# חישוב כמותי

# תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה ..... 1
2. משוואות אלגבריות ..... 47
3. אי שיוויונים אלגבריים ..... 64
4. חוקי החזקות והשורשים ..... 73
5. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ..... (ללא ספר)
6. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שווינים לוגריתמיים ..... (ללא ספר)
7. חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית ..... 83
8. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים ..... (ללא ספר)
9. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות ..... (ללא ספר)
10. חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת ..... (ללא ספר)
11. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
12. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
13. אלגברה ליניארית - פתרון מערכת משוואות ..... 85
14. אלגברה ליניארית - מטריצות ..... 93
15. אלגברה ליניארית - דטרמיננטות וכלל קרמר ..... 98

# חישוב כמותי

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים


1. מספרים מכוונים ..... 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים ..... 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים ..... 7
4. אחוזים ..... 8
5. כפל וחילוק שברים ..... 14
6. חיבור וחיסור שברים ..... 16
7. בעיות יסודיות באחוזים ..... 20
8. חזרה על תבניות מספר ..... 22
9. כינוס איברים ..... 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים ..... 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ..... 29
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים ..... 31
13. פירוק הטרינום ..... 34
14. שברים אלגברים ..... 36
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים ..... 40
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים ..... 42
17. שברים כפולים ..... 46

# מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

**כללים:**

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

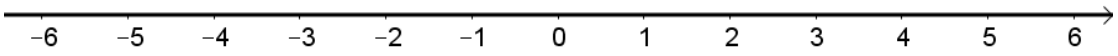
**הערה:**

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

**1)** סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -5\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ 4\ ,\ -3\frac{1}{2}$$




**2)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

**3)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

**5)** מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

**6)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

**7)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

**8)** מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

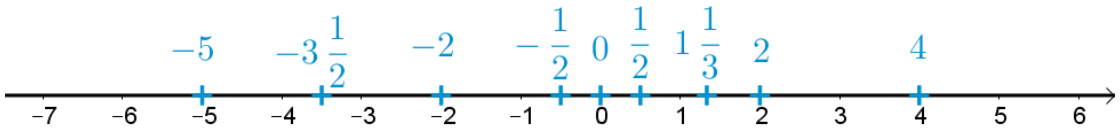
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

## תשובות סופיות:

**1)** להלן מערכת הצירים:




**2)** א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

**3)** א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

**4)** א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

**5)** א. + ב. + ג. - ד. -.

**6)** א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

**7)** א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

**8)** א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

# חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקראת החזקה.

**הערות:**

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

**הגדרה:**

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקרא סדר השורש.

**הערות:**

- שורש למספר זוגי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3^2$
ב. $3^3$
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. $4^3$
ו. $3^4$
ז. $(-5)^3$
ח. $10^4$
ט. $-(-3)^4$
י. $-5^4$
יא. $-4^3$
יב. $-(-2)^6$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81.
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64.

**2)** א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר. ד. -2 ה. -3 ו. -10.

# סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**סדר פעולות חשבון:**

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

ב. $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

ג. $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

ד. $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

ה. $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

ו. $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

ז. $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

ח. $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

ט. $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

י. $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

יא. $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 28 ב. 33 ג. 19 ד. -37 ה. 31 ו. -14

ז. 5 ח. -21 ט. -16 י. -44 יא. 20

# אחוזים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית - שבר:**

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

**ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:**

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

**שבר עשרוני:**

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

**הגדרה - אחוז:**

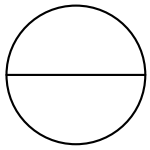
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

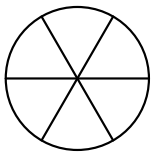
## שאלות:

**12)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

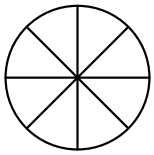
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



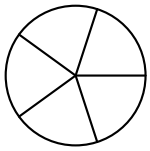
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

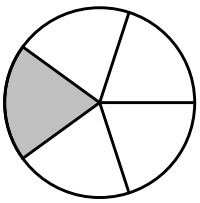


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

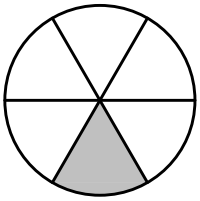


**13)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

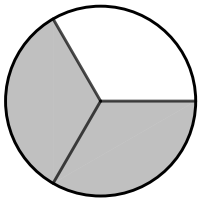
א. שבר:



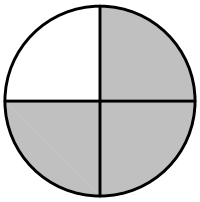
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



**14)** הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

**15)** צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

**16)** המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

**17)** המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

**18)** קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

**19)** המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. 0.7 | ב. 0.07 | ג. 0.007 | ד. 0.34 |
| ה. 0.304 | ו. 0.65 | ז. 1.2 | ח. 1.02 |
| ט. 1.42 | י. 3.5 | יא. 6.03 | יב. 5.125 |

**20)** המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$ | ו. $\frac{3}{4}$ | ז. $\frac{2}{5}$ | ח. $\frac{4}{25}$ |
| ט. $\frac{7}{50}$ | י. $\frac{3}{20}$ | יא. $\frac{7}{8}$ | יב. $\frac{9}{16}$ |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$ | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

**21)** כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |

**22)** המר מאחוזים לשברים פשוטים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. 25% | ב. 32% | ג. 64% | ד. 80% |
| ה. 120% | ו. 5% | ז. 300% | ח. 150% |

**23)** המר משברים פשוטים לאחוזים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{3}{4}$ | ב. $\frac{1}{8}$ | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$ |

## תשובות סופיות:

**12)** תשובה מודגמת בסרטון.

**13)** א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$.

**14)** א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

**15)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

**16)** א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

**17)** א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

**18)** א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

**19)** א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

**20)** א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

**21)** א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\overline{8}$

**22)** א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

**23)** א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

# כפל וחילוק שברים:

## סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. $4$ ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

**2)** א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. $36$ ה. $15$ ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. $2$

# חיבור וחיסור שברים:

## סיכום כללי:

**כפולה משותפת מינימלית:**

בהינתן זוג מספרים $a$ ו- $b$, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

**הערות:**

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

**כללי החיבור והחיסור של שברים:**

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ , $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$ , $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

  דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה,

ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

## שאלות:

**1)** מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$ ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$ ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$ ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$ ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

**5)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

**2)** א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

**3)** א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

**4)** א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

**5)** א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

# בעיות יסודיות באחוזים:

## סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

## שאלות:

**1)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**2)** בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**3)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

**4)** מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

**5)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

**6)** מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪.
מה מחירו בתחילת השנה?

**7)** ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

**2)** א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

**3)** א. 240 ₪ ב. 60 ₪

**4)** א. 540 ₪ ב. 40 ₪

**5)** 4.9755 ₪

**6)** 400 ₪

**7)** א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

# חזרה על תבניות מספר:

## סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של $x$ פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

**2)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה-$x$ הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

**3)** הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

**2)** א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

**3)** א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

# כינוס איברים:

## סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים $x$ ו- $x^2$ הם שונים.

## שאלות:

**1)** כנס איברים דומים:

א. $5x+7x-4x$

ב. $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

ג. $-10xy+15xy+xy-2yx$

ד. $x^2y-3yx^2+x^2y$

ה. $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

ו. $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

ז. $3xy+y-30y+6yx-7y$

ח. $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

ט. $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

י. $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

יא. $7x^2-3x-4x+2$

יב. $5xy+2x-3yx-x+1$

יג. $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

יד. $x+xy+y-6yx-6y-6x$

טו. $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

טז. $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

יז. $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

יח. $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

יט. $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

כ. $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

כא. $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

כב. $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

כג. $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

כד. $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

כה. $2a^2b+2b+3a^2+5b$

כו. $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

כז. $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

כח. $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $8x$ ב. $2x^2$ ג. $4xy$

ד. $-x^2y$ ה. $4a^2-a$ ו. $x^2$

ז. $9xy-36y$ ח. $8mn^2-6nm^2$ ט. $15x^3-19$

טו. $-13n-2m+6mn$ טז. $-5ab^2+22a^2b-3b$ י. 0

יא. $7x^2-7x+2$ יב. $2xy+x+1$ יג. $4x^2+3x-9$

יד. $-5x-5y-5xy$ יז. $4z^2-1$ יח. $14x^2z+5xz^2+6$

טו. $-3x^2+2x-3$ כ. $-3x^2-x$ כא. $7a^2b+13x^2y$

כב. $-8x^2y^3+15a^2$ כג. $-8y^2-5x^3y^2$ כד. $-6x^3y-x^2$

כה. $2a^2b+3a^2+7b$ כו. $25a^2b-22ab^2$

כז. $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$

כח. $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

# פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

## סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$

ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$

ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$

ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$

ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$

ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

**5)** פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

**2)** א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. $b^3-3b^2+4b$ ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

**3)** א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

**4)** א. $x^2+x-2$ ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

**5)** א. $x^2+3$ ב. $7$ ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

# פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

## סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+4x+4$ ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

**2)** א. $x^2-12x+36$ ב. $x^2-4x+4$ ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

**3)** א. $x^2-25$ ב. $x^2-9$ ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. $x^4-y^2$ ח. $9a^4b^6-16$

**4)** א. $x^2+2$ ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

# פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

## סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2+5y$ ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

**3)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$ ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$ ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$ ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

**4)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$ ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$ ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$ ח. $25x^2+70x+49$

**5)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $r^2-25$ ב. $x^2-81$

ג. $25y^2-49$ ד. $121x^2-1$

ה. $x^2y^2-4$ ו. $9y^4-169x^4$

**6)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$ ב. $x^3-10x^2+25x$

ג. $m^4-1$ ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

**2)** א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

**3)** א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

**4)** א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

**5)** א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

**6)** א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$

# פירוק הטרינום:

## סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c$ כאשר $a$, $b$ ו-$c$ הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר $bx$ לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, $m_1$ ו-$m_2$, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

**הערה:**

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים $m_1$ ו-$m_2$ באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

## שאלות:

**1)** פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2+5x+4$ ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. $x^2+2x+8$

**2)** פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

**הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.**

א. $6x^2+5x+1$ ב. $x^2+5x+4$

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

**2)** א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

# שברים אלגבריים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$ , $\frac{3x}{x^2+1}$ , $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-$x$ יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

**2)** צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

**3)** צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

**4)** צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

**5)** צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq 4$

ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 0\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 1$

ח. $x\neq 0\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 4$

**2)** א. $x$ ב. לא ניתן לצמצם. ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם. ה. לא ניתן לצמצם. ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם. ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם.

**3)** א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

**4)** א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

**5)** א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}\ ,\ x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\ ,\ x\neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\ ,\ a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\ ,\ mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

# כפל וחילוק של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}^{1}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{x^2}_{x}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_{3}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

**2)** א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. $d^2$ ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

# חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

**6)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

**2)** א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

**3)** א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

**4)** א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$ ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

**5)** א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

**6)** א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$

ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

# שברים כפולים:

## סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

ב. $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

ג. $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

ד. $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

ה. $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

ו. $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

ז. $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

ח. $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

ט. $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^2}{3}$ ב. 2.5 ג. $\frac{1}{6t^3}$ ד. $\frac{t-9}{54t^2}$ ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

ו. $\frac{x(x+1)}{2}$ ז. $\frac{c}{c-4}$ ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$ ט. $\frac{5}{x}$.

# חישוב כמותי

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה ..... 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 52
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 53
5. משוואות דו-ריבועיות ..... 55
6. משוואות עם פרמטרים ..... 57
7. משוואות עם שורשים ..... 59
8. משוואות עם ערך מוחלט ..... 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 62

# משוואה ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא: $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$
ב. $7-2x=7$
ג. $2x+x=24$
ד. $2x+6=8+x$
ה. $-7x+5+2x=4x-13$
ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$
ז. $2-5x+7=-3x+8$
ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$
ב. $7x-4(3-4x)=-x$
ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$
ד. $5x-(3x-7)4=21$
ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$
ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

**2)** א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

**3)** א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

**4)** א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

**5)** א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6\ ,\ x\neq 3$.

# מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1$ , $b_1$ , $c_1$ ו- $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ , $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

**פתרון של מערכת משוואות:**

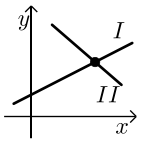
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

**הצגה גרפית של מערכת משוואות:**

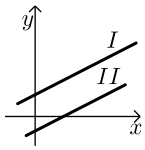
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

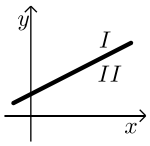
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.




- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.




- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



**פתרון אלגברי של מערכת משוואות:**

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

**הערה:**

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$

**4)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

**6)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

**2)** א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

**3)** א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

**4)** א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

**5)** א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

**6)** א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

# משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

## סיכום כללי:

**משוואה ממעלה ראשונה:**

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של $x$ המקיים אותה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $x+4=6+x$

**2)** $3x+6-x=4+2x+2$

**3)** $6(x-2)=2x+5+4x$

**4)** $5x-3+x=4x+2x-3$

**5)** נתונה המשוואה: $\square+5x=3-2(x+2)$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

## תשובות סופיות:

**1)** אף פתרון.

**2)** אינסוף פתרונות.

**3)** אין פתרון.

**4)** אינסוף פתרונות.

**5)** א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ (כאשר $k$ הוא מספר כלשהו חוץ מ-1-).

# משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ , $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- $x_1$ ו- $x_2$ ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $b$):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $c$):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

**3)** א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

**4)** א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

**5)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

# משוואות דו-ריבועיות:

## סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא $x$.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי $x$.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת $x$.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $5x^4+3x^2-8=0$

**2)** $x^4-3x^2+2=0$

**3)** $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

**4)** $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

**5)** $x^6+x^3=56$

**6)** $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

**7)** $x-9\sqrt{x}+14=0$

**8)** $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

**9)** $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

**10)** $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

**11)** $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

**12)** $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

**13)** $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

**14)** $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

**15)** $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

**16)** $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

**17)** $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

**18)** $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

**19)** $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

**20)** $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

## תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1\ ,\ \pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2\ ,\ \pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2\ ,\ \sqrt[3]{4}$
7) $x=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5\ ,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1\ ,\ 3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ 3$
18) $x=-1\ ,\ 2$
19) $x=3\ ,\ -1$
20) $x=\pm 1\ ,\ 4\ ,\ 6$

# משוואות עם פרמטרים:

## סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות $x$ , $y$ , $z$ ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר $x$ הוא הנעלם ו- $m$ הוא פרמטר) הוא: $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר $m$.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות.
בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא: $m\neq 0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

**2)** פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

**2)** א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

**3)** א. $x=m+1\ ,\ \text{m}-1$ ב. $x=a-1\ ,\ 3-a$ ג. $x=m-5\ ,\ -2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1\ ,\ -\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b}\ ,\ -ab$ ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b}\ ,\ \frac{a-b}{a+b}$.

# משוואות עם שורשים:

## סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2$.

**הערות:**

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

## תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4\ ,\ -3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2\ ,\ 2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

# משוואות עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $|3x+14|=7$

**2)** $|3x-24|=x$

**3)** $|12-x|=3x$

**4)** $2x-|8-x|=10$

**5)** $|4x-5|=|2x+13|$

**6)** $|14-3x|=2|x+5|$

**7)** $|x|+7=|2x|$

**8)** $|x+2|+6=|2x-4|$

**9)** $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

**10)** $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=-\frac{7}{3}\ ,\ -7$

**2)** $x=6\ ,\ 12$

**3)** $x=3$

**4)** $x=6$

**5)** $x=9\ ,\ -1\frac{1}{3}$

**6)** $x=24\ ,\ \frac{4}{5}$

**7)** $x=\pm 7$

**8)** $x=12\ ,\ -1\frac{1}{3}$

**9)** $x=0\ ,\ -12$

**10)** $x=0$

# מערכת משוואות ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

**1)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

**7)** $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

**8)** $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

**9)** $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

**10)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

**11)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

**12)** $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

**13)** $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

**14)** $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(2,4)$ , $(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2)$ , $(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ , $(2,1)$ , $(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$ , $(-6,-4)$ , $(3,8)$ , $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$ , $(-6.35,1.65)$ , $(7,4)$ , $(-4,-7)$

14) $(5,45)$ , $(-5,-45)$ , $(45,5)$ , $(-45,-5)$

# חישוב כמותי

## פרק 3 - אי שיוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

1. אי-שוויונים ממעלה ראשונה ..... 64
2. אי-שוויונים ממעלה שנייה ..... 65
3. אי-שוויונים ממעלה שלישית ..... 66
4. אי-שוויונים עם מנה ..... 67
5. אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם ..... 68
6. שאלות מסכמות – אי-שוויונים ..... 69
7. תחום הגדרה ..... 71

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

### מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

### מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $6x>2(3x-1)$

**3)** $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

**4)** $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

**5)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

**6)** $4(6x-8)<8(3x-4)$

**7)** $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

**8)** $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

**1)** $x>3$

**2)** כל $x$

**3)** אף $x$

**4)** $x>-2$

**5)** $x<5$

**6)** אף $x$

**7)** $x\geq 12$

**8)** $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**9)** $x^2<144$

**10)** $x^2-12x>-32$

**11)** $(x+2)(x+5)<0$

**12)** $(x+2)(x+4)<35$

**13)** $-x^2+13x+30<0$

**14)** $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

**15)** $(x-5)^2+x(x+2)<89$

**16)** $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

**17)** $-3x^2+12x>0$

**18)** $x^2-10x+25>0$

**19)** $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

**20)** $2x^2+2x+24\geq 0$

## תשובות סופיות:

**9)** $-12<x<12$

**10)** $x<4\ ,\ x>8$

**11)** $-5<x<-2$

**12)** $-9<x<3$

**13)** $x<-2\ ,\ x>15$

**14)** $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

**15)** $-4<x<8$

**16)** $-4\leq x\leq 0$

**17)** $0<x<4$

**18)** $x>5\ ,\ x<5$

**19)** $x<3\ ,\ x>5$

**20)** כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**21)** $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

**22)** $x(x^2+x+1)>0$

**23)** $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

**24)** $x^3-25x\ge 0$

**25)** $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

**26)** $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

**27)** $(x^2-x-6)(x-1)<0$

**28)** $x^3-6x^2+9x\le 0$

**29)** $(x^2+6)(x+3)>0$

**30)** $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

**21)** $1<x<2\ ,\ x>3$

**22)** $x>0$

**23)** $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

**24)** $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

**25)** $x>2$

**26)** $x\le 1\frac{2}{3}$

**27)** $x<-2\ ,\ 1<x<3$

**28)** $x\le 0\ ,\ x=3$

**29)** $x>-3$

**30)** $x<1\ ,\ 2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**31)** $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

**32)** $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

**33)** $\frac{1}{x^2-16}>0$

**34)** $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

**35)** $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

**36)** $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

**37)** $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

**38)** $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

**39)** $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

**40)** $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

**31)** $-3<x<1\ ,\ x>3$

**32)** $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq -\frac{1}{2}$

**33)** $x<-4\ ,\ x>4$

**34)** $2<x<3\ ,\ x>3$

**35)** $\frac{1}{2}\leq x<5$

**36)** $x>1$

**37)** $x>-2$

**38)** $2<x<3$

**39)** $1\leq x\leq 6$

**40)** $x<2\ ,\ x>6$

## אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**41)** $3<x+1<5$

**42)** $0<\frac{1}{x+4}<2$

**43)** $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

**44)** $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

**45)** $6x-38\le x-3\le 5x+7$

**46)** $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

**47)** $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

**48)** $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

### תשובות סופיות:

**41)** $2<x<4$

**42)** $x>-3\frac{1}{2}$

**43)** $x>0$

**44)** $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

**45)** $-2.5\le x\le 7$

**46)** $x\ge 10$

**47)** $1\le x<13$

**48)** $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

**2)** $x(x+5)-3x+12 \le 2x-1-x(4-x)$

**3)** $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

**4)** $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

**5)** $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

**6)** $x(x+3)(2x-5) < 0$

**7)** $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

**8)** $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

**9)** $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

**10)** $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

**11)** $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

**12)** $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

**13)** $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

**14)** $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

**15)** $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

**16)** $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

**17)** $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

**18)** לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

## תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \ , \ x \ge 3$

4) $x < -7 \ , \ -\frac{1}{3} < x < 2 \ , \ x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

11) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

15) אף $x$

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

# תחום הגדרה:

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

**3)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**4)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ($a$ פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות $a$ את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר $a$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 \, , \, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 \, , \, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

**2)** א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

**3)** $a = 5$.

**4)** $a = 2$.

**5)** א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

# חישוב כמותי

## פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

### תוכן העניינים

1. חוקי החזקות ..... 73
2. חוקי השורשים ..... 78
3. כתיבה מדעית של מספרים ..... 82

# חוקי החזקות:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $a^2a^6$
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

**3)** לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^33^2}$.

מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot2^n$ לבין הביטוי הנתון.

**4)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. $2^3+2^5$

**5)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

**6)** לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

**7)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^23^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

**8)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

**9)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

**10)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו-$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\frac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

**11)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\frac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\frac{\left(5^4\right)^23^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\frac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

**12)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$

ב. $\frac{1}{5^3}$

ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$

ה. $\frac{1}{81}$

ו. $\frac{1}{125}$

**13)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$

ב. $\frac{1}{3^{-2}}$

ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

**14)** חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

**15)** פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

**16)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

## תשובות סופיות:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | א. $a^8$ | ב. $t^{15}$ | ג. $b^{22}$ | ד. $k^5$ | ה. $n^5$ | ו. $c^4$ |
| | ז. $a^7$ | ח. $x^3$ | ט. 1 | י. $3^9$ | יא. $2^8$ | יב. $5^5$. |
| 2) | א. 18 | ב. $ab$ | ג. $x^6y^{10}$. | | | |
| 3) | $n=16$. | | | | | |
| 4) | א. 2 | ב. $\frac{1}{3}$ | ג. $\frac{5}{8}$ | ד. 40. | | |
| 5) | א. $a^8$ | ב. $c^{30}$ | ג. $x^{26}$ | ד. $b$ | ה. $n^3$ | ו. $d^{10}$ |
| | ז. 2 | ח. 9 | ט. $8^{18}$ | י. $3^7$ | יא. 3 | יב. $3^5$. |
| 6) | $n=2$. | | | | | |
| 7) | א. 6 | ב. 9 | ג. 56. | | | |
| 8) | א. $3^{12}$ | ב. $2^{21}$ | ג. $5^{10}$ | ד. $2^{12}$ | ה. $2^7$ | ו. $3^{51}$. |
| 9) | א. $\frac{2b^3}{a}$ | ב. $k$ | ג. $3\frac{1}{5}$ | ד. $\frac{1}{x}+x$. | | |
| 10) | א. $a^6b^3$ | ב. $m^{20}n^{15}$ | ג. $x^{36}y^9$ | ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ | ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ | ו. $a^{21}b^3$ |
| | ז. $x^{12}y^{18}$ | ח. $t^4r^{12}$ | ט. $b^2c^6$. | | | |
| 11) | א. 576 | ב. 225 | ג. 8 | | | |
| 12) | א. $4^{-6}$ | ב. $5^{-3}$ | ג. $2^{-10}$ | ד. $2^{-3}$ | ה. $3^{-4}$ | ו. $5^{-3}$. |
| 13) | א. 64 | ב. 9 | ג. 125. | | | |
| 14) | א. 81 | ב. 8 | ג. 5 | ד. $\frac{1}{9}$ | ה. 1000 | ו. 3. |
| 15) | א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ | ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ | ג. $5^3\cdot 2^4$. | | | |
| 16) | א. $a^{1-5n}$ | ב. $k$ | ג. $m^{2n+12}$. | | | |

# חוקי השורשים:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

## שאלות:

**17)** הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

**18)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

**19)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

**20)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

**21)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

**22)** הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

**23)** הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

**24)** הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

**25)** חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

**26)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

**27)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

**17)** א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. $\phi$

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

**18)** א. 7 ב. $-5$ ג. 2 ד. $-2$ ה. 4 ו. 16

ז. $-27$ ח. $\phi$ ט. $\phi$ י. 5.

**19)** א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

**20)** $\sqrt{2}$.

**21)** א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

**22)** א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

**23)** א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.

**24)** א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

**25)** א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

**26)** א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

**27)** א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

# כתיבה מדעית של מספרים:

## שאלות:

**28)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

**29)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

**29)** א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

# חישוב כמותי

## פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות ..... (ללא ספר)
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים ..... (ללא ספר)
3. משוואות מסכמות שונות ..... (ללא ספר)
4. משוואות עם קבוע אוילר ..... (ללא ספר)
5. מערכת משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
6. אי-שוויונים מעריכיים ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

### תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... (ללא ספר)
2. חוקי הלוגריתמים ..... (ללא ספר)
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית ..... (ללא ספר)
4. מעבר בין בסיסים ..... (ללא ספר)
5. הלוגריתם הטבעי ..... (ללא ספר)
6. משוואות עם בסיסים שונים ..... (ללא ספר)
7. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות ..... (ללא ספר)
9. אי-שוויונים לוגריתמים ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 7 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 83

# תחום הגדרה של פונקציה

## שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

**1)** $y=x^3-x^2-4x+1$

**2)** $y=\frac{1}{x^2-4}$

**3)** $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

**4)** $y=\frac{1}{x^3-x}$

**5)** $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

**6)** $y=\sqrt{x-4}$

**7)** $y=\sqrt{x^2+x-2}$

**8)** $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

**9)** $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

**10)** $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

**11)** $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

**12)** $y=e^{x^2+x+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** $y=\log_x(x+4)$

## תשובות סופיות

**1)** כל $x$.

**2)** $x\neq\pm2$

**3)** כל $x$.

**4)** $x\neq0,1,-1$

**5)** $x\neq2,-1$

**6)** $x\geq4$

**7)** $x\leq-2\ ,\ x\geq1$

**8)** כל $x$.

**9)** $-1<x<1$

**10)** $x<-2\ ,\ x>1$

**11)** $x>0\ ,\ x\neq1$

**12)** כל $x$.

**13)** $x>0\ ,\ x\neq1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב כמותי

## פרק 8 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

### תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
3. שימושי הנגזרת ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 9 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות

### תוכן העניינים

1. חקירת פולינום ..... (ללא ספר)
2. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... (ללא ספר)
3. תחום הגדרה של פונקצית מנה ושורש ..... (ללא ספר)
4. אסימפטוטות של פונקצית מנה ושורש ..... (ללא ספר)
5. חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש ..... (ללא ספר)
6. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

### תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות

### תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים ..... (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות

### תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים ..... (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות מעריכיות ..... (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות ..... (ללא ספר)

# חישוב כמותי

## פרק 13 - אלגברה ליניארית - פתרון מערכת משוואות

### תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 85
2. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות ..... 90

# פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

**2)** רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

**3)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

**4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

**5)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

**6)** מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**13)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**14)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**15)** $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$ , $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

**16)** $\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$

**17)** $\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$

**18)** $\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$

**19)** $\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$

**20)** $\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$

**21)** $\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$

**22)** $\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$

**23)** $\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$

**24)** $\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$

**25)** $\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$

**26)** $\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$

**27)** $\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$

**28)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

**2)** א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

**3)** $\begin{pmatrix}9&2&6&8\\3&5&-1&0\\4&2&8&2\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}0&0&-4&4\\0&5&-4&2\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

**6)** א. $R_1\to 2R_1+R_2$ ב. $R_2\to R_2-4R_1$ ג. $R_2\to 2R_2+4R_1$

**7)** $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** ו-
$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

**14)**
$$\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

**15)**
$$\begin{pmatrix}1&1+i\\1+i&2i\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1+i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
F=ℝ F=ℂ

**16)** $(x,y)=(1,2)$

**17)** $(x,y)=(5-2t,t)$

**18)** $\phi$

**19)** $\phi$

**20)** $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

**21)** $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

**22)** $(x,y)=(-1,1)$

**23)** $\phi$

**24)** $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

**25)** $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

**26)** $\phi$

**27)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**28)** א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ 4x-2y+5z=12 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**2)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**3)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y-z=k \\ 2x+my+z=3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכי $m$, עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.

ב. עבור ערך $m$ שנמצא ב-א, מצאו את ערכי $k$, עבורם למערכת פתרון.

ג. עבור ערכי $m, k$ שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**4)** נתון שהחמישייה $(4t-2s+4,-t+s,2,t,s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.

ב. החמישייה $(4,0,2,0,0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.

ג. החמישייה $(4,0,2,1,1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.

ד. לכל $a$ ממשי, החמישייה $(4a,0,2a,0,0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.

ה. החמישייה $(4t-2s,-t+s,0,t,s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ו. החמישייה $(0,1,0,1,2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה המערכת ההומוגנית $\begin{cases} 3x+my=0 \\ mx+2y-mz=0 \\ -x+mz=0 \end{cases}$.

יהי $W$ אוסף הפתרונות של המערכת.

עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ (אם בכלל) $W$ הוא:

א. נקודה (מצאו נקודה זו).

ב. ישר (מצאו ישר זה).

ג. מישור (מצאו מישור זה).

**6)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$.

נסמן ב-$A'$ את הצורה המדורגת של $A$.

ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.

מצאו את $A$.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** פתרון כללי של המערכת $\left(4-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t+2,t\right)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $\left(-\frac{3}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)$.

**2)** למערכת פתרון יחיד $(x,y,z)=(1,1,2)$.

למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0,0,0)$.

**3)** א. $m=-3$ ב. $k=-2$ . ג. פתרון כללי של המערכת $(x,y,z)=(t,t-1,t)$.

פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(t,t,t)$.

**4)** א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.

ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.

ז. הטענה לא נכונה.

**5)** א. $m\neq 0,-2,3$ . הנקודה היא $(x,y,z)=(0,0,0)$.

ב. אם $m=0$ נקבל ישר $\underline{x}=t(0,0,1)$. אם $m=2$ נקבל ישר $\underline{x}=t(2,-1,1)$,

אם $m=3$ נקבל ישר $\underline{x}=t(3,-3,1)$.

ג. אין ערכים של $m$ עבורם נקבל מישור.

**6)** $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\\-3&-6&-9&-12\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב כמותי

## פרק 14 - אלגברה ליניארית - מטריצות

### תוכן העניינים

1. מטריצות ..... 93

# מטריצות

## שאלות

**1)** נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6},\ B_{4\times6},\ C_{6\times2},\ D_{4\times2},\ E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $A+B$ | ב. $AB$ | ג. $AC-D$ | ד. $AE-B$ |
| ה. $B+AB$ | ו. $E(B+A)$ | ז. $(E+A^T)D$ | ח. $E^TB$ |
| ט. $E(AC)$ | י. $E(B-A)$ | | |

**2)** מצאו את $x,y,z$, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

**3)** א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

**4)** $2tr\left(D^2-2E\right)$

**5)** א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

**6)** $I_2BC$

**7)** $tr\left(C^TC\right)$

**8)** $DABC$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

**10)** אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

**11)** הוכיחו כי לכל $n$ טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 1-2^n & 1\end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

**12)** שתי מטריצות $A$ ו-$B$ יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות.

ב. אם המטריצה $A$ מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

**13)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי $A$ מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

**14)** יהיו $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

**15)** לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות מסדר $\ell$?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות $A$ ו-$B$, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר $A$ ו-$I$ ריבועיות מסדר $\ell$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- $A$ ו- $B$ מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות $AB$ ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

**17)** תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות $A$ ו- $B$ בצורה מפורשת.
ב. המטריצה $C$ מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את $C$ ומצאו נוסחה עבור $c_{ij}$ לכל $1\le i,j\le n$.

**18)** מצאו מטריצה ממשית $A$, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $4\times 6$ ב. לא. ג. $2\times 4$ ד. לא. ה. לא. ו. $6\times 6$
ז. $2\times 6$ ח. לא ט. $4\times 6$ י. $6\times 6$

**2)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**3)** א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$
ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

**4)** 230

**5)** א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

**6)** $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

**7)** 63

**8)** $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $A=\begin{pmatrix}a&-\dfrac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

**16)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב.
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$$

**18)**
$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב כמותי

## פרק 15 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות וכלל קרמר

### תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג ..... 98
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n ..... 103
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות ..... 108
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 110

# חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

## שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

**1)** א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

**2)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

**3)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

**4)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**5)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

**6)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

**8)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

**9)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

**10)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

**11)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

**13)** $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

**14)** $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

**15)** $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**16)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

**18)** חשבו: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**19)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות $A$ ו-$B$ מסדר $n$ הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-$k$ $(1 \le k \le n)$.
תהי $C$ מטריצה הזהה למטריצות $A$ ו-$B$ אך נבדלת מהן בשורה ה-$k$, שם היא שווה לסכום השורה ה-$k$ של $A$ והשורה ה-$k$ של $B$.
הוכיחו כי $|C| = |B| + |A|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $ad-bc$ ב. 29 ג. $-1$

**2)** א. $-1$ ב. $-3$ ג. $-14$

**3)** א. 24 ב. 234 ג. $-300$

**4)** 9

**5)** 6

**6)** א. 0 ב. 0 ג. 3

**7)** א. 24 ב. 44 ג. 104

**8)** 120

**9)** 114

**10)** 6

**11)** פתרונות באתר: www.GooL.co.il

**12)** פתרונות באתר.

**13)** $-8$

**14)** 16

**15)** 9

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $(k-1)^4(k+4)$

**19)** א. שאלת הוכחה. ב. 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\ldots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

הפיכה?

**2)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של $n$ עבורו דרגת המטריצה קטנה מ-$n$?

**3)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\ne 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

**4)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

**5)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\ne j\end{cases}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

**7)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

**8)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

**9)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}\min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה הפיכה.

**10)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 3$:

$$\left(a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j \\ 1 & 2\leq i\leq n,\ j=1 \\ 1 & 2\leq j\leq n,\ i=1 \\ x & else\end{cases}\right).\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

**11)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}ij & i\neq j \\ 1+ij & i=j\end{cases}$.

חשבו את $D_n=|A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

**13)** נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:

מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה $B$.

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

**14)** חשבו את $D_n=\begin{vmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

**15)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}2 & & 1\\ & \iddots & \\ n & & 2\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}i & i+j=n+1\\ 2 & else\end{cases}$.

**16)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}a & & b\\ & \iddots & \\ b & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}b & i+j=n+1\\ a & else\end{cases}$.

**17)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. $A$ הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

**2)** א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

**3)** $|A|=n!$

**4)** $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

**5)** $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

**6)** $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

**7)** א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

**8)** $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

**9)** $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

**10)** $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

**11)** $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

**12)** א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

**13)**
$$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

**14)**
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\end{cases}$$

**15)**
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n \text{ odd}\end{cases}$$

**16)**
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ odd}\end{cases}$$

**17)**
$$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n \text{ even}\end{cases}$$

**18)**
$$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ even}\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ odd}\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי $A$ ו-$B$ מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

**1)** א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

**2)** א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

**3)** נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

**4)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

**5)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

**6)** הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

**7)** נתון כי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

**8)** נתון: $A$ מטריצה מסדר $n$, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-$B$ הפיכה.
מצאו את $n$.

**9)** נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 4 ב. $2^{13}$

**2)** א. $-8$ ב. $-2^{11}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{81}{32}$

**5)** $|A|=18,\ |B|=-2/3$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** 7

**9)** $4^n$

**10)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל קרמר

## שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

**1)** $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

**2)** $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

**3)** $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

**4)** נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים $k$ עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

**5)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

## תשובות סופיות

**1)** $x=1,\ y=2$

**2)** $x=1,\ y=1,\ z=2$

**3)** $x=y=z=t=1$

**4)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

**5)** א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©