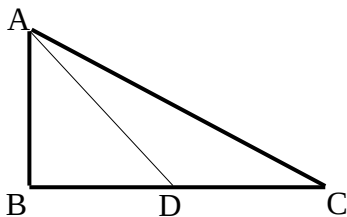


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

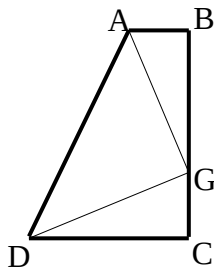


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.

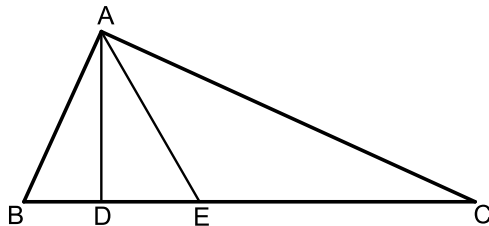


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים BD ו-AD.

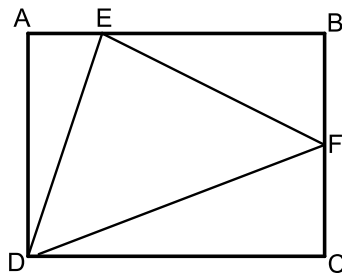
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה זווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש-  $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $m$  את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו-  $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו-  $k = 2$ .

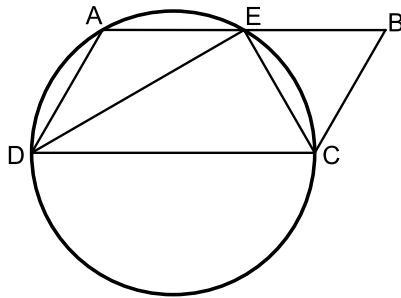


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש-  $3AE = BE$  ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.  
א. סמן ב-  $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
ב. חשב את זווית המשולש EDF.

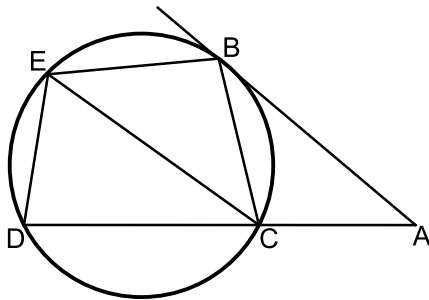
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $k$  את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E,  $(AE = BE)$ . נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
  - רדיוס המעגל יסומן ב- $R$ .
  - הבע באמצעות  $R$  את היקף המקבילית.
  - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
  - הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
  - נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 8 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

|     |                                                      |
|-----|------------------------------------------------------|
| 126 | 1. זהויות יסוד                                       |
| 130 | 2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות |
| 132 | 3. מעגל היחידה                                       |
| 135 | 4. סכום והפרש זוויות                                 |
| 139 | 5. זווית כפולה                                       |
| 142 | 6. סכום והפרש פונקציות                               |
| 145 | 7. מכפלת פונקציות                                    |

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  |                              |

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 & \text{(2)} & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha & \text{(1)} \\
 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha & \text{(4)} & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha & \text{(3)} \\
 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 & \text{(6)} & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 & \text{(5)} \\
 \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 & \text{(8)} & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha & \text{(7)} \\
 \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha & \text{(10)} & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha & \text{(9)} \\
 \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 & \text{(12)} & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha & \text{(11)} \\
 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha & \text{(14)} & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha & \text{(13)} \\
 \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha & \text{(16)} & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha & \text{(15)}
 \end{array}$$

## הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad \text{נתון כי:}$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{נתון כי:}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

## תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

### סיכום כללי:

| $\alpha = 90^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$  | $\alpha = 45^\circ$  | $\alpha = 30^\circ$  | $\alpha = 0^\circ$ |               |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|---------------|
| 1                   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0                  | $\sin \alpha$ |
| 0                   | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1                  | $\cos \alpha$ |
| $\phi$              | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0                  | $\tan \alpha$ |
| 0                   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\phi$             | $\cot \alpha$ |

### הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

### שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

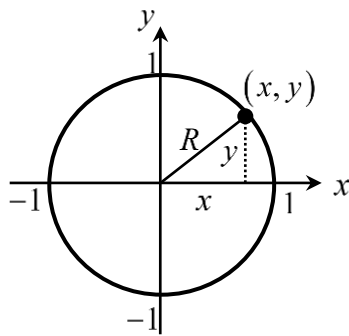
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קונוי שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע   | סינוס                                     | קוסינוס                                   | טנגנס                                     |
|--------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| II     | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ |
| III    | $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$  |
| VI     | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$            | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$             | $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$            |
| סימנים |                                           |                                           |                                           |

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

### שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.  
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| א. $\sin 120^\circ$ | ב. $\cos 150^\circ$ |
| ג. $\tan 160^\circ$ | ד. $\cot 130^\circ$ |
| ה. $\sin 215^\circ$ | ו. $\cos 245^\circ$ |
| ז. $\tan 230^\circ$ | ח. $\cot 200^\circ$ |
| ט. $\sin 300^\circ$ | י. $\cos 310^\circ$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

|                     |                      |                        |
|---------------------|----------------------|------------------------|
| א. $\sin 150^\circ$ | ב. $\cos 210^\circ$  | ג. $\tan 120^\circ$    |
| ד. $\sin 330^\circ$ | ה. $\tan 225^\circ$  | ו. $\sin 315^\circ$    |
| ז. $\cos 120^\circ$ | ח. $\tan(-30^\circ)$ | ט. $\cos(-45^\circ)$   |
| י. $\sin 510^\circ$ | יא. $\cos 930^\circ$ | יב. $\tan(-225^\circ)$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם  $\alpha, \beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{י. } \frac{1}{2} & \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{יב. } -1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

(4) שאלת הוכחה.

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

|                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$    | ב. $\sin 15^\circ$  | ג. $\sin 105^\circ$   |
| ד. $\sin(-15^\circ)$  | ה. $\cos 75^\circ$  | ו. $\cos 15^\circ$    |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

$$\text{א. } \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\text{ב. } \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ד. } \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

(4) נתון:  $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

$$\text{א. } \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. } \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{ג. } \tan(\alpha + \beta)$$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ 

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(11) הוכח כי מתקיים:  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$ .

(12) הוכח כי מתקיים:  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$ .

(13) נתון כי:  $\sin 76^\circ = m$ . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$ .

(14) הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי:  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$  ו-  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ .

הראה כי מתקיים:  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

(15) היעזר בנוסחה:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$ .

אם ידוע כי:  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ . הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} & \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א.  $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$   
 ב.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$   
 ג.  $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$   
 ד.  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$   
 ה.  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$   
 ו.  $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$   
 ז.  $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$   
 ח.  $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$ .

ב.  $\cos \alpha$ .

ג.  $\sin 2\alpha$ .

ד.  $\cos 2\alpha$ .

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו-  $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו-  $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$ .

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$ .

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$ .

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$ .

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$ .

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$ .

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$ .

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א.  $\frac{9}{41}$  ב.  $4\frac{4}{9}$  ג.  $\frac{720}{1681}$  ד.  $-\frac{1519}{1681}$

ה.  $-\frac{720}{1519}$

(5) א.  $\frac{5}{13}$  ב.  $\frac{12}{13}$  ג.  $\frac{120}{169}$  ד.  $\frac{119}{169}$

(6) א.  $\frac{16}{65}$  ב.  $-\frac{63}{65}$  ג.  $-\frac{123}{845}$

(7) 0.44

(8)  $\cos 4\alpha$

(9)  $\frac{1}{6}$

(10) 1

(11) -1.25

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה :  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשוט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}.$$

$$\text{הראה כי : } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha.$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha.$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ.$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}.$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ.$$

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) 1.

(18)  $\frac{1}{8}$ .(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$$

$$(2) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2} (\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$$

$$(3) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} (\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$$

$$(4) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$$

$$(5) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$$

$$(6) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$$

$$(7) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$$

$$(8) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$$

$$(9) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 9 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| 147 | 1. משוואות טריגונומטריות כלליות                         |
| 150 | 2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית                    |
| 152 | 3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד                   |
| 154 | 4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה         |
| 155 | 5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס                |
| 156 | 6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות   |
| 157 | 7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה         |
| 158 | 8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$           |
| 159 | 9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות |
| 161 | 10. משוואות עם תחום נתון                                |
| 162 | 11. משוואות עם זוויות ברדיאנים                          |
| 166 | 12. אי שוויונים טריגונומטריים                           |

## משוואות טריגונומטריות כלליות:

### סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות  
כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה                | הפתרון                                                                  |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$                                    |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$   
 ג.  $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$  ד.  $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א.  $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א.  $x = 30^\circ + 180^\circ k$  ב.  $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א.  $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$  ב.  $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$  ג.  $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$  ב.  $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$   
 ג.  $x = -9^\circ + 36^\circ k$  ד.  $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$   
 ה.  $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$  ו.  $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א.  $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$  ב.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$  ג.  $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א.  $x_1 = 180^\circ k$ ,  $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$  ב.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$  ג.  $x = 60^\circ + 180^\circ k$  ד.  $x = 90^\circ k$   
 ה.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$  ו.  $x = 180^\circ k$  ז.  $x = 20^\circ + 60^\circ k$  ח.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$  ט.  $x = 90^\circ + 360^\circ k$  י.  $x = 180^\circ k$   
 יא.  $x = 90^\circ + 180^\circ k$  יב.  $x = 360^\circ k$  יג.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$  יד.  $x = 45^\circ + 180^\circ k$  טו.  $x = 180^\circ k$

## משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

### סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

### טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

## תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  | קשרים בין פונקציות           |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$\text{(1)} \quad x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{(2)} \quad x = 22.5^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{(3)} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(4)} \quad x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(5)} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(6)} \quad x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(7)} \quad x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$$

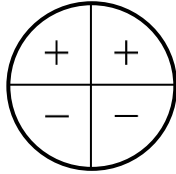
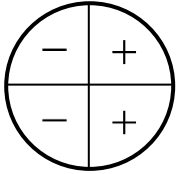
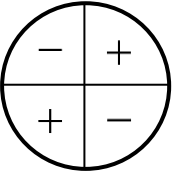
$$\text{(8)} \quad x = 180^\circ k$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

| רביע           | סינוס                                                                                 | קוסינוס                                                                                                                 | טנגנס                                                                                                                   |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I<br>II<br>III | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$<br>$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ |
| סימנים         |  |                                      |                                      |

### זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

## משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

### סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה:  $\sin x = a \cos x$  לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$  (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$ ). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

### הערה:

יש לבדוק האם ערכי  $x$  שמקיימים  $\cos x = 0$  מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

## משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

|                                                                                                                                                                                       |                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$                             | סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס |
| $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$ | סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

|                                                                                          |                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$                                                | סינוס זווית כפולה   |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ | קוסינוס זווית כפולה |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- |                                     |                              |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1)   |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4)       | $4 \cos x = \sin 2x$ (3)     |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6)            | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8)      | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7)   |

### תשובות סופיות:

- |                                                                                                                                 |                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2)                                                                  | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4)                                                                | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3)                      |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6)                                                           | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5)       |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7)                                            |                                                       |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) |                                                       |

## משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

### סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה:  $a \sin x + b \cos x = c$  לצורה:  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ .

מציאת זווית  $\alpha$  המקיימת:  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  תאפשר לכתוב:  $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ .

שימוש בזהות:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  וזהות:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן:  $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$  נקבל את המשוואה:  $\sin(x + \alpha) = k$  כאשר  $\alpha$  ו- $k$  ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

|                                                                                                                                                                                        |                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  | סכום והפרש פונקציות<br>עבור סינוס   |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | סכום והפרש פונקציות<br>עבור קוסינוס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

### תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

## משוואות עם תחום נתון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

### שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $8\sin x - 4 = 0$
- (2)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4)  $[0^\circ:360^\circ]$ ,  $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5)  $[-30^\circ:30^\circ]$ ,  $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

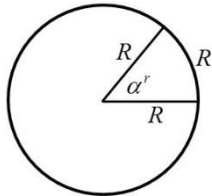
### תשובות סופיות:

- (1)  $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2)  $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3)  $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4)  $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5)  $x = 22.733^\circ$
- (6)  $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7)  $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8)  $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

## משוואות עם זוויות ברדיאנים:

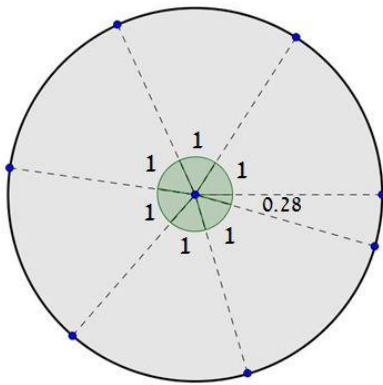
### סיכום כללי:

#### הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

#### קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

#### פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה                | הפתרון                                                  |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$                         |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |

כאשר  $k$  מספר שלם.

## שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

|                |                |                 |                  |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. $30^\circ$  | ב. $90^\circ$  | ג. $75^\circ$   | ד. $120^\circ$   |
| ה. $210^\circ$ | ו. $315^\circ$ | ז. $18^\circ$   | ח. $285^\circ$   |
| ט. $-15^\circ$ | י. $-80^\circ$ | יא. $510^\circ$ | יב. $-390^\circ$ |

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

|                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. $\pi$              | ב. $2\pi$             | ג. $4\pi$             | ד. $1.5\pi$           |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$   | ו. $\frac{\pi}{4}$    | ז. $\frac{\pi}{6}$    | ח. $\frac{1}{18}\pi$  |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

|                                                                                     |                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $2\sin 3x = 1$ , $\left[0; \frac{1}{3}\pi\right]$                                | ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$ , $[0; \pi]$                                                              |
| ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$ , $[0; 2\pi]$                                        | ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0; \pi]$                            |
| ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ , $\left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$ | ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}\right]$ |
| ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$ , $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$                   | ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$         |

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

|                                                                                   |                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ , $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$                     | ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$          |
| ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$ , $[0; \pi]$                                              | ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ |
| ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ , $[-\pi; \pi]$                                 |
| ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ , $[-\pi; 0]$                             | ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$ , $[0; 2\pi]$                                   |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א.  $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א.  $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א.  $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{\pi}{6}$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג.  $\frac{5\pi}{12}$  ד.  $\frac{2\pi}{3}$  ה.  $\frac{7\pi}{6}$   
ו.  $\frac{7\pi}{4}$  ז.  $\frac{\pi}{10}$  ח.  $\frac{19\pi}{12}$  ט.  $-\frac{\pi}{12}$  י.  $-\frac{4\pi}{9}$   
יא.  $\frac{17\pi}{6}$  יב.  $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א.  $180^\circ$  ב.  $360^\circ$  ג.  $720^\circ$  ד.  $270^\circ$  ה.  $90^\circ$   
ו.  $45^\circ$  ז.  $30^\circ$  ח.  $10^\circ$  ט.  $130^\circ$  י.  $285^\circ$   
יא.  $210^\circ$  יב.  $405^\circ$
- (3) א.  $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$  ב.  $x = \frac{5\pi}{6}$  ג.  $x = \frac{\pi}{2}$  ד.  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
ה.  $x = 0$  ו.  $x = \frac{2\pi}{9}$  ז.  $x = 0.0875\pi$  ח.  $x = 0.224\pi$
- (4) א.  $x = \frac{\pi}{3}$  ב.  $\phi$  ג.  $x = 0.398\pi, 0.602\pi$  ד.  $\phi$   
ה.  $x = 0, 0.437\pi$  ו.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$   
ז.  $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$  ח.  $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א.  $x = \frac{\pi}{8}$  ב.  $x = 0, 0.42\pi, \pi$  ג.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$  ב.  $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א.  $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$  ב.  $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$   
ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3}$  ד.  $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

## אי שוויונים טריגונומטריים:

### סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
  2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
  3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
    - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
    - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
  4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

### הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- |                                                             |                                                                     |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $[0, 1.5\pi] \quad 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ (2)           | $[0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2}$ (1)                     |
| $[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ (4)         | $(-90^\circ, 90^\circ) \quad 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$ (3)         |
| $(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$ (6)    | $[0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ (5) |
| $(-\pi < x < \pi) \quad  \tan(x)  > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (8) | $[0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0$ (7)                           |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 10 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 168
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 176
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 185
4. שאלות מסכמות ..... 189

## שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

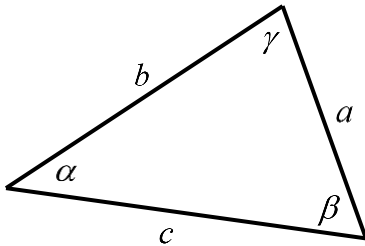
### סיכום כללי:

#### משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:



#### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

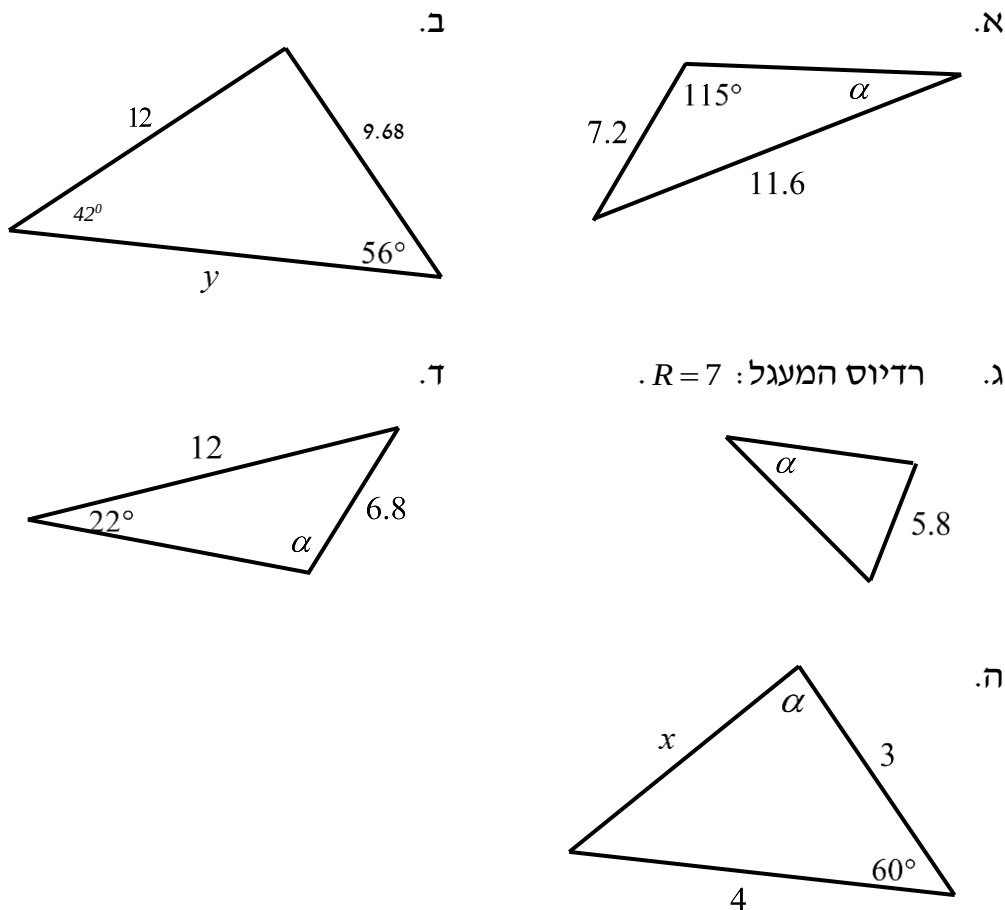
בקוסינוס הזווית שבניהן:

#### מתי נשתמש בכל משפט:

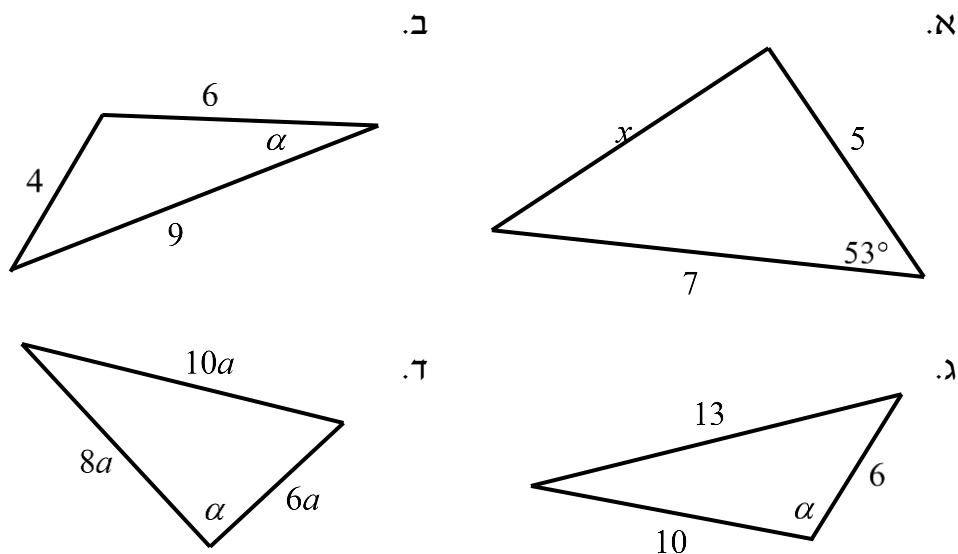
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי זוויות וצלע.
  - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

## שאלות:

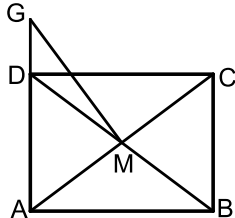
(1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים  
 (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



(2 מצא את ערכו של  $a/x$  במשולשים הבאים:

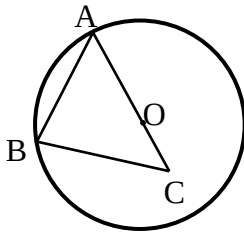


- (3) נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .  $CD$  הוא חוצה זווית הבסיס  $\angle C$ . מצא את אורכו של הקטע  $AD$ .



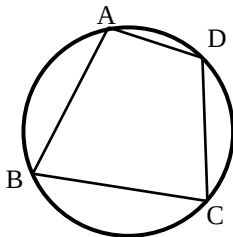
- (4) אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $M$ . הנקודה  $G$  נמצאת על המשך הצלע  $AD$ . נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ. מצא את גודלו של הקטע  $GM$ .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

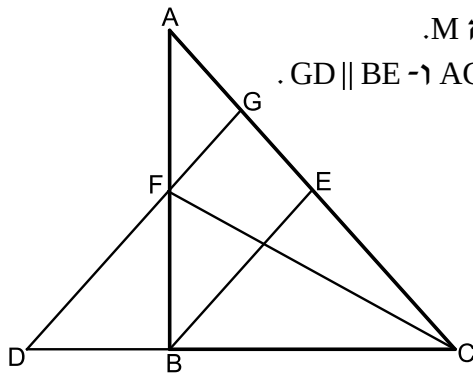


- (6) הצלע  $AB$  במשולש  $ABC$  היא מיתר במעגל שמרכזו  $O$ . הצלע  $AC$  עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע  $AB$ .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע  $ABCD$  חסום במעגל. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ, ו- $AD = 4$  ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון  $AC$  ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

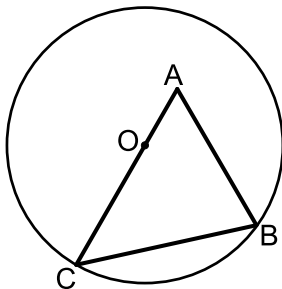
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים:  $AC = DC$  ו- $GD \parallel BE$ .

א. הוכח:  $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$ .

ב. נתון כי:  $ME = 4$  ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי:  $\angle ACD = 48.189^\circ$ . הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

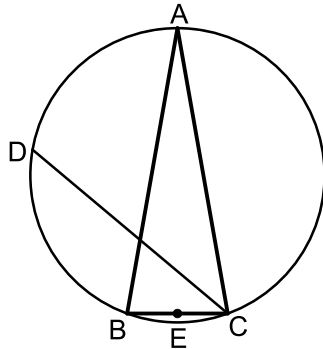
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא  $60^\circ$ .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

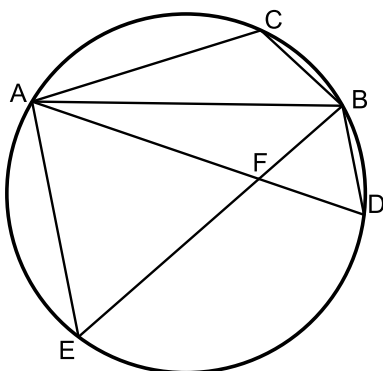
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$ . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא  $80^\circ$ .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב.  $r$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את  $r$ .

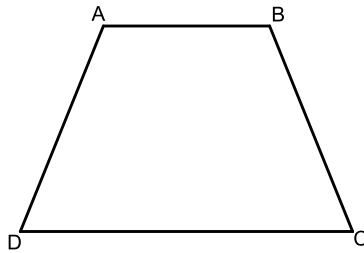
12)  $AB$ ,  $AC$  ו- $AD$  הם מיתרים במעגל המקיימים:  $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ . מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי:  $AC = AF = EF$ .



א. הוכח:  $\triangle ABF \cong \triangle ABC$ .

ב. נתון גם:  $3 \cdot \angle CAB = \angle DAE$ . הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).

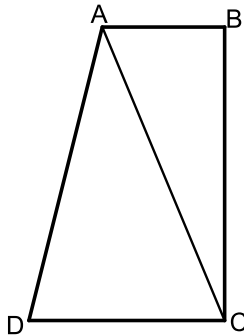


מידות הטרפז הן:

$AB = 6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,  $CD = 12$  ס"מ.

- מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).

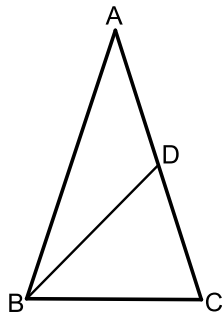


מסמנים את הבסיס:  $AB = t$  וידוע כי:  $AD = 3t$ ,  $DC = 1.6t$ .  
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

- הבע באמצעות  $t$  את אורך האלכסון AC.
- ידוע גם כי:  $\angle D = 60^\circ$ .
- i. חשב את אורך הקטע AC.
- ii. חשב את שטח הטרפז.

**15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) בעל זווית

ראש  $36^\circ$  החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



- מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
- חשב את אורך התיכון BD.
- מסמנים:

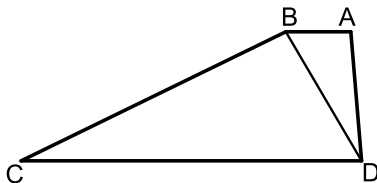
$r_1$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$$

הוכח את היחס הבא:

**16** המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).



מעבירים את האלכסון BD המקיים:  $\angle BCD = \angle ADB$ .

נתון כי:  $AB = 5$  ס"מ,  $AD = 10$  ס"מ,  $CD = 20$  ס"מ.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

- הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
- חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי:  $\angle D = 90^\circ$ .

נסמן את הצלעות באופן הבא:  $AB = 6x$ ,  $BC = 5x$ ,  $CD = 8x$ ,  $AD = 3x$ .

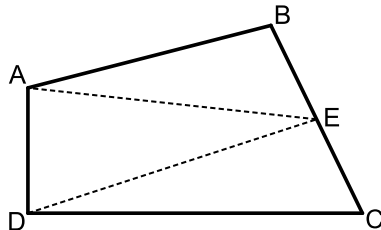
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא:  $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$ .



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$ .

המשולש COD הוא ישר זווית  $\angle CDO = 90^\circ$ .

נתונים האורכים:  $BO = 9$ ,  $DO = 10$ .

מסמנים:  $BC = 1.4m$ ,  $CD = 1.5m$ .

א. הבע באמצעות  $m$  את  $\sin \alpha$ .

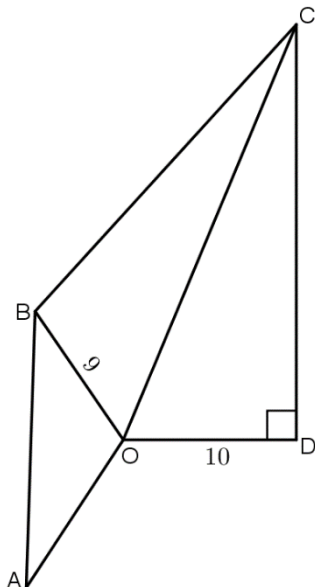
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי:  $AB = m$ .

מצא את  $m$  אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא  $8\frac{2}{3}$ .

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת  $60^\circ$ .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית:  $\angle ADB = 60^\circ$ .

ידוע כי  $AB = \sqrt{28}$  וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

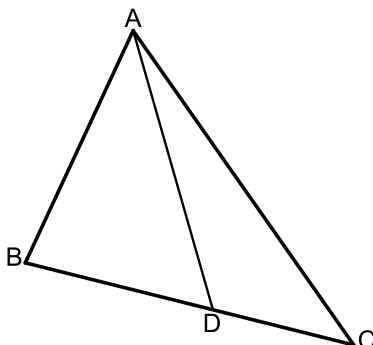
ב. היקף המשולש ABC הוא:  $P = 5\sqrt{7} + 7$ .

i. סמן:  $DC = t$  והבע באמצעות  $t$

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את  $t$ .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E, C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

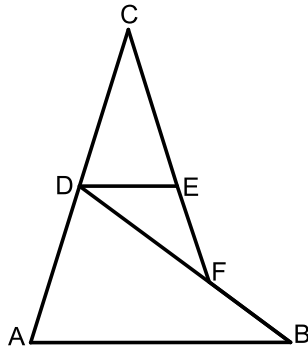
שווי שוקיים ( $AB = BD$ ,  $DC = CE$ ,  $EF = DE$ ).

נתון כי:  $AD = 8$ .

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

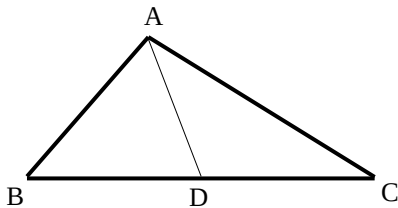
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $AC = 8$  ס"מ,

$AD = 5$  ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



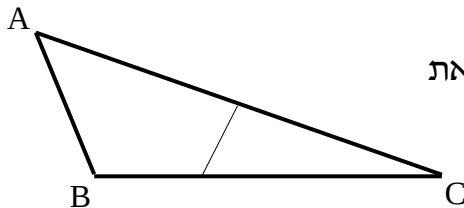
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים  $DC = 2BD$ .

נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ .

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

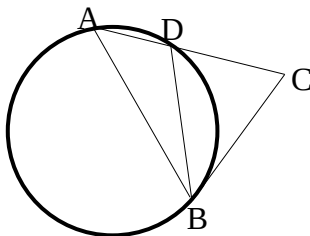


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle ADB = \beta$ .

הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

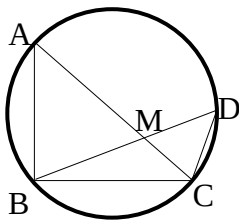


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית  $\angle B$  היא זווית ישרה.

נתון:  $DC = q$ ,  $DM = p$ ,  $AB = k$ .

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



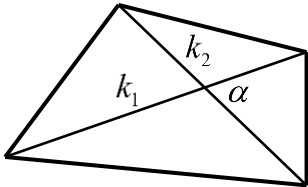
## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\alpha = 34.231^\circ$  ב.  $y = 14.33$  ס"מ ג.  $\alpha = 155.526^\circ$  או  $\alpha = 24.474^\circ$
- (2) א.  $x = 5.646$  ס"מ ב.  $\alpha = 20.742^\circ$  ג.  $\alpha = 105.962^\circ$  ד.  $\alpha = 90^\circ$
- (3)  $AD = 13.064$  ס"מ
- (4)  $GM = 3.360$  ס"מ
- (5)  $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$
- (6)  $R = 9.242$  ס"מ,  $AB = 14.56$  ס"מ
- (7)  $P = 22$  ס"מ
- (8)  $R = 5.395$  ס"מ,  $AC = 10.790$  ס"מ
- (9)  $DG = 18$
- (10)  $R = 10.5$  ס"מ ב.  $24.32^\circ$
- (11) א.  $DE = 1.48R, CD = R\sqrt{3}$  ב.  $r = 1.15R$
- (12) א.  $68^\circ$  ב.  $11.66$  ס"מ ג.  $R = 6.29$  ס"מ
- (13) א.  $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$  ב.  $i. 13$  ס"מ  $ii. 78$  סמ"ר
- (14) א.  $9.4$  ס"מ ב.  $i. 10$  ס"מ
- (15) א.  $\angle C = 28.9^\circ$  ג.  $R = 13.77$
- (16) א.  $64.04^\circ$  ב.  $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$
- (17) א.  $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$  ב.  $m = 16$  ג.  $56.94^\circ$
- (18) א.  $4$  ב.  $i. 1.5\sqrt{28} + 3 - t$   $ii. 3$  ג.  $S = 18.18$
- (19) א.  $4.94$  ס"מ ב.  $17.19$  ס"מ
- (20)  $BC = 10$  ס"מ
- (21)  $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$
- (22)  $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$  (24)
- (23)  $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$

## שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

### סיכום כללי:

#### שטחים של משולשים ומרובעים:

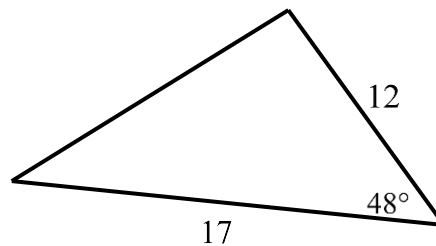


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

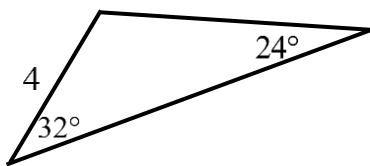
### שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של  $15^\circ$  עם הבסיסים.

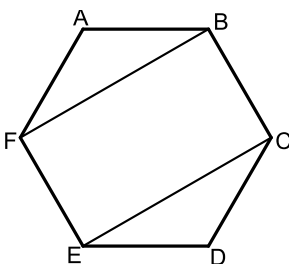
27) אורכו של מלבן הוא  $m$  ורוחבו  $n$ . הזווית שבין אלכסונו המלבן היא  $\theta$ .

$$\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{הוכח כי מתקיים:}$$

28) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $BD$  חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש  $BCD$ .



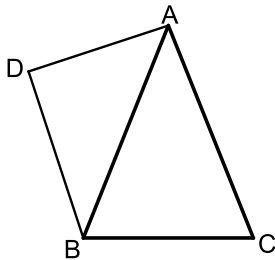
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא  $S$ .

א. הבע באמצעות  $S$  את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן  $BFEC$ .

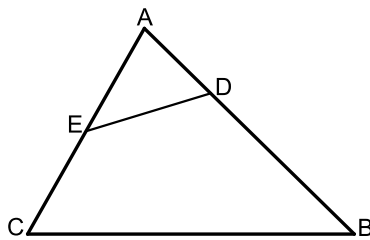
הבע באמצעות  $S$  את שטח המלבן.

**30** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש  $\alpha$ ,  $(AB = AC)$ . אורך הבסיס BC הוא  $k$ .



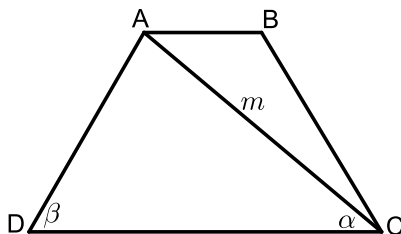
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו  $\angle D = 90^\circ$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך שוק המשולש ABC.
  - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ .
  - וכי:  $\angle ABD = 40^\circ$ . מצא את זוויות המשולש ABC.
  - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי  $k = 6$ .

**31** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



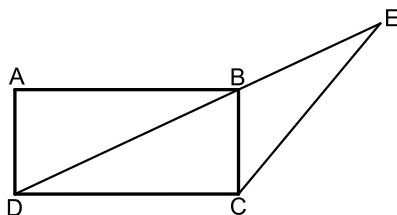
- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת:  $AD = 3$  ס"מ.
- ידוע כי:  $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ .
- מצא את אורך הקטע DE.
  - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
  - חשב את שטח המרובע BCED.

**32** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

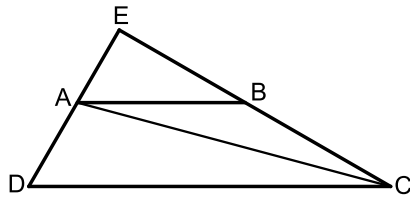


- מסמנים:  $AC = m$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ .
- הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את אורך הבסיס הגדול DC.
  - נתון כי האלכסון AC מקיים:  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$ .
  - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את הבסיס AB.
  - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  ו- $m = 8$ .

**33** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



- מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
- ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא  $115^\circ$ .
- מצא את אורך הקטע CE.
  - מצא את אורך האלכסון BD.
  - חשב את שטח המשולש DCE.



34) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).

ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם

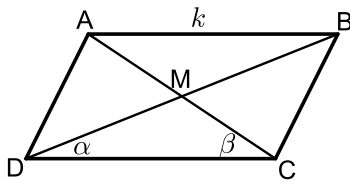
בנקודה E. ידוע כי:  $DE \perp CE$ .

מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C. מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$  ואת:  $\angle ACD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k = 12$  ס"מ.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים

את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים:  $AB = k$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ .

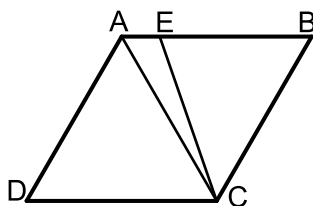
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:  $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי:  $\frac{AC}{BD} = 2$ . הראה כי שטח המקבילית הוא:  $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו  $\angle D = 60^\circ$ .

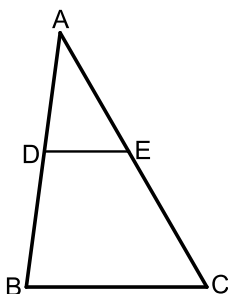
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס:  $\frac{BE}{AE} = 4$ .

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

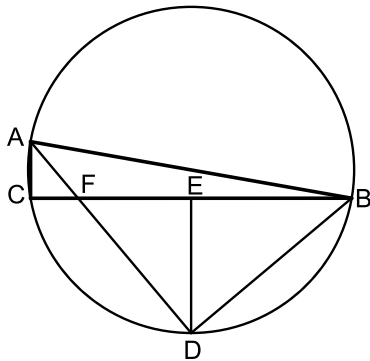
נתון כי:  $CE = 13$ ,  $BC = 15$ ,  $BD = \sqrt{129}$ .

ידוע כי זווית AED היא  $60^\circ$ .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.



**38** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

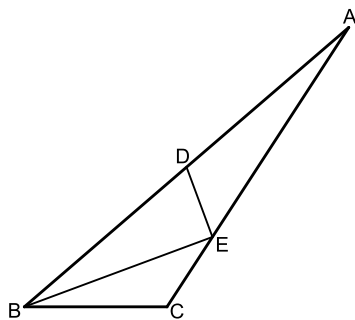
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים:  $DE = k$  ונתון כי:  $\angle ABC = 10^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות  $k$  את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את  $k$  אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



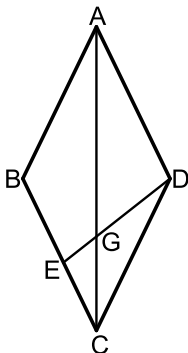
**39** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת:  $DE = CE$ .

ידוע כי:  $BC = 6$ ,  $BE = 8$ ,  $BD = 9$ .

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



**40** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

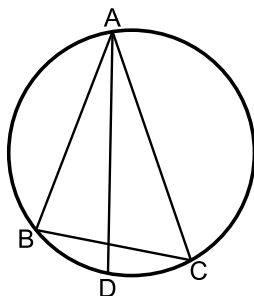
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא  $m$ .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .

i. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש EGC.



**41** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

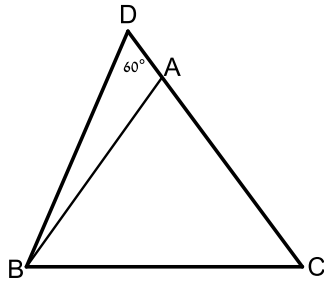
ידוע כי:  $\angle BAC = 40^\circ$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ .

מסמנים:  $AD = k$ .

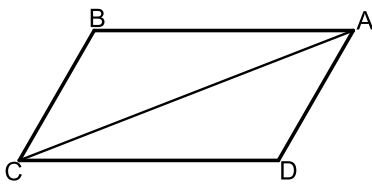
א. הבע באמצעות  $k$  את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

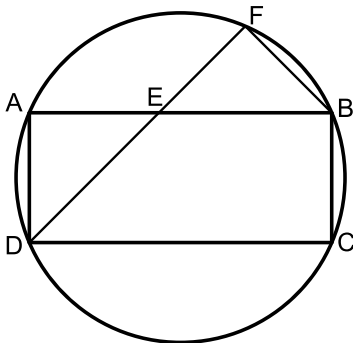
מצא את  $k$  (עגל למספר שלם).



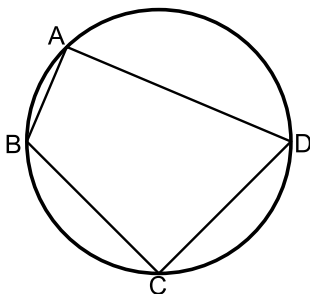
- 42** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי:  $\angle D = 60^\circ$ . אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ. א. מצא את אורך הקטע AD. ב. חשב את שטח המשולש ABC.



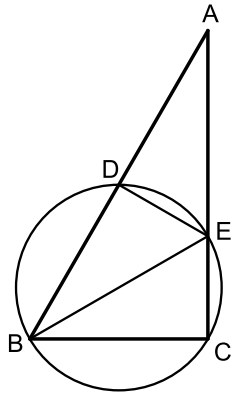
- 43** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא  $\sqrt{79}$  ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי:  $\angle B = 120^\circ$ . א. מצא את אורכי צלעות המקבילית. ב. חשב את שטח המקבילית. ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- 44** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהנקודה D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ . הצלע AD של המלבן תסומן ב-a. א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים. ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ . i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל. ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  (אין צורך לסרטט אותן).



- 45** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי:  $AB = b$ ,  $BC = a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3b$ . א. הבע באמצעות a ו-b את  $\cos \angle BCD$ . ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים:  $a = b\sqrt{5}$ . ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

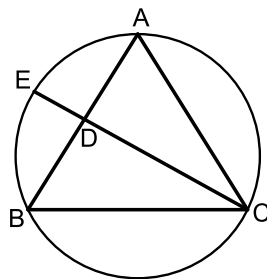


- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית  $\angle C = 90^\circ$  ובו:  $\angle B = 2\alpha$ .  
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C  
 אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.  
 המיתר BE חוצה את זווית B.  
 א. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABE.  
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים  
 וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$ , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

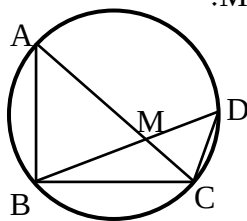
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$



- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) החסום במעגל.  
 מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.  
 ידוע כי E היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$  והיחס בין  
 הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.  
 מסמנים:  $\angle ACD = \alpha$ .

- א. מצא את זוויות המשולש ABC  
 (עגל למספרים שלמים).  
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי  
 רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.  
 זווית B היא זווית ישרה.  
 נתון:  $\angle MCB = \beta$ ,  $\angle MBC = \alpha$ .

- א. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש BDC.

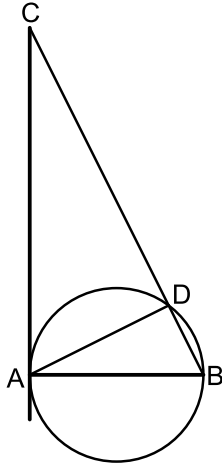
ב. נתון:  $\beta = 2\alpha$ ,  $S_{BDC} = \frac{1}{2} R^2$ .

- חשב את  $\alpha$ .

(50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא  $b$  והזווית שליד הבסיס הגדול היא  $\gamma$  נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות  $\gamma$  ו- $b$  את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את  $\gamma$  אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי  $\sqrt{3}$  מהבסיס הקטן.



(51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו  $R$  ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

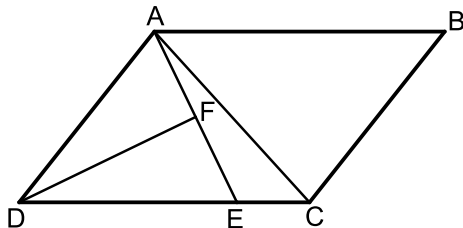
מסמנים:  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



(52) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים:  $3CE = DE$ .

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי:  $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$ .

מסמנים:  $CE = k$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא  $4.5k$ . מצא את  $\alpha$ .

### תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(27) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 67.78^\circ, 67.78^\circ, 44.4^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad 3 \text{ ס"מ} \quad BC = 7 \text{ ס"מ} \quad AB = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ג.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

$$R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a \quad \text{ב.י. (43)}$$

$$\text{ב.ii. } 45^\circ, 135^\circ$$

$$\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2} \quad \text{א. (44)}$$

$$\text{ג. } 14.4 \text{ סמ"ר} = S$$

$$S = R^2 \tan 2\alpha \quad \text{א. (45)}$$

$$\text{ב. } 36\sqrt{3} \text{ סמ"ר} = S$$

$$58^\circ, 58^\circ, 64^\circ \quad \text{א. (48)}$$

$$\text{ב. } BE = 7.75$$

$$S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta) \quad \text{א. (49)}$$

$$\text{ב. } \alpha = 22.5^\circ$$

$$\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} \quad \text{א. (50)}$$

$$\text{ב. } \gamma = 75^\circ$$

$$S = R^2 \sin 2\alpha \quad \text{א. (51)}$$

$$\text{ב. } S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{ג. } \alpha = 26.56^\circ$$

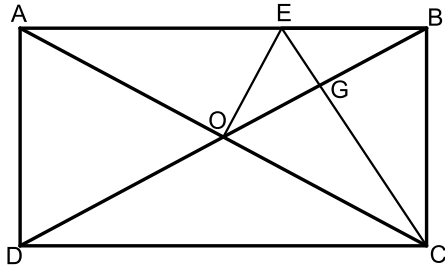
$$AE = 6k \sin \alpha \quad \text{א. (52)}$$

$$\text{ב. } P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$$

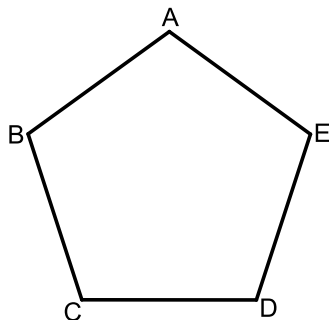
$$\text{ג. } \alpha = 14.47^\circ$$

## שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

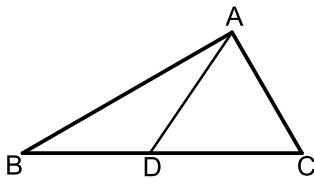
### שאלות:



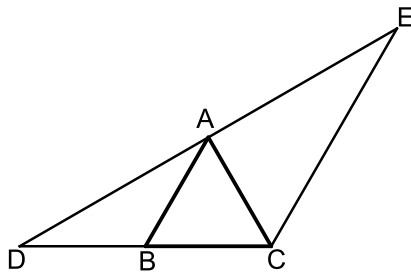
- 53** המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש-  $2BE = AE$ .  
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.  
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.  
 ב. הוכח כי מתקיים:  $4GE = AE$ .  
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.  
 חשב את שטח המלבן ABCD.



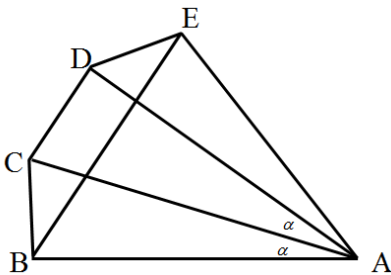
- 54** באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן  $108^\circ$ ) בעל אורך צלע  $\alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את אלכסון המחומש AD.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המחומש.  
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המחומש.



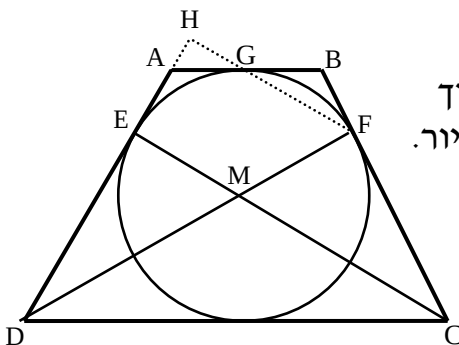
- 55** במשולש ABC הזווית C היא  $60^\circ$ .  
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.  
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא:  $R_1 = \sqrt{3}$  ס"מ.  
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא:  $R_2 = 3$  ס"מ.  
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
 ב. היקף המשולש ABC הוא:  $12 + 4\sqrt{3}$  ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש.



- 56** המשולש ABC הוא שווה צלעות.  
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים  
 שני משולשים ABD ו-ACE.  
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.  
 א. הוכח:  $AB \parallel CE$ .  
 ב. הוכח:  $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .  
 ג. נתון:  $DC = 8$  ס"מ.  
 וכי:  $AC \perp DE$ .  
 i. חשב את שטח המשולש DCE.  
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.

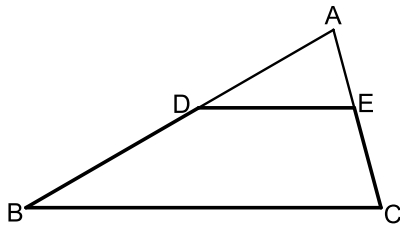


- 57** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו- AE.  
 כך שמתקיים:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  ו-  $AB = AE$ .  
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.  
 מתקיים:  $BE \parallel CD$ .  
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.  
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.  
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ( $AC = AD$ ).  
 הוכח כי:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .  
 ג. ידוע כי:  $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$  ו-  $\angle ADE = 3\alpha - 10$ .  
 הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.  
 ד. נסמן:  $AB = m$ .  
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.  
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.  
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

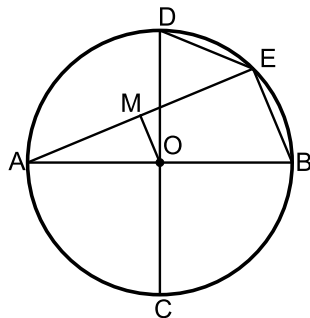


- 58** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך  
 הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו- H כמתואר באיור.  
 הקטעים DF ו- CE חוצים את זוויות הטרפז  
 ונחתכים בנקודה M.  
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.  
 ב. חשב את זוויות הטרפז.  
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

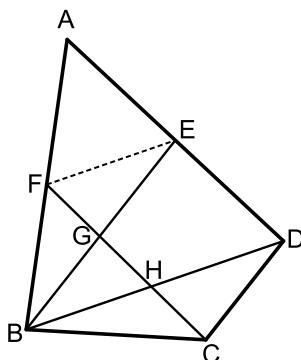
$$\text{חשב את היחס } \frac{EM}{FH}.$$



- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז  $BC \parallel DE$ . המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ ). נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .  
 א. סמן את אורך הבסיס DE ב- $x$  ואת שטח הטרפז BDEC ב- $S$ .  
 הבע את  $S$  באמצעות  $x$ .  
 ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.  
 חשב את היחס:  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ .



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת:  $BE + DE = 15$  ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.  
 א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.  
 ב. מצא את אורך המיתר BE.  
 ג. מצא את רדיוס המעגל.  
 ד. חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$ . נתון כי הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle BFE$  משלימות ל- $180^\circ$ .  
 א. הוכח:  $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$ .  
 ב. נתון כי  $BE = 7.5$  וכי:  $GE - HD = 17\frac{1}{15}$ . חשב את אורך הקטע FE.  
 ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא:  $R = 4.001$  ס"מ. מצא את זווית  $\angle EBD$ .

## תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א.  $1.618\alpha$

ב.  $0.85\alpha$  ג.  $1.72\alpha^2$  ד.  $S = 85.57$

(55) ב.  $S = 8\sqrt{3}$

(56) ג. i.  $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$  ii.  $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד. i.  $BC = 0.4663m$ ,  $DE = 0.4663m$ ,  $CD = 0.4776m$ ,  $BE = 1.2175m$

(62) ד. ii.  $0.7232m^2$  iii.  $m = 8$  ס"מ

(58) ב.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  ג.  $\frac{2}{3}$

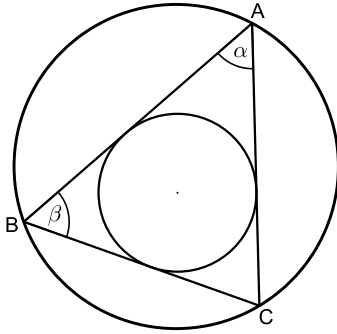
(59) א.  $S = 81 - 0.25x^2$  ב.  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(60) ב.  $BE = 10$  ג.  $R = 13$  ד.  $\angle B = 67.38^\circ$

(61) ב.  $FE = 4$  ג.  $16.73^\circ$

## שאלות מסכמות:

### שאלות:



(1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו  $R$ .

נתון כי  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .

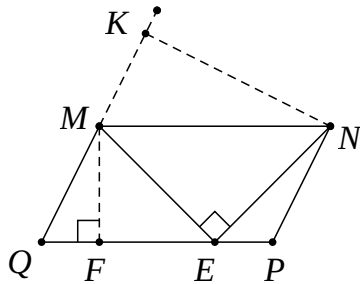
א. הבע את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ .

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $R$ .

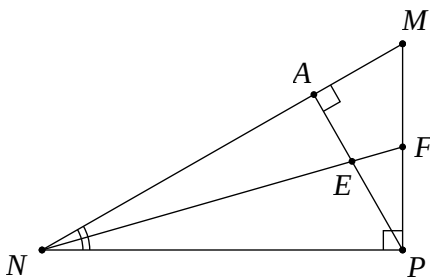


(2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על

הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור).

נתון:  $12$  ס"מ  $MQ$ ,  $\angle MNE = 40^\circ$ ,  $\angle MQP = 70^\circ$ .

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



(3) במשולש ישר-זווית MNP, ( $\angle P = 90^\circ$ )

PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה

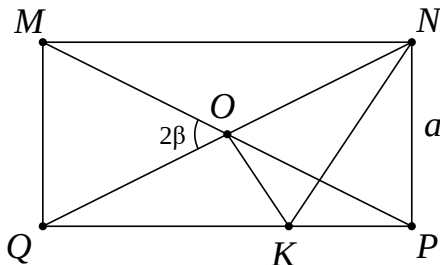
את הזווית  $\angle MNP$ .

PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון:  $24$  ס"מ  $NP$ ,  $\angle MNP = 40^\circ$ .

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



(4) אלכסוני המלבן MNQP נחתכים בנקודה O.

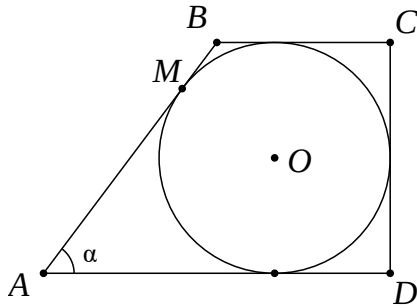
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך

את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון:  $\angle MOQ = 2\beta$ ,  $NP = a$ .

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .



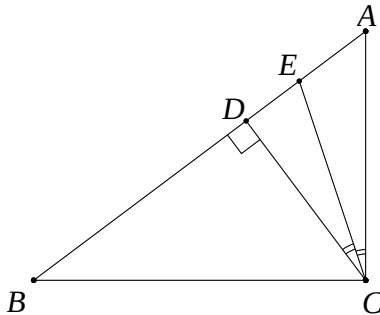
(5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון:  $AM = 12$  ס"מ,  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .



(6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 8$  ס"מ

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית  $\angle ACD$ .

הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

(7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

(8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

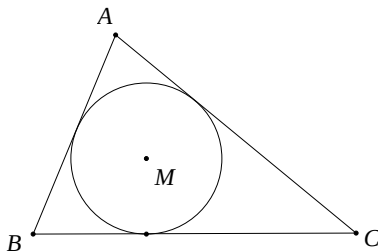
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).

א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



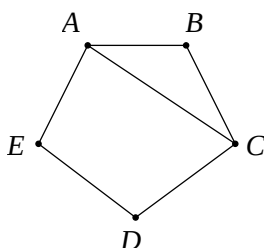
(9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון:  $\angle B = 62^\circ$ ,  $\angle C = 46^\circ$ .

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

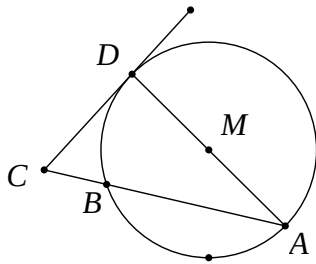
ב. נתון:  $BC = 16$  ס"מ. מצא את r.



(10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

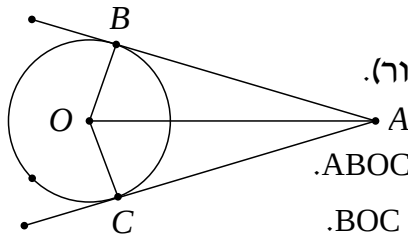
חשב את שטח המחומש.



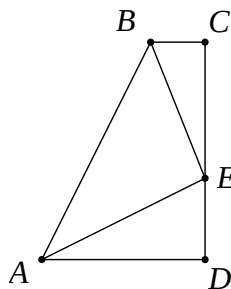
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.  
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



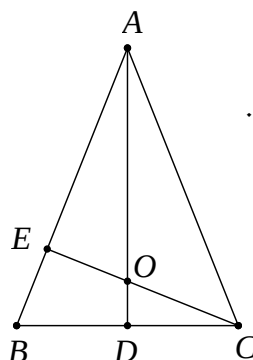
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.  
א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.  
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.  
ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



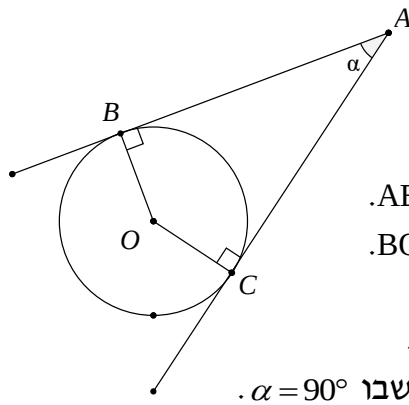
13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ).  
נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$ , ו- $\angle CBE = \beta$ .  
הבע באמצעות  $k$  ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.  
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.  
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.  
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).  
א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CO ו-CE.  
ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .  
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ , והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



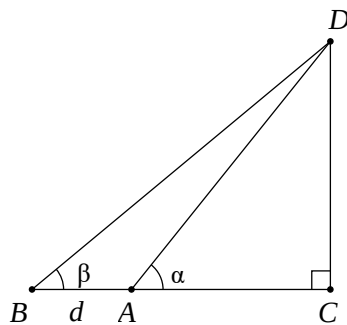
**16** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם  $m$  (כלומר:  $AB = AC = m$ ). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$  (ראה ציור).

א. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



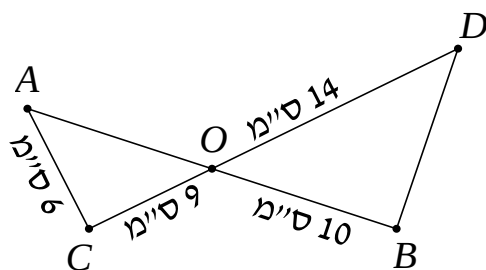
**17** במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ .

מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ .

נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור).

סמן:  $AC = x$ .

הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



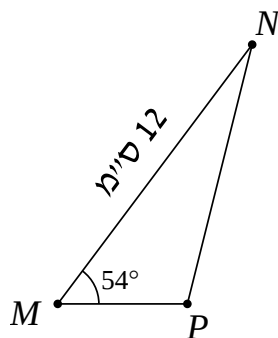
**18** הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.

נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,

$AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,

$OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ.

חשב את  $\angle ODB$ .



**19** במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ .

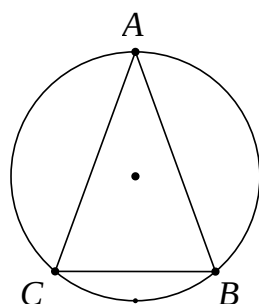
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.



**20** המשולש השווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ )

חסום במעגל (ראה ציור).

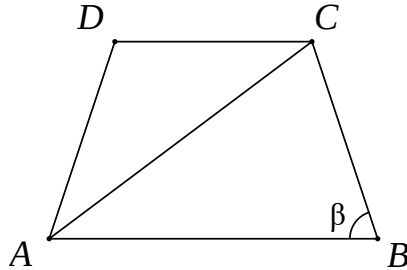
נתון:  $\angle ABC = \beta$ .

כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

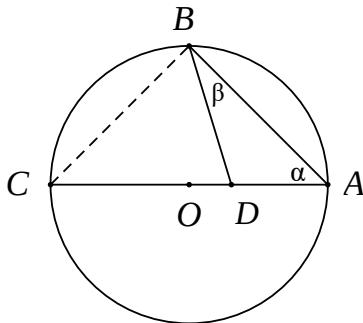
א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

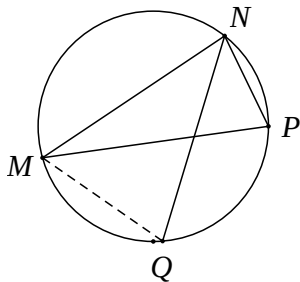
- (21) במשולש ABC הזווית  $\angle C$  היא בת  $60^\circ$ , אורך הצלע AB הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



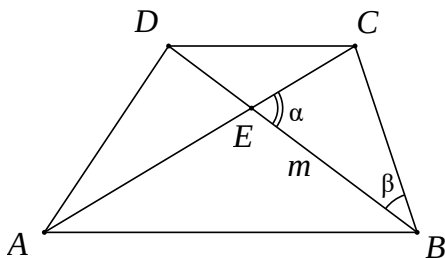
- (22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ), (ראה ציור). הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



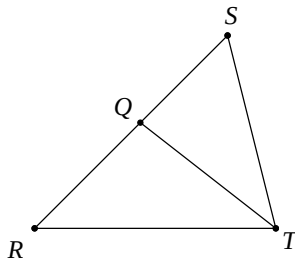
- (23) הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



- (24) משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית  $\angle MNP$ . נתון:  $\angle MPN = 70^\circ$ ,  $\angle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



- (25) נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  $\angle CBD = \beta$ ,  $\angle CEB = \alpha$  (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  $\angle RTS$

(ראה ציור),  $RQ = \sqrt{2}$ ,  $QS = m$ ,

$\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .

א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .

ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

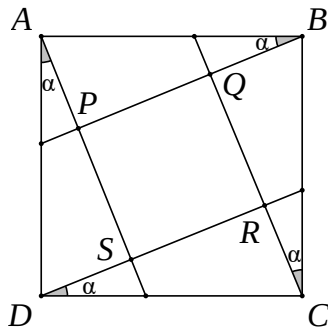
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$ .

א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

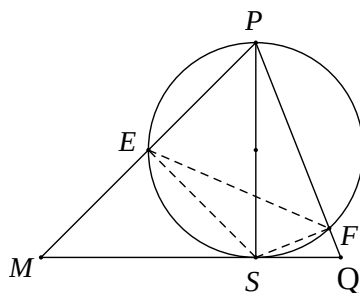
קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

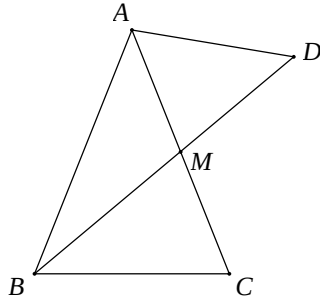
ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**31** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**32** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

**33** משולש שווה שוקיים BCE ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא  $\alpha$ .

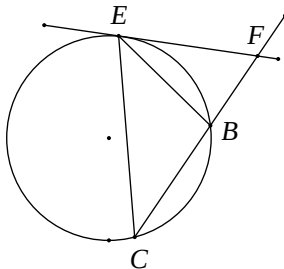
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

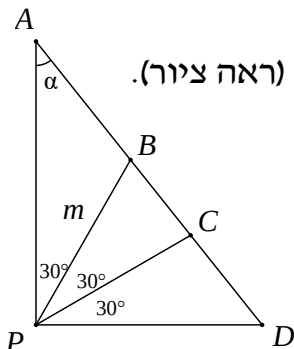


**34** בטרפז BCDE ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא  $80^\circ$ .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .

חשב את היקף הטרפז.



**35** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$

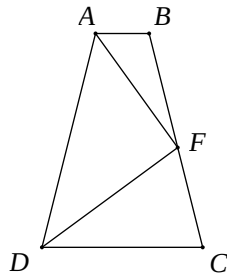
לשלוש זוויות שוות, כלומר  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$  (ראה ציור).

נתון כי:  $PB = m$ ,  $\angle PAD = \alpha$ .

א. היעזר במשפט הסינוסים,

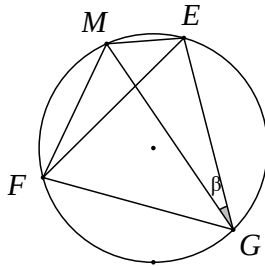
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- $\alpha$ .

ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$ .

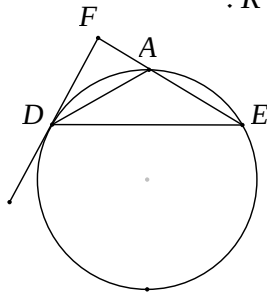


36) בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),

F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את הזווית  $\angle CDA$  ו-AF חוצה את הזווית  $\angle DAB$  (ראה ציור). נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $AB = b$ . הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס DC.



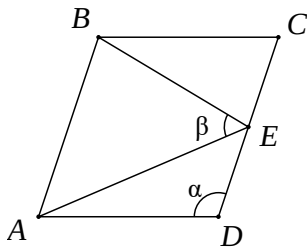
37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל. נתון:  $\angle MGE = \beta$  (ראה ציור). א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$ . ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על  $\angle MGE$ ?



38) משולש שווה שוקיים ADE ( $AD = AE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון:  $\angle ADE = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

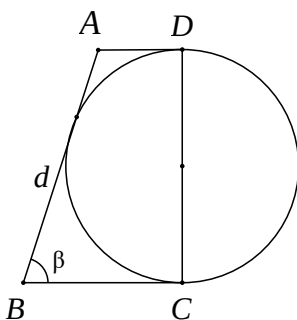
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.  
 ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון:  $\angle AEB = \beta$ ,  $\angle ADC = \alpha$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$ .



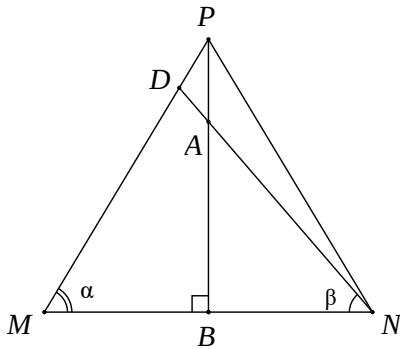
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי:  $AB = d$ ,  $\angle B = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $d$  את סכום בסיסיו של הטרפז.  
 ב. הבע באמצעות  $d$  ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



**(41)** במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),

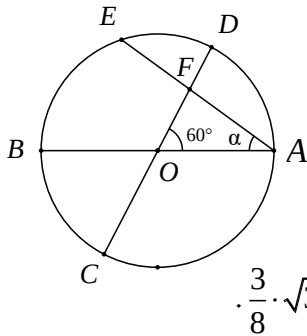
$A$  היא נקודה על הגובה  $PB$ , כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .

הישר  $NA$  חותך את השוק  $PM$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle DNB = \beta$ ,  $\angle DNM = \alpha$  ו-  $BN = \alpha$ .

א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .

ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



**(42)** במעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$  מעבירים שני

קטרים  $AB$  ו-  $CD$  הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .

מיתר  $AE$ , היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר  $AB$ ,

חותך את הקוטר  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש  $ACF$  באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .

ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש  $ACF$  הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

## תשובות סופיות:

$$r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

ב.  $\frac{1}{2}R$

$$KN = 21.52 \text{ ס"מ}, MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$EF = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

ב.  $\frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$

$$12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

ב.  $24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2$

$$AE = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

ב. 27 יח"ש.

$$r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

ב.  $90.45 \text{ סמ"ר} \approx S$

$$CE = 2a \cdot \sin \beta, \quad CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ב.  $\frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$(16) \quad \text{א. } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{ב. } S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ג. יחס השטחים: } \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$(17) \quad AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

$$(18) \quad \angle ODB \approx 44.7^\circ$$

$$(19) \quad \text{א. } NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{ב. } S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר}$$

$$(20) \quad \text{א. } S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$(21) \quad S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר}$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta : \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$(23) \quad \text{א. } S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$(24) \quad MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ}$$

$$(25) \quad DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$(26) \quad \text{א. } \sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$(27) \quad \alpha \approx 20.7$$

$$(28) \quad \text{א. } \sqrt{5} < k < 3 \text{ או } 1 < k < \sqrt{3} \quad \text{ב. } \frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t$$

$$(29) \quad \alpha = 15^\circ$$

$$(30) \quad \text{א. } S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{ב. i. } \angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. ii. } S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

$$(31) \quad \text{א. } m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad \text{ב. } m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$$

$$(32) \quad \text{א. } \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{ב. } S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.}$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad \text{(34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha} \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad \text{(36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$.S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 11 - הפונקציות האלמנטריות

### תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. תרגול הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
5. תרגול הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
6. הפונקציה הטריגונומטרית ..... (ללא ספר)
7. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית ..... (ללא ספר)
8. פונקציות בסיסיות וההזזות (שיקופים) שלהן ..... (ללא ספר)

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

## פרק 12 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים

|                                             |           |
|---------------------------------------------|-----------|
| 1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות          | (ללא ספר) |
| 2. הפונקציה הלינארית                        | (ללא ספר) |
| 3. הפונקציה הריבועית                        | (ללא ספר) |
| 4. הפונקציה המעריכית                        | (ללא ספר) |
| 5. הפונקציה הלוגריתמית                      | (ללא ספר) |
| 6. פונקציות מפורסמות נוספות                 | (ללא ספר) |
| 7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה | (ללא ספר) |
| 8. תחום הגדרה של פונקציה                    | 201       |
| 9. הרכבת פונקציות                           | 203       |
| 10. הפונקציה ההפוכה                         | 206       |
| 11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית         | 210       |
| 12. פונקציה מפוצלת                          | 212       |
| 13. תרגילים משולבים                         | 213       |
| 14. מבוא לתורת הקבוצות                      | 217       |

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$(3) \quad y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(6) \quad y = \sqrt{x - 4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$$

$$(10) \quad y = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(11) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x}$$

$$(12) \quad y = e^{x^2 + x + 1}$$

$$y = \log_x (x + 4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

- (1) כל  $x$ .
- (2)  $x \neq \pm 2$
- (3) כל  $x$ .
- (4)  $x \neq 0, 1, -1$
- (5)  $x \neq 2, -1$
- (6)  $x \geq 4$
- (7)  $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל  $x$ .
- (9)  $-1 < x < 1$
- (10)  $x < -2, x > 1$
- (11)  $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל  $x$ .
- (13)  $x > 0, x \neq 1$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

1) נתונות הפונקציות  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

2) נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את  $f(f(x))$  עבור  $x=3$ .

3) נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$ .

4) נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

5) נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x=2$ .

6) נתון  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

### 7) נתונות הפונקציות

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$        $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

## 8) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

מצאו את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$ .

## תשובות סופיות

(1) א. -3      ב. 4      ג.  $x^2 - 4$       ד.  $\frac{4}{x-4}$       ה.  $x-8$       ו.  $x$

(2) 3

(3) 69/13

(4) -10

(5) 4

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} ; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} ; f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} ; f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 ; f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג.  $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.
- ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.
- ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.
- ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $f$  חח"ע.
- ב.  $f$  על.
- ג.  $g$  חח"ע.
- ד.  $g$  על.

**16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה:  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = \ln x + x^2$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } z(x) = -f(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

## תשובות סופיות

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(8) טענה ב'.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

## פונקציה מפוצלת

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

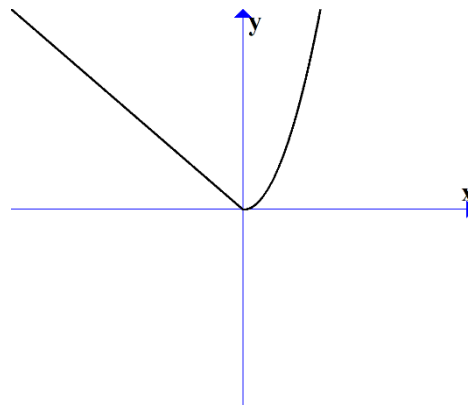
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1)=1$ ,  $f(4)=16$ ,  $f(-4)=4$ ,  $f(0)=0$ ,  $f(7)=\text{undefind}$   
 ב. ג. כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .  
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$  ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$  ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  ג. שאלת הוכחה.
- ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

## מבוא לתורת הקבוצות

### סיכום כללי

#### הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית  $A \Rightarrow B$  פירושו: אם  $A$  מתקיים, אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $A \Leftrightarrow B$  (אם ורק אם). פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או'  $\vee$ .
- הסימן 'וגם'  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב-  $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

**עוצמה של קבוצה**

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

**תת-קבוצה**

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיים:

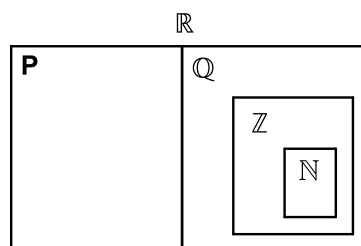
$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

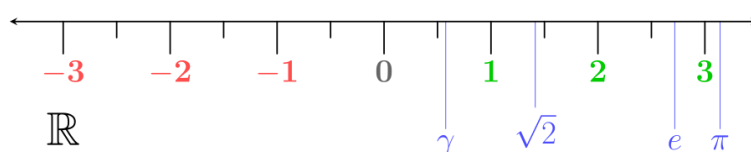
עבור שוויון קבוצות נדרוש  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  או  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ .

**קבוצות מספרים מיוחדות**

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ .
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ .
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $\mathbb{P}$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $\mathbb{P}$ ).

**ציר המספרים**

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים

| סימון קטעים    | סימון קבוצות                    | תיאור מילולי                                   |
|----------------|---------------------------------|------------------------------------------------|
| $(a, b)$       | $\{x \mid a < x < b\}$          | הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה   |
| $[a, b]$       | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$    | הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה      |
| $[a, b)$       | $\{x \mid a \leq x < b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$ |
| $(a, b]$       | $\{x \mid a < x \leq b\}$       | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$ |
| $(a, \infty)$  | $\{x \mid a < x < \infty\}$     | הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$         |
| $[a, \infty)$  | $\{x \mid a \leq x < \infty\}$  | הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$        |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid -\infty < x < b\}$    | הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$        |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid -\infty < x \leq b\}$ | הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$       |

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של  $A$ , נקראת קבוצת החזקה של  $A$ , ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cap B$ .

| תכונות החיתוך                           | תכונות האיחוד                           |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| $A \cap B = B \cap A$                   | $A \cup B = B \cup A$                   |
| $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cap A = A$                          | $A \cup A = A$                          |
| $A \cap \emptyset = \emptyset$          | $A \cup \emptyset = A$                  |
|                                         | $A \subseteq A \cup B$                  |

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , המסומן  $A - B$ , הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא **המשלים** של  $A$ , כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

### דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

## שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:  $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$ .

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$

ב. חשבו את  $A - (B - C)$

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

**14** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

**15** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- א.  $A \cap B$       ב.  $A \cup B$   
 ג.  $A^c$       ד.  $A \cap B^c$   
 ה.  $A^c \cap B$       ו.  $A \cup B^c$   
 ז.  $A^c \cup B$       ח.  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$   
 ט.  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

**17** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת וון.  
 ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
 הוכיחו כי  $X = Y$ .  
 ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
 הוכיחו כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .  
 טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .  
 טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$ .  
 איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** נתונה הקבוצה  $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$ .

רשמו את  $P(A)$ .

**20** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

- א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .  
 ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$ .

**21** הוכיחו כי:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 13 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| 1. הסבר כללי               | (ללא ספר) |
| 2. הצבה                    | 227       |
| 3. צמצום                   | 228       |
| 4. הכפלה בצמוד             | 229       |
| 5. גבולות טריגונומטריים    | 230       |
| 6. פונקציה שואפת לאינסוף   | 233       |
| 7. איקס שואף לאינסוף       | 234       |
| 8. הגבול של אוילר          | 236       |
| 9. כלל הסנדויץ             | 237       |
| 10. גבול של פונקציה מפוצלת | 239       |
| 11. גבול לפי הגדרה         | 242       |

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

|                    |                    |        |                      |                   |
|--------------------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| -3 (5)             | $n-1$ (4)          | 6 (3)  | $\frac{10}{8.5}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\frac{1}{5}$ (10) | $\frac{8}{17}$ (9) | 27 (8) | 3 (7)                | 32 (6)            |

## הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

|                          |                     |                   |                    |                     |
|--------------------------|---------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| $\frac{1}{2}$ (5         | $\frac{1}{2}$ (4    | $\frac{1}{2}$ (3  | $\frac{3}{4}$ (2   | $\frac{3}{4}$ (1    |
|                          | $\frac{1}{4}$ (9    | 4 (8              | $\frac{1}{8}$ (7   | $\frac{1}{2}$ (6    |
| $\frac{1}{\cos^2 a}$ (13 | $-\sin a$ (12       | $\cos a$ (11      | $-\frac{1}{2}$ (10 |                     |
| 1 (17                    | $\frac{2}{\pi}$ (16 | $\frac{1}{2}$ (15 | $\frac{4}{10}$ (14 | $-\frac{1}{12}$ (18 |

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

## תשובות סופיות

|                |               |              |                |
|----------------|---------------|--------------|----------------|
| $\phi$ (4)     | $-\infty$ (3) | $\phi$ (2)   | $\phi$ (1)     |
| $\phi$ (8)     | $\infty$ (7)  | $\infty$ (6) | $-\infty$ (5)  |
| $-\infty$ (12) | $\phi$ (11)   | 1 (10)       | 0 (9)          |
|                |               |              | $-\infty$ (13) |

## X שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

## תשובות סופיות

|                                                                                                                      |                                     |                       |                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|-------------------|
| $-\infty$ (4                                                                                                         | 4 (3                                | $-\frac{\pi}{2}$ (2   | 0 (1              |
| -1 (8                                                                                                                | 1 (7                                | -5 (6                 | 0 (5              |
| $\frac{1}{4}$ (12                                                                                                    | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11 | 1.5 (10               | -3 (9             |
| 2 (16                                                                                                                | $\frac{1}{9}$ (15                   | 4 (14                 | 0 (13             |
|                                                                                                                      | 0 (19                               | $e^{\frac{1}{3}}$ (18 | $\ln 3$ (17       |
| (20) אם $b \neq 0$ : $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $b = 0, a > 0$ : $\infty$ . אם $b = 0, a < 0$ : $-\infty$ . |                                     |                       |                   |
| $-\frac{1}{2}$ (24                                                                                                   | $\frac{1}{2}$ (23                   | $\frac{k}{2}$ (22     | 2.5 (21           |
| $\frac{5}{4}$ (28                                                                                                    | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27            | $\frac{a-b}{2}$ (26   | $\frac{1}{2}$ (25 |
|                                                                                                                      |                                     |                       | $\ln(6e)$ (29     |

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

|           |              |              |               |                       |
|-----------|--------------|--------------|---------------|-----------------------|
| $e^3$ (5) | $e^{-1}$ (4) | $e^2$ (3)    | 1 (2)         | $e^{\frac{1}{2}}$ (1) |
|           | $e$ (9)      | $e^{30}$ (8) | $e^{-12}$ (7) | $e$ (6)               |

## כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ , לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

$$\text{א. הוכח: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$$

$$\text{ב. האם נכונה גם הטענה: } \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1$$

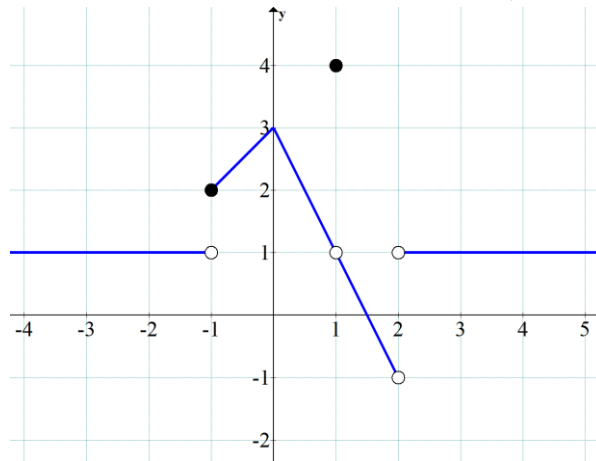
## תשובות סופיות

- (1) 0      (2) 0      (3)  $\frac{3}{4}$       (4) 3      (5) 0
- (6) 0      (7)  $\frac{3}{4}$       (8) 4      (9) 1      (10) 0
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$        $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$
- (12) 0       $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$        $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$      $2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$      $3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$      $2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג.  $1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$      $2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$

2) נגדיר פונקציה  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$(3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) : \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(4) \quad (a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad (a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad (a=0), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(7) \quad (a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(8) \quad (a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(9) \quad \text{א. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$ , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$   
 ב.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$   
 ג.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$
- (2) א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  ג. 6
- (3) א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  ג. -1
- (4) 4
- (5)  $\phi$
- (6)  $\phi$
- (7) 1
- (8) -1
- (9) א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$

## גבול לפי הגדרה

## שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$ ).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז : הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$  :  $(k \neq 0)$ .

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 14 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

|     |                                     |
|-----|-------------------------------------|
| 245 | 1. רציפות של פונקציה                |
| 252 | 2. משפט ערך הביניים                 |
| 256 | 3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות |
| 259 | 4. שיטת החצייה                      |

## רציפות של פונקציה

## שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" <sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**(17)** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

**(18)** תהי  $f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .

האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**(19)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי  $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

א. האם ניתן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.

ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

**(20)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**(21)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**(22)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .

ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .

ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(23)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x = 0$ .

ב. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**(24)** הפונקציה  $f(x)$  רציפה לכל  $x$ .

ידוע כי עבור  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  נתונה על ידי הנוסחה  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$ .

מצאו את הנוסחה של  $f(x)$  לכל  $x$ .

**(25)** הפונקציות  $3g(x) + 2f(x)$  ו- $f(x) - 2g(x)$  רציפות לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה  $|f(x) - g(x)|$  רציפה לכל  $x$ .

**(26)** תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  או  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**(27)** תהי  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם  $f(\sin x)$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ב. אם  $\sin(f(x))$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. אם לכל  $x_0$  מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ , אזי  $f(x) = 4$  לכל  $x$ .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי  $f$  רציפה לכל  $x$ ?

**(28) ענו על הסעיפים הבאים :**

א. הוכיחו כי לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

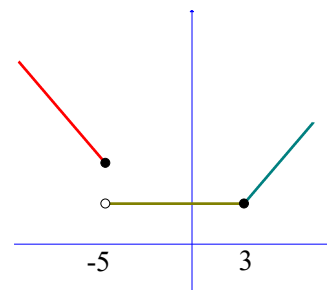
ב. הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$  :

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

## תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8)  $k=1$
- (9)  $k=4$
- (10)  $k=\frac{2}{3}$
- (11)  $k=-1$
- (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ . הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ .  
נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבּוּת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .  
הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$ .  
א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$ .  
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ .  
הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$ .  
הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש-  
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$ .

**16** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$ .  
הוכיחו שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .  
הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה.

הוכיחו כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל.

הוכיחו כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,

ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות :

$$0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש- } f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) ?$$

הוכיחו זאת.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

$$\text{נניח כי : } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

הראו כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

**(26)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכיחו ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכיחו כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכיחו כי  $f(\alpha) = 0$ .

**(27)** תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכיחו שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

**(28)** תהי  $z(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  ויהי  $0 \leq r \leq 1$ .

הוכיחו שיש  $c$  בקטע, עבורו מתקיים  $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$ .

**(29)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה  $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$  יש פתרון.

ב. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) > 0$ ,  $f(4) > 2f(2)$ .

הוכיחו שקיים  $c$  כך ש- $f(2c) = 2f(c)$ .

ג. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שקיים  $a$  כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$ .

**(30)** פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

**(8)**  $[0,1]$

**(9)** א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- 1 קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא :
  - א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
  - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- 2 תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ .  
הוכיחו שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- 3 תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים.  
הוכיחו ש-  $f$  חסומה.
- 4 יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ .  
הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- 5 תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על.  
הוכיחו ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- 6 תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .  
הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**(7)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(8)** תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ , כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
\* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

**(9)** הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט. באריכות:

הוכיחו שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ , כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(10)** בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.

ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.

ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

**(11)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות 12-13 הוכיחו:

**(12)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

**(13)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

**14** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:  
תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ .  
פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ .  
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15** הוכיחו כי אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $a$ , אזי הפונקציה  $g(x)$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי  $|f(x)| \leq c$ , גם רציפה בנקודה  $a$  (כאשר  $c$  מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

**16** נתונה הפונקציה

בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

**17** הוכיחו כי אם  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a, b]$  אז יש  $c > 0$  כך ש-  
 $f(x) > c$  לכל  $x \in [a, b]$ .

**18** הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציה  $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון  $(\varepsilon, \delta)$ ).  
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

## תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

(1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 15 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| 1. כללי הגזירה              | (ללא ספר) |
| 2. תרגול בכללי הגזירה       | 260       |
| 3. תרגילים נוספים לפי סוגים | 263       |
| 4. גזירה סתומה              | 266       |
| 5. כלל השרשרת               | 268       |
| 6. גזירה לוגריתמית          | 271       |
| 7. נגזרת הפונקציה ההפוכה    | 272       |

## תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

|                                 |                                                                         |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x-2)^3$     ב.  $f(x) = (x^3+6)^5$     ג.  $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד.  $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$     ה.  $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3}{x}$     ב.  $f(x) = \frac{2}{x}$     ג.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$     ד.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה.  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$     ו.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$     ז.  $f(x) = \frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב.  $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג.  $f(x) = x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$     ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$     ג.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$     ה.  $f(x) = \frac{1}{x}$     ו.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$     ב.  $f(x) = 4\sqrt{x+1}$     ג.  $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד.  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$     ה.  $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$     ו.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

## גזירה סתומה

## שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .
- 2 גזרו את הפונקציה הסתומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- 3 גזרו את הפונקציה הסתומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- 4 מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .
- 5 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .
- 6 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$  – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9 נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .  
ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10 גזרו את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- 11 גזרו את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- 12 נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצאו את ערך  $y^n$  בנקודה בה  $y = 1$ .

(13) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ ,

מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .

נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

### תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  $y = x - 1$ .

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

## כלל השרשרת

## שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
חשבו את  $g'(2)$ .

- (2) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(2) = 4$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
א. חשבו את  $g'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכיחו כי  $g$  יורדת.

- (3) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = x^2 + f(\ln x)$ .  
א. חשבו את  $g'(e)$ .

ב. הוכיחו שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

ג. חשבו את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$ .

- (4) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ ,  $f(1) = -2$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f^2(\ln x)$ .  
א. חשבו את  $g'(e)$ .

ב. האם  $g$  עולה או יורדת, בנקודה  $x = e$ ?

ג. נתון כי  $f$  שלילית ועולה. מה ניתן לומר על  $g$ ?

(5) נתונה פונקציה,  $f(x)$ , יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א.  $g$  עולה לכל  $x$ .

ב.  $g$  יורדת לכל  $x$ .

ג.  $g$  עולה לכל  $x > 0$ .

ד.  $g$  יורדת לכל  $x > 0$ .

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$ . חשבו  $g'(100)$ .

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$ .

חשבו  $g'(1)$ .

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 1$ .

חשבו  $g'(1)$ .

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי  $f(4) = 1$ ,  $f'(4) = 2$ .

חשבו  $g'(1)$ .

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$ .

חשבו  $g'(1)$ .

## תשובות סופיות

- (1) 40  
 (1) א. -16 ב. שאלת הוכחה.  
 (2) א.  $2e+1$  ב. שאלת הוכחה. ג.  $2e+1$   
 (3) א. -4 ב. יורדת. ג.  $g'(x) < 0$   
 (4) ד  
 (5)  $\frac{17}{80}$   
 (6) 36  
 (7)  $\frac{8}{9}$   
 (8) 44  
 (9) -2

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left( \sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)