

# חשבון אינפיניטסימלי 1



## תוכן העניינים

1	מבוא מתמטי לקורס
32	סדרות
(ללא ספר)	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות
65	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות
87	גבול של פונקציה
105	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
120	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות
133	חישוב נגזרת של פונקציה
146	משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו
158	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
169	כלל לופיטל
176	חקירת פונקציה
205	משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1. המספרים האי-רציונליים ..... 1
2. סימן הסכימה ..... 2
3. אינדוקציה ..... 5
4. אי שוויונים מפורסמים ..... 7
5. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון ..... 8
6. שדות ..... 11
7. מבוא לתורת הקבוצות ..... 13
8. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות ..... 19
9. קבוצה צפופה ..... 26
10. הערך השלם ..... 28
11. פתרון אי שוויונים ..... 30

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:  
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
 הוכיחו כי  $p | a \Leftrightarrow p | a^k$ .  
 ב. הוכיחו: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).
- הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  נסמן  $b | a$ ,  
 ונאמר גם " $b$  מחלק את  $a$ ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## סימן הסכימה

### שאלות

1) כתבו בפירוט את הסכומים הבאים :

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$	ב. $\sum_{k=1}^4 2k$	ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$
ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$	ה. $\sum_{t=1}^8 tx^t$	ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$
ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$	ח. $\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1)$	ט. $\sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4)$

2) כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$
ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$
ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$
ד. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8$
ה. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44$
ו. $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8$
ז. $5^2 + 7^2 + \dots + 27^2$
ח. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}$
ט. $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243}$
י. $4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}$

3) חשבו את הסכומים הבאים :

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$	ב. $\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2)$	ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$
ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1}$	ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$	ו. $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)$

\* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה : } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשבו את הסכומים הבאים :

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום :

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \text{ א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \text{ א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \text{ א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3} (4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \text{ א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \text{ א. } 8 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + 6 \cdot \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

## אינדוקציה

### שאלות

(1) הוכיחו באינדוקציה כי  $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$  מתחלק ב-9 לכל  $n$  טבעי.

(2) הוכיחו באינדוקציה כי  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$  ( $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ).

(3) מצאו את ה- $n$  הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים  $2^n \geq n^2$ , והוכיחו באינדוקציה שעבור כל  $n$  טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , לכל  $n$  טבעי ולכל  $x \geq -1$  ממשי.  
 הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$  לכל  $n$  טבעי.  
 רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכיחו באינדוקציה כי  $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$  לכל  $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$ .

(6) הוכיחו באינדוקציה כי  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
 רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$ .

הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $a_n \leq 2$

ב.  $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

אם  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$ ,

אז  $a_n = n^2 - 2n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

$$\text{אם } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכיחו באינדוקציה כי  $4^n - 1$  מתחלק ב-15, לכל  $n$  טבעי זוגי.

$$11) \text{ הוכיחו באינדוקציה כי } \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^n = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{array} \right) \text{ (} n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \text{)}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## אי שוויונים מפורסמים

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $x, y$  המקיימים  $x < 1, y > 1$ , מתקיים  $x + y > xy + 1$ .

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי:

אם  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ , אז  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  ( $0 < a_i \in \mathbb{R}$ ).

(2) נסחו והוכיחו את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכיחו שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  מתקיים:

א.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (אי שוויון המשולש)

ב.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

ג.  $|a - b| \geq |b| - |a|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$

ד.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

ה.  $|a + b| \geq ||a| - |b||$

ו.  $(a_i \in \mathbb{R}) |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את אי שוויון קושי-שוורץ.

ב. הוכיחו כי אם  $a_1 + \dots + a_n = 1$  אז  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ ).

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

### שאלות

(1) חשבו, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

(3) חשבו:

א.  $\binom{5}{3}$       ב.  $\binom{4}{1}$       ג.  $\binom{10}{0}$       ד.  $\binom{14}{11}$

(4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$       ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$       ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכיחו באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

(6) רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכיחו שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים:

$$\text{א. } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{ב. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{ג. } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$$

9) מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

10) בפיתוח של  $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשבו את ערכו.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצאו את  $n$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

## שדות

### שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ . בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + 4 \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= y \\ x \otimes y &= y^2 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

א. הוכיחו כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .

ב. הוכיחו כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

ג. הוכיחו כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

5) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.  
הוכיחו כי:

א.  $(-1) \cdot a = -a$

ב.  $(-a)b = a(-b) = -ab$

6) הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.  
כלומר, הוכיחו כי  $ab = cb \Rightarrow a = c$  לכל  $a, b, c$ , בשדה ( $b \neq 0$ ).

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון איזהשוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ .

ב. חשבו את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** הוכיחו כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**20** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**21** הוכיחו כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**22** הוכיחו כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$ ,  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$ ,  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$ ,  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$

12) א.  $\phi$  ב.  $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^c = (-\infty, 1)$  ב.  $B^c = [1, 4]$  ג.  $C^c = [1, 4]$

ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(2) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(3) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(4) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$$

- א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את  $\sup A$ .  
 ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את  $\inf A$ .

$$(5) \text{ נתונה הקבוצה } A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6 נתונה הקבוצה  $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{א.}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\} \quad \text{ב.}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\} \quad \text{ג.}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{ד.}$$

9 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים  $S$ . הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.  
 ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם  $\alpha$  הוא הסופרמום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .  
 ב. אם  $\beta$  הוא האינפימום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$ .

**(11)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.  
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ , לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם  $S$  היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\max S = \sup S$ .

**(12)** תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$ , ויהי  $x \in \mathbb{R}$ .

נגדיר את המרחק בין  $x$  ל- $A$  על ידי:  $d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$ .

אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$ , הראו כי  $d(\alpha, A) = 0$ .

**(13)** הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

**(14)** הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

**(15)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $K$  קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.  
נתבונן בקבוצה  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $-K$  חסומה מלמעלה.
- ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**(16)** תהי  $T$  קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי  $S$  קבוצה חלקית לא ריקה של  $T$ .  
הוכיחו כי:

- א. ל- $T$  יש חסם עליון  $\sup T$ .
- ב. ל- $S$  יש חסם עליון  $\sup S$ .
- ג.  $\sup S \leq \sup T$ .
- ד. אם  $S$  ו- $T$  בעלות מקסימום, אז  $\max S \leq \max T$ .

- 17** יהיו  $A$  ו- $B$  שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.  
 א. נניח כי לכל  $x \in A$  קיים  $y \in B$  כך ש- $x < y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A \leq \sup B$ .  
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$ ?
- ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל  $y \in B$  קיים  $x \in A$  כך ש- $y < x$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \sup B$ .
- 18** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A = \inf B$ .  
 הוכיחו שלכל מספר  $\delta > 0$ , קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש-  
 $x + \delta > y$ .
- 19** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$ .  
 נניח שלכל מספר  $\delta > 0$  קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \inf B$ .
- 20** נניח ש- $A$  קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,  
 ונניח כי  $x < \sup A$ .  
 הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה  $A$ , שנמצאים בין  $x$  ל- $\sup A$ .
- 21** תהי  $S$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי אם  $c \geq 0$ , אז ל- $c \cdot S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$ .
- 22** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי הקבוצה  $S + T$  היא בעלת חסם עליון ומתקיים:  
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ .
- 23** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 א. הוכיחו כי הקבוצה  $S \cup T$  היא בעלת חסם עליון.  
 ב. הוכיחו כי  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ .
- 24** תהיינה  $U, T, S$  קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 נניח כי לכל  $s \in S$  ולכל  $t \in T$  קיים  $u \in U$ , המקיים את התנאי:  $u \geq s + t$ .  
 הוכיחו כי  $\sup U \geq \sup T + \sup S$ .

(25) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. אם  $S$  ו- $T$  הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של  $S$  אינו גדול משום איבר של  $T$ , אז קיימים  $\sup S, \inf T$ , ומתקיים:  $\sup S \leq \inf T$ .
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה  $S$  מתקיים:  $\inf S \leq \sup S$ . האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.
- ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$  קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $\alpha, \beta$ , המקיימים  $\alpha < \beta$ , קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$  וגם  $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$ .

(27) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  חסם מלעיל של  $A$ .

$$n \in \mathbb{N} \text{ קיים } a_n \in A \text{ כך ש-} a_n > \alpha - \frac{1}{n}$$

הוכיחו כי  $\alpha$  הוא הסופרמום של  $A$ .

(28) הוכיחו שלכל מס' ממשי  $c$  קיים מספר שלם יחיד  $m \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $m \leq c < m+1$ .

למספר  $m$  קוראים הערך השלם של  $c$ , ומסמנים  $m = [c]$ .

(29) יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ממשיים המקיימים  $|a-b| < \frac{1}{n}$ , לכל מספר טבעי  $n$ .

הוכיחו כי  $a = b$ .

(30) ענו על הסעיפים הבאים :

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [n, \infty)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$$

הוכיחו כי

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$$

הוכיחו כי

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [a_n, b_n]$ .

נניח כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

ג. בסעיף ב' התקיים כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ , וכן  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**(32)** לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = c, \inf A = [c]$
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב.  $\min A = 4$
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.  
 ב.  $\max A = 7$
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי  $\frac{4}{5}$ , וחסומה מלמטה על ידי  $\frac{3}{5}$ ;  
 ב.  $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$  לכן, הקבוצה חסומה.
- (8) א.  $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$  ב.  $\min B = 0, \max B = 2$   
 ג.  $\min C = -2, \sup C = 2$  ד.  $\inf D = 0, \sup D = 2$

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## קבוצה צפופה

### שאלות

- (1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (4) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (5) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:  
 תת-קבוצה  $S$  של  $\mathbb{R}$  היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$ ),  
 אם לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $|s - x| < \varepsilon$ .  
 הוכיחו שאם  $S$  תת-קבוצה של  $\mathbb{R}$  מקיימת את התכונה,  
 שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $a < s < b$ , אז  $S$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (7) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $[0, 1]$ .
- (8) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $(1, \infty)$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  צפופה בקטע  $(0, 1)$ .
- (9) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $[0, 1]$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה בקטע  $[0, \infty)$ .
- (10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע  $I = [0, 1]$ .

**11**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $(1, \infty)$  וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0,1]$ .

**12**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $[0,1]$ .

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0,1]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הערך השלם

### שאלות

1 פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $[x+4]=10$

ב.  $[x+4]=-10$

ג.  $[x+4]^2=100$

ד.  $[2x^2+1]=9$

ה.  $[x^2+x-1]=-2$

ו.  $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2 פתרו את המשוואה  $[x+4]=2x+1$ .

3 פתרו את המשוואה  $[16x^2+7]=8x+6$ .

4 פתרו את המשוואה  $[x^2+x+4]=2x+6$ .

5 פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $[|x-4|+x]=4x+4$

ב.  $[|x+1|-|x-1|]=x$

6 פתרו את המשוואה  $[4+[x+1]]=10$ .

7 הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי ו- $m$  שלם מתקיים  $[x+m]=[x]+m$ .

8 פתרו את אי-השוויונים הבאים:

א.  $[x+4]<10$

ב.  $[x+4]>-10$

ג.  $[x+4]^2<100$

ד.  $[x+4]\leq 10$

9 פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב.  $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

10 הוכיחו כי לכל  $x$  ו- $y$  ממשיים מתקיים :

א.  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב.  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

### תשובות סופיות

- 1 א.  $6 \leq x < 7$     ב.  $-14 \leq x < -13$     ג.  $[6,7) \cup [14,-13)$
- ד.  $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$     ה.  $-1 < x < 0$     ו.  $\emptyset$
- 2  $x = 2.5, 3$
- 3  $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$
- 4  $x = -1, 2$
- 5 א.  $x = 0$     ב.  $x = 2, 0, -2$
- 6  $5 \leq x < 6$
- 7 שאלת הוכחה.
- 8 א.  $x < 6$     ב.  $x > -14$     ג.  $-14 < x < 6$     ד.  $x < 7$
- 9 א.  $2 \leq x < 4$     ב.  $x < 1$  or  $x \geq 5$
- 10 שאלת הוכחה.

## פתרון אי שוויונים

### שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x-56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

**תשובות סופיות**

**(1)**  $x < 4$  או  $x > 8$

**(2)**  $x \leq 7$  או  $x \geq 11$

**(3)** כל  $x$

**(4)**  $-3 < x < 1$  או  $x > 3$

**(5)**  $\frac{1}{2} \leq x < 5$

**(6)**  $1 \leq x \leq 6$

**(7)**  $-5 < x < -1$

**(8)**  $2 < x < 6$

**(9)**  $-5\frac{1}{2} < x < -3$

**(10)**  $x < -5$  או  $x > 7$

**(11)**  $x < -1$  או  $x > 4$

**(12)**  $-3 \leq x < 46$

**(13)**  $x < 0.472$

**(14)** אין פתרון.

# חשבון אינפיניטסימלי 1

## פרק 2 - סדרות

### תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות	(ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות	32
3. חישוב גבול לפי אוילר	34
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ	35
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש	38
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית	39
7. חישוב גבול לפי ההגדרה	41
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה	43
9. הגדרת הגבול לפי היינה	46
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס	48
11. משפט שטולץ	53
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות	55
13. שאלות הוכח או הפרך	57

## חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left( \frac{4}{n} \right) \quad (20) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (22) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (24) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n} \quad (23)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad * \text{ רמז לשאלה 24}$$

**הערה חשובה מאוד!**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

## תשובות סופיות

- |   |                        |
|---|------------------------|
| 4 (2)   | 0 (1)                  |
| 0 (4)   | $\infty$ (3)           |
| 1 (6)   | -5 (5)                 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8)   | 1.5 (7)                |
| 4 (10)  | 0.25 (9)               |
| $\ln 3$ (12)  | 2 (11)                 |
|   | $e^{\frac{1}{3}}$ (13) |
| $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$ , $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ (14) |                        |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$   |                        |
| $\frac{k}{2}$ (16)  | 2.5 (15)               |
| 0.5 (18)  | 0.5 (17)               |
| 4 (20)  | $\frac{a-b}{2}$ (19)   |
| $\frac{1}{3}$ (22)  | 0.5 (21)               |
| 1 (24)  | $\infty$ (23)          |

## חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e \quad (8)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

## חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left( \sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

(12) יהי  $x$  מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה:  $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$

$$(13) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

$$(14) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$

$$(15) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k}\sqrt{n}}$$

$$(16) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$$

$$(17) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$(18) \text{ תהי } (a_n) \text{ סדרה חיובית, המקיימת } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ הוכיחו כי}$$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

**תשובות סופיות**

- 4 (1)  
 0 (2)  
 0 (3)  
 0.75 (4)  
 3 (5)  
 $\frac{3}{4}$  (6)  
 0 (7)  
 16 (8)  
 0 (9)  
 1 (10)  
 (11) שאלת הוכחה.  
 (12) שאלת הוכחה.  
 9 (13)  
 1 (14)  
 $\frac{1}{2}$  (15)  
 $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$  (16)  
 1 (17)  
 (18) שאלת הוכחה.

## חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

## חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

### שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \text{ יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$ .

$$(5) \text{ יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה  $x_n$  ברקורסיה על ידי  $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$ , לכל  $n$ .

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע  $a$ , עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה  $x_n$  מתכנסת עבור  $3 < a < 3.5$ .

$$(6) \text{ יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

נגדיר  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו שהסדרות  $a_n$  ו- $b_n$  מתכנסות ומתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

$$(7) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

א.1. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

הניחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$  קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

$$(8) \quad \text{תהי סדרה המוגדרת על ידי } a_1 = 0.5 \text{ ו- } a_{n+1} = \sin(a_n^2) \text{ לכל } n \geq 1.$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

### תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא  $\sqrt{a}$ .

(5) א. אם  $2 \leq a \leq 3$  הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

$$(7) \quad \text{ב.1. } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$$

(8) שאלת הוכחה.

## חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה  $(a_n)$  מתכנסת.  
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ .

הוכיחו לפי ההגדרה, כי :

$$\text{א. } (a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$\text{ב. } (a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה  $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$  שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה  $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$  שואפת לאינסוף.

17) הוכיחו שהסדרה  $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$  לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

18) הוכיחו או הפריכו:

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שלילת הגדרת הגבול של סדרה

### שאלות

(1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א.  $1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב.  $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג.  $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

(2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב.  $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג.  $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי:

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

(7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה  $a_n = (-1)^n$  לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה  $a_n = (-1)^n$ .

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה  $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$  לא קיים גבול.

8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$  מתבדרת.

9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$  מתבדרת.

10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה  $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$  לא קיים גבול.

11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{2} - \left[ \frac{n}{2} \right]$  מתבדרת.

12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{n}{10} - \left[ \frac{n}{10} \right]$  מתבדרת.

13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$  מתבדרת.

14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$  מתבדרת.

15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה  $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$  אין גבול.

16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$  מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$  לא שואפת ל- $\infty$ .

(19) נתונה הסדרה  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$ .

הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- $\infty$ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$ .

(20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה  $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$  לא שואפת ל- $\infty$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הגדרת הגבול לפי היינה

## שאלות

(1) הוכיחו כי :

- |                                 |                            |
|---------------------------------|----------------------------|
| א. $\sin(2n\pi) = 0$            | ב. $\cos(2n\pi) = 1$       |
| ג. $\sin((2n+0.5)\pi) = 1$      | ד. $\cos((2n+0.5)\pi) = 0$ |
| ה. $\sin((2n+1)\pi) = 0$        | ו. $\cos((2n+1)\pi) = -1$  |
| ז. $\sin((2n+1.5)\pi) = -1$     | ח. $\cos((2n+1.5)\pi) = 0$ |
| ט. $\sin(n\pi) = 0$             | י. $\cos(n\pi) = (-1)^n$   |
| יא. $\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n$ | יב. $\cos((n+0.5)\pi) = 0$ |

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי היינה :

- |  |   |
|--|---|
| (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{ x-4 }$      |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$                      | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$       |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x}$          | (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{ 10x }}$  |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x])$                | (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]}$ |

(10) נתון כי  $f(x) = 2^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor}$ .

- א. הוכיחו כי הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$  אינו קיים לפי היינה.
- ב. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$  לפי היינה.
- ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית  $a_n$ , כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  אינו קיים אך  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  קיים.

(11) הוכיחו כי הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])$  אינו קיים לפי היינה.רמז: הוכיחו ראשית כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $[n^2 - 1] = n - 1$ .

**תשובות סופיות**10 ב.  $\sqrt{2}$ לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

### שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.  
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,  
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

$$\text{א. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש-  $(a_n)$  סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.  
א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

$$\text{(5) חשבו את הגבול הבא } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: } a_1 = 2; a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}.$$

$$(7) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}.$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$(8) \quad \text{נתונה הסדרה } a_n, \text{ המוגדרת על ידי } a_1 = 0 \ (n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}.$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.  
 ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

$$(10) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = \sin \frac{\pi}{4} n.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$(11) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$(12) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$(13) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}.$$

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$(14) \quad \text{נתונה סדרה } a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right).$$

מצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ו-  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

- (15) נתונה סדרה  $a_n$ , ונגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי  $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$ . הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

16) תהי  $a_n$  סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל  $N \in \mathbb{N}$  קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$ .

17) נתונה סדרה  $a_n$ .

1.  $a_{n_k}$  ו- $a_{m_k}$  שתי תת-סדרות של  $a_n$  המקיימות:

$$a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L.$$

2. כל איברי הסדרה  $a_n$  מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו:  $a_n \rightarrow L$ .

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה  $a_n$ ,  $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$ , הערה:  $\sup a_n$  הוא החסם העליון של הקבוצה  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

ב. מצאו סדרה  $a_n$  שעבורה  $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$ .

20) הוכיחו שהסדרה  $a_n$  מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם  $\liminf a_n = \limsup a_n$ .

21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות  $a_n, b_n$  מתקיים

$$\text{א. } \lim(a_n + b_n) \leq \lim a_n + \lim b_n$$

$$\text{ב. } \lim(a_n + b_n) \geq \lim a_n + \lim b_n$$

22) נתונות שתי סדרות חסומות  $a_n$  ו- $b_n$ .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים  $\lim(a_n + b_n) < \lim a_n + \lim b_n$ .

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

23 יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

24 תהי  $(a_n)$  סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$ .

א. הוכיחו שאם  $(a_n)$  מתכנסת, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

ב. הוכיחו שאם  $L > 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ ,

אז גם  $\frac{1}{L}$  הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

25 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות,  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

ב. יהיו  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  שתי סדרות, המקיימות  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ .

הוכיחו שאם לכל  $n$  מתקיים  $0 \leq a_n, b_n \leq 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ .

26 תהי  $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ .

א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה.

ב. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיים  $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ .

ד. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$ .

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$  הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .

ו. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

יש מקסימום.

$$(27) \text{ תהי } (a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil).$$

- א. הוכיחו כי הסדרה  $(a_n)$  חסומה מלרע.  
 ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ג. מצאו את  $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ואת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מינימום.  
 ד. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו שכמעט לכל  $n$ , מתקיים  $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$ .  
 ה. יהי  $\ell$  מספר טבעי.  
 הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$ .  
 ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של  $(a_n)$ .  
 ז. האם  $(a_n)$  חסומה מלעיל?  
 ח. חשבו את  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 ט. מצאו את  $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , וקבעו האם לקבוצה  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  יש מקסימום.

## תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.  
 ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $\pm \frac{1}{e}$ .  
 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $-1, 0$ .  
 ב. הגבול של הסדרה הוא 0.  
 ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם  $0, 0.25, 0.5, 0.75$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט שטולץ

## שאלות

$$(1) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבוע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$  (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- $L$ ).

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$  (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- $L$ ).

ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$  (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- $L$ ).

\* הערה: בסעיף ב' הניחו כי  $L \neq 0$ , ובסעיף ג' הניחו כי  $a_n > 0$  לכל  $n$ .

## תשובות סופיות

(1) 1

(2)  $\frac{2}{3}$

(3)  $\frac{1}{p+1}$

(4)  $\frac{k}{3}$

(5)  $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

## מבחן קושי להתכנסות סדרות

### שאלות

(1) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ , לכל  $n$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(2) הוכיחו שהסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  שואפת לאינסוף.

(3) הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  מתכנסת.

(4) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < a^n$ , לכל  $n$ , כאשר  $0 < a < 1$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה  $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$  מתכנסת.

(6) סדרה  $x_n$  מקיימת  $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$ , לכל  $n$ , כאשר  $0 < k < 1$ .  
הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

(7) נתונה סדרה  $x_n$  המוגדרת על ידי  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ .  
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה  $x_n$  מתכנסת.

א.  $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב.  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$

ג.  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

$$(9) \quad \text{נגדיר סדרה } x_n \text{ על ידי } x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$(10) \quad \text{סדרה } x_n \text{ מקיימת } x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n} \text{ לכל } n \text{ טבעי, ו- } 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

$$\text{הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל } n \text{ טבעי מתקיים } \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$$

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה  $x_n$ .

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ , אז  $x_n$  מתכנסת.

ב. אם לכל  $n$  מתקיים  $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$ , אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.

ג. אם סדרה  $x_n$  מקיימת את תנאי קושי, אז קיים  $0 < \alpha < 1$  כך שלכל  $n$  טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שאלות הוכיחו או הפריכו

### הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים :

- א. קיים  $N$  טבעי כך שלכל  $n > N$  מתקיימת הטענה  $X$ .
- ב. כמעט לכל  $n$  מתקיימת הטענה  $X$ .
- ג. לכל  $n$ , פרט למספר סופי של  $n$ -ים, מתקיימת הטענה  $X$ .

### שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

- (1) אם  $a_n$  סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם  $b_n$  סדרה לא חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .
- (3) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ .
- (4) אם  $d_n$  סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$  וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$  אין גבול.
- (6) אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n / b_n)$  אין גבול.
- (7) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתבדרת.
- (8) אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתכנסת.
- (9) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ .
- (10) אם  $a_n < b_n$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**(11)** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  וגם  $b_n$  חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**(12)** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  וגם  $a_n < 1$  לכל  $n$ , אז  $k < 1$ .

**(13)** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$ .

**(14)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם  $a_n$  ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$  חסומה.

ג. אם  $a_n$  סדרה עולה, אז גם הסדרה  $b_n = (a_n)^2$  עולה.

ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$ , אז הסדרה  $a_n$  חסומה.

ה. אם  $a_n$  ו- $b_n$  סדרות חסומות, אז גם הסדרה  $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$  חסומה.

ו. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת ו- $b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) סדרה חסומה, אז לסדרה  $(a_n b_n^2)$  יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם  $a_n$  סדרה מתכנסת, אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

**(15)** אם לכל  $n$  מתקיים:  $a_n \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} < a_n^2$  אז הסדרה  $a_n$  מתכנסת.

**(16)** הסדרה  $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$  מתבדרת.

**(17)** אם לכל  $n$  מתקיים:  $x_n \in (0, 1)$ ,  $4x_n(1-x_{n+1}) > 1$  אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$ .

**(18)** לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם הסדרה  $(x_n + \frac{1}{n}x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.  
 ב. אם הסדרה  $(x_n^2 + \frac{1}{n}x_n)$  מתכנסת, אז הסדרה  $x_n$  מתכנסת.

(20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת  $x_{n+1} \neq x_n$  לכל  $n$ .  
 הוכיחו או הפריכו :

- א. הסדרה  $x_n$  לא מקיימת את תנאי קושי.  
 ב. לסדרה  $x_n$  לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  ו- $a < b$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n < b_n$ .  
 ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  וכמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \leq b_n$ , אז  $a \leq b$ .

(22) תהי  $(a_n)$  סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

- א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n = 0$ .  
 ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \geq 0$ .  
 ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n \neq 0$ .  
 ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , אז כמעט לכל  $n$  מתקיים  $a_n > 0$ .

(23) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n \leq k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .  
 ב. אם  $(a_n)$  סדרה מתכנסת ואם  $a_n < k$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$ .

(24) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, המקיימת  $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$ , לכל  $n$ .

הוכיחו או הפריכו :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(25) הוכיחו או הפריכו :

אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$

**(26)** נתונות שתי סדרות  $(a_n)$  ו- $(b_n)$ , שעבורן:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$ .

הוכיחו או הפריכו:

א.  $a_n \rightarrow 2, b_n \rightarrow 0$  או  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 2$ .

ב.  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

**(27)** נניח שסדרה  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $a_n$  עולה.

ב.  $a_n$  יורדת.

ג.  $a_n$  מתכנסת.

ד.  $a_n$  לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי  $a_n$  מקיימת  $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$  לכל  $n$  טבעי?

**(28)** הסדרה  $(a_n)$  מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

**(29)** א. תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ .

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. תהיינה  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$ .

הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**(30)** נתונה הסדרה  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל  $x \geq 0$  מתקיים  $\ln(1+x) \leq x$ .

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$ .

31 אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

32 אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז גם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים.

33 א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

ב. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

34 א. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
 כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$ .

35 א. אם כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים, אז כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים.

ב. אם  $(a_n)$  חיובית, אז קיים  $N > 0$ , כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$  לכל  $n > N$ .

36 אם  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  חיוביות, אז  $(a_n)$  מתכנסת או  $(b_n)$  מתכנסת.

37 א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

ג. אם  $(a_n)$  חיובית ואפסה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ .

38 א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ .

\* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$ .

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,  
כאשר ידוע כי  $(a_n)$  ו- $(b_n)$  סדרות, כך שמתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$ .

39) א.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ג. אם קיימים אינסוף ערכי  $n$ , כך ש- $a_n > 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ד. קיים  $N > 0$ , כך שלכל  $n > N$ , מתקיים  $b_n \neq 0$ .

40) א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. אם, כמעט לכל  $n$ ,  $0 < b_n < a_n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

41) אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ , אז קיים  $N$  טבעי, כך שלכל  $n > N$  מתקיים  $a_n < \frac{1}{3}$ .

42) א. אם כמעט כל איברי  $(b_n)$  חיוביים, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$ .

ב. אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך ש- $b_n \geq c$  כמעט לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$  לא קיים.

44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ .

ג. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ .

ד. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  לא קיים.

45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$ .

ב. קיימת סדרה  $(a_n)$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) = \infty$ .

46) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ .

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ .

הערה: תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא: כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

47) נתונה סדרה חיובית  $(a_n)$ , וידוע כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  קיים.

הוכיחו או הפריכו:

א. הסדרה  $(na_n)$  אינה חסומה.

ב. הסדרה  $(a_{n+1} - a_n)$  חסומה.

ג. הסדרה  $\sqrt[n]{a_n}$  חסומה.

ד. הסדרה  $\frac{a_n}{n}$  מתכנסת.

ה.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$ .

**48** סדרה  $(a_n)$  תיקרא יורדת אם היא מקיימת  $a_{n+1} < a_n$  לכל  $n$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $|a_{n+1}| < |a_n|$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $a_{n+1} < a_n$ , אז היא יורדת.
- אם סדרה  $(a_n)$  מקיימת  $a_{n+1} < |a_n|$ , אז היא יורדת.

**49** תהי  $(a_n)$  סדרה, המקיימת  $a_{n+1} - a_n > -1$  ו-  $|a_n| > 2$ , לכל  $n$  טבעי. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים  $N$  טבעי, כך ש-  $a_N$  חיובי, אז  $a_n > 2$  לכל  $n \geq N$ .
- כמעט כל איברי  $(a_n)$  חיוביים או שכל איברי  $(a_n)$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים בנוסף  $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$ , אז  $a_1 < -1$ .

**50** תהי  $(a_n)$  סדרה, כך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע  $c > 0$ , כך שלכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq c$ , אז מתקיים: כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם  $|a_n| > 0$  לכל  $n$ , אז מתקיים: כמעט כל איברי  $a_n$  חיוביים או כמעט כל איברי  $a_n$  שליליים.
- אם לכל  $n$  מתקיים  $|a_n| \geq n$ , אז  $(a_n)$  מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום..... (ללא ספר)

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 4 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

65	1. תחום הגדרה של פונקציה
67	2. הרכבת פונקציות
70	3. הפונקציה ההפוכה
74	4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית
79	5. פונקציה מחזורית
82	6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית
83	7. תרגילים משולבים

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x + 4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x + 4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x + 1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x - 4) \quad (17)$$

### תשובות סופיות

(1) כל  $x$ .

(2)  $x \neq \pm 2$

(3) כל  $x$ .

(4)  $x \neq 0, 1, -1$

(5)  $x \neq 2, -1$

(6)  $x \geq 4$

(7)  $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל  $x$ .

(9)  $-1 < x < 1$

(10)  $x < -2, x > 1$

(11)  $x > 0, x \neq 1$

(12) כל  $x$ .

(13)  $x > 0, x \neq 1$

(14)  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15)  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל  $x$ .

(17)  $3 < x < 5$

(18)  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות הבאות:  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x = 3$ .

(3) נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x = 8$ .

(4) נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

(5) נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = 2$ .

(6) נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

(7) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

8 נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9 נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאן את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  על.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

**16** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  
ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

(1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .

(2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .

(3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .

(4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .

(5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .

(6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .

(7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .

(8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .

(9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .

(10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .

(11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.

ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.

ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.

ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.

ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3) \qquad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \qquad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6) \qquad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \qquad y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), k(x) = -f(x)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3)$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4), k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|)$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיימת  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו שהפונקציה  $z(x) = g(x) \ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$  היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

**13) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**14) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**15) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.**

- נגדיר  $z(x) = (f(x))^n$  כאשר  $n > 1$  טבעי.  
קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**16) נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .**

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר :}$$

- א. הוכיחו כי  $f_{\text{odd}}(x)$  היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי  $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :**

- א. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- ב. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**(18)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.  
 ב. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.  
 ג. הפונקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.  
 ד. הפונקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**(19)** נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

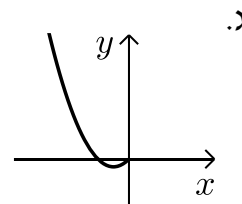
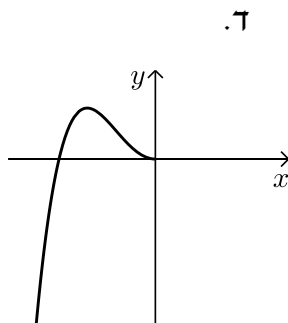
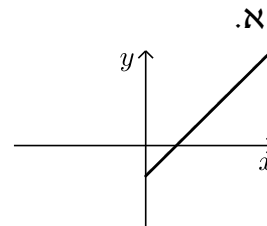
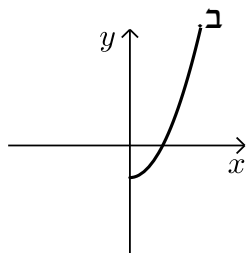
הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.

**(20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

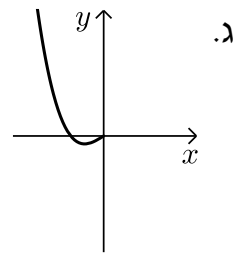
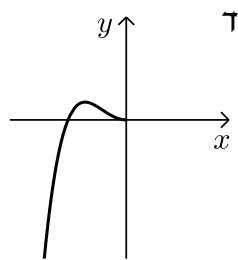
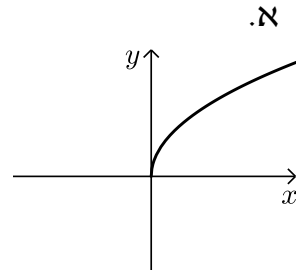
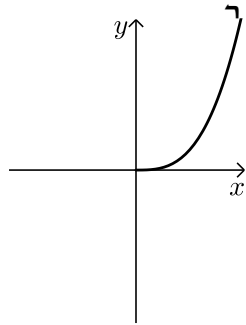
א.  $y = \arctan x$

ב.  $y = \arcsin x$

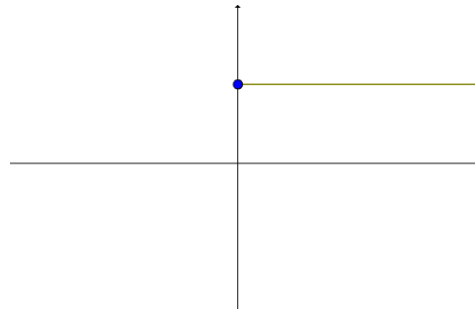
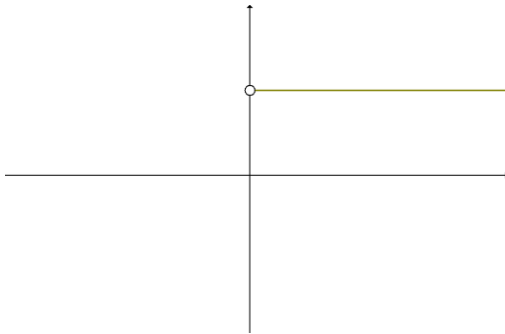
**(21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית :



**22** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



**23** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



## תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר  $n$  זוגי – זוגית, וכאשר  $n$  אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג.  $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

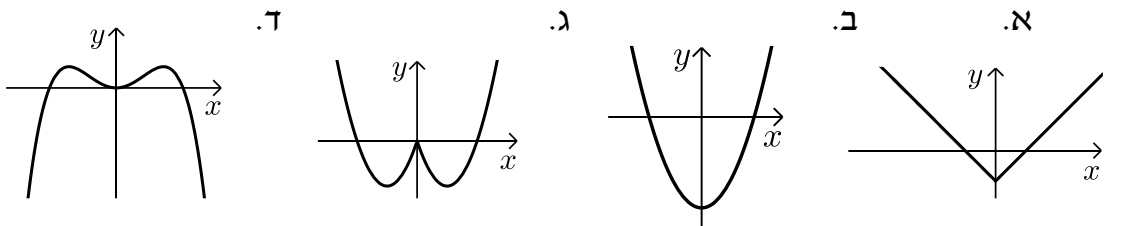
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

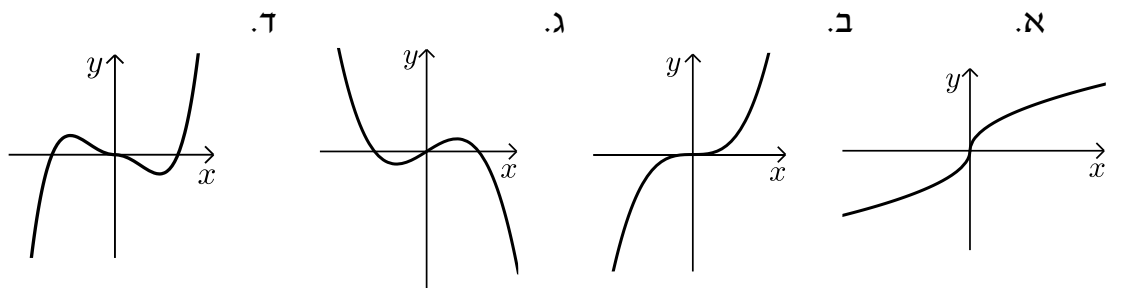
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $y = a + b \cdot f(cx + d)$  מחזורית בעלת מחזור  $\frac{p}{c}$ .

(28) הוכיחו : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$  שלם  $f(x + nT) = f(x)$ .

**(29)** נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלת מחזור  $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) הן מחזוריות.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0, 1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $f$ .

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 1]$ .

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0, 1]$ , ורשמו נוסחה עבור  $g$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $4\pi$     (2)  $\frac{\pi}{10}$     (3)  $\frac{\pi}{4}$     (4)  $\pi$     (5)  $\frac{\pi}{4}$
- (6)  $\frac{\pi}{2}$     (7)  $\pi$     (8)  $\pi$     (9)  $\frac{\pi}{2}$     (10)  $\pi$
- (11)  $40\pi$     (12)  $\pi$     (13)  $2\pi$     (14)  $2\pi$     (15)  $2\pi$
- (16)  $\pi$     (17)  $\pi$     (18)  $\pi$

(19) הפונקציה היא למעשה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית. כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20)  $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

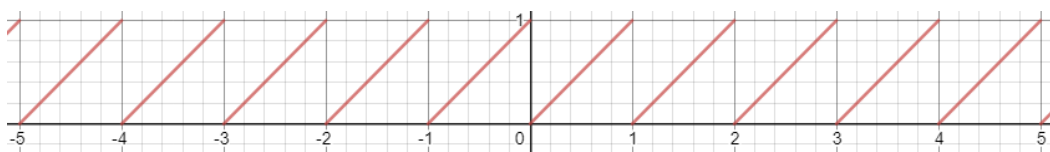
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

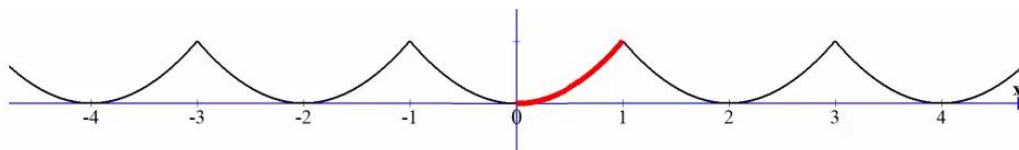
(30) א.



ב. 1. ג. שאלת הוכחה.

(31)  $g(x) = x - k$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.

(32)  $g(x) = (x - k)^2$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.



## פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

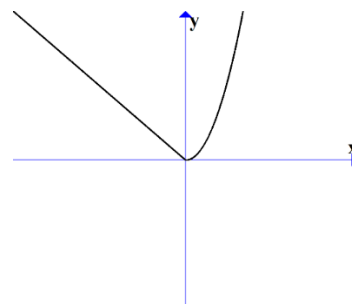
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1) = 1$ ,  $f(4) = 16$ ,  $f(-4) = 4$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(7) = \text{undefind}$   
 ב.  
 ג. כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

**(3)** נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

**(4)** נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$\text{(5) נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**(6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ , אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$   
ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
ג. הפונקציה חסומה בקטע.  
ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה.  
ג. הפונקציה לא חח"ע.  
ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.  
ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$ . ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ . ג. שאלת הוכחה.  
ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 5 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

102	11. גבול של פונקציה מפוצלת
101	10. הגבול של אוילר
99	9. איקס שואף לאינסוף
98	8. פונקציה שואפת לאינסוף
95	7. גבול לפי הגדרה
93	6. כלל הסנדויץ
90	5. גבולות טריגונומטריים
89	4. הכפלה בצמוד
88	3. צמצום
87	2. הצבה
(ללא ספר)	1. הסבר כללי

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

## הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad -\frac{1}{12} \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8) \qquad \frac{1}{3} \quad (7) \qquad \frac{3}{4} \quad (6) \qquad \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \quad (9)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$ ,

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$  לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$ ?

## תשובות סופיות

- 0 (5)      3 (4)       $\frac{3}{4}$  (3)      0 (2)      0 (1)
- 0 (10)      1 (9)      4 (8)       $\frac{3}{4}$  (7)      0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$  (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$        $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

## גבול לפי הגדרה

### שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \text{ נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|\forall x > M : f(x) - L| < 0.1$ ).

$$(16) \text{ נגדיר את הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \text{ בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \text{ יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \text{ הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של } 0 \text{ שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$  ( $k \neq 0$ )

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

## פונקציה שואפת לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

### תשובות סופיות

$\phi$ (4)	$-\infty$ (3)	$\phi$ (2)	$\phi$ (1)
$\phi$ (8)	$\infty$ (7)	$\infty$ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	$\phi$ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

## x שואף לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- |  |   |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$  |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$                                 | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$                                |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$          | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$                           |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$  | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$                                    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$                    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$                         | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$                 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$       |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$                               | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$         |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$                             | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$                                       | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$     |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$                                      |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$   | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$                                   |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$                               | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$                               |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

### תשובות סופיות

$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)
-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)
$\frac{1}{4}$ (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	-3 (9)
2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)
	0 (19)	$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)
$-\infty: b=0, a < 0$ : א. $\infty: b=0, a > 0$ א. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א. (20)			
$-\frac{1}{2}$ (24)	$\frac{1}{2}$ (23)	$\frac{k}{2}$ (22)	2.5 (21)
$\frac{5}{4}$ (28)	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)	$\frac{a-b}{2}$ (26)	$\frac{1}{2}$ (25)
			$\ln(6e)$ (29)

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

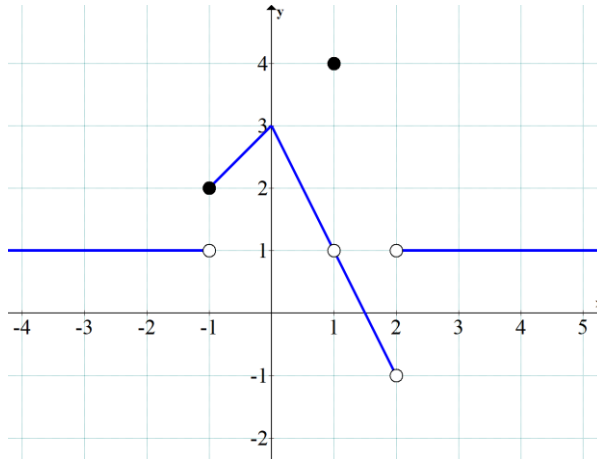
$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} \quad (3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) :$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ x - 1 & \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

**תשובות סופיות**

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$  , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$  . א. (1)
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$  . ב.
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$  , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$  . ג.
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  . ג. 6 (2)
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  . ג. -1 (3)
- 4 (4)
- $\phi$  (5)
- $\phi$  (6)
- 1 (7)
- 1 (8)
- א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$  (9)

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 6 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

105	.....	1. רציפות של פונקציה
112	.....	2. משפט ערך הביניים
116	.....	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
119	.....	4. שיטת החצייה

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר<sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**17** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

$$\text{18 תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .

האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**19** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי

א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.

ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

**20** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**21** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .

נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .

הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

$$\text{22 נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .

ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .

ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(23)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$ .

ב. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**(24)** הפונקציה  $f(x)$  רציפה לכל  $x$ .

ידוע כי עבור  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  נתונה על ידי הנוסחה  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$ .

מצאו את הנוסחה של  $f(x)$  לכל  $x$ .

**(25)** הפונקציות  $f(x) + 2g(x) - 3g(x) - 2g(x) - f(x)$  רציפות לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה  $|f(x) - g(x)|$  רציפה לכל  $x$ .

**(26)** תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  או  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**(27)** תהי  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f(\sin x)$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ב. אם  $\sin(f(x))$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. אם לכל  $x_0$  מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ , אזי  $f(x) = 4$  לכל  $x$ .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי  $f$  רציפה לכל  $x$ ?

**(28) ענו על הסעיפים הבאים :**

א. הוכיחו כי לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

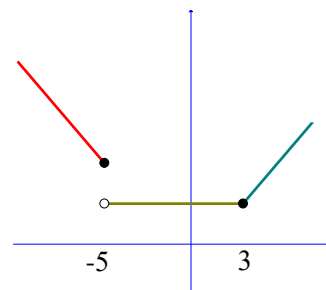
ב. הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$  :

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8)  $k=1$
- (9)  $k=4$
- (10)  $k=\frac{2}{3}$
- (11)  $k=-1$
- (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

(9) נגדיר  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$ .

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ .  
הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה.

נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ .  
נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$ .

א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$ .

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ .

הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$ .

הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש-

$$f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

**16** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$ .

הוכיחו שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .

הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה. הוכיחו כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל. הוכיחו כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ,

ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות:

$$0 < k \in \mathbb{R} \text{ כאשר } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)) \text{ כך ש- } n > 1$$

הוכיחו זאת.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

$$\text{נניח כי: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$$

הראו כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכיחו ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכיחו כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכיחו כי  $f(\alpha) = 0$ .

(27) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכיחו שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

(28) תהי  $z(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  ויהי  $0 \leq r \leq 1$ .

הוכיחו שיש  $c$  בקטע, עבורו מתקיים  $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$ .

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה  $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$  יש פתרון.

ב. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) > 0$ ,  $f(4) > 2f(2)$ .

הוכיחו שקיים  $c$  כך ש- $f(2c) = 2f(c)$ .

ג. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שקיים  $a$  כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$ .

(30) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

(8)  $[0,1]$

(9) א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- (1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא:
- א. חחייע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
  - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- (2) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ . הוכיחו שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- (3) תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים. הוכיחו ש-  $f$  חסומה.
- (4) יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  כך ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ . הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- (5) תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על. הוכיחו ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- (6) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ . הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**(7)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(8)** תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ , כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$   
 הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
 \* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

**(9)** הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.  
 באריכות:  
 הוכיחו שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ , כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(10)** בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .  
 הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

**(11)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .  
 ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות **12-13** הוכיחו:

**(12)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

**(13)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

**14** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:  
 תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ . פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ . בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15** הוכיחו כי אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $a$ , אזי הפונקציה  $g(x)$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי  $a$ , גם רציפה בנקודה  $a$  (כאשר  $c$  מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

**16** נתונה הפונקציה

בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

**17** הוכיחו כי אם  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a, b]$  אז יש  $c > 0$  כך ש-  
 $f(x) > c$  לכל  $x \in [a, b]$ .

**18** הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציה  $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון  $\varepsilon, \delta$ ).  
 השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

## תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

(1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 7 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

- 120 ..... 1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה
- 128 ..... 2. נגזרות חד צדדיות

## הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

### שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

### שאלות\*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=1$ . האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x=0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x=0$ ?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ (טבעי } n \text{).}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x = 0$  ?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x = 0$  ?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$ . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי  $f$  גזירה וזוגית. הוכיחו כי  $f'$  אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$  ומקיימת לכל  $x, y$  ב- $[a, b]$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $[a, b]$  וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את  $f'(x)$ .

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן  $f'(x) = 0$ .

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**(20) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ב. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ג. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ד. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .

**(21) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$
- ב. אם הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$  קיים וסופי, אז  $f$  גזירה.

**(22) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$
- ב. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

**(23) נתון כי  $f(x)$  רציפה ב- $x = 4$ , ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x-4)}{x-4} = 0$** הוכיחו ש- $f$  גזירה ב- $x = 4$ , וחשבו את  $f'(4)$ .**(24) תהי  $f$  פונקציה רציפה בסביבת הנקודה  $x = 0$  המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$** א. הוכיחו כי  $f(0) = 0$ .ב. הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $x = 0$  ו- $f'(0) = 0$ .**(25) תהי  $f$  פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי  $f(0) = 0$  ו- $f'(0) = k$** הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ **(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0$** א. אם  $f(x_0) \neq 0$ , הוכיחו שגם  $|f|$  גזירה ב- $x_0$ .ב. אם  $f(x_0) = 0$ , הראו שייתכן כי  $|f|$  גזירה ב- $x_0$  וייתכן שלא.

(27) תהינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות בנקודה  $x_0$ .

נגדיר  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הראו שאם  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , אז  $h$  גזירה ב- $x_0$ .

(28) תהי  $f$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי אם  $f$  גזירה ב-0, אז  $f'(0) = 0$ .

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,

לכל  $x, y \in (0, \infty)$ .

נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x=1$ .

א. הוכיחו כי  $f(1) = 0$  ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ .

ב. הראו כי  $f$  גזירה, ושלכל  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

(30) נתון כי  $f$  פונקציה גזירה המקיימת  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

הוכיחו ש- $f$  פונקציה לינארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם  $f$  גזירה ב- $x_0$ , אז  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה  $a_n \rightarrow 0$ .

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0 = 1$ , ו- $f(1) = 1$ .

הראו שאם  $k \in \mathbb{N}$ , אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$ .

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = (x-1)^2 D(x)$  גזירה רק בנקודה  $x=1$ .

33) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$ .

34) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin^2 x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f'(x_0)$  אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות  $f'(x_0)$  את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$ .

36) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f''(x_0)$  אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x=a$ , ונגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = (x-a)f(x)$ . הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $z(x)$  גזירה בנקודה  $x=a$ .

ב.  $z'(x)$  רציפה ב- $x=a$ .

38) נניח ש- $f$  גזירה ב- $c$  ו- $f(c) = 0$ . הוכיחו:

א. אם  $f'(c) = 0$  אז  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  אז  $f'(c) = 0$ .

**(39)** יהיו  $f, g$  פונקציות גזירות ב- $c$  ונניח כי  $f(c) = g(c)$ .

א. הוכיחו כי  $|f(x) - g(x)|$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ב. הוכיחו כי  $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ג. הוכיחו כי  $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

**(40)** נניח ש- $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  ו- $f$  רציפה ב- $c$ .

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $c$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$4 \quad (9) \quad 2 \quad (8) \quad !44 \quad (7)$$

(10) א. רציפה לכל  $x$ . ב. לא גזירה בנקודה  $x=1$ . קיים משיק אנכי בנקודה.

$$n > 2 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$n > 1 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$e \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{4} \quad \text{א.} \quad (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.  $f' = 0$ .

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$ , ומתקיים:  $f'(0) = 0$ .

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$ , ומתקיים:  $f'(1) = 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad (19)$$

ב.  $x = \frac{\pi}{2}n$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55.

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = |x|$ . ג.  $-5f'(x_0)$ .(36) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ .

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות חד-צדדיות

### שאלות

**1** תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$  על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

**10** בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x=-1$ ?

ב. עבור ערך ה- $a$  שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם

הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=-1$ .

האם קיים משיק בנקודה זו?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**12** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**13** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$\text{14 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים  $p$  ו- $q$  הפונקציה הנתונה:  
א. רציפה. ב. גזירה.

**15** חשבו את  $f'(0)$ , עבור הפונקציה:  $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$\text{16 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל  $x$  ממשי.

### תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם  $[x]$  מחזירה לכל מספר ממשי  $x$  את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$  (מעגלת כלפי מטה). למשל:  $[-4.1] = -5$ ,  $[4.1] = 4$ .

**17** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] - [-x]$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**18** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ .  
חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

**19** נתונה הפונקציה  $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**(20)** הוכיחו שאם  $f$  היא פונקציה המקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ , אז  $f$  גזירה ב- $x=0$ .

**(21)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $x_0=0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = |x|f(x)$  גזירה ב- $x_0=0$  אם ורק אם  $f(0) = 0$ .

**(22)** יהיו  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ ו-} f'_-(x_0) = g'_+(x_0),$$

אז הפונקציה  $z$ , המוגדרת על ידי  $z(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ , גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  לא גזירה ב- $x_0$  ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , אז  $g \circ f$  איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

ג. אם  $g$  גזירה מימין ב- $x_0$  והפונקציה  $f$  מוגדרת בסביבה מלאה של  $x_0$ , אז  $g(x_0)$  וגזירה מימין ב- $g(x_0)$ , אזי  $f \circ g$  גזירה מימין ב- $x_0$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**(23)** תהיינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$ . נתון ש- $g$  היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ , ולכל  $x > y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ושכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x) = g(x)$ .

$$\text{(24) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות  $f$ .

ב. בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \ (x > 1) \ , \ f'(x) = -4 \ (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \ (x \geq 0) \ , \ f'(x) = 4x \ (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

(11) א.  $a=1$  ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

(14) א.  $q=0$  ב.  $q=0, p=4$

(15) -10

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1. \quad (24)$$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 8 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

133	1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
137	2. תרגול בכללי הגזירה	
140	3. תרגילים נוספים לפי סוגים	
142	4. גזירה סתומה	
145	5. כלל השרשרת	
	6. גזירה לוגריתמית	

## תרגול בכללי הגזירה

### שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left( 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x-2)^3$     ב.  $f(x) = (x^3+6)^5$     ג.  $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד.  $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$     ה.  $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3}{x}$     ב.  $f(x) = \frac{2}{x}$     ג.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$     ד.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה.  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$     ו.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$     ז.  $f(x) = \frac{6}{x+5}$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב.  $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג.  $f(x) = x^3(6-x)^4$

## הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$     ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$     ג.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$     ה.  $f(x) = \frac{1}{x}$     ו.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

## הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$     ב.  $f(x) = 4\sqrt{x+1}$     ג.  $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד.  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$     ה.  $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$     ו.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א. (5)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א. (6)}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א. (7)}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א. (8)}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א. (9)}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

## גזירה סתומה

## שאלות

(1) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .

(2) גזרו את הפונקציה הסתומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .

(3) גזרו את הפונקציה הסתומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .

(4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$  חשבו את  $y'$  בנקודה  $(1,2)$ .

(5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$  חשבו את  $y'$  בנקודה בה  $y = 0$ .

(6) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .

(7) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .

(8) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$  מצאו את ערך  $y''$  בנקודה בה  $y = 1$ .

(9) נתון עקום שמשוואתו  $yx^2 + e^y = x$ .  
א. הראו שעבור  $x=1$  קיים ערך  $y$  אחד ויחיד ומצאו אותו.  
ב. חשבו את  $y''$  בנקודה בה  $x=1$ .

(10) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ , מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ . נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

## כלל השרשרת

### שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
 נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
 חשבו את  $g'(2)$ .

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת  $z'(x)$ .

- ב. נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את  $z'(e)$ .

$$(3) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו  $g'(100)$ .

$$(4) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(5) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(0) = 2, \quad f'(0) = 1 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(4) = 1, \quad f'(4) = 2 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(7) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(1) = 1, \quad f'(1) = 4 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו  $g'(1)$ .

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה  $f'''(x)$  היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית נגדיר  $g(x) = (f(x))^4$ . קבעו האם הפונקציה  $g'(x)$  זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית. האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

## תשובות סופיות

(1) 40

$$z'(e) = 3\frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3)  $\frac{17}{80}$ 

(4) 36

(5)  $\frac{8}{9}$ 

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 9 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

146	1. משפט רול
150	2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$
152	3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$
153	4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים
154	5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות

## משפט רול

### שאלות

(1) בדקו האם הפונקציה הנתונה,  $f(x)$  בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי  $c$  המקיימים את מסקנת משפט רול:

א.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$   $[0, 2]$

ב.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$   $[-1, 1]$

(2) נתון ש-  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

הראו ש-  $f(1) = f(5)$ , אך אין נקודה  $c$ , כך ש-  $f'(c) = 0$ .  
האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

(3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $\mathbb{R}$ ,  
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות,  $x_0, x_1, x_2$ , עבורן  $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ .  
הוכיחו שקיים  $c$  ממשי, כך ש-  $f''(c) = 0$ .

(4) תהי  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .  
הוכיחו שקיימת  $x_0 \in (0, 1)$ , כך ש-  $f'''(x_0) = 0$ .

(5) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה 3 פעמים.  
נניח שמתקיים  $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ .  
הראו שלמשוואה  $f'''(x) = 0$  יש פתרון.

(6) נתון כי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.  
נתון בנוסף כי  $f$  פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב-  $x_0 = 2$ .  
הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה  $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ .  
 תהי  $g$  מוגדרת על ידי  $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ .  
 הראו כי  $g$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , והוכיחו כי הנגזרת,  $g'$ , מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע  $(-1, 1)$ .
- (8) הוכיחו:  
 אם  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$  ו- $f(1) = 0$ , אז הפונקציה  $g(x)$ , המוגדרת על ידי  $g(x) = xf(x)$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$ , וישנו פתרון ממשי למשוואה  $g'(x) = 0$ .
- (9) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$  ו- $f(x) > 0$  לכל  $0 < x \leq 1$ .  
 הוכיחו שקיים  $c \in (0, 1)$ , כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$ .
- (10) אם  $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$ ,  $(c_i \in \mathbb{R})$ ,  
 הוכיחו שלמשוואה  $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$  יש לפחות פתרון אחד בקטע  $(0, 1)$ .
- (11) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .  
 הראו שלמשוואה  $f'(x) = 2x$  קיים פתרון בקטע  $(0, 1)$ .
- (12) תהיינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות.  
 נניח שלכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ .  
 הראו שבין כל שני שורשים של  $f$  קיים לפחות שורש אחד של  $g$ .
- (13) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה,  
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$  ו- $f'(0) > 0$ ,  $f'(1) > 0$ .  
 א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.  
 ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.  
 ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע  $(0, 1)$ .

**14** ענו על הסעיפים הבאים :א. תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשבו את  $f''(0)$ .ב. תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים, כך ש-  $f''(0) > 0$ .

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי, } n$$

**15** תהי  $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשבו את  $f''(1)$ .**16** נתון כי  $f, g$  גזירות לכל  $x$  וכי  $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$  ב-  $\mathbb{R}$ .הוכיחו שלמשוואה  $f(x)g(x) = A$  יש לכל היותר פתרון אחד. $A$  קבוע כלשהו.**17** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$  וכי  $f'(x)$  חד-חד ערכית ב-  $\mathbb{R}$ .תהי  $x_0$  נקודה כלשהי.הוכיחו כי לגרף של  $y = f(x)$  ולישר המשיק בנקודה  $x_0$  יש נקודה משותפתאחת ויחידה -  $x_0$ .במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של  $y = f(x)$  נמצאו כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

**18** נתון כי  $f$  גזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , ולכל  $x \in (a, b)$  מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה  $f'(x) = 0$  יש שלושה פתרונות בקטע.הוכיחו שלמשוואה  $f(x) = 0$  יש לפחות שני פתרונות בקטע.תנו דוגמה לפונקציה  $f$  המקיימת  $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$ .**19** נתון כי  $f(x), g(x)$  רציפות בקטע  $[a, b]$  וגזירות בקטע  $(a, b)$ .נתון בנוסף כי  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ .הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  כך ש-  $f'(c) = g'(c)$ .

- (20) הפונקציות  $f$  ו- $g$  רציפות ב- $[a, b]$  וגזירות ב- $(a, b)$ .  
 ידוע כי  $f(a) \geq g(a)$  ו- $f'(x) > g'(x)$  ב- $(a, b)$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) > g(x)$  ב- $(a, b)$ .

### תשובות סופיות

- (1) א. כן,  $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$       ב. כן,  $2 - \sqrt{3}$
- (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $x = 3$ .
- (14) א. 0      ב. שאלת הוכחה.
- (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

---

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

---

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) x < \operatorname{arctanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

---

### שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט לגראנז' – שאלות כלליות

---

### שאלות

- (1) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 5$ .  
 ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
 הוכיחו כי  $f(2) = 8$ .
- (2) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת  $|f'(x)| \leq 7$ .  
 ידוע כי  $f(1) = 3$ ,  $f(4) = 18$ .  
 הוכיחו כי  $4 \leq f(2) \leq 10$ .
- (3) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ , ונניח ש- $f(a) = f(b) = 0$ ,  
 וכן שקיימת נקודה  $c$ , כאשר  $c \in (a, b)$ , כך ש- $f(c) > 0$ .  
 הוכיחו שקיימת נקודה  $m$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f''(m) < 0$ .
- (4) תהי  $f$  פונקציה גזירה בקטע  $(a, b)$ , כך ש- $f'$  חסומה בקטע  $(a, b)$ .  
 א. הוכיחו שקיים  $M > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$  מתקיים:  
 $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$   
 ב. הוכיחו ש- $f$  רציפה במידה שווה ב- $(a, b)$ .  
 כלומר, הוכיחו שלכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$ , כך שלכל  $x$  ו- $y$  ב- $(a, b)$ ,  
 המקיימים  $|x - y| < \delta$ , מתקיים  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .
- (5) נניח כי  $f$  רציפה ב- $[0, \infty)$  וגזירה ב- $(0, \infty)$ .  
 כמו כן,  $f(0) = 0$ , ו- $f'$  מונוטונית עולה.  
 א. הוכיחו כי  $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$  ב- $(0, \infty)$ .  
 ב. הוכיחו כי  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$ .

**(6)** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$  וגזירות ב- $(a, \infty)$ . נתון כי  $f(a) = g(a)$  ו- $f'(x) \leq g'(x)$  לכל  $x > a$ . הוכיחו כי  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \geq a$ .

**(7)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $(0, \infty)$ .  
 א. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ .

ב. נתון כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**(8)** תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$ . הוכח:

א. אם הגבולות  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = L$  אז  $L = 0$  (ללא שימוש בכלל לופיטל).

ג. ייתכן שהגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיים אבל הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  לא קיים.

ד. אם הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  קיים אז גם הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.

ה. אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$  או  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < 0$  אז  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  או  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .  
 הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**(9)** נניח כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

האם נכון לומר כי מתקיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ?

הוכיחו או הפריכו.

הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז', הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**(10)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ . הוכיחו שקיים לכל היותר  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c$ .

**(11)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x) < 0$  לכל  $0 \leq x \leq 1$ . הוכיחו שקיים בדיוק  $c$  אחד ב- $[0, 1]$ , כך ש- $f(c) = c^2$ .

**(12)** תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $[a, b]$ .

$$\frac{f'(c_2) + f'(c_3)}{2} = f'(c_1) \text{ ו- } c_2 \neq c_3 \text{ , כד ש- } c_1, c_2, c_3 \in (a, b) \text{ הוכיחו שקיימים}$$

**(13)** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות  $(0, f(0))$  ו- $(1, f(1))$ , חותך את הגרף של  $f$  בנקודה  $(a, f(a))$ , כאשר  $0 < a < 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0 \in [0, 1]$  כד ש- $f''(x_0) = 0$ .

**(14)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נניח ש- $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$  כאשר  $L \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f'_+(a) = L$  קיים וש- $f'_+(a) = L$ .

**(15)** תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה שמקיימת  $f(0) = 0$ .

נניח שלכל  $x \in [0, 1]$  מתקיים  $|f'(x)| \leq |f(x)|$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**(16)** נתון כי  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ .

א. ידוע כי  $f'(x) = 0$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f$  קבועה ב- $[a, b]$ .

ב. ידוע כי  $f'(x) = m$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f$  לינארית ב- $[a, b]$ .

**(17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי  $f, g$  רציפות בקטע  $[a, b]$  וגזירות בקטע  $(a, b)$ .

ידוע כי  $f'(x) = g'(x)$  לכל  $x \in (a, b)$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g(x) + c$  ב- $[a, b]$ .

ב. הוכיחו כי  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ .

**(18)** נתון כי  $f$  גזירה בקטע  $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

א. הוכח כי  $f'$  לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח  $f'$  שואפת ל- $\infty$  או  $-\infty$ ?

## תשובות סופיות

0. ב. 8

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 10 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

158	1. המשיק
160	2. בעיות משיקים
162	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
166	4. הנורמל
167	5. זווית שבין שתי עקומות
168	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

## המשיק

### שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה  
 א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$ , בנקודה  $(2, 2)$ .  
 ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ , כאשר  $a > 0$ .  
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.  
 מצאו את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .  
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ , בנקודה  $(1, 15)$ , הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ , הוא  $\frac{e}{3}$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$ , לגרף הפונקציה  
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
 לכל ערך  $k$  כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .  
 א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 3$  ו- $x = 1$ .  
 ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',  
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$$

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$$

מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

$$(10) \quad \text{פונקציה } f(x) \text{ גזירה ברציפות ב-} 0 \text{ ומקיימת } f(0) = 0$$

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

$$\text{חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(11) \quad \text{מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x=1$  ו- $x=0$ .

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 17 \quad \text{ב. } 4$$

$$(2) \quad a = 2$$

$$(3) \quad (1, 3)$$

$$(4) \quad a = 2, b = -1$$

$$(5) \quad a = 2, b = -2$$

$$(6) \quad \text{לערך } k = 6, \text{ בנקודה } x = 1; \text{ לערך } k = \frac{158}{27}, \text{ בנקודה } x = \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad \text{א. ראו באתר. ב. } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$$

$$(8) \quad x = 5, x = -1$$

$$(9) \quad x = 1, x = \frac{1}{3}$$

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(11) \quad \alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ .

מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6)  $(2, -3)$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$

(7)  $(-3, 1)$ ,  $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

**(10)** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

**(1)** נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

**(2)** נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

**(3)** נקודת ההשקה היא  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

**(4)** נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

**(5)** משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

**(6)**  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

**(7)** המשיק  $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

**(8)**  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

**(9)** נקודת ההשקה  $(1, 1), k = 1.5$ .

**(10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  , בנקודה  $x = -1$  .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  , ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  , בנקודה  $x = 0$  .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  , בנקודה  $x_1 = 1$  .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  , בנקודה  $y = 2$  , הוא -4 . מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  , ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  , בנקודה  $x_1 = 2$  .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  , בנקודה  $(1,6)$  , הוא -6 . מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$  , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$  . מצאו את משוואת המשיק.

**(11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ , בנקודה  $x = 0$ .

**(12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

**(13)** לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

**(14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ , בנקודה  $x = 1$ .

**(15)** הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**(16)** מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .

**(17)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

**(18)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(19)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(20)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3,2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5,0)$  ו- $(2,4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2,1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

(1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו-  $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

(1)  $71.57^\circ$

(2)  $71.56^\circ$

(3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

---

### שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 11 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

- 169 .....1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.
- 172 .....2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.
- 173 .....3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.
- 174 .....4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.
- 175 .....5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\frac{0}{0}$  ו-  $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	$\infty$ (34)	0 (33)	$\infty$ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	$\infty$ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x$ , $(a > 0)$ (2)	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)
$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ (15)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)

### תשובות סופיות

$e^2$ (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	$e$ (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	$e^3$ (7)	1 (6)
0 (15)	$e$ (14)	1 (13)	$e$ (12)	1 (11)

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .  
 הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.  
 לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

# חשבון אינפיניטסימלי 1

## פרק 12 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

176	1. חקירת פולינום
177	2. חקירת פונקציה רציונלית
181	3. חקירת פונקציה מעריכית
184	4. חקירת פונקציה עם שורשים
185	5. חקירת פונקציה טריגונומטרית
189	6. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות
191	7. מושגי יסוד
192	8. חקירת פונקציה לוגריתמית
196	9. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
199	10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
204	11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

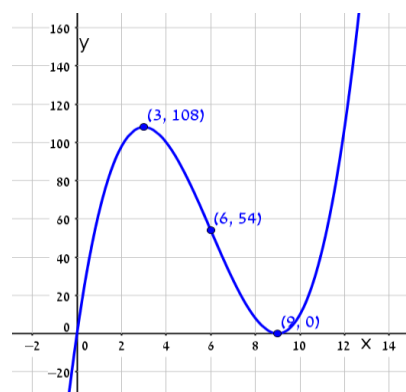
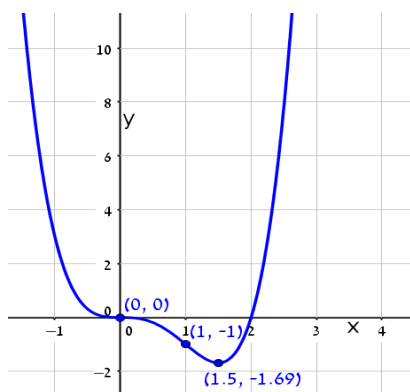
$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .  
 תחום עלייה:  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .  
 תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .  
 נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .
- (2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $1$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(1.5, \frac{-27}{16})$ .  
 תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .  
 תחום קמירות:  $x < 0$  or  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ .

## גרפים



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

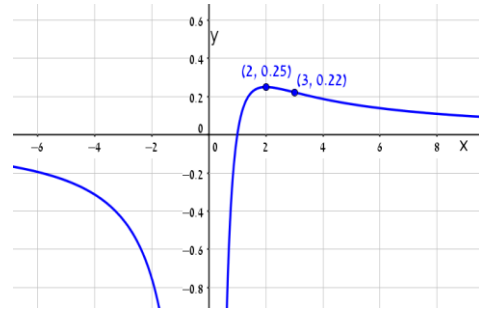
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת: הישר  $y=x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ ,  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $x < -2$  or  $0 < x < 2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת: הישר  $y=x-2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x > -1$  or  $x < -3$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

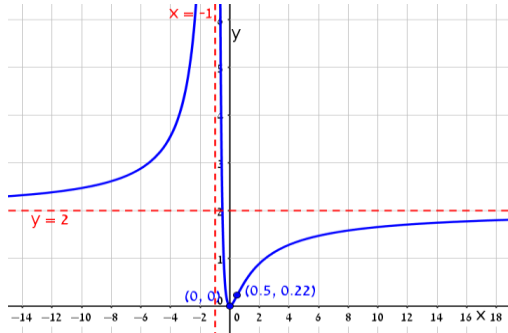
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.  
נקודות פיתול:  $(-1,0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .
- תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .  
תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,  
ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1,0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.  
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .
- תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0,0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x < -2$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $-2 < x < -1$ .  
נקודת פיתול: אין.  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

גרפים

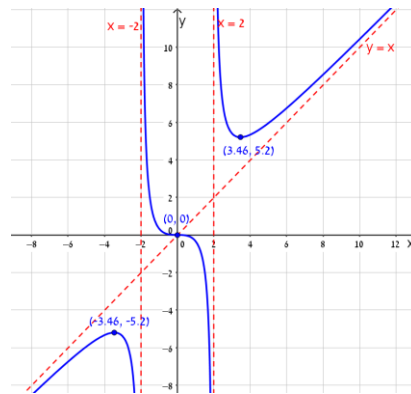
(1)



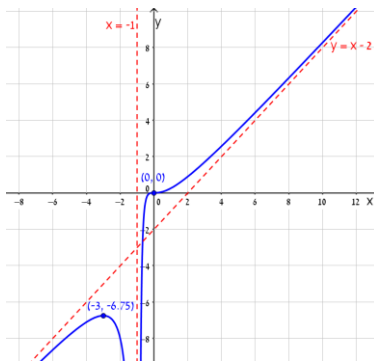
(2)



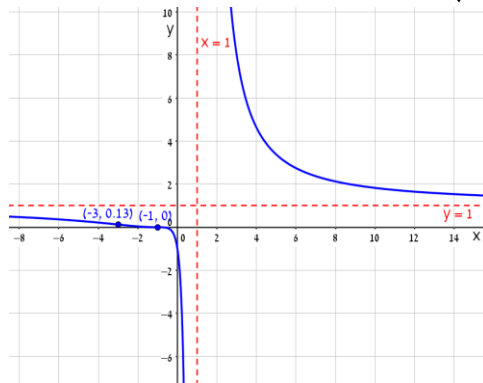
(3)



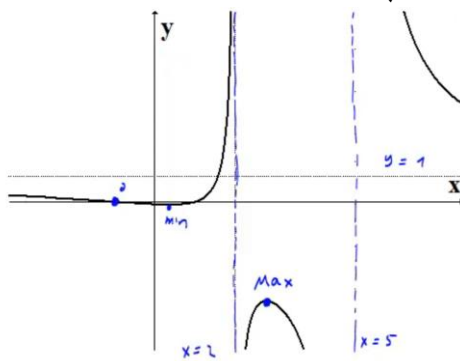
(4)



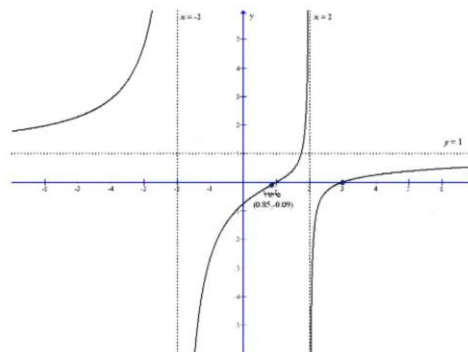
(5)



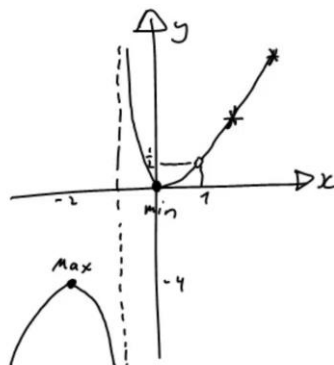
(6)



(7)



(8)



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

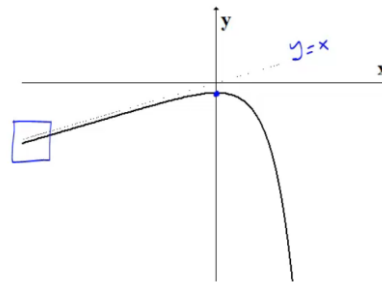
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

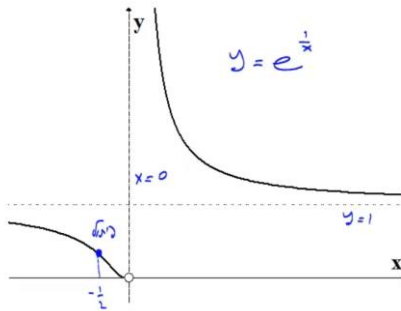
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y=x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $-0.5 < x < 0$  or  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת: הישר  $y=x+3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $-0.4 < x < 0$  or  $x > 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$  or  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ , תחום קעירות:  
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

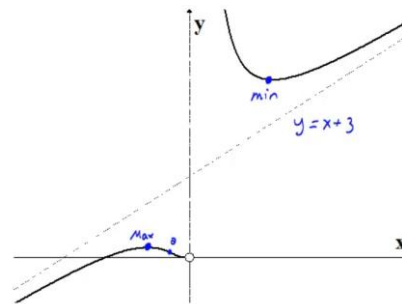
(1)



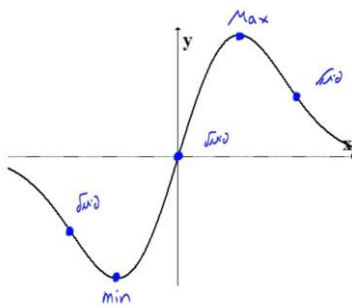
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

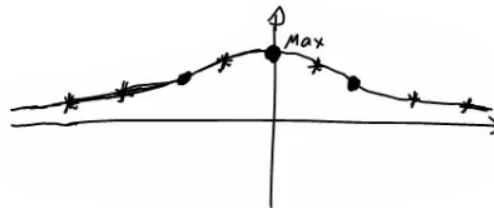
### תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0,1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



## חקירת פונקציה טריגונומטרית

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
  - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
  - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
  - מציאת נקודות פיתול.
  - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0, \pi]$ .
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad [0, 2\pi], \quad (8)$$

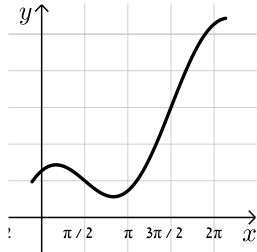
$$f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad [0, \pi], \quad (9)$$

## תשובות סופיות

(1) א.  $0 < x < 2\pi$ .

ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ .



ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ,

קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

(2) א.  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .

ב.  $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ ,  $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$  קצה.

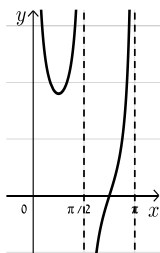
ג. תחומי עלייה:  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .



ד.  $(0, 0)$ . ה. אנכית:  $x = \frac{\pi}{2}$ . ו.  $(0, 0)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  או  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ ,

קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

(3) א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .

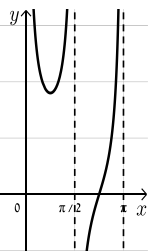
ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .

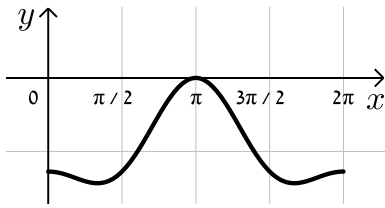
ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .

(4) א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .

ב.  $\max\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(2\pi, -2)$ ,  $\max(0, -2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(\pi, 0)$ .

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ; יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ . גרף:

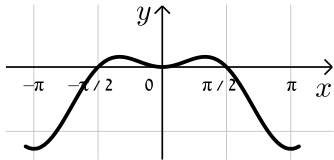




5 א.  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 1)$

ב.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{\pi}{6}, 1.29)$ ,  $(\frac{5\pi}{6}, -1.29)$ ,  $(1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

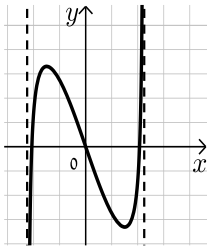


6 א. חיתוך:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,

$\max(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$  קצה.

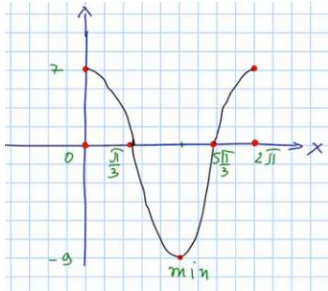
7 א.  $(0, 0)$ ,  $(\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$

ג.  $\min(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27})$ ,  $\max(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27})$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$ ,  $x = 7$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\pi, -9)$ , מקסימום:  $(0, 7)$ ,  $(2\pi, 7)$



נקודות פיתול:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

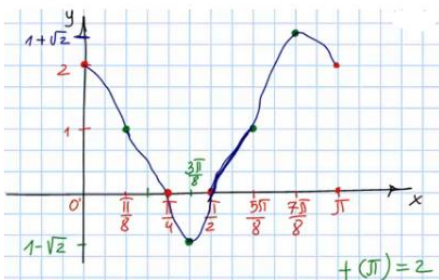
קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$  or  $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 2$  or  $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2})$ , מקסימום:  $(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2})$

תחום עלייה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ , ירידה:  $0 < x < \frac{3\pi}{8}$  or  $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול:  $(\frac{\pi}{8}, 1)$ ,  $(\frac{5\pi}{8}, 1)$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{8}$  or  $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

## חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

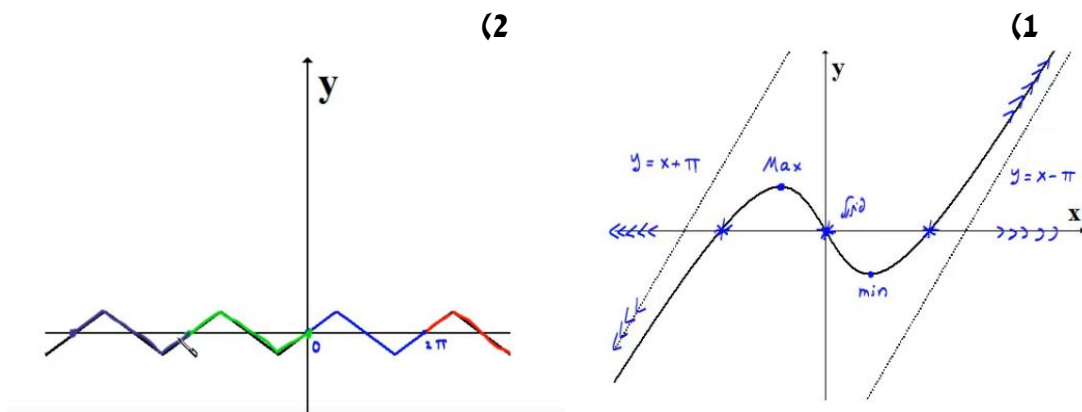
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, 0.575)$ , מינימום:  $(1, -0.575)$ .  
 תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ .  
 תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 מחזוריות: כן, ממחזור  $2\pi$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $x = 0, \pi, 2\pi$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .  
 תחום עלייה:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .  
 נקודות פיתול: אין.

## גרפים



## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

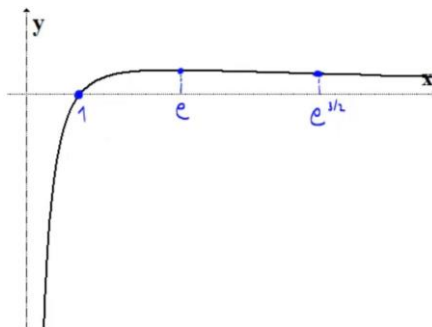
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

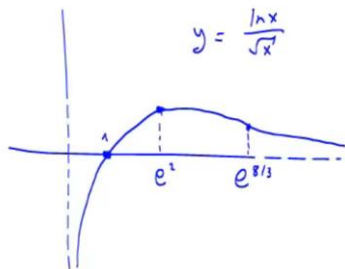
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e$  or  $e^{-1} < x < 1$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $1 < x < 5.15$  or  $0 < x < 1$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

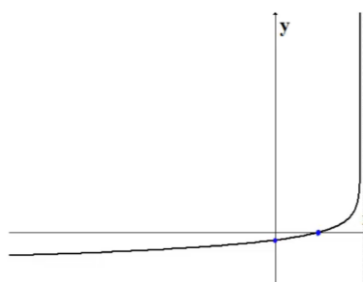
(1)



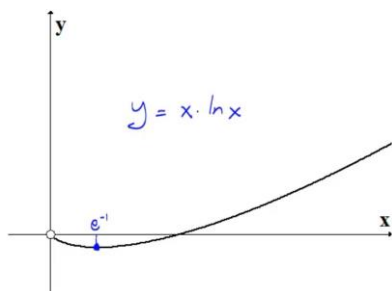
(2)



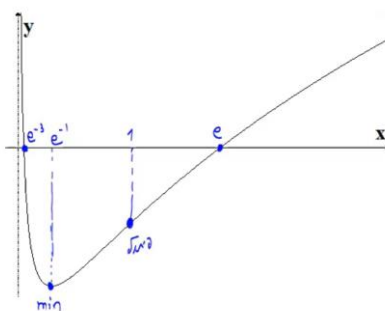
(3)



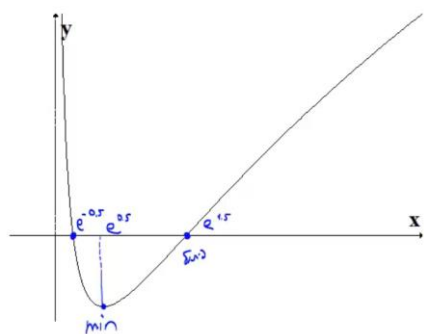
(4)



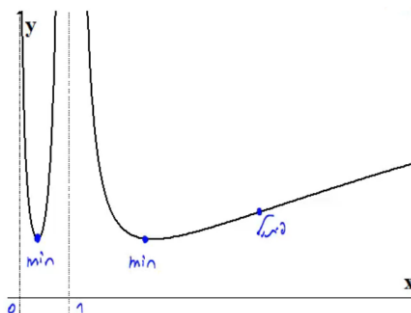
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

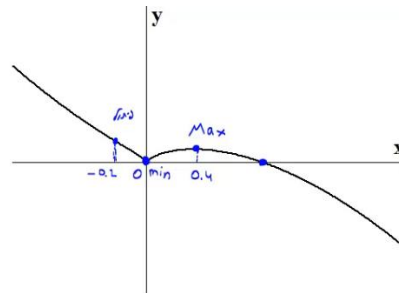
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

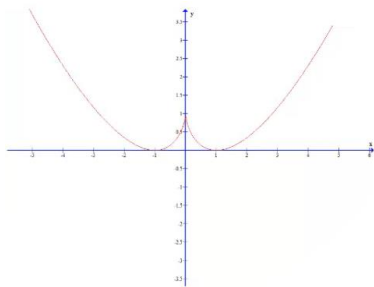
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $0 < x < 1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודות פיתול:  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

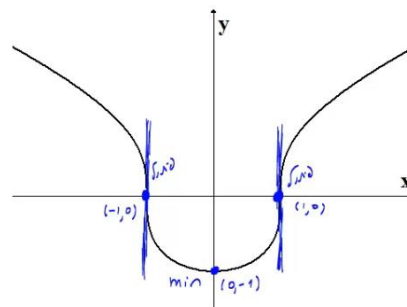
(1)



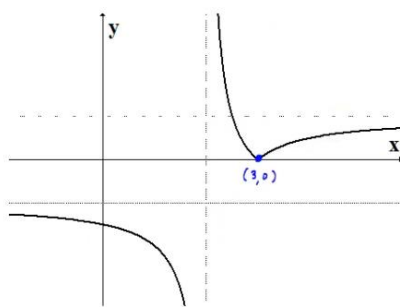
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה – שאלות כלליות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון. מצאו את הקבוע  $a$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת פיתול. מצאו את הקבוע  $a$ .

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת פיתול. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(5) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 3$  הוא 33. מצאו את  $a$ .

(6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(3, 9)$  הוא 12. מצאו את  $a, b$ .

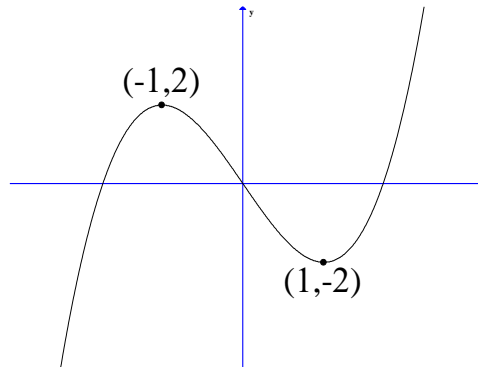
(7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$ . ידוע שהישר  $y = 4$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$ . ידוע שהישר  $y = 0.5x + 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .

9 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$

ידוע שהישר  $x=1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה.  
מצאו את  $a$ .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :



10 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?

11 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?

12 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?

13 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?

14 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?

15 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?

16 האם קיים ערך של  $k$ , עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

17 מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18 נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(2) = 4$ .

נגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

א. חשבו  $z'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכיחו כי  $z$  יורדת.

19 נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2, f'(1) = e$ .

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

- א. האם  $z$  עולה או יורדת בנקודה  $x = e$ ?  
 ב. נתון בנוסף כי  $f$  שלילית ועולה.  
 מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של  $z$ ?

20 נתונה פונקציה  $f(x)$  חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

- א.  $z$  עולה לכל  $x$ .  
 ב.  $z$  יורדת לכל  $x$ .  
 ג.  $z$  עולה לכל  $x > 0$ .  
 ד.  $z$  יורדת לכל  $x > 0$ .

21 נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

- א. חשבו את  $g'(e)$ .  
 ב. הוכיחו שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

22 הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

- ידוע שנקודת החיתוך היחידה של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  היא ב- $x = 0$ .  
 נגדיר  $g(x) = (f(x))^2$ . איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:  
 א. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.  
 ב. אם  $f$  יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.  
 ג. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  אין נקודת קיצון.

**(23)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת וגזירה פעמיים לכל  $x$  ומקיימת  $f''(x) = a \cdot f(x)$ , כאשר  $a < 0$ .

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו  $f(x)$  שלילית,  $f(x)$  קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם  $f(x)$  חיובית בתחום מסוים אז  $f'(x)$  יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים  $f(x)$  עולה וחותכת את ציר  $x$  בנקודה  $(n, 0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = n$  הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אז  $f(x)$  שלילית בכל תחום הגדרתה.

**תשובות סופיות**

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

## הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x \quad (2)$$

$$(x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$(x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4)$$

(5) נתון כי  $f$  רציפה לכל  $x \geq 0$ ,  $f'(x) > 0$  לכל  $x > 0$ , וכן  $f(0) = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# חשבון אינפיניטסימלי 1

פרק 13 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

- 205 ..... 1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה
- 208 ..... 2. פתרון משוואות פולינומיאליות
- 210 ..... 3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## מציאת מספר הפתרונות של משוואה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , ונתון כי  $b^2 < 3ac$ . מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי  $f$  פונקציה גזירה לכל  $x$ , המקיימת:  $f'(x) \leq 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 11-13 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12) \quad e^x - 5x = 0 \quad (11)$$

בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

(18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה  $a^2x + e^x = a$  כאשר  $a$  קבוע ממשי.

(19) הוכיחו שלמשוואה  $2ax^3 + a^2 + x^2 = 0$  קיים פתרון אחד ויחיד כאשר  $a$  קבוע ממשי.

(20) הוכיחו שלמשוואה  $x^2 + x^3 + 5x = 1$  יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.  
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

(21) נתון הפולינום  $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + cx - 1$ .

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי  $|c| < 1$ .

מה מספר השורשים של הפולינום?

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.
- (6)  $x = 1$
- (7)  $x = 0$
- (8)  $x = -4$
- (9)  $x = 0$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14)  $b^2 - 4ac = 0$
- (15)  $4b^2 - 12ac < 0$
- (16)  $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$
- (17)  $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (18) אם  $a = 0$ , למשוואה אין פתרון. אם  $a \neq 0$ , למשוואה יש פתרון יחיד.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

## פתרון משוואות פולינומיאליות

### שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3:

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

פתרו את המשוואות הבאות:

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (4)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (5)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (7)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (9)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (10)$$

$$7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (11)$$

**תשובות סופיות**

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (3)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (4)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (6)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (7)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (8)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (9)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (10)$$

$$(11) \text{ פתרון מקורב: } x = 0.8459.$$

## שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (1)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{פתרון מדויק } x = -1$$

$$(2) \quad \text{פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, \quad x = 1.9672$$