חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

תוכן העניינים

1. גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה 1
2. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה 11
3. נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה 22
4. וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים 27
5. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב 48
6. טורים עם איברים קבועים 80
7. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות 94
8. טורי טיילור - מקלורן 103
9. קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב 118
10. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה 145
11. גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים 153
12. נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות 160
13. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 171
14. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 175
15. פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים 180
16. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם 194
17. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 197
18. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים 199
19. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז׳) 201
20. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 204
21. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 206
22. אינטגרלים כפולים 207
23. שימושי האינטגרל הכפול 213

תוכן העניינים

24. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות) 216
25. החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן) 221
26. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 223
27. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות 226
28. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן) 230
29. אינטגרלים קוויים ושימושיהם 231
30. שדות משמרים - אי תלות במסלול 236
31. משפט גרין 241
32. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם 244
33. משפט הדיברגנץ (גאוס) 247
34. משפט סטוקס (גרין במרחב) 249
35. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל) 251
36. משוואות מסדר ראשון 260
37. משוואות ליניאריות מסדר שני 282
38. גיאומטריה אנליטית ..... (ללא ספר)
39. סדרות 297
40. מבוא לטופולוגיה 330

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 1 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

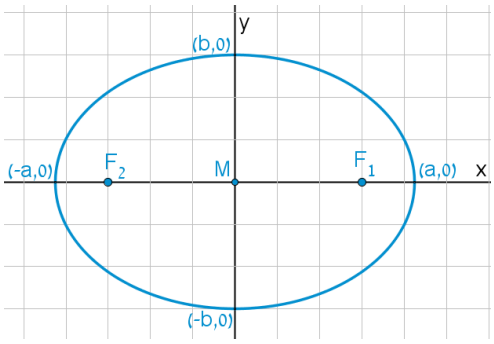
1. האליפסה 1
2. הפרבולה 5

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
  באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
  אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
  אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

8) מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

10) מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

15) באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

16) באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

18) מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5,1)$.

19) ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2,-1)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$, $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

1) $2a=12$, $2b=6$

2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

7) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

8) $(4,\sqrt{24})$, $(4,-\sqrt{24})$, $(-4,\sqrt{24})$, $(-4,-\sqrt{24})$

9) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

10) $(\sqrt{6},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},\sqrt{2})$, $(\sqrt{6},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$

11) $y=\sqrt{6}x$

12) משיק: $k=\pm 12$, חותך: $-12<k<12$.

13) $S=$ יח"ש 60

14) $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

15) $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

16) $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$

17) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

18) $y=-x+2.5$

19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

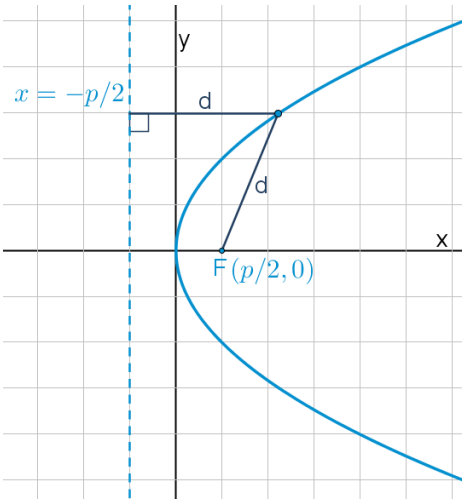
20) א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

הפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.



מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r=x+\frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2=2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

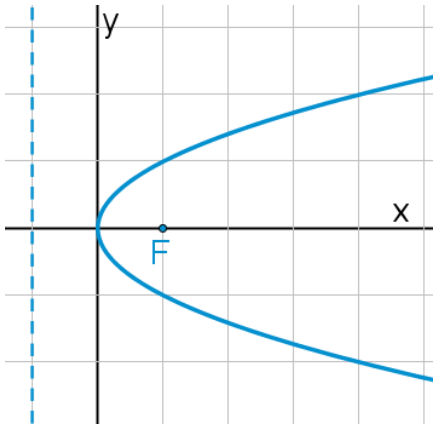
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

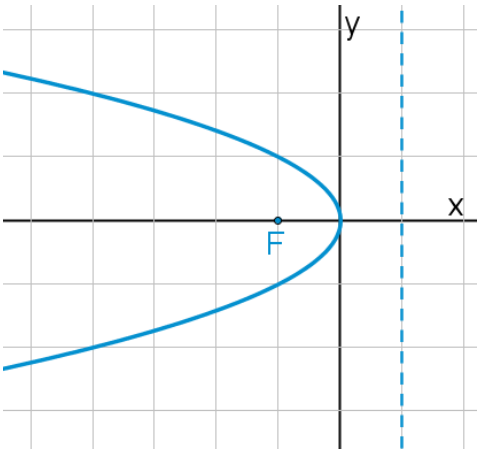
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:



שאלות:

1) נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

11) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-x, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

13) קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-x של נקודה A הוא 4.

14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

16) נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17) נתונה הפרבולה $y^2=6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-x .

18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$. נתון כי $y_A=4$.
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ ברביע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-x הוא $7\sqrt{5}$.
מצא את משוואת הנורמל.

20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$.
מצא את משוואת המשיק.

21) נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .

22) נתונות שתי פרבולות: $\text{I. } y^2=6x$, $\text{II. } y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

23) נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

24) נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-x שלה קטן ב-1 משיעור ה-y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

25) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

26) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

27) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-y.

29) נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש ΔABC שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-x.

30) אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

1) $p=9$, $F\left(4\frac{1}{2},0\right)$

2) $y^2=12x$

3) $y^2=10x$

4) $y^2=4x$

5) $y^2=12x$

6) $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$, $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

7) $\left(1,\sqrt{8}\right)$, $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

8) $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

9) $S_{OAB}=300\sqrt{3}$ יח"ש

10) $S_{ABO}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

11) $S_{ABC}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

12) $S_{ABCF}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

13) $B\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $B\left(\frac{1}{4},1\right)$

14) $y=2x$ או $y=-2x$

15) $y=2x-2$

16) $k=\frac{1}{2}$

17) א. $y=-x-1\frac{1}{2}$, $y=x+1\frac{1}{2}$

18) $B\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

19) $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

20) $y=x+2$

21) $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

22) הוכחה.

23) $7x+3y-7=0$

24) $y=-9x+18$

25) $(x-6)^2+y^2=144$

26) $(x-8)^2+y^2=55$

27) $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

28) $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

29) $C(p+2,0)$

30) $y^2=1\frac{1}{2}x$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 2 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. קואורדינטות קוטביות 11
2. הנגזרת ושימושיה 13
3. שימושי האינטגרל המסוים 14

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=3+8\sin\theta$ בנקודה $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=1-2\sin\theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

1) $y=\frac{11\sqrt{3}}{5}x-\frac{98}{5}$

2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\ ,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r=2(1+2\cos\theta)$.

2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=6+4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y.

3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=3+2\sin\theta$.

4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=3+2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r=2$.

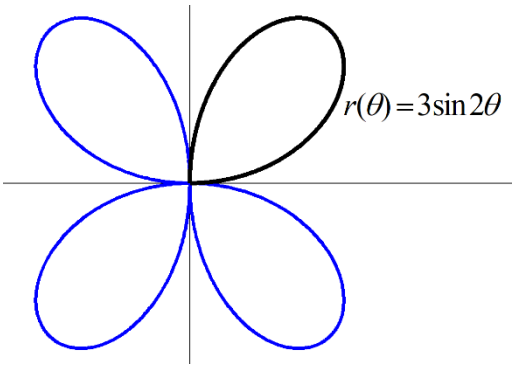
5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ומחוץ ל- $r=3+2\sin\theta$.

6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ובתוך $r=3+2\sin\theta$.

7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r=2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r=1$.

8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r=1+\cos\theta$.

9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r=3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



10) מצאו את אורך העקום $r=\theta$, כאשר $0\le\theta\le 1$.

11) העקום $r=\cos\theta$, כאשר $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) העקום $r=4+4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

1) $S=4\pi-6\sqrt{3}=2.174$

2) $S=22\pi-48$

3) $S=11\pi$

4) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$

5) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$

6) 10.37

7) $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) 8

9) $\ell=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2\theta}\,d\theta$

10) $\ell=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

11) $S_x=\pi$

12) $S_y=102.4\pi$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

1) $r\cos\theta = a$ - הישר $x = a$.
2) $r\sin\theta = b$ - הישר $y = b$.
3) $\theta = \beta$ - הישר העובר דך הראשית $y = (\tan\beta)x$.

מעגלים

1. $r = a$ - מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a.
2. $r = 2a\cos\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו $|a|$.
3. $r = 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(0,b)$ ורדיוסו $|b|$.
4. $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנק' (a,b) ורדיוסו $\sqrt{a^2+b^2}$.

קרדיודות ולמניסקטות

1) קרדיודות $r = a \pm a\cos\theta,\ r = a \pm a\sin\theta$:
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

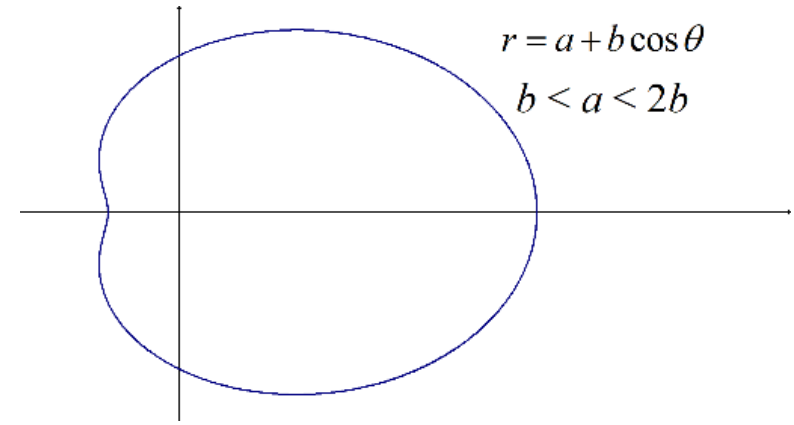
2) למניסקטות עם לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a < b)$:
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

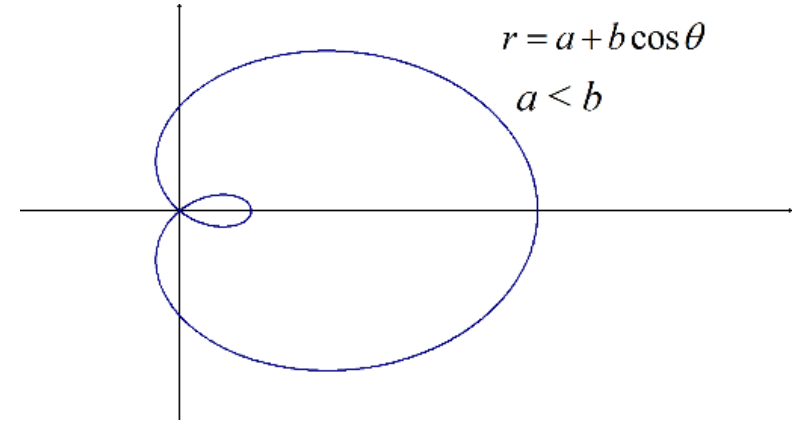
3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a > b)$:
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

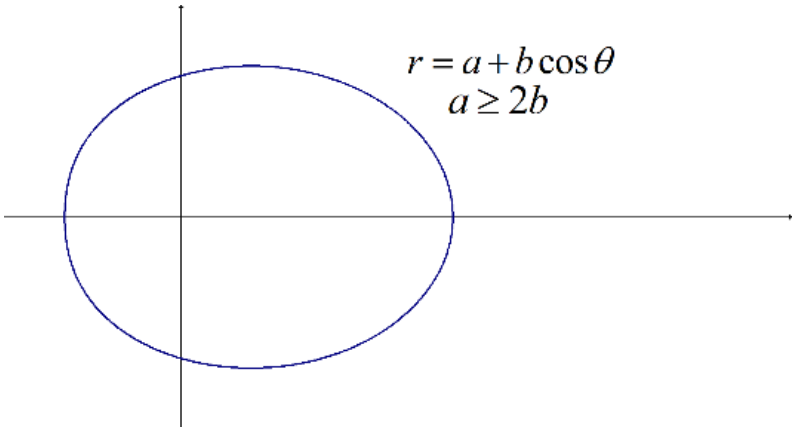
* נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם $0 \le \theta \le 2\pi$.

למינסקטות ביתר פירוט

הגרף של $r = a + b\cos\theta$:

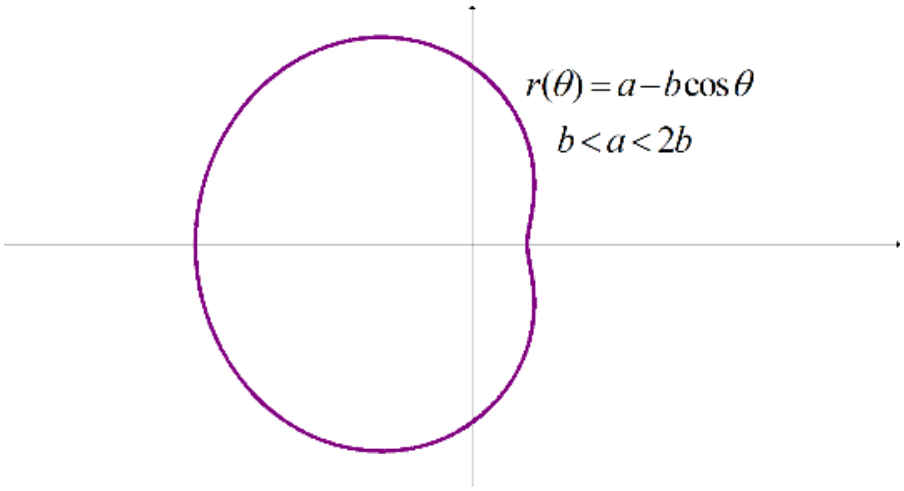


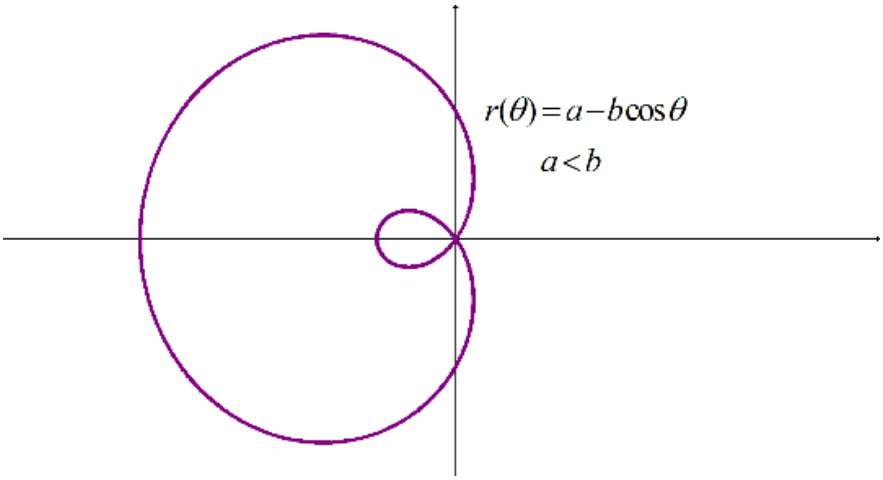


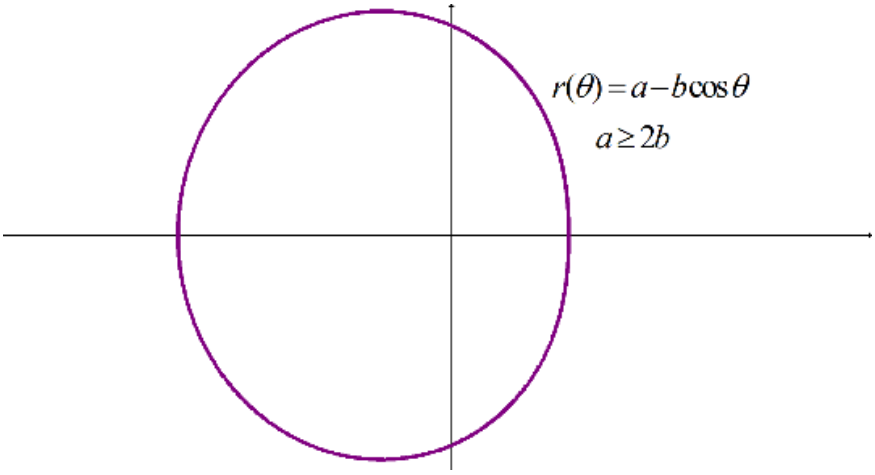


כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגרף של $r = a - b\cos\theta$

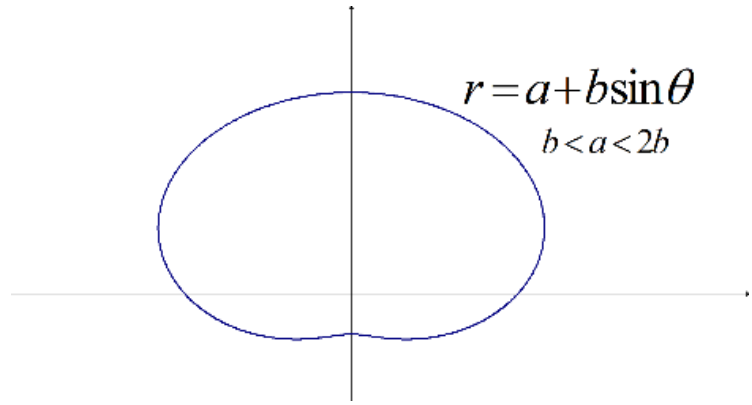


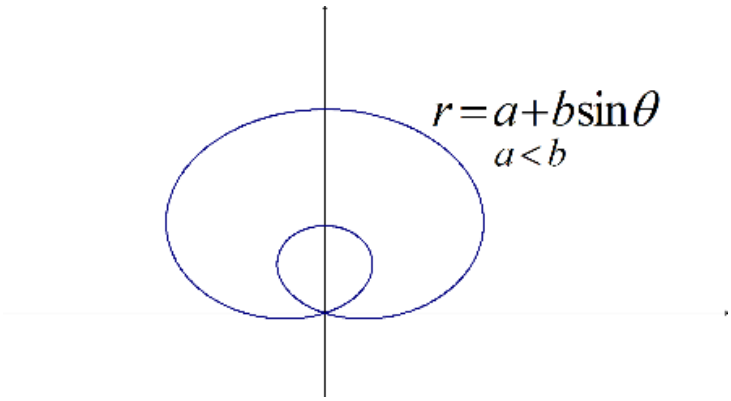


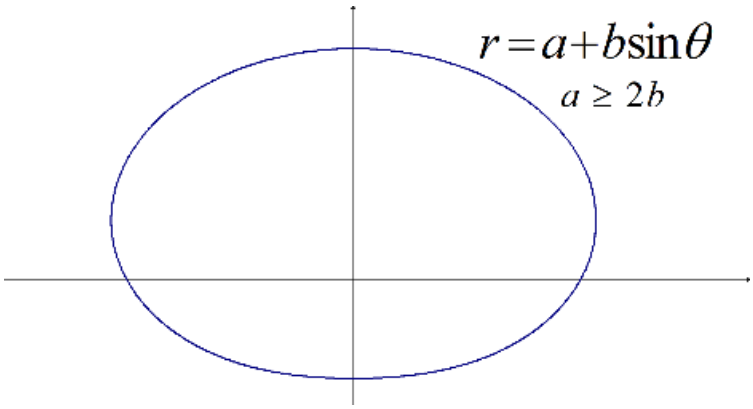


כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגרף של $r = a + b\sin\theta$

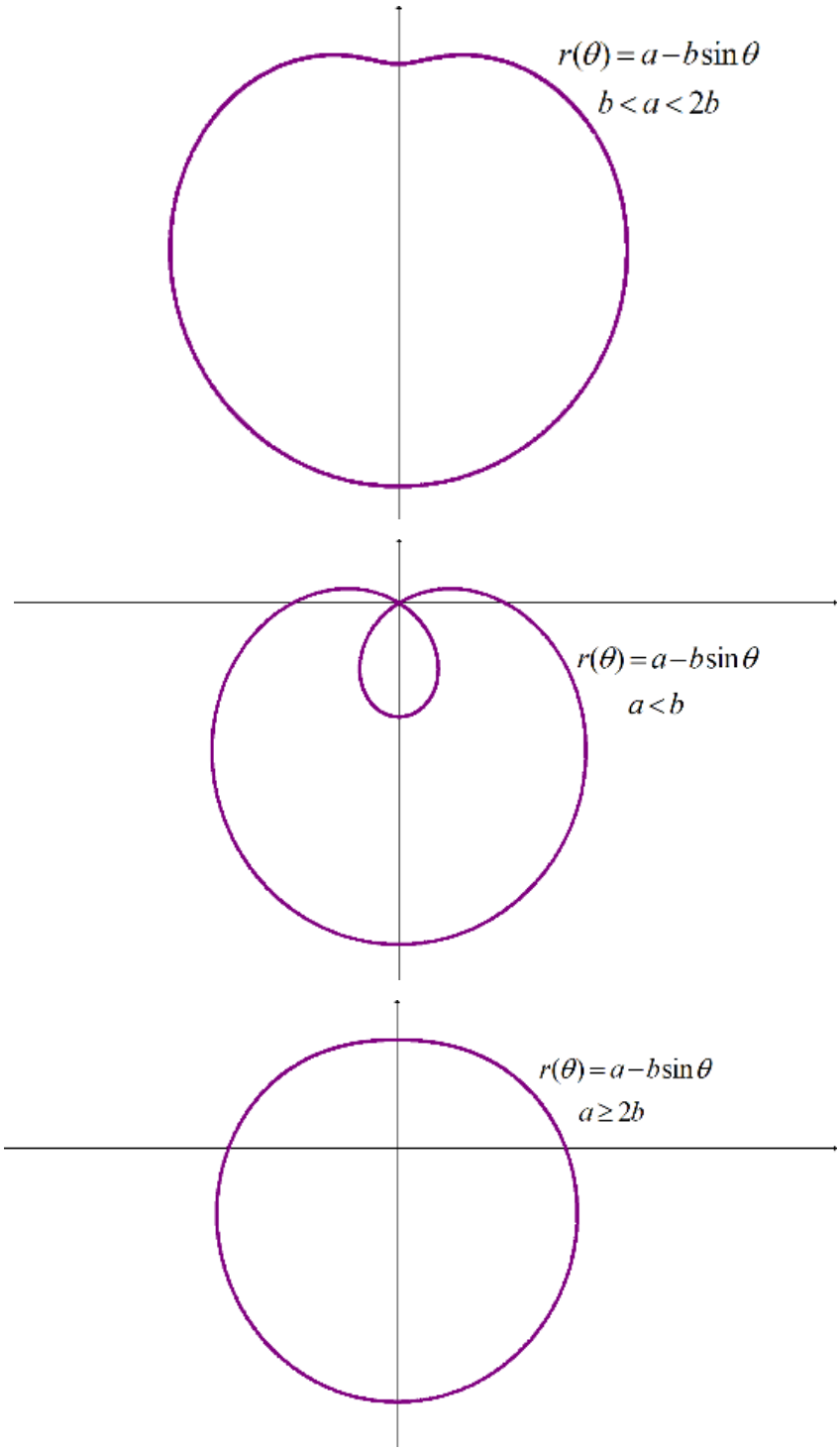






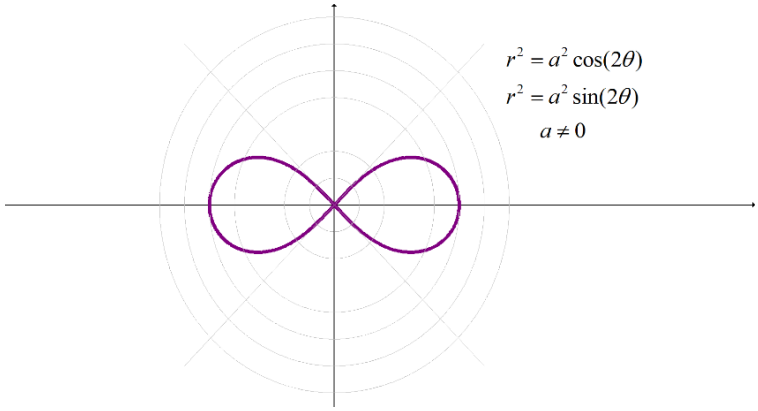
כתב ופתר – גיא סלומון ©

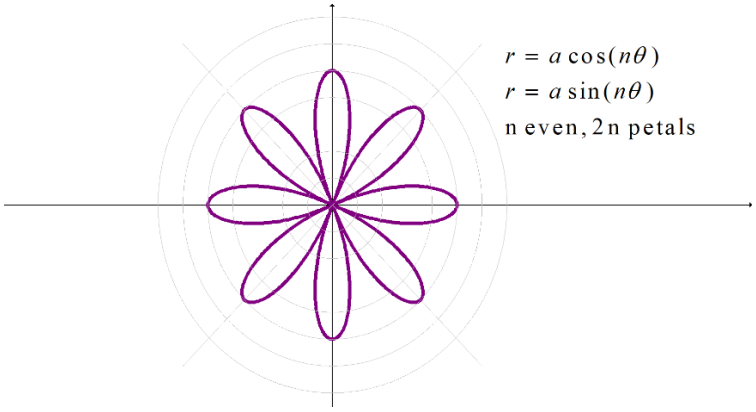
הגרף של $r = a - b\sin\theta$

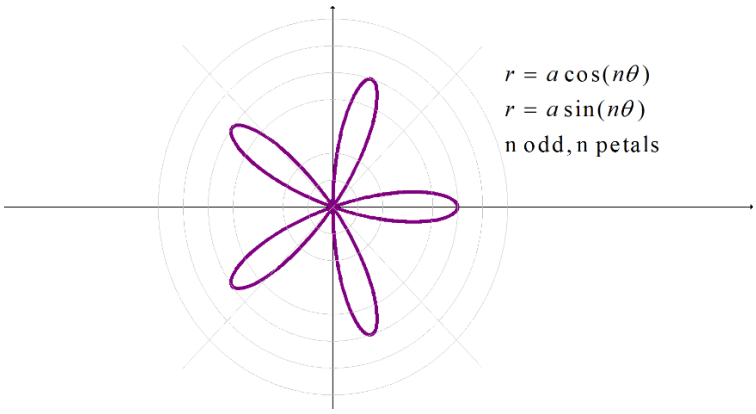


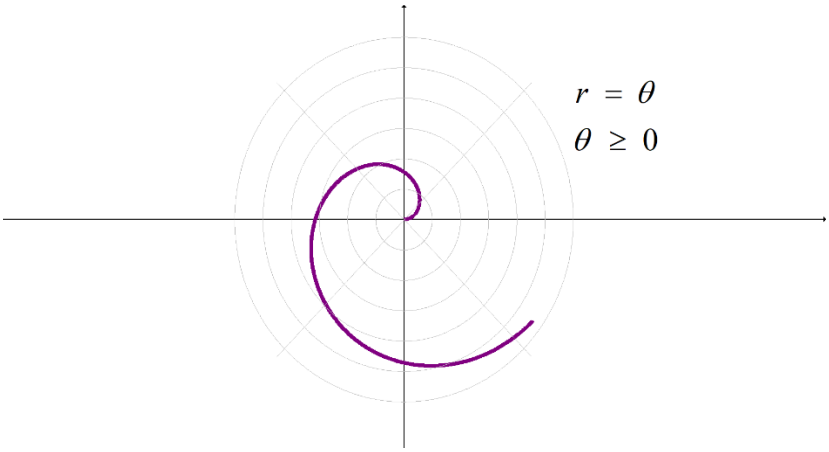
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים נפוצים נוספים









חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 3 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום 22
2. הנגזרת ושימושיה 24
3. שימושי האינטגרל המסוים 25

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \ge 0,\ \ x = t^2 + 1,\ \ y = t^2$

ב. $0 \le t \le \pi,\ \ x = \sin t,\ \ y = \cos^2 t$

ג. $\pi \le t \le 2\pi,\ \ x = \cos t,\ \ y = 4\sin t$

2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \le x \le 4,\ \ y = x^4 + 1$

ב. $-2 \le x \le 2,\ \ y = -\sqrt{4 - x^2}$

ג. $-2 \le x \le 2,\ \ y = +\sqrt{4 - x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4,\ \ y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t,\ \ y = 4\sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1,\ \ y = t(0.5t + 1) + 1$

ה. $x = \dfrac{20t}{4 + t^2},\ \ y = \dfrac{20t - 5t^2}{4 + t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t},\ \ y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2,-1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1\ ,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) $x=t,\ \ y=t^4+1,\ \ 1\le t\le 4$ ב. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ \pi\le t\le 2\pi$

ג. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ 0\le t\le \pi$

3) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$, הנתונה בצורה פרמטרית .

2) נתון העקום $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=1-2t \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

3) נתון העקום $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=3t^2-9 \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

1) $y'=\dfrac{\cos t-\sin t\cdot t}{1-\cos t}$, $y''=\dfrac{(-t\cos t-2\sin t)(1-\cos t)-\sin t(\cos t-t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

2) א. ראו בסרטון. ב. $y'=\dfrac{-2}{2t+1}$ ג. $y=2x+3$ ד. $y=-0.5x+3$

3) א. ראו בסרטון. ב. $y=\pm\sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0,-9)$ אנכי $(-2,-6),(2,-6)$

ד. $-1<t<1$ קמור. $t>1$ או $t<-1$ קעור.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבו את השטח הכלוא בעקום $C:\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 4t \end{cases}$.

2) חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.
* שימו לב שאם $a=b=r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r.

3) חשבו את השטח הכלוא בין העקום $0\le t\le \pi,\quad x=\cos t,\quad y=t+\sin t$
לבין ציר ה- x.

4) חשבו את השטח הכלוא בין העקום $0\le t\le 2\pi,\quad x=4\cos t,\quad y=\sin^2 t$
לבין ציר ה- x.

5) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

6) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t+\sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,\pi)$.

7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית
$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חלק העקום $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\pi$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חלק העקום $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבו את אורך העקום $-\pi\le t\le 2\pi$ $\begin{cases} x=4\sin t \\ y=10t \\ z=4\cos t \end{cases}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\left(e^t\right)\mathbf{k}$, $1\le t\le 3$.

תשובות סופיות

1) $8/3$

2) πab

3) 1.5π

4) $16/3$

5) 8

6) 4

7) אורך העקום הוא 2π. המרחק שעבר החלקיק הוא 4π.

8) $4\pi r^2$

9) $6\pi/5$

10) $6\pi\sqrt{29}$

11) $\sqrt{3}e\left(e^2-1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 4 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

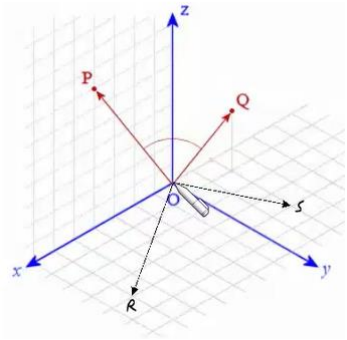
1. וקטורים 27
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 34
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 36
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 37
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 46

וקטורים

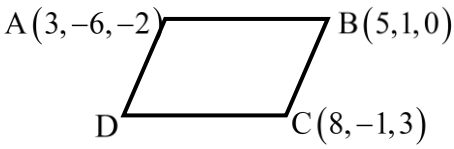
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}$, **u**.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

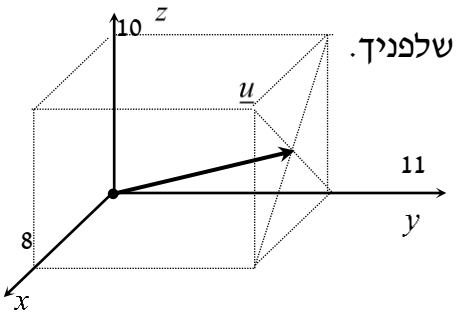
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



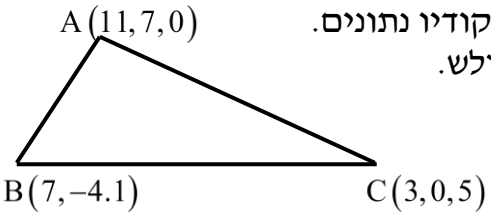
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

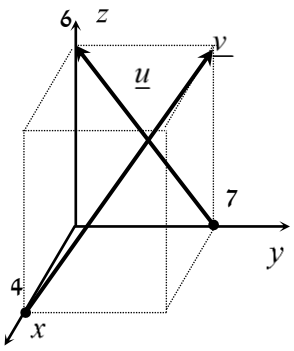


כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.



6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

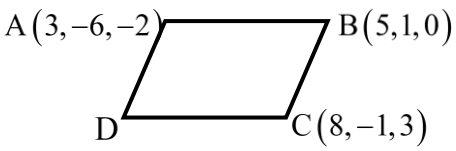
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}$ *

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3)$, $B(4,-1,2)$, $C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב-$t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d\,|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה (**T**), נורמל היחידה (**N**) והבינורמל (**B**) של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)
ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3,t-5,t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18) הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19) חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r\left(t\right)=\left(t^2,0,t\right)$.

20) וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=\left(2,-1,-10t\right)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

21) וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=\left(8\cos 4t,8\sin 4t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

22) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.

א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C.

ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a,b) ורדיוס R.

23) נתון העקום $r(t)=(4\cos t,3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\dfrac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

26) נתון העקום $y=\dfrac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

28) נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\dfrac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

30) נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\left(x(t),y(t)\right)$.

הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.

ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא

$$k(\theta)=\frac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

34) חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

4) א. $\frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$,
ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right)$, $N(t)=(-\sin t,-\cos t,0)$, $B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

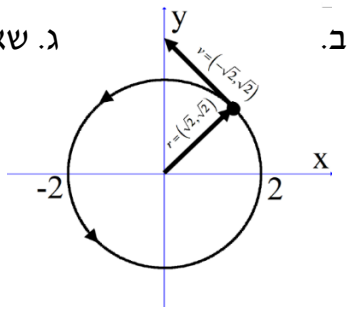
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right)$, $|v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2}$, $a(t)=\left(0,0,-g\right)$, $|a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

16) $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}_{rad}$

18) שאלת הוכחה.

19) $\rho = \frac{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $\kappa = \frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

20) $\rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$

21) $\kappa = \frac{2}{13}$, $\rho = 6.5$

22) א. $\rho = R,\ \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0,\pi,2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) א. $\rho(x) = \frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2x^2|x|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2 = 2$

27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2 = 2/9$.

28) א. $x = \frac{9}{8}$, $y = \pm 3$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2 = (125/16)^2$

29) $\rho = R$, $\kappa = \frac{1}{R}$

30) א. $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+\left(y+1\right)^2 = \frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

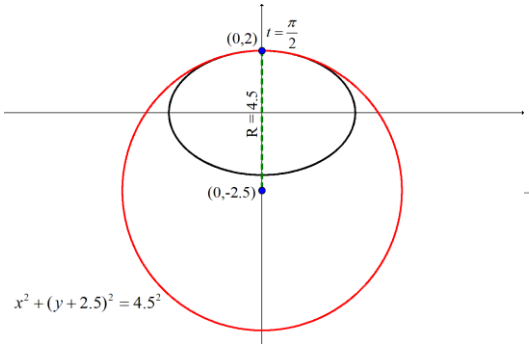
31) שאלת הוכחה.

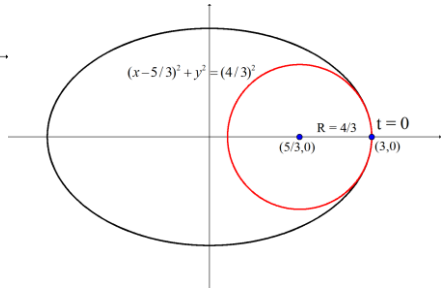
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2} \qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

32) א.

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a} \qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



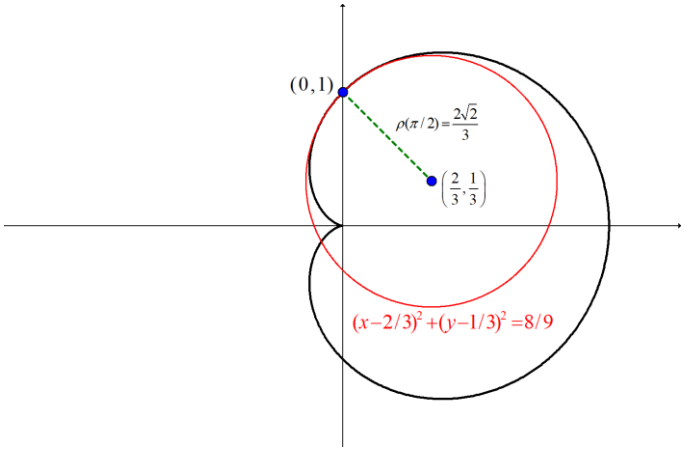


ב.

33) שאלת הוכחה.

34) $\kappa=\rho=1$

35) ראו שרטוט:



כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.
הוכיחו:
א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$
ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.
ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} \\ &\text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h) \\ &\text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z \end{aligned}}$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{curlF} = \nabla\times\mathbf{F} \\ &\mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h) \\ &\mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 5 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של ישר 48
2. מצב הדדי בין ישרים 51
3. הצגה פרמטרית של מישור 53
4. משוואת מישור 54
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור 55
6. מישורים המקבילים לצירים 56
7. מצב הדדי בין ישר ומישור 57
8. מצב הדדי בין מישורים 58
9. ישר חיתוך בין מישורים 59
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים 60
12. זווית בין ישר ומישור 61
13. זווית בין שני מישורים 62
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב 63
16. מרחק בין נקודה לישר 64
17. מרחק בין נקודה למישור 65
18. מרחק בין ישרים מקבילים 66
19. מרחק בין ישר למישור 67
20. מרחק בין מישורים מקבילים 68
21. מרחק בין ישרים מצטלבים 69
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. היטלים ונקודות סימטריה 70
24. שאלות מסכמות 71

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell : \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

7) מצאו את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.
הראו כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

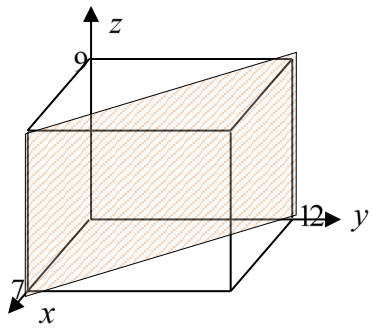
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$, $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת מישור

שאלות

1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi : -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi : x-3y+8z=0$

4) $\pi : 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$, $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$, $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6,5,1)$, $D(-1,4,2)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו-$E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$, $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$

2) $44.83°$

3) $14.9°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$

2) $87.539°$

3) $32.312°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשבו את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi : 2x+4y-4z+15=0$, $\ell : \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi : 3x-2y+z+21=0$ או $\pi : 3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1 : \underline{x} = (2,0,-1) + t(1,-2,1) \quad , \quad l_2 : \underline{x} = (-8,-1,19) + s(-4,1,6)$$

$$l_3 : \underline{x} = (-2,7,-11) + r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4 : \underline{x} = (-2,1,5) + q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים k, q ו- p, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
2) 1.567 יח"א.
3) $\sqrt{2}$ יח"א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

1) נתונה נקודה $A(1,-1,3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.

ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לישר.

2) נתונה נקודה $A(0,0,1)$ ונתון מישור $7x+7y-z=8$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.

ב. מצאו את הנקודה C, הסימטרית ל-A, ביחס למישור.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1,3,2)$ ביחס למישורי הצירים.

ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x,y,z)$ ביחס למישורי הצירים.

4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0,2,4),\ B(-2,6,-2),\ C(2,-4,8),\ D(10,2,0)$.
מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC.

תשובות סופיות

1) א. $B(0,1.5,-1.5)$ ב. $C(-1,4,-6)$

2) א. $B\left(\frac{7}{11},\frac{7}{11},\frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11},\frac{14}{11},\frac{9}{11}\right)$

3) א. $B_{xy}(1,3,-2),\ C_{xz}(1,-3,2),\ D_{yz}(-1,3,2)$

ב. $B_{xy}(x,y,-z),\ C_{xz}(x,-y,z),\ D_{yz}(-x,y,z)$

4) $\underline{x}=(0,2,4)+t(0,1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $C(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $A(1,1,3)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$, $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

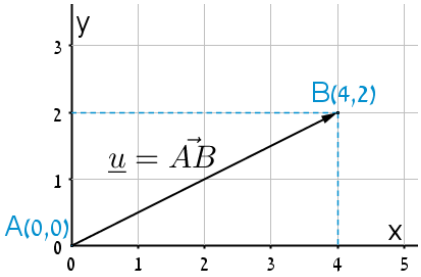
כתב ופתר – גיא סלומון ©

סיכום כללי

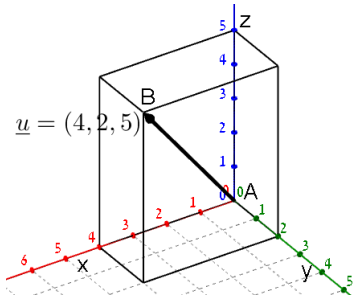
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:



- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

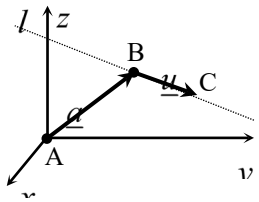
מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$; $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

***הערות:**

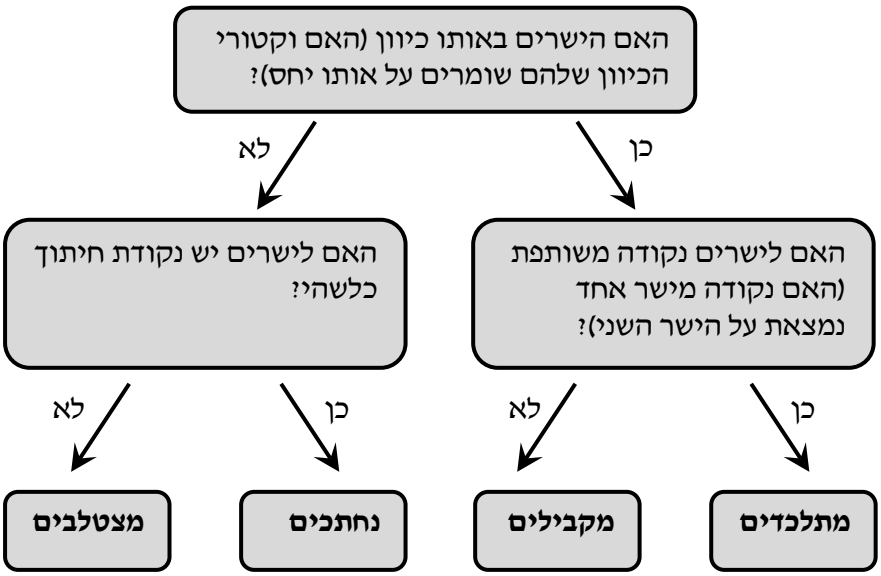
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

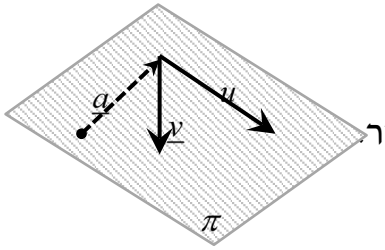
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 6 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 80
2. מבחן ההתבדרות של טורים 83
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 84
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים 86
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 88
6. תרגילי תיאוריה 89

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123...+0.141414...$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
3) מתבדר.
4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
6) מתכנס ל- 8.
7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
9) מתבדר.
10) $S=\frac{1}{\ln 2}$
11) $\frac{1}{12}$
12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$
15) $\frac{323}{1221}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

5) $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

6) הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:
$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

8) בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתכנס.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) מתבדר.
9) הוכחה.
10) א. הוכחה. ב. מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתכנס.
14) מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.

2) מתכנס בהחלט.

3) מתכנס בתנאי.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בהחלט.

6) מתכנס בהחלט.

7) מתכנס בתנאי.

8) מתכנס בתנאי.

9) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n > 0\ ,\ a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 7 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות 94
2. טורי פונקציות 97
3. טורי חזקות 99
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 101

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(-1\le x\le 1\right)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\left(-a\le x\le a\right)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x > 0$
2) $x \neq 5$
3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$
5) $x > 0$
6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $(|x|<\frac{1}{4})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $\frac{2}{(1-x)^3}$ $|x|<1$

10) א. $|x|<1$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1$ $\arctan x$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 8 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 103
2. טור טיילור סביב X=X0 105
3. חישוב סכום של טור 106
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן 107
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ 108
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים 110
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' 111
8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות 117

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e 2) e^{-2} 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

6) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

7) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

תשובות סופיות

1) $\dfrac{1}{120}$

2) $\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

6) 216

7) $-\dfrac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:

$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:

$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 9 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור 118
2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית 122
3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית) 128
4. משטחים במרחב 133
5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית ..... (ללא ספר)
6. גופים במרחב 135
7. קואורדינטות גליליות וכדוריות 138
8. נספח – משטחים ממעלה שנייה 142

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,||\,y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,||\,x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x=4-\sqrt{1-y^2}\quad x\ge 3.5,$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\}$

ה. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S=\{(x,y)\,|-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\le 0\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,0\le y+1\le\sqrt{1-x^2}\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 16\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ y\ge \frac{1}{4}x^2\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ \ x^2+y^2\ge 4\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\ \ y=t^2$ $\qquad t\ge 0$

ב. $x=\sin t,\ \ y=\cos^2 t$ $\qquad 0\le t\le \pi$

ג. $x=\cos t,\ \ y=4\sin t$ $\qquad \pi\le t\le 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x=t-4\ \ ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\ \ ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\ \ ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\ \ ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\ \ ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\ \ ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2+y^2=8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D, המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2,\ -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le\frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases}x(u,v)=u\cos v\\ y(u,v)=u\sin v\end{cases}\quad \sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$: מרכז : $(0,0)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=5u\cos v\\ y(u,v)=5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$: מרכז : $(8,4)$. רדיוס : 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=8+5\cos t\\ y(t)=4+5\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=8+5u\cos v\\ y(u,v)=4+5u\sin v\end{cases}\quad 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

ב. מקרה 1: $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$,

מקרה 2 - $\begin{cases}x=8+5\cos t\\ y=4+5\sin t\end{cases},\ \pi\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le\sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases}x(t)=2\cos t,\ y(t)=\sqrt{2}\sin t & 0\le t\le 2\pi\\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ y(t)=2\sin t & 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

ג. המסילה DA: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה BC: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה AB: $\arctan\left(\sqrt{2}\right)\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

המסילה CD: $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

$$D_1:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3:\ \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

ד.
$$D_4:\ \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$
$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, שמאלית: $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $D_1:\begin{cases} x(u,v)=u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$ $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$

$D_2:\begin{cases} x(u,v)=-u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$ $0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$

7) א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ וענף שמאלי $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ $C:\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ ד. 1

8) 8

9) $6\pi\sqrt{29}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

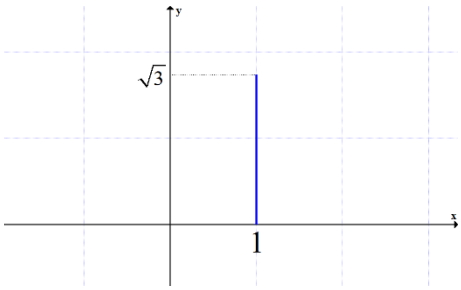
ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

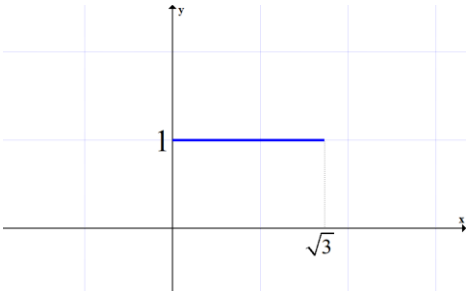
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א



איור ב



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\}$

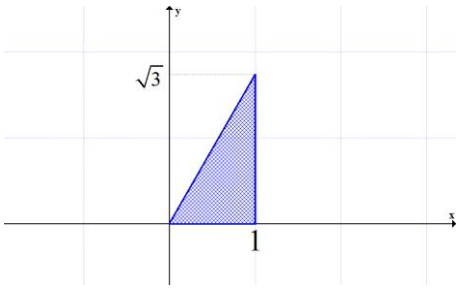
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

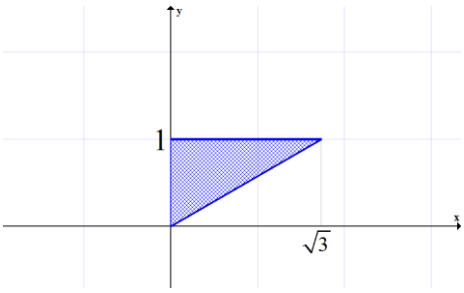
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ $r=\frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $r=\frac{1}{\sin\theta}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ or $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $1\le r\le2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan2$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

12) $\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5$

$\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

14) א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונים שני משטחים: $Q: 2x^2-y^2+z^2=3,\ R: x^2-y^2+2z^2=3$.

א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.

ב. הראו כי החיתוך בין R ו-Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.

ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל-Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו-$B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה-y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.

8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-y.

ב. $\ell_2: (x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1: (x,y,z)=(3t,2t,1)$

10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0\quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

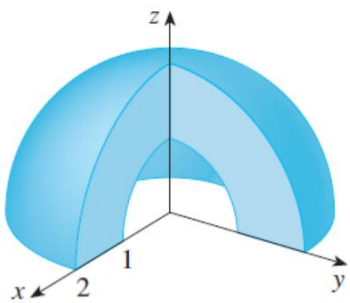
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

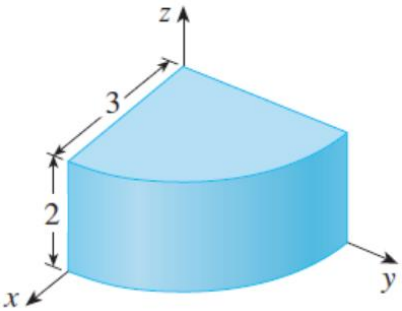
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)\mid ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי $\begin{matrix} M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3 \\ N:\ 2x^2-y^2+z^2\le 3 \end{matrix}$.

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.

שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה.מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

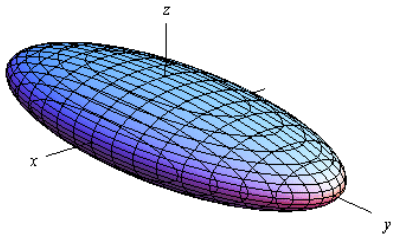
ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

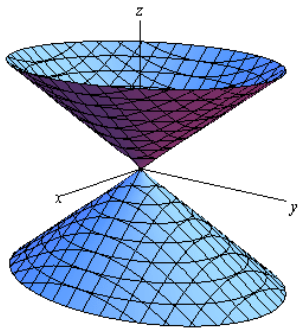
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

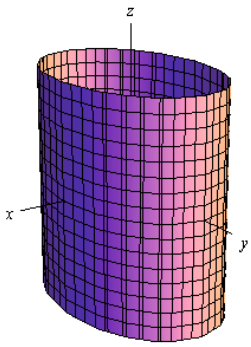


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



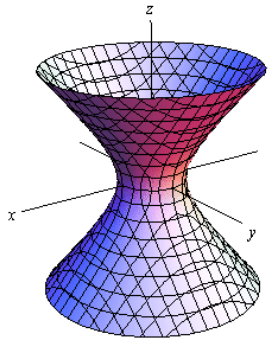
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

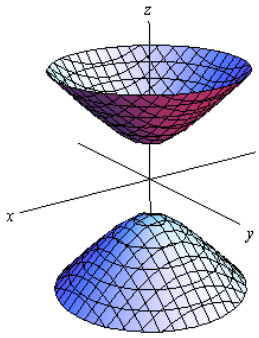


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

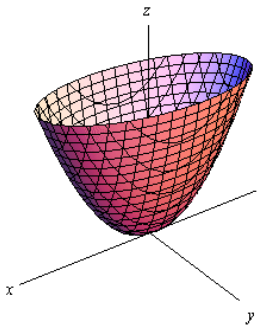


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

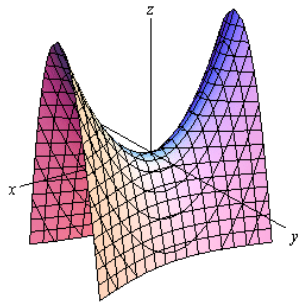
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

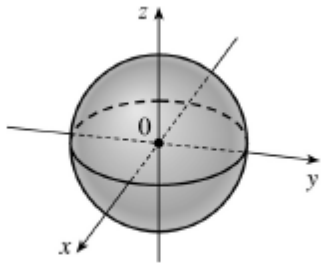
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

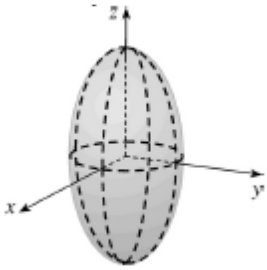
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

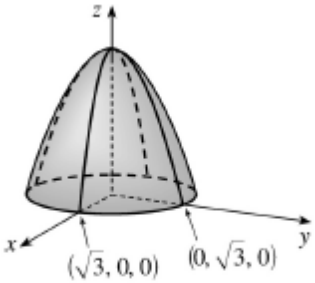
דוגמאות שונות



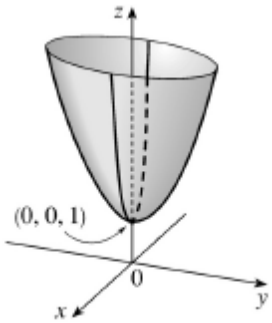
$x^2+y^2+z^2=1$



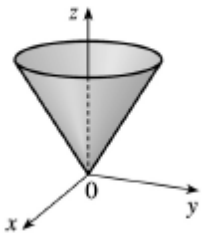
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



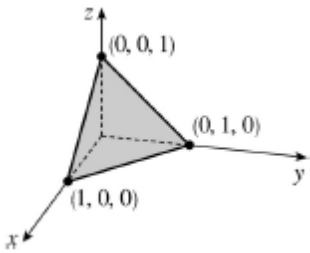
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 10 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 145
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 147
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 149
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 150

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\right\}$

8) $D=\left\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\right\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

11) $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4, y>1, z>0\right\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\left\{(x,y)\middle|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\right\}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\} \quad (k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases} \quad (k=1)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

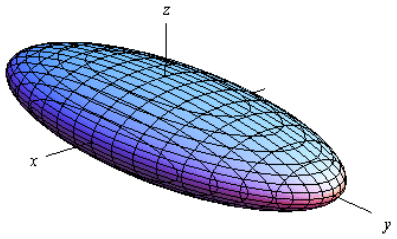
4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

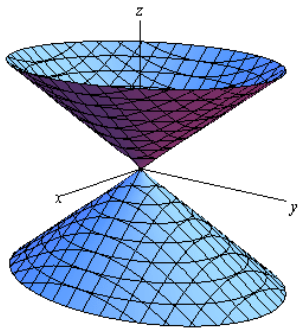
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

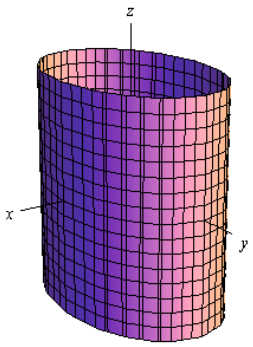


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



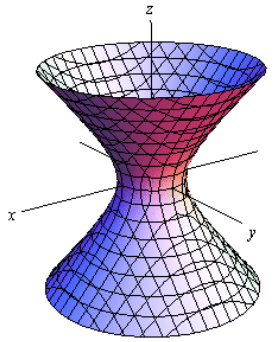
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

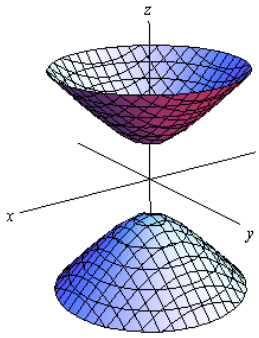


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

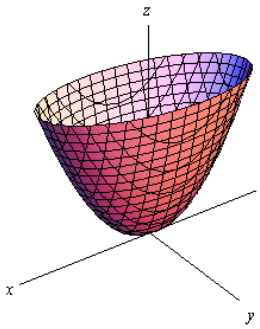


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

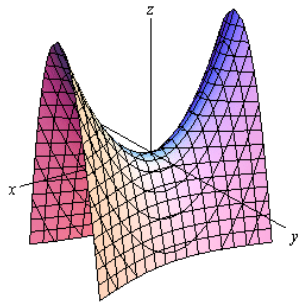
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

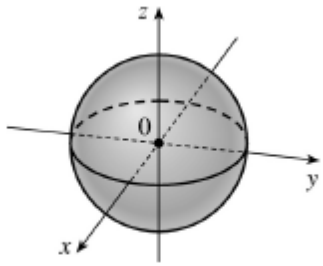
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

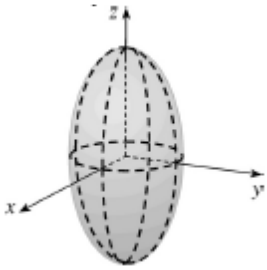
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

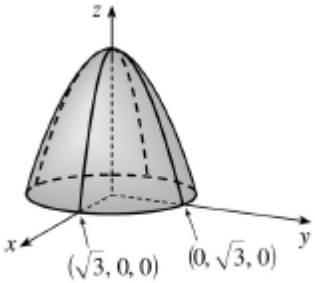
דוגמאות שונות



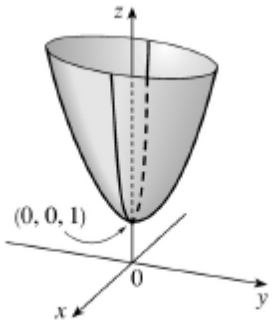
$x^2+y^2+z^2=1$



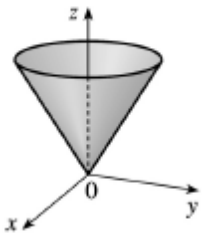
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



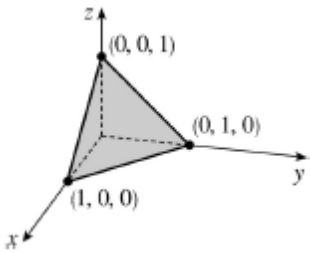
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 11 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 153
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 156
3. נוסחאות – גבולות 159

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \dfrac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \dfrac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \dfrac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sin x+\cos y\right)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2 y=4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} 2x^2 y=8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = f(0,y)$ לכל y,

וגם $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = f(x,0)$ לכל x,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)| \le \sin^2(x^4+y^4)$, לכל (x,y).

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le |y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)| \le |x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2), כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^{\infty} = \infty$
$y = \ln x$	$---$	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^{\infty} = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^{\infty} = 0$
$y = \sin x$	$---$	$\sin 0 = 0$	$---$
$y = \cos x$	$---$	$\cos 0 = 1$	$---$
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$---$	e	1
$y = \sqrt{x}$	$---$	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm a = \infty$, $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$, $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 12 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון 160
2. נגזרות חלקיות מסדר שני 162
3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה 166
4. דיפרנציאבילות 168

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z\left(x,y\right)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f\left(x,y,z\right)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$ $\quad f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$

$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$, f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) $f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$

$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$

11) $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

12) $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$

13) $f_x=10\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$

$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$

$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$

14) $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$

$f_y=xz$ $\quad f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$

$f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$ $\quad f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

15) -2

16) -1

17) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

18) $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

3) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאבילות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

5) א. $f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ב. לא רציפות.

6) א. $f_{xy}(0,0)=-1 \neq f_{yx}(0,0)=1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדקו דיפרנציאביליות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$, המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל m ג. $m<0.5$
8) שאלת הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 13 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 171

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ y=u^2+v^2$.
חשבו: $z_u,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $u=t^2+4m$, $v=4t+k$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

11) נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

12) נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

14) נתון: $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_y=-v_x$, $u_x=v_y$.

הוכיחו כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)\left(h_{uu}+h_{vv}\right)$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

18) נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2 + \frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4,\quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4,\quad z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 14 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 175

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$, בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q, בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה $20°$,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֶבֶה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֶבֶה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֶבֶה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\dfrac{x^2}{2}+x^4$ לכל x.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

ד. באיזה כיוון α, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית? מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$

ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.

ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 15 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני 180
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי 183
3. שימושים גאומטריים 190

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y' , כאשר $x^2+y^5=xy+1$,
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.
חשבו את $y_z(0,0)$, $y_x(0,0)$.

6) נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$.
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$.

7) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצאו $z_{xx}(1,1)$.

8) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

10) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את $w_x,\ w_y$.

ב. חשבו $y_x,\ y_w$.

11) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$ $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1},u_y=\frac{4v+2}{8uv-1},v_x=\frac{3-2u}{8uv-1},v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)\ (u\neq v)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}\ (u\neq\pm v)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5+y^3+y=x^2-1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2+y+e^y=17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x=4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3-x^3-3y^2+6x^2+3y-12x+7=0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x,y)$ מתאימה, ובדקו האם קיימת נקודה (x_0,y_0), כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס.
בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2+y^2+4=0$

ב. $xy-40x=100$

ג. $x^2-y^2=3$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה המשוואה $2x^3+y^3-6xy=0$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y'' עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $x^2+y^2=R^2$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשואה מתארת פונקציה $y=f(x)$.
עשו זאת בשתי דרכים:

1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $ax^4+y^4-xy=0$, כאשר a קבוע ממשי.
ידוע שהנקודה $(x_0,0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

א. מצאו את x_0 ואת הקבוע a.

ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.

ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.

א. בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e,e).

ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?

ג. האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

ד. מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.

ה. חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.

ו. השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.

ז. חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשואה $y^3 + 6x\sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0,-2)$.

א. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.

ב. פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.

ב. נתונה המשוואה $x = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x = g(y)$.

ג. חשבו את $g'(1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.
בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.
מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x,z)$, ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = u + v, \quad 2)\ y = u^2 + v^2, \quad 3)\ w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$, בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x,y)$?
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = a\cos\phi\cos\theta,\quad 2)\ y = b\sin\phi\cos\theta,\quad 3)\ z = c\sin\theta\quad (a,b,c>0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x,y)$,

בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y.

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi,x)$,

בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$ ג. כן. ד. הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.

5) א. כל נקודה (x,y) שעל המשוואה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ (2,2)$.

ב. $y'=-\frac{2x^2-2y}{y^2-2x}$ ג. כלום! ד. לא.

6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ \left(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a\right)$.

ב. $$y''=-\frac{\left[2x-a\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)\right](y^2-ax)-\left[2y\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)-a\right](x^2-ay)}{\left(y^2-ax\right)^2}$$

7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0),\ (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.

8) א. $x_0=\frac{1}{2},\ a=3$ ב. כן, $(0,0),(-0.5,-0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.

9) א. כל נקודה (x,y) שעל $xy=\ln y-\ln x+1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.

ב. $y'=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד+ה. לא קיימת.

10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא.
ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.

ה. $y'(x)=\frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $\left(x>0,y>0,(x,y)\neq(1,1)\right)$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin 2\cdot x+\frac{1}{8}\sin 2(\sin 2-2\cos 2)x^2$

12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1)=-2$

13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.

15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.

16) הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_z(0,0,0.5\pi)=0$, $y_x(0,0,0.5\pi)=-1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א. $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1)=\frac{3}{2}$

ב. לא מתקיימים.

ג. $w_x(2,2)=-3$, $w_y(2,2)=3$

ד. $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid y>\frac{1}{2}x^2\right\}$

18) א. $\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{1}{b}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{b}{a\sqrt{3}}$

ב. $\frac{\partial z}{\partial \phi}=-c\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2c}{a}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים גאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$?

2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

4) למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x,y,z בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכיחו $OA+OB+OC=a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

5) נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.

6) הראו שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,

ונתונה נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.

הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$C:\ x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,

בנקודה בה $t=0.25\pi$.

9) נתונות שתי עקומות

$$C_1: x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

10) נתונות שלוש עקומות

$$C_1: x=2t+1, \quad y=t^2-1, \quad z=t^2+t$$
$$C_2: x=s^2, \quad y=-s, \quad z=s-1$$
$$C_3: x=u+2, \quad y=u, \quad z=u^2-1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S? נמקו!

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ P+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(P)\times\overrightarrow{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $3x-6y+2z+18=0$

2) $x-y+z+6=0$, $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$

3) $x+8y+18z=21$, $x+8y+18z=-21$

4) שאלת הוכחה.

5) $Q(7,-9,-15)$

6) שאלת הוכחה.

7) $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$

8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$

9) א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$

10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$. ב. לא.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$

12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$

13) כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$

14) $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,
שנוסחתו : $x^2+y^2+z^2=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 16 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים 194
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי 196

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות **1-4** לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a,b) :

1) $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\quad (a,b)=(1,2)$

2) $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\quad (a,b)=(0,0)$

3) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\quad (a,b)=(0,0)$

4) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\quad (a,b)=(2,1)$

5) בעזרת התוצאה של שאלה **2**, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

6) בעזרת התוצאה של שאלה **3**, חשבו בקירוב את e^3.

7) בעזרת התוצאה של שאלה **4**, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

3) $f(x,y)=1+4y-x^2+7y^2$

4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

5) $\frac{3}{8}$

6) 19

7) $\frac{101}{81}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

1) חשבו בקירוב: $\ln\left(0.01^2+0.99^2\right)$.

2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

4) נתונות שתי צלעות במלבן $a=10\,\text{cm},\quad b=24\,\text{cm}$.
חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- $4\,\text{mm}$ ואת הצלע b יקצרו ב- $1\,\text{mm}$.

5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה.
השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%.
העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

1) $\cong -0.01$

2) $2\frac{7}{3200}$

3) 8%

4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.

5) 5%

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 17 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 197

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצאו שני מספרים, $b>a$, כך ש- $\int_a^b \left(24-2x-x^2\right)^{\frac{1}{5}}dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

2) $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

3) $(0,0)$ אוכף; $(1,1)$ מינימום.

4) $(-1,\ 1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ -1)$, $(1,1)$, $(1,\ -1)$, $(-1,\ 0)$ אוכף.

5) $(0,\ 2)$ מקסימום.

6) $(4,\ 4)$ מקסימום.

7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

8) אין נקודות קריטיות.

9) $z=4,\quad z=3$

10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3,4/3,10/3)$.

12) $P_1=10\$,\quad P_2=12\$$ רווח מקסימלי $288\$$.

13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2,\ a=2$, לא ניתן לדעת; $a>2,\ a<-2$ אוכף; $-2<a<2$ מינימום.

14) $a=-6,\ b=4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 18 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים..... 199

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **1-5**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $z^3+z+xy-2x-y+2=0 \quad (z=f(x,y))$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} \quad (x,y,z>0)$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **7-11** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$.
מצאו ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$, נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\quad,\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 19 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ..... 201

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $f(x,y)=x^2+y^2;\quad 2x^2+3xy=1-2y^2$

2) $f(x,y)=x^2-y^2;\quad x^2+y^2=1$

3) $f(x,y)=4x+6y;\quad x^2+y^2=13$

4) $f(x,y)=x^2y;\quad x^2+2y^2=6$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\}\quad s.t.\quad x+3y=12$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\}\quad s.t.\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*,L^*),
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי (x^*,y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

2) $\max\left(\pm1,0\right)$ $\min\left(0,\pm1\right)$

3) $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

4) $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

5) $\max\left(6,2\right)$

6) $\max\left(9,36\right)$

7) $\left(6,2\right)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max\left(6,2\right)$

12) $\max\left(2,3\right)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\left\{2K+L\right\}$

14) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 20 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 204

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס״מ, אורך 4 ס״מ, גובה 2 ס״מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3})$.

4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 21 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 206

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 22 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים 207
2. החלפת סדר אינטגרציה 210

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-3** :

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

4) D – משולש בעל הקודקודים : $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים : $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים : $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים הבאים:

11) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint\limits_D |xy|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$$

5) $$\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$

6) $$\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$$

7) $$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

8) $$\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$$

9) $$\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$$
$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

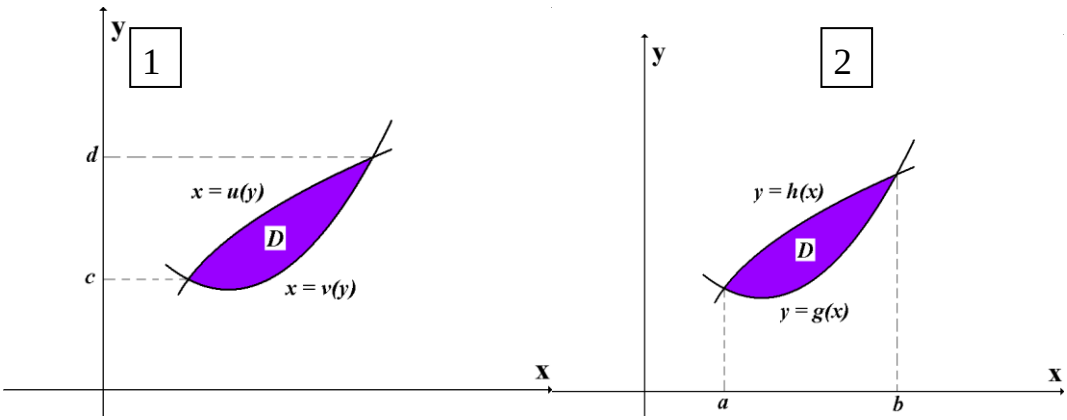
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 23 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול..... 213

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .
בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13) מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$, שבמישור xy .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 24 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 216
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 218

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

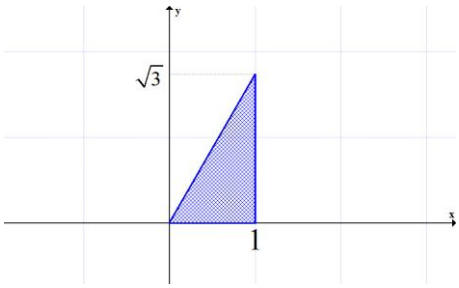
4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le \sqrt{25-x^2}\right\}$.

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le \sqrt{8x-x^2}\right\}$.

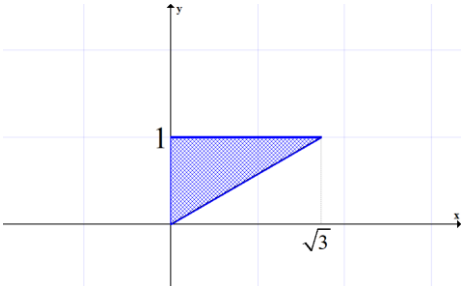
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le \pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0.5\pi\le\theta\le 1.5\pi\end{cases}$

2) א. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ *or* $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 1.5\pi\le\theta\le 2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le \pi\end{cases}$

3) א. $1\le r\le 2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan 2$ ב. $0\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le 1.25\pi$

4) $\dfrac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le 5$, $\arctan\dfrac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi$

5) $0\le r\le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

6) א. $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$ $0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ $0\le r\le\dfrac{1}{\sin\theta}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

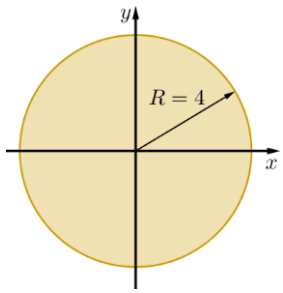
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

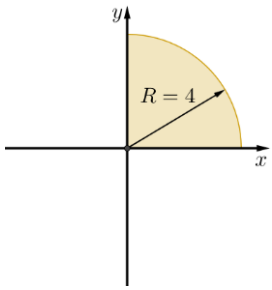
1) חשבו $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

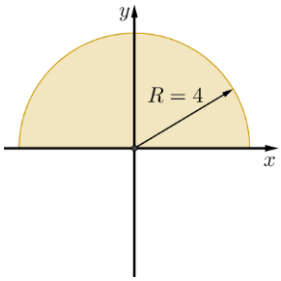
א.



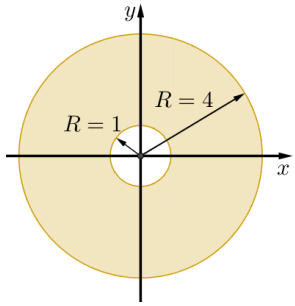
ב.



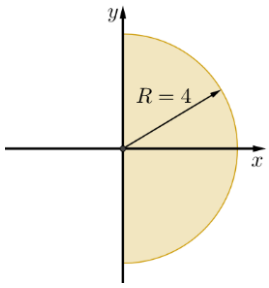
ג.



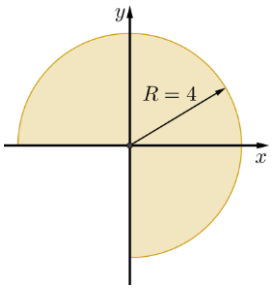
ד.



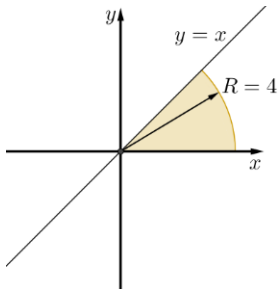
ה.



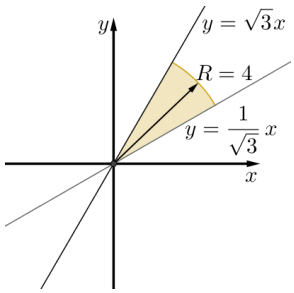
ו.



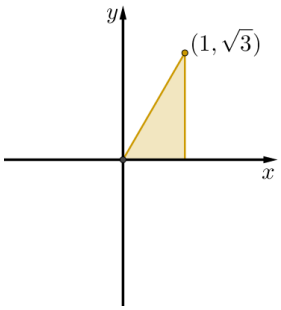
ז.



ח.



ט.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{\pi}{8}$ 5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2 7) 2π 8) 36 9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi \ln\frac{e}{2}$ 11) $\pi(4-\pi)$ 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$ 15) $-\frac{4}{5}$ 16) $\pi\ln\frac{4}{e}$ 17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 25 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול 221

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x$, $y=x-1$, $y=1-x$, $y=3-x$.

2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=0.5x$, $y=x$.

3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(1,1)$.

4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(1,-3)$, $\mathrm{C}(3,-1)$, $\mathrm{D}(1,5)$.

5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2$, $xy^2=1$, $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$.

7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 26 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 223

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\,dy\,dx\,dz$

2) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dx\,dz\,dy$

3) $\iiint_B xyz^2\,dV$, $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}$

4) $\iiint_B 6xy\,dV$, $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\,,\,0\le y\le \sqrt{x}\,,0\le z\le 1+x+y\right\}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

6) $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$

7) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

8) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

11) $(x\geq 0)\quad z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

12) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz\quad(k>0)$.

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\ \ M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 27 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות..... 226

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

1) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2\,dzdydx$

2) $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$

3) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

4) $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12) חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13) הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14) חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15) ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta$

ב. $V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta$$

ב. $$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$ ג. $V=\int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 28 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים..... 230

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבו את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$.

2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשבו את $\iiint\limits_G x^2dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשבו את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=4z^2,\quad y=z^2,\quad y=4x-12,\quad y=4x,\quad y=2z,\quad y=z$.

5) חשבו את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}dV$, כאשר G הוא כדור
שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1 .

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 29 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם 231
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים 235

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y)ds$, כאשר:

1) $f(x,y)=1-x^2$; $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

2) $f(x,y)=x$; $C:\ x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$

3) $f(x,y)=x+y$; C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

4) $f(x,y)=x+y^2$; C היקפו של ΔOAB : $O(0,0),\ A(0,1),\ B(1,0)$.

בשאלות **5-6** חשבו את האינטגרל $\int_C f(x,y,z)ds$, כאשר:

5) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$

6) $f(x,y,z)=x^3+3z$; $C:\ x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$

7) חשבו את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

8) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשבו את **מסת** הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות **9-10** חשבו:

9) $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\ ;\ \int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$

10) $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1\ ;\ \int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$

11) חשבו $\int_C ydx+x^2dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו-C נתון ע"י המשוואה:

א. $y=2x$

ב. $y=x^2$

12) חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$, אם העקום נתון על ידי:

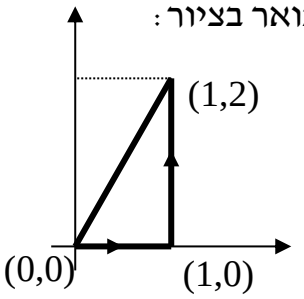
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

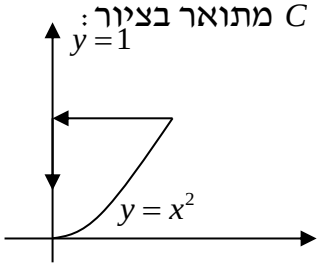
ג. הקווים הישרים מ-$(1,1)$ ל-$(1,2)$ ומשם ל-$(4,2)$.

ד. העקום $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

13) חשבו $\int_C x^2ydx+xdy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



14) חשבו $\int_C (x-y^2)dx+dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$,

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ-$(0,0,0)$ ל-$(0,0,1)$, משם ל-$(0,1,1)$ ומשם ל-$(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו-$(1,1,1)$.

בשאלות **16-17** חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$, כאשר:

16) $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

17) $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

18) נתון שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$.

א. חשבו את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ-$(-2,4)$ עד $(1,1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ-$(1,1)$ עד $(-2,4)$?

19) חשבו את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$,

על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$.

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C (f,g,h)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C (A_1,A_2,A_3)\cdot(dx,dy,dz)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) π

2) $\frac{16}{3}$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

6) $\frac{567}{2}$

7) 6

8) $\sqrt{5}k\pi^2$

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{4}{3}$

11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

13) $\frac{1}{2}$

14) $\frac{4}{5}$

15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

16) $-\frac{59}{105}$

17) $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

18) א. 3 ב. -3

19) 1

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

עקום	הצגה פרמטרית	דוגמה
$y=f(x)\ (a\le x\le b)$	$x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$	$y=x^2\ (1\le x\le 2)$ $\Downarrow$ $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x=f(y)\ (a\le y\le b)$	$y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$	$x=y^2\ (1\le y\le 2)$ $\Downarrow$ $y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$x^2+y^2=r^2$ מעגל	$x=r\cos t, y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2+y^2=4$ $\Downarrow$ $x=2\cos t, y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אליפסה	$x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ $\Downarrow$ $x=3\cos t, y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$
ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0,y_0) לנק' (x_1,y_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מהנק' $(1,2)$ לנק' $(3,4)$ $x=1+2t$ $y=2+2t$ $(0\le t\le 1)$
ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0,y_0,z_0) לנק' (x_1,y_1,z_1)	$x=x_0+t(x_1-x_0)$ $y=y_0+t(y_1-y_0)$ $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0\le t\le 1)$	ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$ $x=1+3t$ $y=2+5t$ $z=3+6t$ $(0\le t\le 1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 30 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול..... 236

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות **1-6** קבעו האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר;
אם כן, מצאו פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$.

1) $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

2) $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

3) $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^{2}\sin y-\sin x\right)$

4) $\mathbf{F}(x,y,z)=z^{2}\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

5) $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+\left(xy+3z^{2}\right)\mathbf{k}$

6) $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^{2}\right)$

7) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^{2}-y^{3}\right)dx+\left(6x^{2}y-3xy^{2}\right)dy$.

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

8) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^{3}dx+\left(1+3x^{2}y^{2}\right)dy$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^{4}+3\right)dx+\left(x^{2}-4xy^{3}\right)dy$.

10) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצאו את **העבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^{2}}$, מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.
תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשבו:

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$, נסמן $f=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad g=\frac{x}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\right\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\right\}$,
חשבו את $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,
בתחום $D=\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$.

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $f=\frac{x}{x^2+y^2},\quad g=\frac{y}{x^2+y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$$
$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$

2) השדה אינו משמר.

3) $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$

4) $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

5) $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$

6) השדה אינו משמר.

7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

8) -58

9) 5

10) -2

11) $=15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1,-1,1)$ ל- $(2,1,-1)$, לאורך C.

12) א. 2π ב. -2π ג. 0

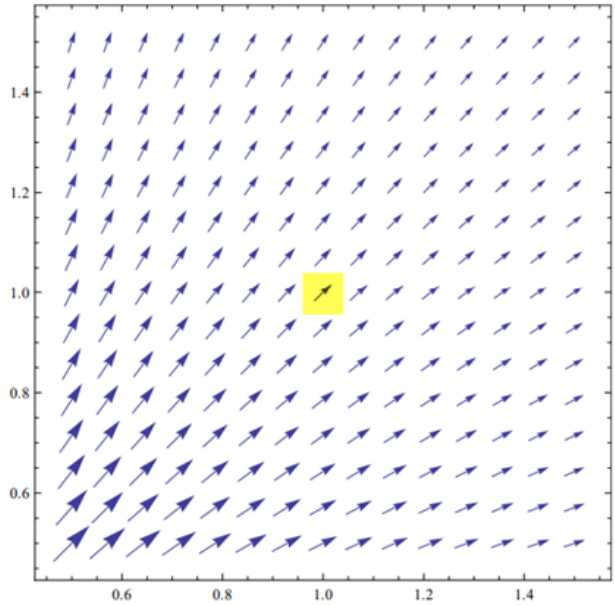
13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.
ג. שאלת הוכחה.

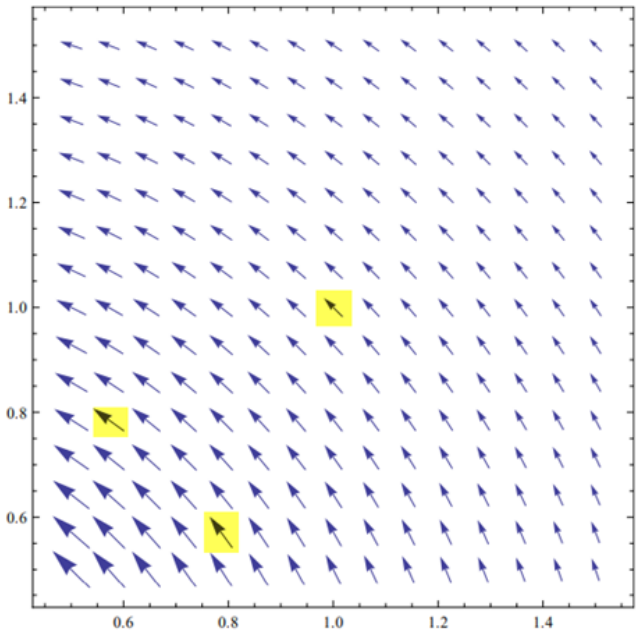
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 31 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין 241

משפט גרין

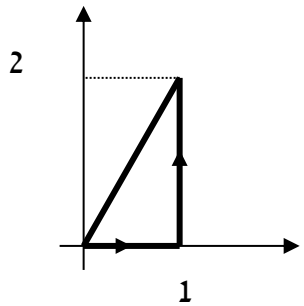
שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט גרין.

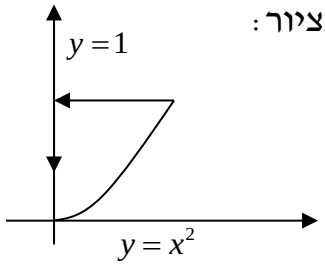
כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C fdx+gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x-f_y)dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.

1) $\oint_C x^2ydx+xdy$; המסלול C מתואר בציור:



2) $\oint_C (x-y^2)dx+dy$; המסלול C מתואר בציור:



3) $\oint_C (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, C הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ בכיוון החיובי.

4) חשבו את **העבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\mathbf{i}+\left(\cos y+x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2+y^2=1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון,

ומשלים הקפה אחת.

5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y-\tan\frac{x}{2}\right)dx+\left(xe^y+y\cos y^2\right)dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y=x^2$, $y=8-x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) חשבו את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy$,

כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{x^2+4y^2=4,\ y\ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$

לנקודה $(-2,0)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C,

נתון על ידי $\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.

ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C\left(x^3+3x^2y+3xy^2y^3\right)dx+\left(3x^2y+3x-\sin y\right)dy$,

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C,
החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3dx+x^3dy=0$.

10) חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dx+\frac{x-4y}{4\cdot\left(x^2+y^2\right)}dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 0.5.
2) הערך המשותף הוא 0.8.
3) הערך המשותף הוא 8.
4) 1.5π
5) $0.5\sin 64$
6) $\frac{8}{3}+e^4-\frac{1}{e^4}$
7) א. הוכחה. ב. πab
8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2+y^2=1$.
9) הוכחה.
10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 32 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של משטח ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 244
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 246

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את האינטגרל המשטחי:

1) $\iint_S x^2yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=1+2x+3y$, מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

2) $\iint_S xdS$, כאשר S הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

3) $\iint_S yzdS$, כאשר S הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר S הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

5) $\iint_S xyzdS$, כאשר S הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$, המקיים $0\le v\le\frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

6) חשבו את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס R.

7) היריעה הדקה S היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$, וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשבו את **מסת** היריעה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) 16π

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$

2) $\frac{8\pi}{3}$

3) 27

4) 12π

5) -16π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 33 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ 247

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות **1-3** אשרו את משפט הדיברגנץ.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$,
והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G, $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו-$z=2$.
חשבו את ה**שטף** של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך S.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

5) חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

6) חשבו את $\iint_S xz^2dydz+\left(x^2y-z^3\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z=0$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

7) יהי S משטח <u>פתוח</u> $x^2+z^2=16$, $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את ה**שטף** דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S.

$$;\ \mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$.

2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$.

3) הערך המשותף הוא 27.

4) 279π

5) 16

6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

7) 0

8) -4π

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 34 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס 249

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,
והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\ge 0$.

2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$; S הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y=2$.

ג. במישור $2x+z=6$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$, כאשר C עקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$;
ו- C היא שפת המשולש, שקדקודיו הם $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$,
וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

6) חשבו את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$; ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$, ומעל למישור xy .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) חשבו את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$, כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$;

ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$,

מתקיים: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$.

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\oint_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

תשובות סופיות

1) הערך המשותף הוא 12π.

2) הערך המשותף הוא -16π.

3) הערך המשותף הוא : א. -6 ב. -9 ג. -18

4) -90

5) -1

6) 0

7) 12π

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 35 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 251
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 253
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 254
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 256
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 258

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx$ $(m, n > 0)$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$.

5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi} \ln(1+\alpha \cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$, עבור $|\alpha| < 1$.

6) חשבו $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$, עבור $\alpha \neq \pm 1$.

7) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

8) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x^p (\ln x)^m dx$ $(p > 0,\ m \in \mathbb{N})$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2} dx$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx=\begin{cases}0 & |\alpha|<1\\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1\end{cases}$

7) $\frac{\pi+2}{8}$

8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b,a > 1$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2-(a-\sin x)^2\right]dx = 2\pi(b^2-a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך.

בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל.

בררו עם מתרגלות\ו\ו\ו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא.

במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.

בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכיחו שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \ge k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \ge k > 0$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \ge k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}xdx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{\pi}{2}.$$

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\int_0^\infty x^{10}e^{-x^2}dx$

ג. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha>0)$.

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (n-1)\cdot \sqrt{2\pi}$.

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\ge k>0$.

2) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\ge k>0$.

3) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4) הוכיחו כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

5) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}$ $(\alpha,r>0)$

ב. $\int_0^\infty\left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $(\alpha,r>0)$

ג. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $(\alpha>0)$

6) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשבו את $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 36 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 260
3. משוואה הומוגנית 262
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 264
5. משוואה מדויקת 265
6. גורם אינטגרציה 267
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 270
8. משוואת ברנולי 272
9. משוואת ריקטי 273
10. הצבות שונות ומשונות 274
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 275
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 278
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה 280

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \qquad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right| + c\ , \qquad y = -\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right| - \frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right| + c\ , \quad y = x,\ \ y = -3x$

3) $-\ln|x| = \ln\left|(y/x)\right| - (y/x) + c, \quad y = 0$

4) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x$

5) $\ln|x| = -\sin(y/x) + c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c, \qquad y = 0$

7) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

8) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t$

9) $n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right) + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ \ ,y=x-3\ \ ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x dy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+(xy)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$; $y(1)=-1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $(5x^2+3y^3+2xy)dx+(3x^2+3xy^2+6y^3)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx+(x+xy^2)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: } \frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy) \quad \text{then: I.F. : } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y) \quad \text{then:I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \;;\; y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \;;\; z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^{x}\right)y + y^2$

2) $y' = 1 + (x - y)^2$

3) $y' = 1 + x + 2x^2\cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^2\cos x$

תשובות סופיות

1) $y(x) = -0.5e^{x} + \dfrac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$

2) $y(x) = x + \dfrac{1}{-x + C}$

3) $y(x) = x + \dfrac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y' = \cos(y - x)$

2) $y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1) = 0$

3) $y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4},\ \ y(0) = 1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z} + c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש- $y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

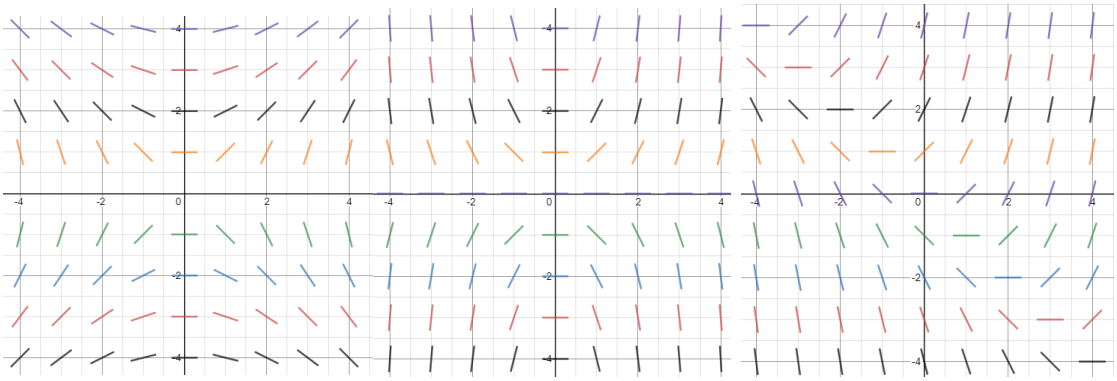
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1 איור 2 איור 3

3) נתונה המד"ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

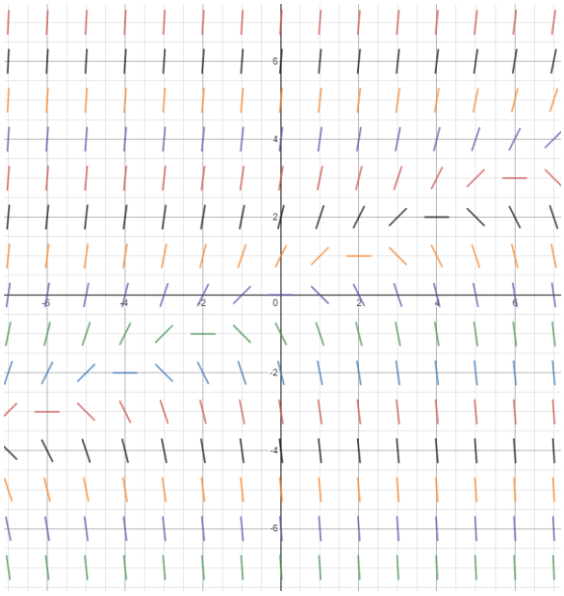
4) נתונה המד"ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 37 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה..... 282
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים..... 284
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"..... 286
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"..... 288
5. וריאציית פרמטרים..... 290
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל..... 291
8. הוורונסקיאן ושימושיו..... 292
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני..... 294
10. השיטה האופרטורית..... 295

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

2) $y''\tan x-1=y'$ $(\cos x\neq 0)$

3) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+(y')^2=0$

7) $2y''y-(y')^2=1$

8) $y''\tan y=2(y')^2$ $(\cos y\neq 0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2;\ y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;\ y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k\ \ ;\ \ y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right)\ \ ;\ \ y=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11) $\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{10} e^{2x}\cos x + \frac{3}{5} e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x\cos x$

7) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x}$

8) $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

9) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$

10) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

11) $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y''-2y'+y=e^{2x}$ $\quad y(0)=2,\ \ y'(0)=7;$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7) $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

8) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - xe^{x}$

9) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

10) $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

11) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2e^{x} - 3xe^{x} + 2e^{3x}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$; $y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^x-xe^x+xe^x\ln x\quad(x>0)$

5) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$, כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

2) $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

3) שאלת הדגמה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.

חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$, $y_2=|x^3|$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I ,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(aD^2+bD+c\right)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(D^2-D-2\right)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2) $\left(D^2-2D+1\right)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3) $\left(D^2+D-2\right)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4) $\left(D^2+4\right)y=\sin 5x$

5) $\left(D^2-4\right)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $\left(D^2+D-2\right)y=\cos x-3\sin x$

7) $\left(D^2+2D-3\right)y=2\cos x\cos 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4x e^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 38 - גיאומטריה אנליטית

תוכן העניינים

1. נקודה וישר ..... (ללא ספר)
2. המעגל ..... (ללא ספר)
3. האליפסה ..... (ללא ספר)
4. הפרבולה ..... (ללא ספר)
5. מקומות גיאומטריים ..... (ללא ספר)
6. תרגילי הוכחה ..... (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 39 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות 297
3. חישוב גבול לפי אוילר 299
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ 300
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש 303
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית 304
7. חישוב גבול לפי ההגדרה 306
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה 308
9. הגדרת הגבול לפי היינה 311
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס 313
11. משפט שטולץ 318
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות 320
13. שאלות הוכח או הפרך 322

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{4}{n}\right)$

21) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

22) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

23) $\lim_{n\to\infty}4^n\sin\frac{1}{n}$

24) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

<u>הערה חשובה מאוד!</u>

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x. יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) ∞
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}\right) \Leftarrow (b \neq 0)$, $\left(\lim a_n = \infty\right) \Leftarrow (a > 0,\ b = 0)$, $\left(\lim a_n = -\infty\right) \Leftarrow (a < 0,\ b = 0)$
15) 2.5
16) $\frac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\frac{a-b}{2}$
20) 4
21) 0.5
22) $\frac{1}{3}$
23) ∞
24) 1

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^2

4) e^{-1}

5) e^3

6) e^{-12}

7) e^{30}

8) e

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הגבול:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **9**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $\alpha\in(0,1)\ ,\ a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>2$.

13) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

14) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+3}^{2n+4}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k\sqrt{n}}}$.

16) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{2n^2+3n+5}{\sqrt[3]{5n^{12}+2k^5+k^3+1}}$.

17) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{n^2+n}\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

18) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 0
4) 0.75
5) 3
6) $\frac{3}{4}$
7) 0
8) 16
9) 0
10) 1
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) 9
14) 1
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
17) 1
18) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

4) יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n.

הוכיחו שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n.

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a, עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל n.

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

<u>הניחו</u> שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

8) תהי a_n סדרה המוגדרת על ידי $a_1=0.5$ ו- $a_{n+1}=\sin\left(a_n^2\right)$ לכל $n\ge 1$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

תשובות סופיות

1) הגבול הוא 2 .

2) הגבול הוא 1.

3) הגבול הוא 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות **1-7** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2+3}=\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cos^2 n}{n^2+2}=0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

9) נתון כי $a_n\to a,\ b_n\to b$.
הוכיחו לפי ההגדרה, כי:
א. $(a_n+b_n)\to a+b$
ב. $(a_n\cdot b_n)\to a\cdot b$

בשאלות **10-14** הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי:

10) $\lim\limits_{n\to\infty}2n+4=\infty$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

15) הוכיחו שהסדרה $1,101,2,102,3,103,4,104,\ldots$ שואפת לאינסוף.

16) הוכיחו שהסדרה $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ שואפת לאינסוף.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכיחו שהסדרה $-1,2,-3,4,-5,6,\ldots,(-1)^n n,\ldots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $1,4,1,4,1,4,1,4,\ldots$

ב. $1,4,10,1,4,10,1,4,10,1,4,10,\ldots$

ג. $1,0,-4,1,0,4,1,0,-4,1,0,4,\ldots$

2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות,
וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאת.

א. $\frac{1}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{2}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{3}{7},\mathbf{\frac{1}{6}},\frac{4}{9},\mathbf{\frac{1}{8}},\ldots$

ב. $\frac{3}{3},\mathbf{\frac{3}{4}},\frac{7}{5},\mathbf{\frac{5}{6}},\frac{11}{7},\mathbf{\frac{7}{8}},\frac{15}{9},\mathbf{\frac{9}{10}},\ldots$

ג. $a_n=\frac{(-1)^n n+4}{n+1}$

בשאלות **3-6** הוכיחו לפי ההגדרה כי:

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+10}{4n+2}\neq\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+1}{2n^2+2}\neq 1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{2n^2+n+2}\neq\frac{9}{4}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\neq 1$

7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n=(-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n=(-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n=(-1)^n\frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ldots$ מתבדרת.

9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3,2,1,3,2,1,3,2,1,\ldots$ מתבדרת.

10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots$ לא קיים גבול.

11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ מתבדרת.

12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\frac{n}{10}-\left[\frac{n}{10}\right]$ מתבדרת.

13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n+1} & n \text{ even}\\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd}\end{cases}$ מתבדרת.

14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2},\mathbf{1},\frac{2}{3},\mathbf{\frac{1}{2}},\frac{3}{4},\mathbf{\frac{1}{3}},\frac{4}{5},\mathbf{\frac{1}{4}},\frac{5}{6},\ldots$ מתבדרת.

15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n=\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

1. $\sqrt{m^2}-\left[\sqrt{m^2}\right]=0$ לכל m טבעי.
2. $\sqrt{m^2-1}>m-\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
3. $\left[\sqrt{m^2-1}\right]=m-1$ לכל $m\geq 2$ טבעי.
4. $\sqrt{m^2-1}-\left[\sqrt{m^2-1}\right]\geq\frac{1}{2}$ לכל $m\geq 2$ טבעי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2+4n+1}{n^2+2n+10}$ לא שואפת ל-∞.

18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0,1,2,1,4,1,6,1,\ldots$ לא שואפת ל-∞.

19) נתונה הסדרה $-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,\ldots$.
הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה
א. לא שואפת ל-∞.
ב. לא שואפת ל-$-\infty$.

20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n\left[n\sqrt{10}\right]$ לא שואפת ל-∞.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

1) הוכיחו כי:

א. $\sin(2n\pi)=0$	ב. $\cos(2n\pi)=1$
ג. $\sin((2n+0.5)\pi)=1$	ד. $\cos((2n+0.5)\pi)=0$
ה. $\sin((2n+1)\pi)=0$	ו. $\cos((2n+1)\pi)=-1$
ז. $\sin((2n+1.5)\pi)=-1$	ח. $\cos((2n+1.5)\pi)=0$
ט. $\sin(n\pi)=0$	י. $\cos(n\pi)=(-1)^n$
יא. $\sin((n+0.5)\pi)=(-1)^n$	יב. $\cos((n+0.5)\pi)=0$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות **2-9** אינם קיימים לפי היינה:

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{|x-4|}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+4}{\cos x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-[x]}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+4^{[10x]}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]\cdot\sin x}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x-[\sin x]}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(4+[\arctan x]\right)$

10) נתון כי $f(x)=2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$.

א. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.

ב. חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.

ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n, כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ קיים.

11) הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right]\right)$ אינו קיים לפי היינה.

רמז: הוכיחו ראשית כי לכל n טבעי מתקיים $\left[n^2-1\right]=n-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

10) ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^{n}+2}{(-3)^{3n}+(-3)^{n}+2}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^{5n}-2(-3)^{n}+2}{(-3)^{2n}+(-3)^{n}+2}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^{n}$

2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-n\right)$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lfloor 4n\rfloor-4\lfloor n\rfloor\right)$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{4}-\left[\dfrac{n}{4}\right]\right)$

3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

5) חשבו את הגבול הבא $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+(-1)^{n}}{n}\right]^{n}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1=2$; $a_{n+1}=\sqrt{11-(a_n)^2}$.

7) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $a_1=2$; $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

8) נתונה הסדרה a_n, המוגדרת על ידי $a_1=0\ (n\in\mathbb{N})$; $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

10) נתונה סדרה $a_n=\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

11) נתונה סדרה $a_n=n\sin\frac{\pi}{4}n$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

12) נתונה סדרה $a_n=1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

13) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$.
מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

14) נתונה סדרה $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n^{40}}+\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n}{4}\right)$.
מצאו את $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

15) נתונה סדרה a_n, ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\sqrt[n]{n}\cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיימים $m,n\in\mathbb{N}$, כך ש- $|a_m-a_n|>\frac{1}{2}$.

17) נתונה סדרה a_n.

a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

1. $a_{n_k}\to L$, $a_{m_k}\to L$
2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n\to L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות **4-5**.

18) נתונה סדרה חיובית a_n המקיימת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n, $\inf a_n\le\underline{\lim}a_n\le\overline{\lim}a_n\le\sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n<\underline{\lim}a_n<\overline{\lim}a_n<\sup a_n$.

20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\underline{\lim}a_n=\overline{\lim}a_n$.

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n,b_n מתקיים

א. $\overline{\lim}(a_n+b_n)\le\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$

ב. $\underline{\lim}(a_n+b_n)\ge\underline{\lim}a_n+\underline{\lim}b_n$

22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n.

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\overline{\lim}(a_n+b_n)<\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

הוכיחו כי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\ge \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}a_n)=1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

ב. הוכיחו שאם $L>0$ הוא גבול חלקי של (a_n),

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L=0$ הוא גבול חלקי של (a_n).

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n),

המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0\le a_n,b_n\le 1$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

26) תהי $a_n=\langle\sqrt{n}\rangle=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle\sqrt{n^2-1}\rangle=\sqrt{n^2-1}-n+1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-(n-1)\right)=1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).

ו. מצאו את $\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) תהי $(a_n)=\left(n-\sqrt{n}\left[\sqrt{n}\right]\right)$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.

ב. הוכיחו ש- 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n\in N\}$ ואת $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n\in N\}$ יש מינימום.

ד. יהי ℓ מספר טבעי.

הוכיחו שכמעט לכל n, מתקיים $n<\sqrt{n^2+2\ell}<n+1$.

ה. יהי ℓ מספר טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2\ell}-n\right)=\ell$.

ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?

ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

ט. מצאו את $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm\frac{1}{e}$.

2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0, 0.25, 0.5, 0.75$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט שטולץ

שאלות

1) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

2) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n\cdot(2n+1)}{n^3}$.

3) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, כאשר p קבע שלם וחיובי.

4) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot c_1+2\cdot c_2+3\cdot c_3+\ldots+n\cdot c_n}{n^3}$, אם ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=k$.

5) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{[1^2\cdot a]+[2^2\cdot a]+\ldots+[n^2\cdot a]}{n^3}$, כאשר a קבוע ממשי.

6) נתון כי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L\neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n>0$ לכל n.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{p+1}$

4) $\frac{k}{3}$

5) $\frac{a}{3}$

6) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$, לכל n.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$, לכל n, כאשר $0 < a < 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos\alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \le k|x_{n+1} - x_n|$ לכל n, כאשר $0 < k < 1$.
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $x_1 = 1$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$,

ב. $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n^2}$, $x_1 = 1$,

ג. $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$, $x_1 = 1$,

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נגדיר סדרה x_n על ידי $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

10) סדרה x_n מקיימת $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל n טבעי, ו- $1\le x_1\le x_2\le 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\frac{1}{2}$.

11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n.

אם $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2}-x_{n+1}|<|x_{n+1}-x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0<\alpha<1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\alpha\cdot|x_{n+1}-x_n|$$

הערה

בשאלות **7-10** מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה **6**.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכיחו או הפריכו

הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים:

א. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X.

ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X.

ג. לכל n, פרט למספר סופי של n-ים, מתקיימת הטענה X.

שאלות

בשאלות **1-13** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.

2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

3) אם $\lim_{n\to\infty} |c_n| = k$, אז $\lim_{n\to\infty} c_n = k$ או $\lim_{n\to\infty} c_n = -k$.

4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.

5) אם ל-a_n ו-b_n אין גבול, אז גם ל-$(a_n + b_n)$ וגם ל-$(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.

6) אם ל-a_n ו-b_n אין גבול, אז גם ל-(a_n / b_n) אין גבול.

7) אם a_n מתכנסת ו-b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.

8) אם a_n מתכנסת ו-b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.

9) אם $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = L$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{L}$.

10) אם $a_n < b_n$ לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

12) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל n, אז $k < 1$.

13) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$ אז.

14) הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n $(b_n \neq 0)$ סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}}\left(b_n^2 + 2b_n\right)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n $(b_n \neq 0)$ סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{a_n}{n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות **15-18** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

15) אם לכל n מתקיים: $a_n \in (0,1)$, $a_{n+1} < a_n^2$ אז הסדרה a_n מתכנסת.

16) הסדרה $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ מתבדרת.

17) אם לכל n מתקיים: $x_n \in (0,1)$, $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$ אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) הוכיחו או הפריכו:

א. אם הסדרה $(x_n+\frac{1}{n}x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ב. אם הסדרה $\left(x_n^2+\frac{1}{n}x_n\right)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

20) x_n סדרה של מספרים **שלמים** המקיימת $x_{n+1}\neq x_n$ לכל n.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

21) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ו- $a<b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n<b_n$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n\le b_n$, אז $a\le b$.

22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n=0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ge 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n\ge 0$.

ג. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n\neq 0$.

ד. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n>0$.

23) הוכיחו או הפריכו:

א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n\le k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n<k$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le k$.

24) תהי (a_n) סדרה **חיובית**, המקיימת $a_{n+1}\le\frac{a_n-a_n^2}{2}$, לכל n.

הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

25) הוכיחו או הפריכו:

אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^2=0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n), שעבורן: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=4$, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=2$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n\to 0,\ b_n\to 2$ או $a_n\to 2,\ b_n\to 0$.

ב. $a_nb_n\to 0$

27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2}\le a_{2n}\le a_{2n+1}\le a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2}<a_{2n}<a_{2n+1}<a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$0\le a_{m+n}\le\frac{1}{2}(a_m+a_n)$ לכל m,n טבעיים.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

30) נתונה הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ- 3.

רמז: לכל $x\ge 0$ מתקיים $\ln(1+x)\le x$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **31-34** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו-(b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$.

31) אם כמעט כל איברי (a_n) ו-(b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

32) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33) א. $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

ב. קיים $N>0$, כך שלכל $n>N$, מתקיים $b_n\neq 0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=5$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

34) א. אם, כמעט לכל n, $b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ב. אם, כמעט לכל n, $0<b_n<a_n$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

בשאלות **35-38** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו-(b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=1$.

35) א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N>0$, כך ש- $b_n>\frac{1}{2a_n}$, לכל $n>N$.

36) אם (a_n) ו-(b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37) א. אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

38) א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$, אז $\lim_{n\to\infty}|b_n|=1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **39-42** הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
כאשר ידוע כי (a_n) ו-(b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=0$.

39) א. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n, $a_n > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי n, כך ש-$a_n > 1$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

ד. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

40) א. אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n, $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

41) אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < \frac{1}{3}$.

42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty$.

ב. אם קיים קבוע $c > 0$, כך ש-$b_n \geq c$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ לא קיים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n|a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \infty$.

46) נתונה סדרה חיובית (a_n).

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא:
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית (a_n), וידוע כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.

ב. אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.

ג. אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < |a_n|$, אז היא יורדת.

49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.

ב. כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.

ג. אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.

ב. אם $|a_n| > 0$ לכל n, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.

ג. אם לכל n מתקיים $|a_n| \geq n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 40 - מבוא לטופולוגיה

תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה 330

מבוא לטופולוגיה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
הערה: נקודת שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה D ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

2) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה D ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

ג. האם הקבוצה חסומה?

ד. האם הקבוצה קשירה?

ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.

ו. האם הקבוצה פתוחה?

ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.

ח. האם הקבוצה סגורה?

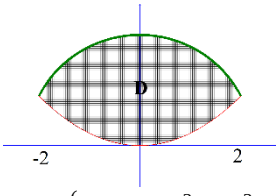
ט. האם הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בקבוצה D ?

י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 5\,,\ y>\frac{1}{4}x^2\right\}$ ב.



ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=5\,,\ -2<x<2\right\}$

ו. הקבוצה אינה פתוחה.

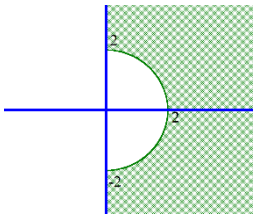
ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=5,-2<x<2\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,4y=x^2,\ -2<x<2\right\}}_{E}$

$(0,\sqrt{5})$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(0,0)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.

2) א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\,,\ x>0\right\}$ ב.



ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות $C=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\,,\ -2<y<2\right\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

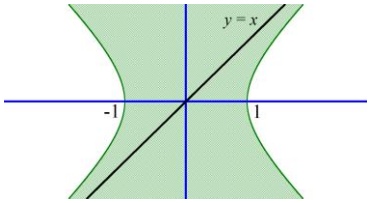
ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\,,\ -2<y<2\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x=0\,,\ |y|>2\right\}}_{E}$

$(2,0)$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(0,3)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה D .

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.

3) א. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\,,\ y\ne x\right\}$ ב.



ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D פנימיות **למעט** הנקודות: $\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=1\ or\ \ y=x\right\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D=\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=1\right\}}_{C}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\,|\,y=x\right\}}_{E}$

$(0,0)$ נק' שפה ששייכת לקבוצה. $(-1,0)$ נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה $f(x,y)$ לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©