

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022



תוכן העניינים

1	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות (ללא ספר)
1	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות
23	גבול של פונקציה
41	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
56	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות
69	חישוב נגזרת של פונקציה
82	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
93	כלל לופיטל
100	אינטגרלים מיידיים
105	משוואות מסדר ראשון
111	שימושים של משוואות דיפרנציאליות
119	חקירת פונקציה

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 1 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום..... (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 2 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה 1
2. הרכבת פונקציות 3
3. הפונקציה ההפוכה 6
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 10
5. פונקציה מחזורית 15
6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית 18
7. תרגילים משולבים 19

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x + 4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x + 4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x + 1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x - 4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

(14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל x .

(17) $3 < x < 5$

(18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

(1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(2) נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x = 3$.

(3) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$.

חשבו $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x = 8$.

(4) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

(5) נתון: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = 2$.

(6) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$.

חשבו $f(g(x))$, $g(f(x))$.

(7) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

(9) נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאן את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע? מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.

ג. אם f ו- g על, אז h על.

ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h על.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$,
ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

(1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .

(2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.

(3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.

(4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.

(5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.

(6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.

(7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.

(8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$; $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

(9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.

(10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.

(11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: \mathbb{R} ; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח: \mathbb{R} , תמונה: $(0, 1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה \mathbb{R} , טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3) \qquad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \qquad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6) \qquad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \qquad y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), k(x) = -f(x)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z, k , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3)$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4), k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z, k , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- \mathbb{R} ומקיימת $|f(x)| < 1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- \mathbb{R} .

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

(13) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

(14) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

(15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- נגדיר $z(x) = (f(x))^n$ כאשר $n > 1$ טבעי.
קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

(16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר :}$$

- א. הוכיחו כי $f_{\text{odd}}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x + 1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$.
- ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

(18) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה $f(x) = \cos x$ היא זוגית.
 ב. הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אי-זוגית.
 ג. הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא אי-זוגית.
 ד. הפונקציה $f(x) = \cot x$ היא אי-זוגית.

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

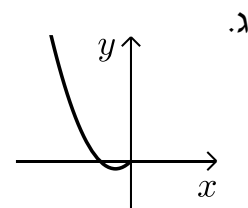
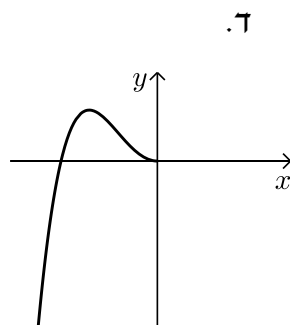
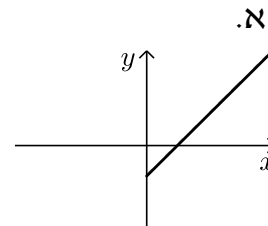
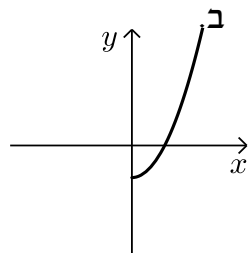
הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

(20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

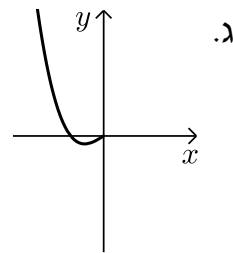
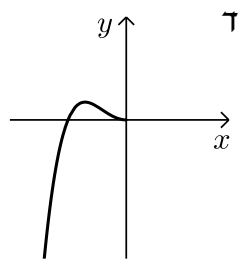
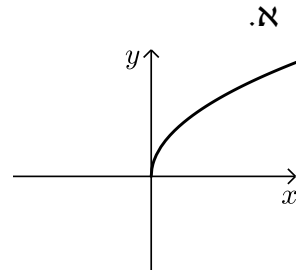
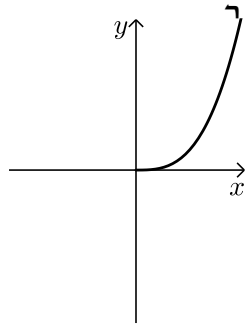
א. $y = \arctan x$

ב. $y = \arcsin x$

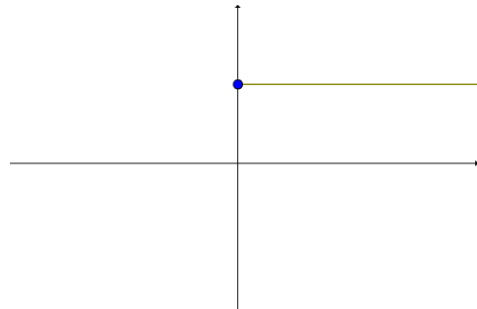
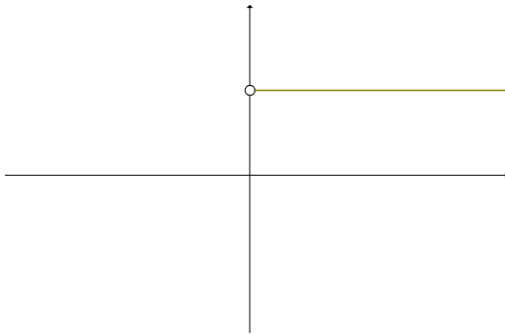
(21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22 הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



23 השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) טענה ב'.

(11) k אי-זוגית, z זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

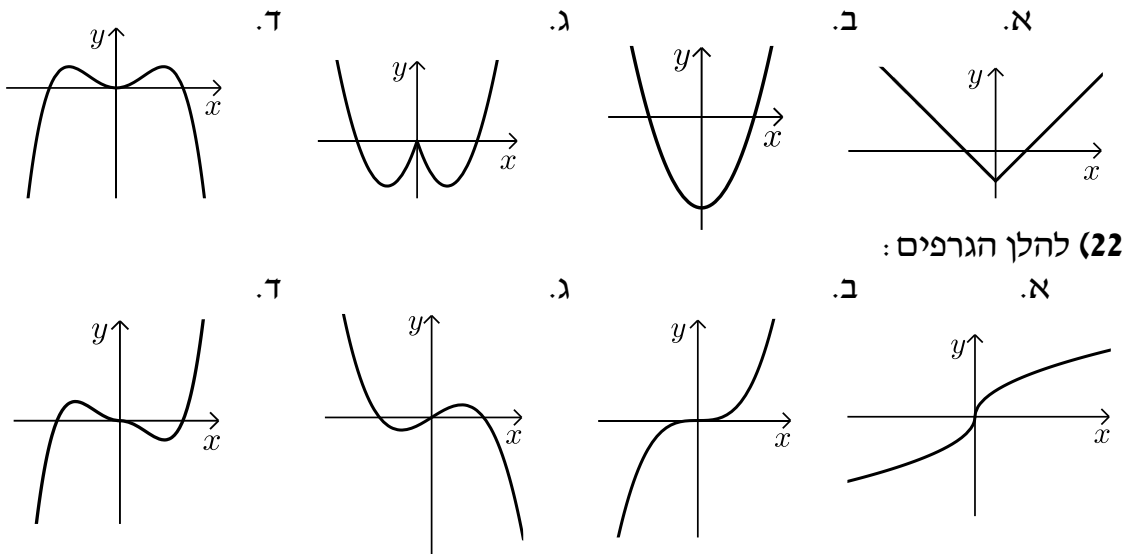
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :

(23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,

אז $y = a + b \cdot f(cx + d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

(28) הוכיחו : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x + nT) = f(x)$.

(29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) הן מחזוריות.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

- (1) 4π (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π (5) $\frac{\pi}{4}$
- (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) π (8) π (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) π
- (11) 40π (12) π (13) 2π (14) 2π (15) 2π
- (16) π (17) π (18) π

(19) הפונקציה היא למעשה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית. כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20) $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

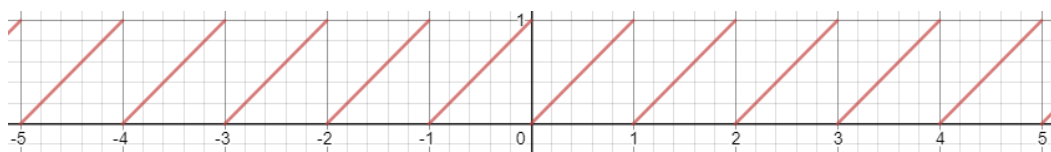
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

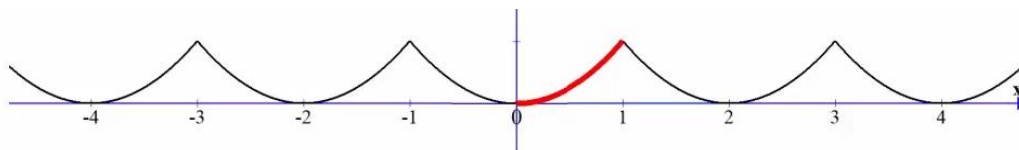
(30) א.



ב. 1. ג. שאלת הוכחה.

(31) $g(x) = x - k$, עבור k שלם, זוגי.

(32) $g(x) = (x - k)^2$, עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

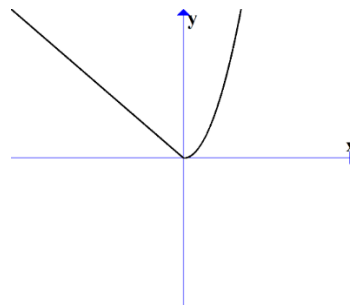
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1) = 1$, $f(4) = 16$, $f(-4) = 4$, $f(0) = 0$, $f(7) = \text{undefind}$ ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על \mathbb{R} .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על \mathbb{R} .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי $h(x) = f(g(x))$.

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי $h(x) = f(g(x))$.

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על \mathbb{R} .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$
ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע.
ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה.
ג. הפונקציה לא חח"ע.
ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה: כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$. ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$. ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 3 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	23
3. צמצום	24
4. הכפלה בצמוד	25
5. גבולות טריגונומטריים	26
6. פונקציה שואפת לאינסוף	29
7. איקס שואף לאינסוף	30
8. הגבול של אוילר	32
9. כלל הסנדויץ	33
10. גבול של פונקציה מפוצלת	35
11. גבול לפי הגדרה	38

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad -\frac{1}{12} \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8) \qquad \frac{1}{3} \quad (7) \qquad \frac{3}{4} \quad (6) \qquad \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \quad (9)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$ |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

- | | | | |
|---|--------------------------------------|------------------------|--------------------|
| $-\infty$ (4) | 4 (3) | $-\frac{\pi}{2}$ (2) | 0 (1) |
| -1 (8) | 1 (7) | -5 (6) | 0 (5) |
| $\frac{1}{4}$ (12) | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) | 1.5 (10) | -3 (9) |
| 2 (16) | $\frac{1}{9}$ (15) | 4 (14) | 0 (13) |
| | 0 (19) | $e^{\frac{1}{3}}$ (18) | $\ln 3$ (17) |
| $-\infty: b=0, a < 0$: א. $\infty: b=0, a > 0$ א. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א. (20) | | | |
| $-\frac{1}{2}$ (24) | $\frac{1}{2}$ (23) | $\frac{k}{2}$ (22) | 2.5 (21) |
| $\frac{5}{4}$ (28) | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27) | $\frac{a-b}{2}$ (26) | $\frac{1}{2}$ (25) |
| | | | $\ln(6e)$ (29) |

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

$$\text{א. הוכח: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$$

$$\text{ב. האם נכונה גם הטענה: } \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1$$

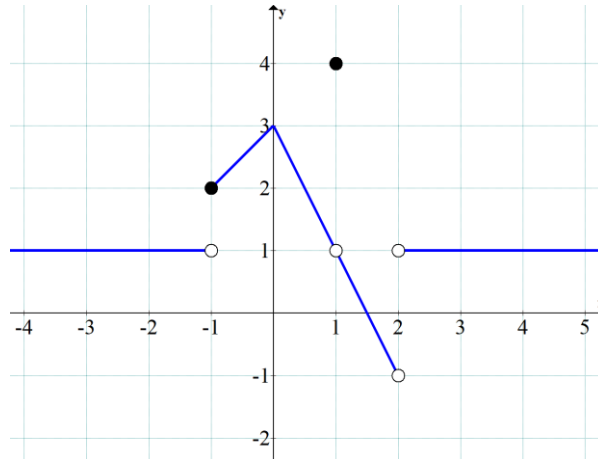
תשובות סופיות

- 0 (5) 3 (4) $\frac{3}{4}$ (3) 0 (2) 0 (1)
- 0 (10) 1 (9) 4 (8) $\frac{3}{4}$ (7) 0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$ (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} \quad (3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) :$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$.

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$. א. (1)
1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$. ב.
1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$. ג.
- א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. ג. 6. (2)
- א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. ג. -1. (3)
4. (4)
- ϕ . (5)
- ϕ . (6)
1. (7)
- 1. (8)
- א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$. (9)

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x > M$ מתקיים $f(x) < -4$.

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x > M$ מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של $M > 0$, עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|\forall x > M : f(x) - L| < 0.1$).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של } 0 \text{ שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$ ($k \neq 0$)

תשובות סופיות

(7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 4 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

41	1. רציפות של פונקציה
48	2. משפט ערך הביניים
52	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
55	4. שיטת החצייה

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17 ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$\text{18 תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

19 תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$\text{תהי } g \text{ הפונקציה המוגדרת בקטע } (0,2), \text{ על ידי } g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

א. האם יתכן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

21 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$\text{22 נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

(25) הפונקציות $f(x) + 2g(x) - 3g(x) - 2g(x) - f(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

(26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

(28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

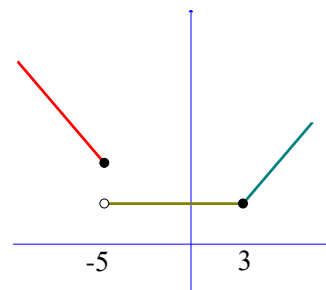
ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- \mathbb{R} אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- \mathbb{R} :

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8) $k=1$
- (9) $k=4$
- (10) $k=\frac{2}{3}$
- (11) $k=-1$
- (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x , המקיימת: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה $2x + f(x) = 1$ יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0, 2)$?

10 תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ המקיימות $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f(c) = g(c)$.

11 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(1)$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$ כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$.

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = f(d)$.

14 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.

הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$ כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

15 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(8)$.

הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$ כך ש-

$$f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

16 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x + \sin x$ היא על \mathbb{R} .

17 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$ היא על \mathbb{R} .

18 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π .

הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

19 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.

הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה. הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה חח"ע ועל. הוכיחו כי f לא רציפה ב- \mathbb{R} .

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x , שעבורם $f(x) = \sin x$.

(22) יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות :

כאשר $0 < k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$. הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה x_1, \dots, x_n (כאשר $n > 1$) נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות x_1, \dots, x_n , שונות זו מזו,

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

כאשר $n > 1$, כך ש-
הוכיחו זאת.

(25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) .

נניח כי: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

הראו כי תמונת הקטע (a, b) היא \mathbb{R} .

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0) = -1$, $f(1) = 4$.

תהי $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$.

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α .

ג. הוכיחו כי $\alpha \in (0,1]$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha) = 0$.

(27) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$.

הוכיחו שקיימים $a < x_1 < x_2 < b$, כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$.

(28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0 \leq r \leq 1$.

הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$.

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) > 0$, $f(4) > 2f(2)$.

הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c) = 2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$.

(30) פונקציה f מוגדרת לכל x .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

(8) $[0,1]$

(9) א. $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

- (1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:
- א. חחייע, אבל לא מונוטונית.
 - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
 - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
 - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
 - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
 - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
 - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
 - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
 - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
 - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
 - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.
- (2) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$ לכל $x \in [a,b]$.
- (3) תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.
- (4) יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1, x_2 ,
המקיימות $x_1 < x_2$, קיימת נקודה x_3 כך ש- $x_1 < x_3 < x_2$, שעבורה $f(x_3) = g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x) = g(x)$ לכל x .
- (5) תהי $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.
- (6) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x) = f(x^2)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

(7) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y) = f(x) + f(y)$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x) = f(1)x$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

(8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K , כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a, b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$
 הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a, b) .
 * נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

(9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
 באריכות:
 הוכיחו שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$, כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$, לכל $x \in \mathbb{R}$.

(10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
 ג. תהי $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$.
 הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

(11) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .
 ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

בשאלות **12-13** הוכיחו:

(12) אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

(13) אם f רציפה ב- x_0 , ואם $f(x_0) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 , שבה $f(x) > 0$.

14 יהיו $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a) \neq g(a)$, עבור a ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq g(x)$.

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a) \neq 0$, עבור a ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x) \neq 0$. פשוט לקחנו $g(x) = 0$. בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15 הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a , אזי הפונקציה $g(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי a , גם רציפה בנקודה a (כאשר c מספר חיובי כלשהו).

16 נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

17 הוכיחו כי אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in [a, b]$ אז יש $c > 0$ כך ש-
 $f(x) > c$ לכל $x \in [a, b]$.

18 הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- \mathbb{R} אז גם הפונקציה $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ רציפה ב- \mathbb{R} .

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון ε, δ).
 השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

(1) נתונה המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2, 3]$, מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה: $x^3 - x - 2 = 0$.
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

(1) 0.07
 (2) א. $[1, 2]$ ב. 10 ג. $x = 1.520$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 5 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה 56
2. נגזרות חד צדדיות 64

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ (טבעי } n \text{).}$$

- א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$?
 ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$.
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

- (23)** נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$.
הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

- (24)** תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
- א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.
- ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0) = 0$ ו- $f'(0) = k$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$$

הוכיחו כי

- (26)** תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 .
- א. אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .
- ב. אם $f(x_0) = 0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(27) תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגדיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

(28) תהי f פונקציה זוגית ב- \mathbb{R} .

הוכיחו כי אם f גזירה ב- 0 , אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(xy) = f(x) + f(y)$,

לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1) = 0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

(30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם f גזירה ב- x_0 , אז $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$, ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$.

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x) = (x-a)f(x)$. הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c) = 0$. הוכיחו:

א. אם $f'(c) = 0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c .

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c) = 0$.

(39) יהיו f, g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c) = g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x) - g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

(40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$4 \quad (9) \quad 2 \quad (8) \quad !44 \quad (7)$$

(10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

$$n > 2 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$n > 1 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$e \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{4} \quad \text{א.} \quad (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה. $f' = 0$.

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$.

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad (19)$$

ב. $x = \frac{\pi}{2}n$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55.

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$. ג. $-5f'(x_0)$.(36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7) \qquad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9) \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם

הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.

האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$\text{14 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15 חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$\text{16 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1] = -5$, $[4.1] = 4$.

17 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] - [-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] \sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19 נתונה הפונקציה $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.

(20) הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x , אז f גזירה ב- $x=0$.

(21) תהי f פונקציה רציפה ב- $x_0=0$. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = |x|f(x)$ גזירה ב- $x_0=0$ אם ורק אם $f(0) = 0$.

(22) יהיו f ו- g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ ו-} f'_-(x_0) = g'_+(x_0),$$

אז הפונקציה z , המוגדרת על ידי $z(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$, גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ לא גזירה ב- x_0 ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- \mathbb{R} , אז $g \circ f$ איננה גזירה ב- \mathbb{R} .

ג. אם g גזירה מימין ב- x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של x_0 , אז $g(x_0)$ וגזירה מימין ב- $g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב- x_0 .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

(23) תהינה f ו- g פונקציות המוגדרות ב- \mathbb{R} . נתון ש- g היא פונקציה רציפה ב- \mathbb{R} , ולכל $x > y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

הוכיחו כי f גזירה ב- \mathbb{R} , ושכל x ממשי מתקיים $f'(x) = g(x)$.

$$\text{(24) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות f .

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \quad (x > 1) \quad , \quad f'(x) = -4 \quad (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \quad (x \geq 0) \quad , \quad f'(x) = 4x \quad (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

(11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

(14) א. $q=0$ ב. $q=0, p=4$

(15) -10

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר www.GooL.co.il

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	69
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	73
4. גזירה סתומה	76
5. כלל השרשרת	78
6. גזירה לוגריתמית	81

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x^1$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \end{array}$$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ב.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \quad \text{ג.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \quad \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\ f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\ f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\ f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.} \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

גזירה סתומה

שאלות

- (1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- (2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- (3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- (4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$ חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.
- (5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$ חשבו את y' בנקודה בה $y = 0$.
- (6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - xy = 10$.
- (7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - y^x = 1$.
- (8) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ מצאו את ערך y'' בנקודה בה $y = 1$.
- (9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2 + e^y = x$.
 א. הראו שעבור $x = 1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
 ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x = 1$.
- (10) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$, מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x . נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת $z'(x)$.

- ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את $z'(e)$.

$$(3) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו $g'(100)$.

$$(4) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

$$(5) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

חשבו $g'(1)$

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$

חשבו $g'(1)$

$$(7) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f'''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x) = (f(x))^4$. קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית. האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

(1) 40

$$z'(e) = 3\frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) $\frac{17}{80}$

(4) 36

(5) $\frac{8}{9}$

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 7 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

82	1. המשיק
84	2. בעיות משיקים
86	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק.
90	4. הנורמל
91	5. זווית שבין שתי עקומות
92	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם.

המשיק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.
 מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21 \ln 3$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
 לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 3$ ו- $x = 1$.
 ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$$

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$$

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(10) \quad \text{פונקציה } f(x) \text{ גזירה ברציפות ב-} 0 \text{ ומקיימת } f(0) = 0$$

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

$$\text{חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(11) \quad \text{מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 17 \quad \text{ב. } 4$$

$$(2) \quad a = 2$$

$$(3) \quad (1, 3)$$

$$(4) \quad a = 2, b = -1$$

$$(5) \quad a = 2, b = -2$$

$$(6) \quad \text{לערך } k = 6, \text{ בנקודה } x = 1; \text{ לערך } k = \frac{158}{27}, \text{ בנקודה } x = \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad \text{א. ראו באתר. ב. } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$$

$$(8) \quad x = 5, x = -1$$

$$(9) \quad x = 1, x = \frac{1}{3}$$

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(11) \quad \alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$$

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3)$, $y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1)$, $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

(10) נתון כי f גזירה לכל x .

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x .

ב. הישר $2y = 10x + 11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

(1) נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(2) נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.

(3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$

(7) המשיק $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(8) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(9) נקודת ההשקה $(1, 1), k = 1.5$.

(10) א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$, ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x_1 = 2$.

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

(11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

(12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

(13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

(14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

(15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.

(17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.

(18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו- $(2,4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2,1)$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

- (1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

- (1) 71.57°
- (2) 71.56°
- (3) שאלת הוכחה.

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 8 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף..... 93
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף..... 96
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף..... 97
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף..... 98
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל..... 99

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	∞ (34)	0 (33)	∞ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	∞ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x} \quad (13)$$

תשובות סופיות

e^2 (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	e (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	e^3 (7)	1 (6)
0 (15)	e (14)	1 (13)	e (12)	1 (11)

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.
 הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
 לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 9 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

- 100 1. אינטגרלים מידיים
- 103 2. מציאת פונקציה קדומה

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$):

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$):

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2} + x^{3/2}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$, ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$.

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

(8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 10 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 105
3. משוואה לינארית מסדר ראשון 107
4. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 109

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[-5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[-\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

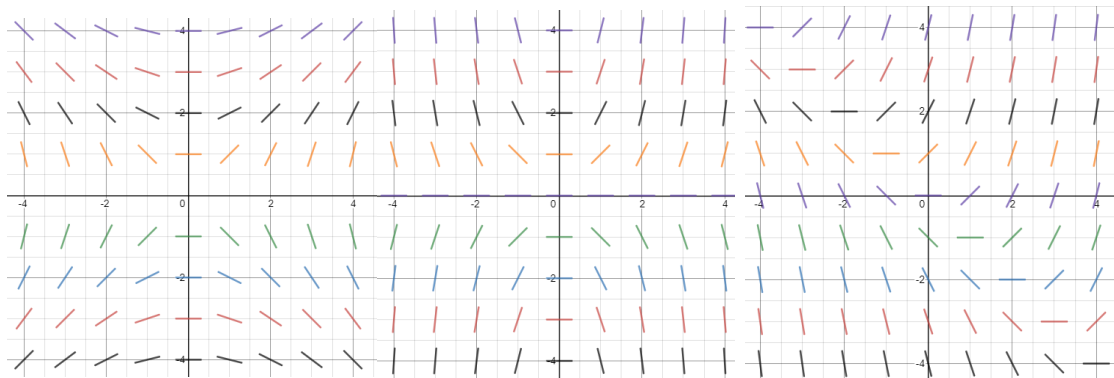
(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

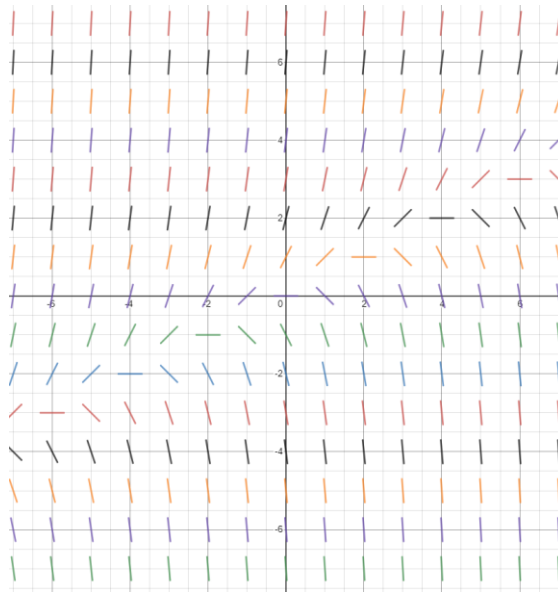
מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 11 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

111	1. בעיות גדילה ודעיכה
113	2. בעיות בגיאומטריה אנליטית
115	3. עקומות אורתוגונליות
116	4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום
117	5. בעיות שונות

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- 1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- *הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- 3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- 4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- 5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2% | ב. 15.92 שנים. | |
| 3) א. 4093.65 ש. | ב. 13.41 שנים. | |
| 4) 40.77 חודשים. | | |
| 5) א. 88.69 גרם. | ב. 19,188 שנים. | |
| 6) א. 3.04 שבועות. | ב. 14.6 שבועות. | |

בעיות גיאומטריות

שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

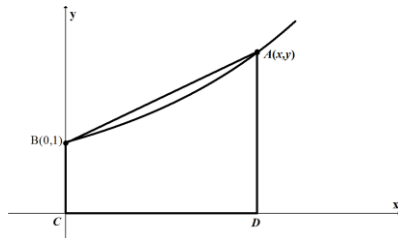
(2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .

(5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y .
מצאו את משוואת עקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.

בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציר. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.

מצאו את משוואת העקום.

(9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
 ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.

(10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM , מהראשית O ל- M , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN (כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y). ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$, בנקודה $(1, 2)$ שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

5 מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45° עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

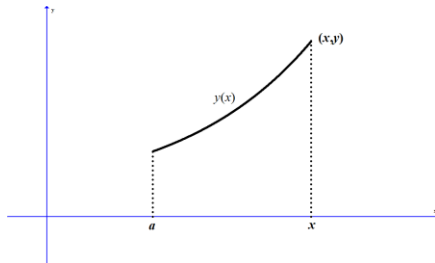
$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

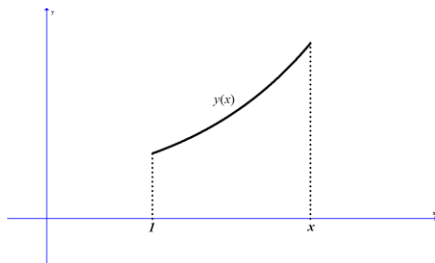
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

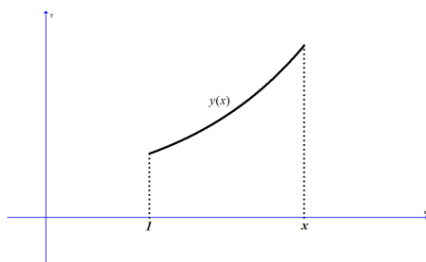
שאלות



- (1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$. מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



- (3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1) = 2$. האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

בעיות שונות

שאלות

- (1) בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחרור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
- א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.
 ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 ג. מצאו את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
- א. רשמו מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
 מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
 ב. ידוע כי $k = -2\pi$.
 פתרו את המד"ר.
 תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
 לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.
 א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R , מתחיל לצאת אוויר.
 קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t .
 הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.
 הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

- (1) א. 26.75 ק"ג. ב. 0.942 דקות.
- (2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.
- (3) א. $43\frac{1}{3}^{\circ}$. ב. 1.13 שעות.
- (4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$. ב. $h = (2-t)^2$; $t = \sqrt{2} + 2$.
- (5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$. ב. 4.5 שעות.
- (6) שאלת הוכחה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א 71022

פרק 12 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

119	1. מושגי יסוד
120	2. חקירת פולינום
121	3. חקירת פונקציה רציונלית
125	4. חקירת פונקציה מעריכית
128	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
132	6. חקירת פונקציה עם שורשים
133	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
136	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
140	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

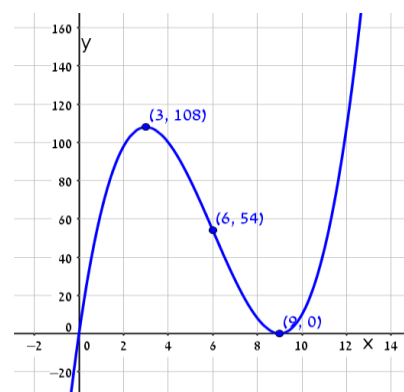
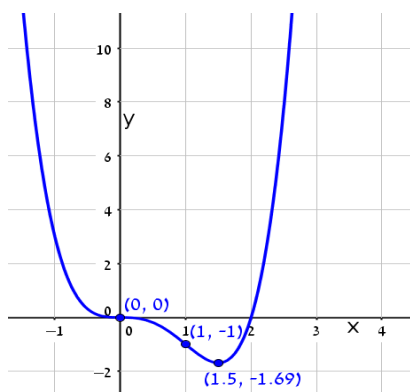
$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .
 נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.
 תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.
 תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.
 נקודת פיתול: $(6, 54)$.
- (2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 1 .
 נקודות קיצון: מינימום: $(1.5, \frac{-27}{16})$.
 תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.
 תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

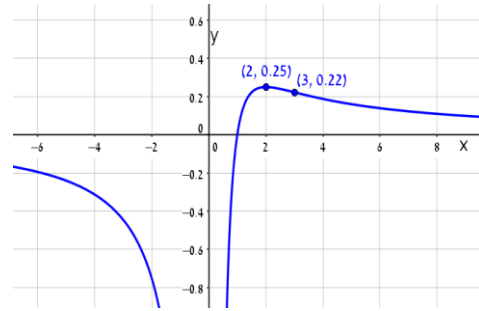
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ and $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $x < -2$ or $0 < x < 2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x > -1$ or $x < -3$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

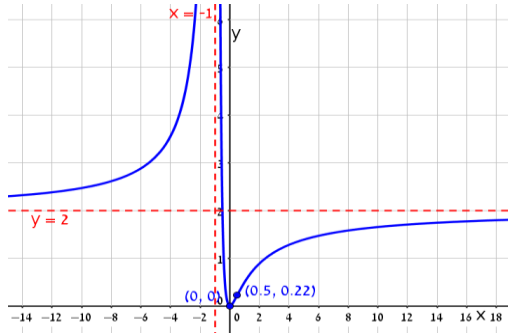
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
- תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $x < -1$ or $2 < x < 5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
- תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x < -2$ or $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $-2 < x < -1$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

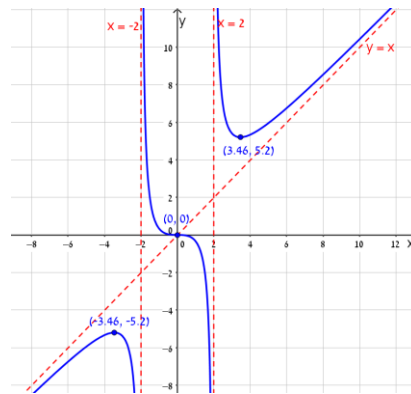
(1)



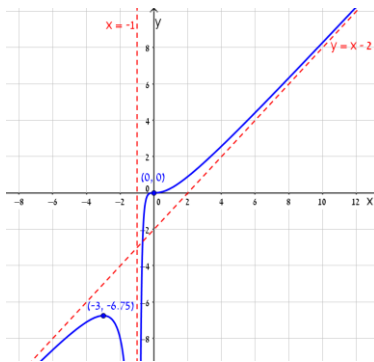
(2)



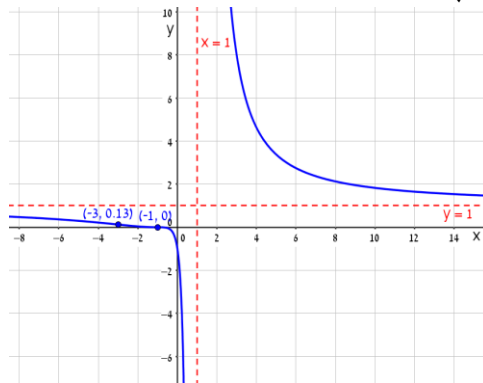
(3)



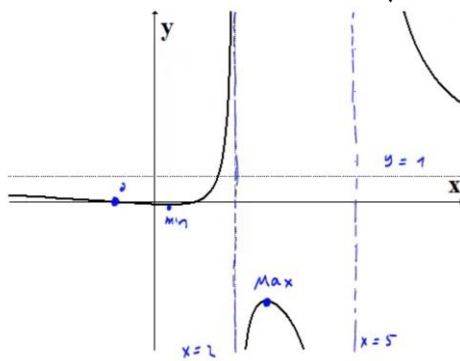
(4)



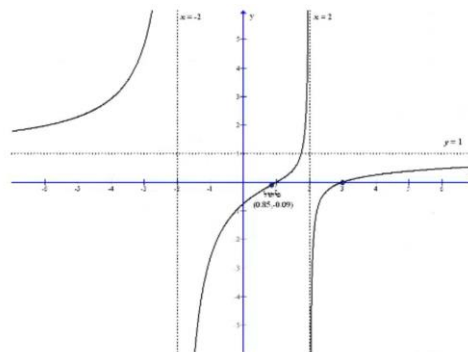
(5)



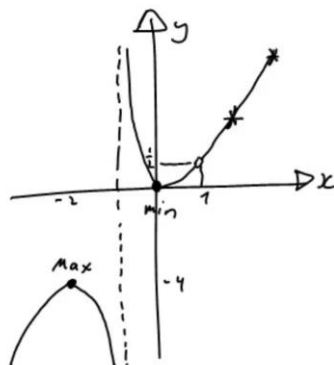
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

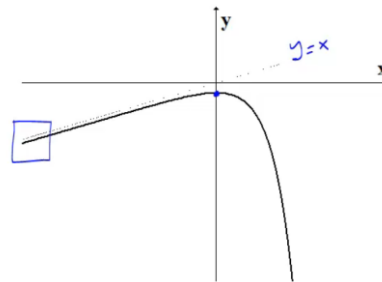
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

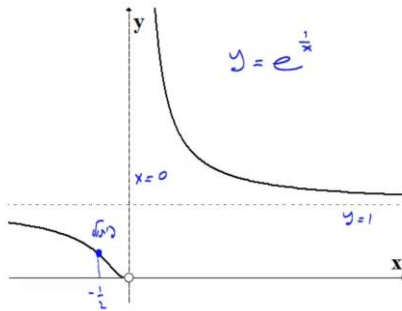
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $0 < x < 2$ or $-1 < x < 0$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
 תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$ or $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$

גרפים

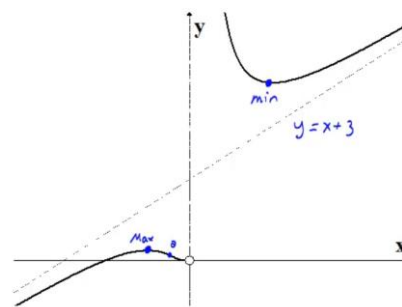
(1)



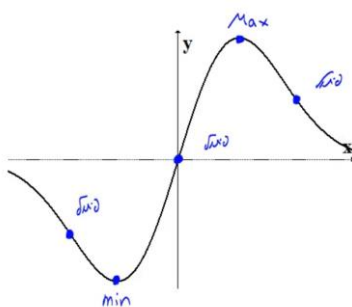
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

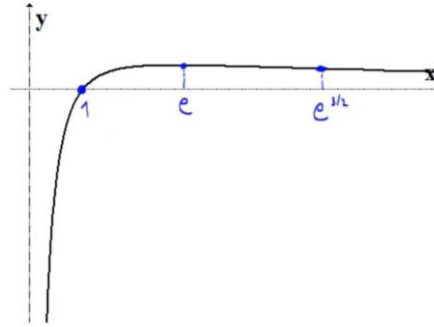
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

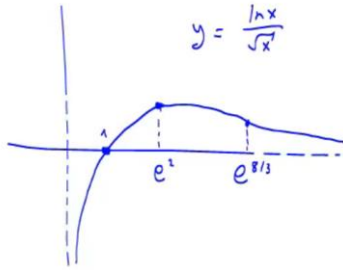
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

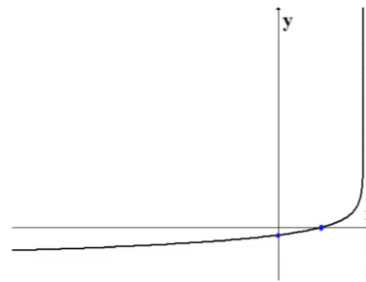
(1)



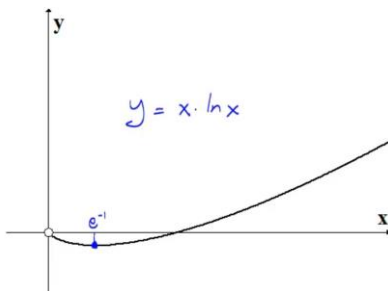
(2)



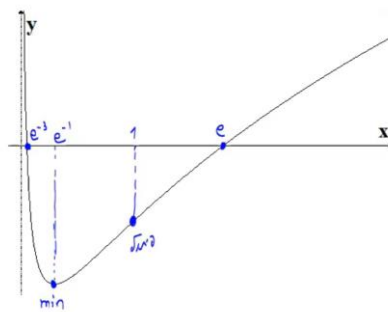
(3)



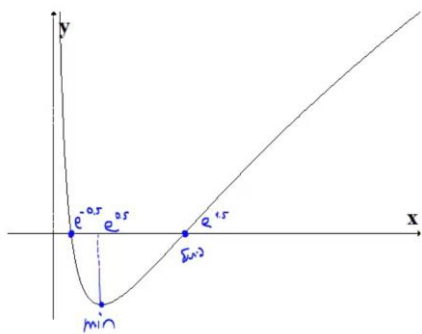
(4)



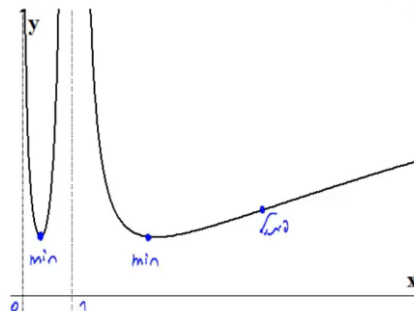
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

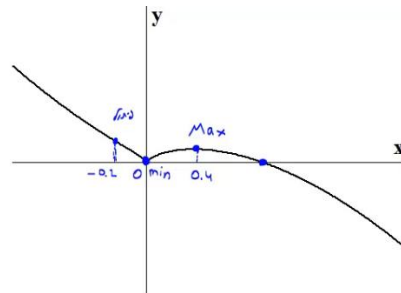
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

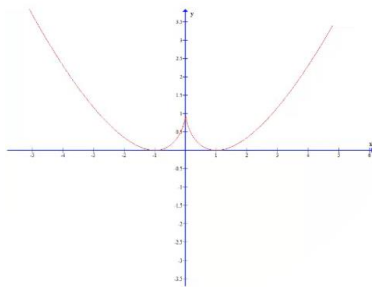
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $0 < x < 1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

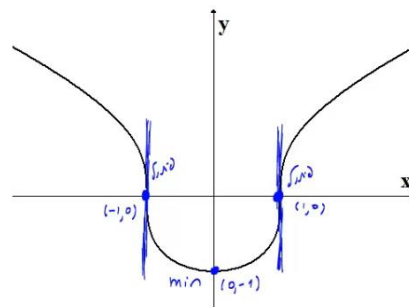
(1)



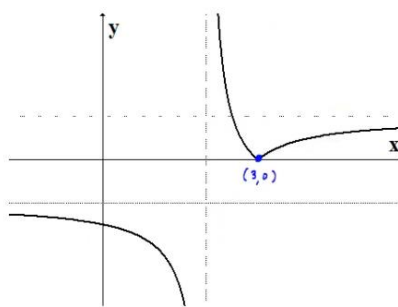
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - מציאת נקודות פיתול.
 - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5 נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

6 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0, \pi]$.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

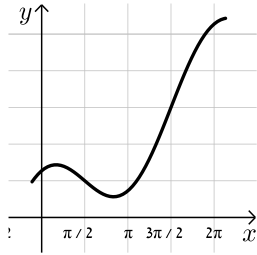
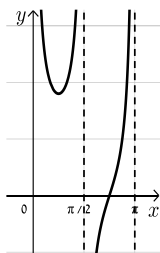
$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

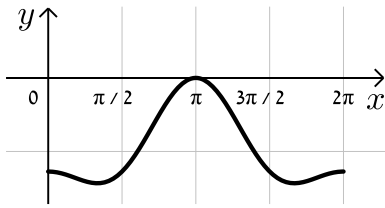
$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

תשובות סופיות

(1) א. $0 < x < 2\pi$.ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$.

קצה.

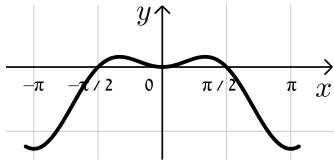
ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.(2) א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה.ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.ד. $(0, 0)$. ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$. ו. $(0, 0)$.ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$,קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.(3) א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.(4) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.ב. $\max\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $\max(2\pi, -2)$, $\max(0, -2)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $\max(\pi, 0)$.ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$; יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$. גרף:



5 א. $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0), (0, 1)$

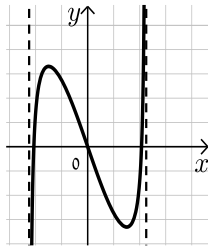
ב. $(0, 1), (\frac{\pi}{6}, 1.29), (\frac{5\pi}{6}, -1.29), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.



6 א. חיתוך: $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה,

$\min(0, 0), \max(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$ קצה.

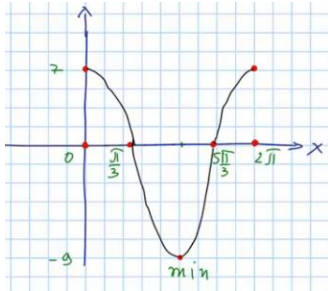


7 א. $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$

ג. $\min(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}), \max(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27})$

8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi, -9)$, מקסימום: $(0, 7), (2\pi, 7)$



נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

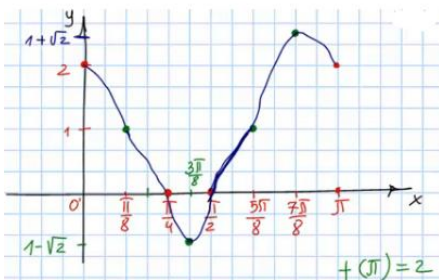
קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 2$ or $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום: $(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2})$, מקסימום: $(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2})$

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$, ירידה: $0 < x < \frac{3\pi}{8}$ or $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול: $(\frac{\pi}{8}, 1), (\frac{5\pi}{8}, 1)$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, 0.575)$, מינימום: $(1, -0.575)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$.
 תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 מחזוריות: כן, ממחזור 2π .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : $x = 0, \pi, 2\pi$.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, מינימום: $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.
 תחום עלייה: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
 נקודות פיתול: אין.

גרפים

