חדוא 2



תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים 1
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 6
3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8
4. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12
5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות 15
6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות 20
7. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן 31
8. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) 44
9. סדרות 66
10. טורים עם איברים קבועים 75
11. קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב 89
12. פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה 101
13. נגזרות חלקיות 109
14. נוסחת הקירוב הלינארי 115
15. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 116
16. פונקציות סתומות 120
17. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 123
18. קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים 125
19. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') 127
20. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 130
21. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 132

חדוא 2

פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 1
2. מציאת פונקציה קדומה 4

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$

2) $\int x^4 dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$

8) $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

9) $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$

10) $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x + 2\right) dx$

11) $\int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx$

12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \left(ax+b\right)^n dx = \frac{\left(ax+b\right)^{n+1}}{a \cdot \left(n+1\right)} + c$)

13) $\int \left(4x+1\right)^{10} dx$

14) $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)^{10} dx$

15) $\int \frac{4}{\left(x-2\right)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

18) $\int \frac{x}{\left(x-1\right)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$

20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$

22) $\int \frac{1 + x + x^2}{x} dx$

23) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$

25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$ **29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$ **32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.

מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=4$.

מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-6$.

מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.

שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.

מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.

שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,

וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.

מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.

מצאו את הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$,
ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$.

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x\to 0} f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
חשבו את הנגזרת $\big(G(x)-f(x)\big)'$.

תשובות סופיות

1) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

2) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

3) $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

4) $f(x)=x^2-6x+14$

5) $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

6) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

7) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

8) א. רציפה לכל x. ב. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0

חדוא 2

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת ''הנגזרת כבר בפנים''

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 6

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \cot x dx$ **3)** $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **6)** $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$ **8)** $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ **9)** $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$ **11)** $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x dx$ **12)** $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$ **14)** $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$ **15)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **17)** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **18)** $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **20)** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$ **21)** $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$ **23)** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ **24)** $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$
2) $\ln\left|\sin x\right|+c$
3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$
4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$
5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$
6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$
7) $e^{x^2}+c$
8) $e^{\tan x}+c$
9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$
10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$
11) $\sin\left(\sin x\right)+c$
12) $\sin\left(\ln x\right)+c$
13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$
14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$
15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$
16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$
17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$
18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$
19) $2\sqrt{x^2+1}+c$
20) $\sqrt{2\sin x}+c$
21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$
23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$
24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

1) $\int xe^x dx$

2) $\int x^4 \ln x dx$

3) $\int x\sin x dx$

4) $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

5) $\int x^2 \sin 4x dx$

6) $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$

8) $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

9) $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$

11) $\int x\cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

12) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

14) $\int x\arctan x dx$

15) $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$

17) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

18) $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$

20) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

21) $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2} dx$

22) $\int x\tan^2 x dx$

23) $\int \left(x+1\right)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1 $xe^x - e^x + c$

2 $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3 $x\cos x + \sin x + c$

4 $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5 $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6 $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7 $x\ln x - x + c$

8 $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

9 $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10 $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

11 $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

12 $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

13 $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14 $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

15 $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16 $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

17 $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

18 $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

19 $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20 $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\frac{e^x}{x+1}+c \quad \textbf{(21}$$

$$x\left(\tan x-x\right)+\ln\left|\cos x\right|+\frac{x^2}{2}+c \quad \textbf{(22}$$

$$\frac{2}{9}\left(x+1\right)\left(x+2\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}\left(x+2\right)^{\frac{11}{2}}+c \quad \textbf{(23}$$

$$x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx \quad \textbf{(24}$$

$$e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c \quad \textbf{(25}$$

$$\frac{1}{n}\left\{\left(\cos x\right)^{n-1}\sin x+(n-1)\int\left(\cos x\right)^{n-2}dx\right\} \quad \textbf{(26}$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5\left(\cos x\sin x+x\right)\right)+c \quad \textbf{(27}$$

$$\frac{1}{n}\left(-\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x+\left(n-1\right)\int\left(\sin x\right)^{n-2}dx\right) \quad \textbf{(28}$$

$$\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5\left(x-\sin x\cos x\right)\right)+c \quad \textbf{(29}$$

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\left(2n-1\right)\right) \quad \textbf{(30}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\} \quad \textbf{(31}$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad \int e^{ax}\sin bxdx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2} \quad \textbf{(32}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x\right)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin\left(\ln x\right)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18 $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19 $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20 $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22 $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23 $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24 $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית 15
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית 17
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית 18

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2(x^2+1)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

תשובות סופיות

1) x^3-x^2+2x+c

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) x^3-x^2+x+c

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

נוסחאות

$$(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 20
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 22
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 23
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 24
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 27

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln\left|\cos x\right|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ (x = \arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ (x = \arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin^2 x+\sin x+2\right)\cos x dx$

2) $\int\left(\cos^3 x+\cos x-2\right)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=\frac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

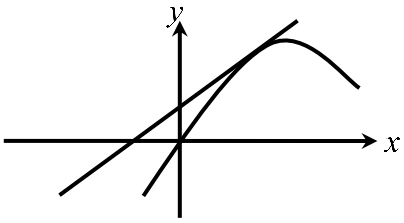
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



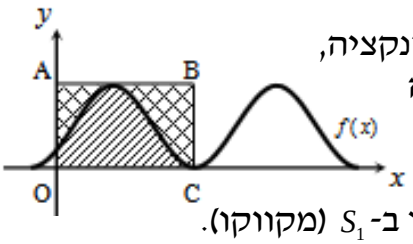
א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-x, ברביע הראשון והשני.

2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.

נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה-x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.



השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב-S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-y יסומן ב-S_2.

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

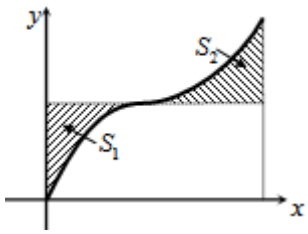
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

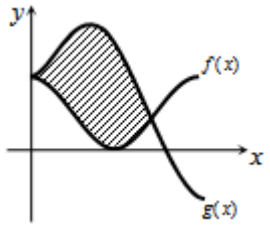
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה-x בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה-x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו-S_2, שווים.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$, בתחום $0\le x\le \pi$.

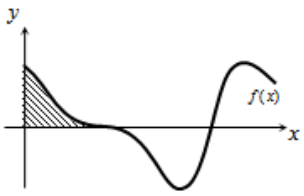


א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



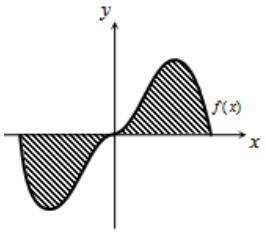
א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות $f'(x)=0$, בתחום $0<x<2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$, אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- x.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.



א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.

באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$, בתחום $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$, כאשר a,b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

4) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$.

6) $a=2$, $b=-2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 7 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו״א 31
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים 37
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות 40
4. משפטי האינטגרביליות 43

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

1) $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

2) $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

3) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

4) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

5) $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

6) $\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx$

7) $\int_0^4 f\left(x\right)dx$, כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

8) $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

9) $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

12) תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

14) חשבו: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

15) חשבו: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

16) נתונה פונקציה רציפה f. הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

17) $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

18) $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\left(n\in\mathbb{N}\right)\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx$

21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

22) הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

26) הוכיחו:

אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f

אז לכל מספר ממשי a מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) -6

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) 0

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) 0

18) $2\arctan 4$

19) 0

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
וננית כי $m\le f(x)\le M$ לכל x בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

2) $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

3) $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}dx\le 6\sqrt{17}$

4) $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

5) $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

7) $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

8) $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

9) $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

11) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

12) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

13) תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b), מתקיים $g(x)=0$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)dx \le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

17) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)

וגם $f'(x)\le M$ לכל x בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

19) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right\}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right\}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right]$

8) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+...+n=0.5n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

9) $\int_0^1 x\,dx$ **10)** $\int_0^1 x^2\,dx$ **11)** $\int_0^1 x^3\,dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin x\,dx$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2\,dx$.

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},...,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) -1

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) 2

13) 21

14) 0.5

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה f, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

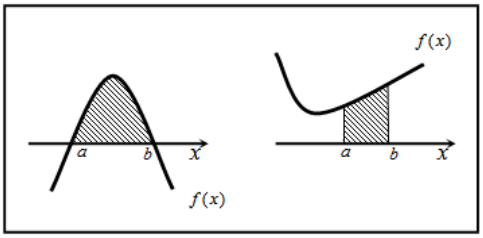
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים 44
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y 64
3. אורך קשת 65

חישוב שטחים

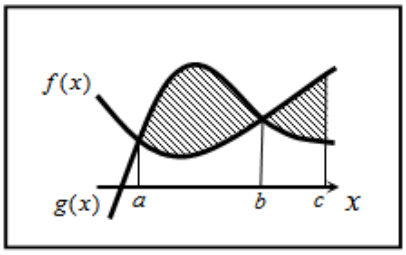
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



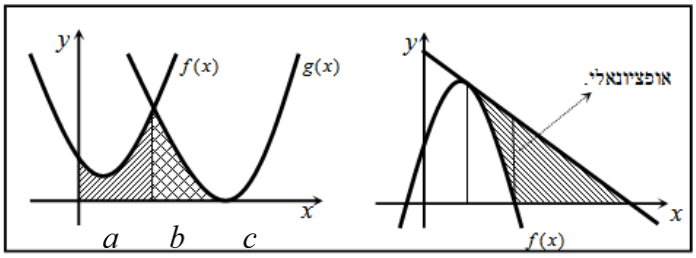
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :



$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

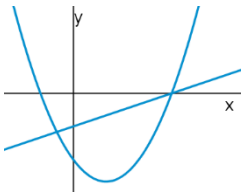


$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

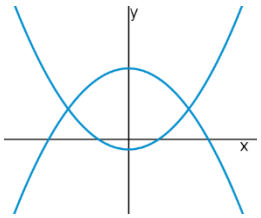
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות

1) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



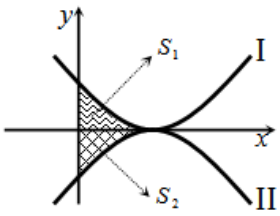
2) נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



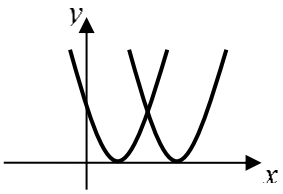
3) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



4) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.

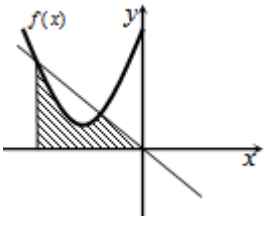


5) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

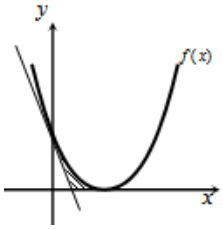
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=-4$.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.



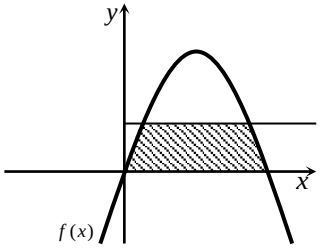
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).

7) נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.



הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

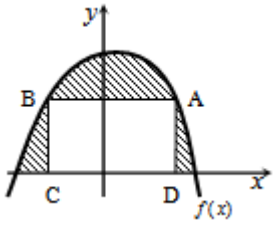
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר k .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,



היא $f'(x)=3-2x$. ישר AB, שמשוואתו $y=6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

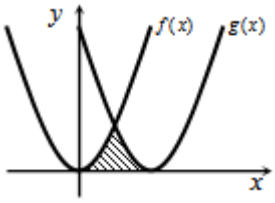
כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x=4$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).

9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$



את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.

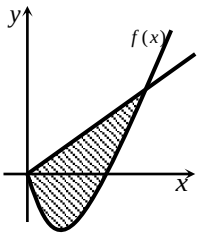
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



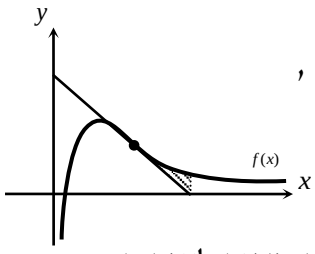
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

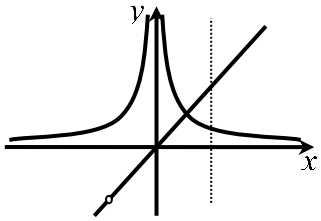
11) ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

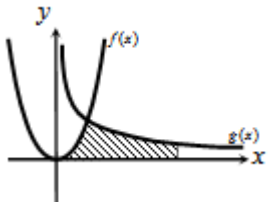
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.

12) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.



חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x.

13) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

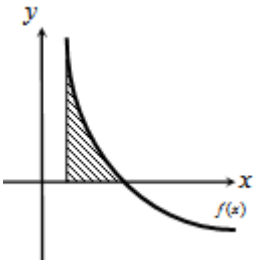


$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x=4$.

14) גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)



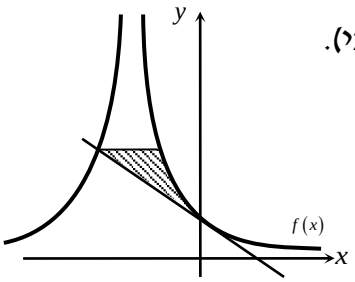
חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והישר $x=2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y, הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר A.

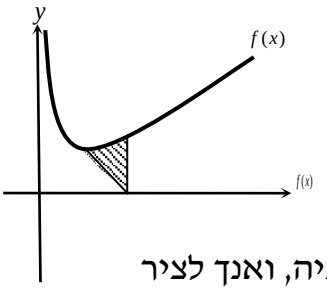
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

16) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

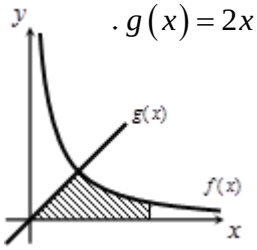


א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה-x.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה-x, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

17) באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



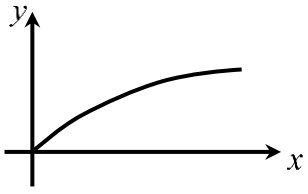
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x והישר $x=9$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-y.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.



לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

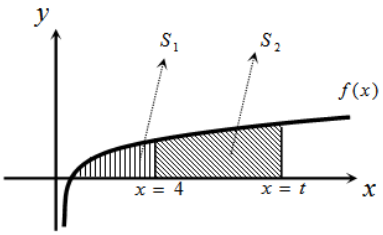
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה-x, $x=4$ ו-$x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x ב-S_1,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנכים ב-S_2.



ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את t.

21) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

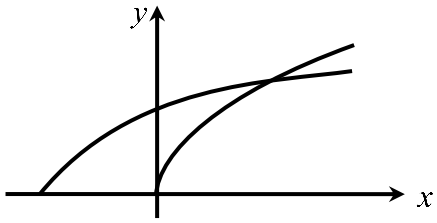
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x ואנך לציר ה-x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה-x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b.



23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

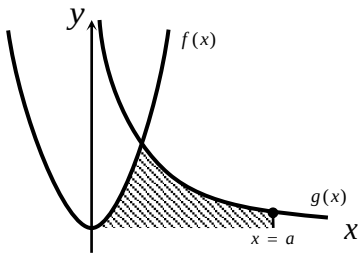
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה-x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

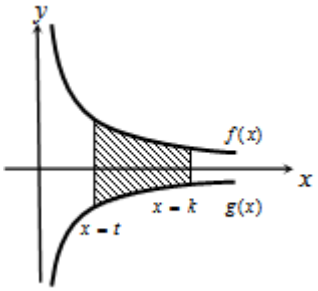
מצאו את a.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.



ידוע כי $AB=2CD$.

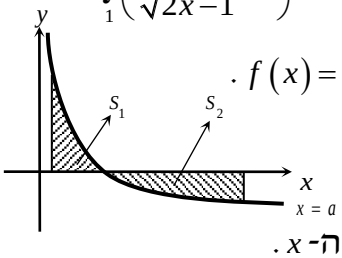
א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את t.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a, $(a>1)$, יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.



נעביר שני אנכים לציר ה-x, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

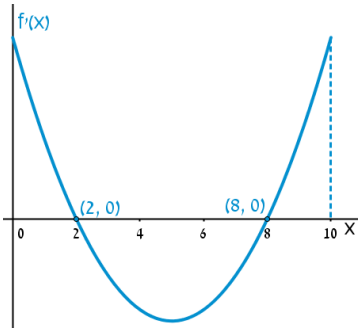
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנך $x=1$, כלומר את S_1.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2. נמקו.

26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

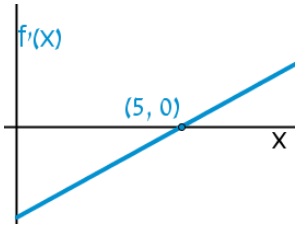


א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.



א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

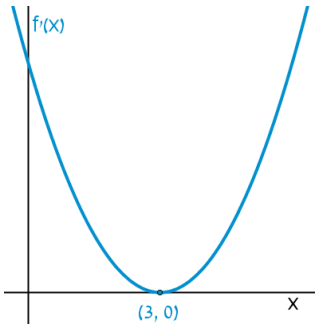
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה-y שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-y כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.



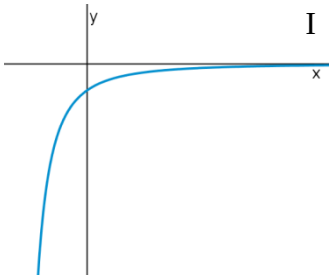
א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-5$.

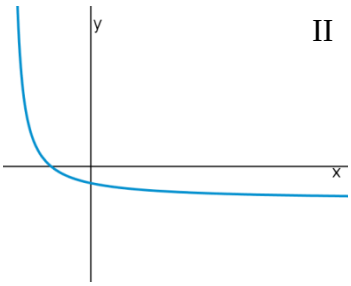
ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים בריבוע הראשון.

29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

I



II

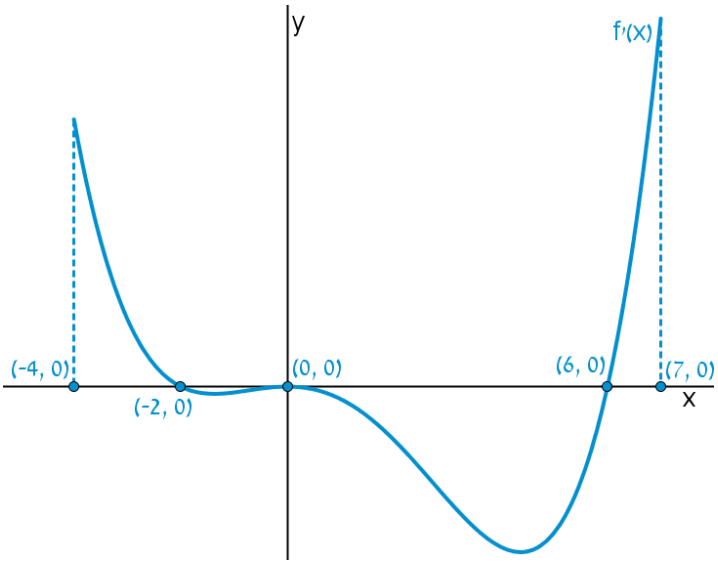


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-2$. מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x בריבוע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x בריבוע הרביעי.

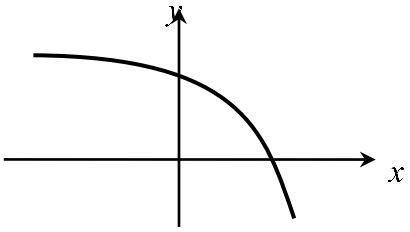
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים של פונקציות מורכבות	אינטגרלים יסודיים
$\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$	$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$
$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$	$\int e^{x}dx=e^{x}+c$

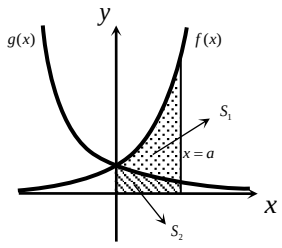
31) נתונה הפונקציה $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה-x.
ניתן להשאיר e ו-$\ln$ בתשובה.



32) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{bx}$, כאשר $b>0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה-y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר b.

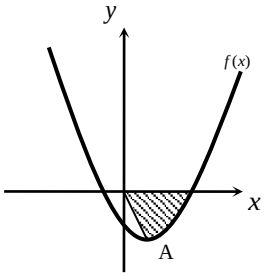
33) נתונות הפונקציות $g(x)=e^{-x}$ ו-$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה-y חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה-x, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה-x את הישר $x=a$,
כאשר $a>0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו-S_2.
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2.
מצאו את a.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

35) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.



הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

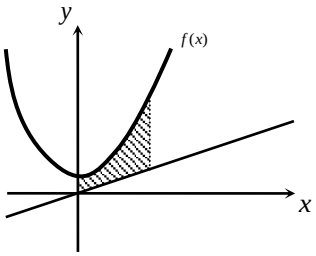
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.

36) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.



ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

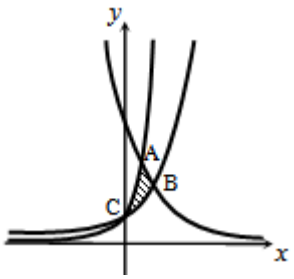
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.

37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

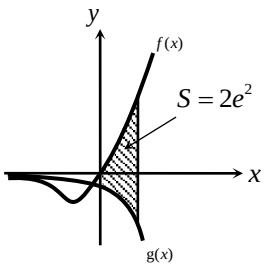


א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

38) ענו על הסעיפים הבאים:



א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$.

נעביר ישר $x=a$, כאשר $a>0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

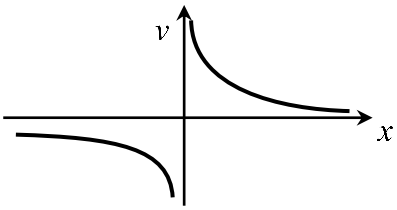
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

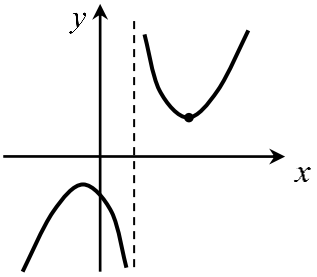
אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$

39) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.



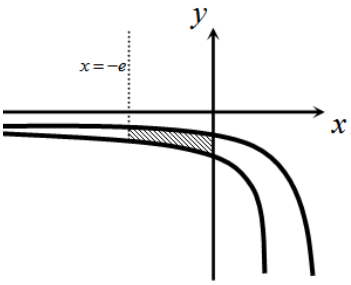
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-x.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

40) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.



חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-x העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$



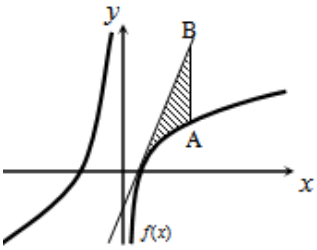
ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=-e$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

42) נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x היא $y=18x-9$.

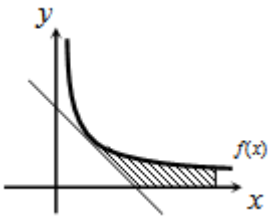
א. מצאו את a ו-b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה-y, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

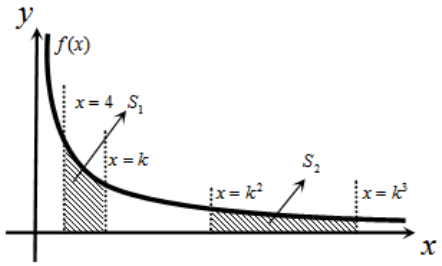


משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר $x=e^2$.

44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.



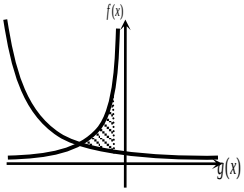
נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו-$x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.

א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו-S_2.

ב. הראו כי ההפרש S_2-S_1 אינו תלוי ב-k, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1.
מצאו את k.

45) נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו-$g(x)=\frac{k}{2x+5}$.



גרף $g(x)$ חותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y=0.4$.

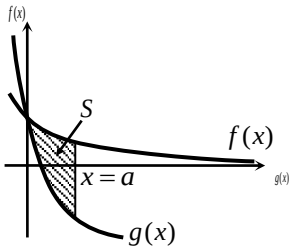
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

46) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$, בתחום $x\geq 0$.

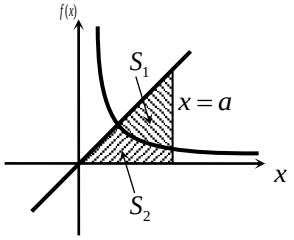


א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- x, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצאו את ערכו של a, עבורו מתקיים $S=4$.

47) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a, עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

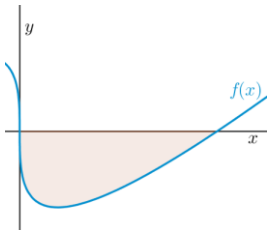
פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$	$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

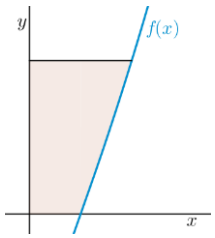
48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



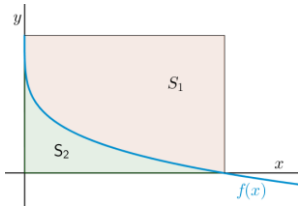
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. נעביר אנך לציר ה-y מהנקודה $(4,6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.



נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

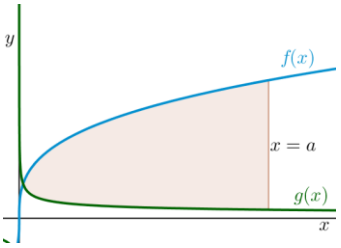
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-S_1,

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-S_2.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

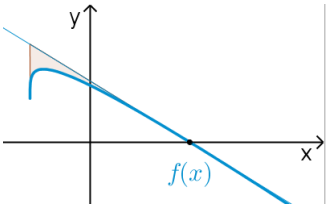
51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה-x, $x=a$ (a פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש. מצאו את a.

52) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, a פרמטר.



ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

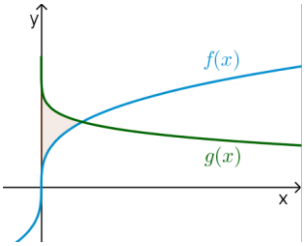
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

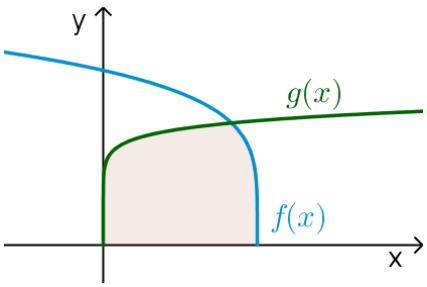
53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-y.

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.

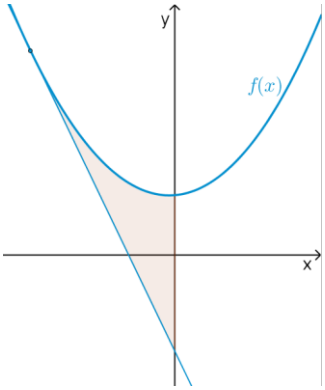


ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה-x.

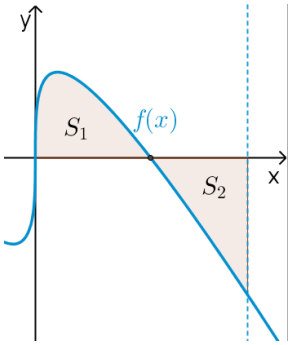
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



55) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-y.



56) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x יסומן ב-S_1.
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח S_2, כמתואר באיור.
מצאו את k, אם ידוע כי $S_1=S_2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

25) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=\left|-S_1\right|=2$.

26) ב. 10 יח"ש.

27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

29) א. $f(x):\text{II}$, $f'(x):\text{I}$ ב. 1 יח"ש.

30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

31) $S=0.192$ יח"ש.

32) $b=2$

33) שאלת הוכחה.

34) $a=\ln 2$

35) א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

36) א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

37) ב. $C(0,1)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $A(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

38) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

39) $S=\ln 4$ יח"ש.

40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

41) א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

42) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. $S=6+\ln 256\approx$ 11.54 יח"ש.

43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

44) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

46) ב. $a=2$

47) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

48) א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

49) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

50) $\frac{S_1}{S_2}=4$

51) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

52) א. $a=1$, $f\left(x\right)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $\left(-1.2,1.2\right)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

53) א. $\left(1,1\right)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

54) א. $f\left(x\right)=\left(6-5x\right)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

55) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

56) א. כל x. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $\left(0,0\right)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

תשובות סופיות

1) $20\frac{5}{6}$

2) $20\frac{5}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ $\left(\text{Decimal: } 3.16784\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 9 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות 66
3. חישוב גבול לפי אוילר 68
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ 69
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש 72
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית 73

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^2+10n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

8) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

10) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

11) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

12) $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

13) $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

14) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

15) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

16) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

17) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

18) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

19) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

20) $\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\left(\frac{4}{n}\right)$

21) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2+4n+1}$

22) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3+n^2+1}$

23) $\lim_{n\to\infty}4^n\sin\frac{1}{n}$

24) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **24**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

<u>הערה חשובה מאוד!</u>

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x. יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי!
בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) ∞
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(b\neq 0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$, $\left(a>0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\infty\right)$, $\left(a<0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=-\infty\right)$
15) 2.5
16) $\frac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\frac{a-b}{2}$
20) 4
21) 0.5
22) $\frac{1}{3}$
23) ∞
24) 1

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) 1

3) e^2

4) e^{-1}

5) e^3

6) e^{-12}

7) e^{30}

8) e

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הגבול:

1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n+1)}{n}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4n+\cos n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+\sin 2n}{n^2+\cos 3n}$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\arctan(2n-3)}{4n+\arctan(n-\ln n)}$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

8) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

9) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **9**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$

ב. $\alpha\in(0,1)$, $a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n>2$.

13) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.

14) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3\sqrt{k}}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+3}^{2n+4}\frac{1}{\sqrt{2n^2+k\sqrt{n}}}$.

16) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{2n^2+3n+5}{\sqrt[3]{5n^{12}+2k^5+k^3+1}}$.

17) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{n^2+n}\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

18) תהי $\left(a_n\right)$ סדרה **חיובית**, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 0
4) 0.75
5) 3
6) $\frac{3}{4}$
7) 0
8) 16
9) 0
10) 1
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) 9
14) 1
15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
17) 1
18) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) ∞

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

1) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

2) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

4) יהיו $a>0$ ו- $x_1>0$.

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל n.

הוכיחו שהסרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

5) יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל n.

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a, עבורם הסדרה עולה/יורדת.

ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

6) יהיו $0<b_1<a_1$

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ לכל n.

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה הסדרה $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$, $a_1=1,\ a_2=1$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

8) תהי a_n סדרה המוגדרת על ידי $a_1=0.5$ ו- $a_{n+1}=\sin\left(a_n^2\right)$ לכל $n\geq 1$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

תשובות סופיות

1) הגבול הוא 2.

2) הגבול הוא 1.

3) הגבול הוא 1.

4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

5) א. אם $2\leq a\leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

6) שאלת הוכחה.

7) ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 10 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 75
2. מבחן ההתבדרות של טורים 78
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 79
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים 81
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 83
6. תרגילי תיאוריה 84

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.141414...+0.123123123...$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.

2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.

3) מתבדר.

4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.

5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.

6) מתכנס ל- 8.

7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.

8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.

9) מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$

11) $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

15) $\frac{323}{1221}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

5) $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

6) הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:

$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ \left(\theta\neq 2\pi k\right)$.

8) בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)\pmod 7$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)\pmod 7}{\sqrt{n+1}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתכנס.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתכנס.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) מתבדר.
9) הוכחה.
10) א. הוכחה. ב. מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתכנס.
14) מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum|a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum\frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \geq 1:\ 0 < a_n < 1$, $4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n > 0$, $a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 11 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור 89
2. משטחים במרחב 93
3. גופים במרחב 95
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 98

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,||\,y-2x\,|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,||\,x\,|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\geq 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\}$

ה. $S=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\}$

ו. $S=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq\sqrt{4-y^2}\}$

ז. $S=\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\}$

ח. $S=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,y\geq 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\leq 0\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,0\leq y+1\leq\sqrt{1-x^2}\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||\,x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x^2+y^2\le 16\right.\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ y\ge \frac{1}{4}x^2\right.\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ x^2+y^2\ge 4\right.\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונים שני משטחים: $Q: 2x^2-y^2+z^2=3,\ R: x^2-y^2+2z^2=3$.

א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.

ב. הראו כי החיתוך בין R ו-Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.

ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל-Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו-$B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C. כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה-y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.

8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-y.

ב. $\ell_2:(x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)$

10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=x, z=-x$

ג. $C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t \quad \ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ ד. $\sqrt{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0,y\ge 0\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$

ב. $V=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0,x^2+y^2\le 1\right\}$

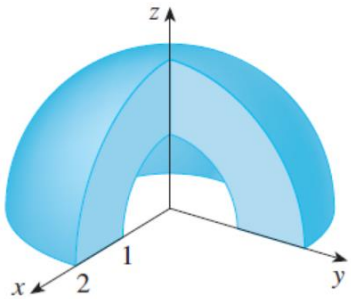
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0,y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

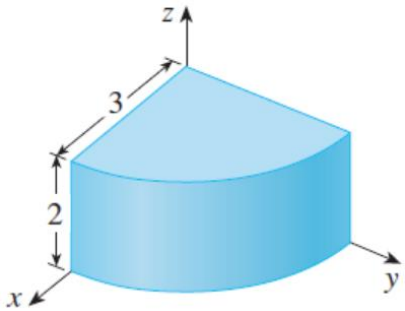
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)|\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי $\begin{matrix} M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3 \\ N:2x^2-y^2+z^2\le 3 \end{matrix}$.

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.

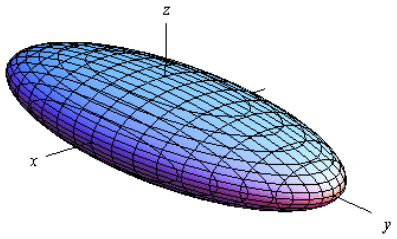
שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz), וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

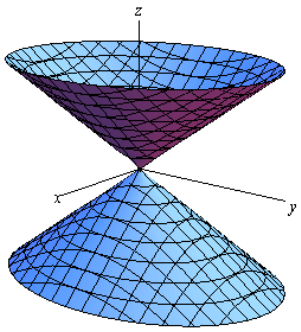
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

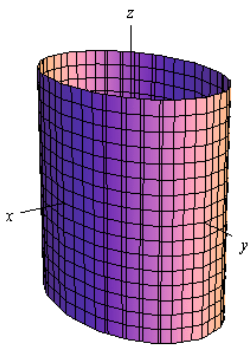


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



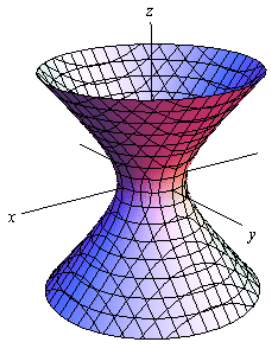
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

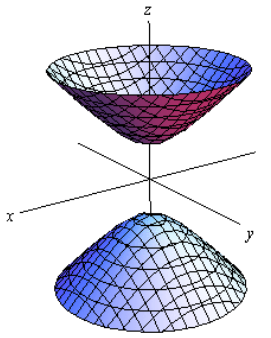


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

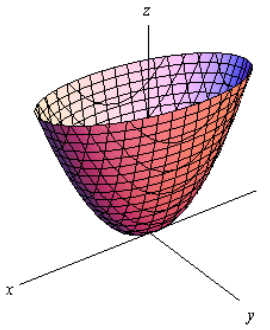


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

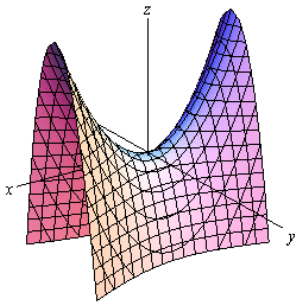
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



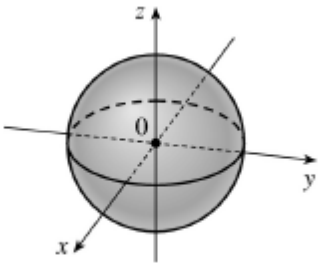
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

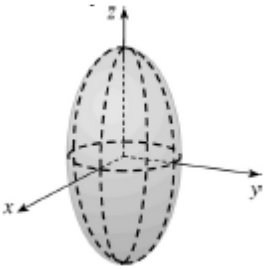
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

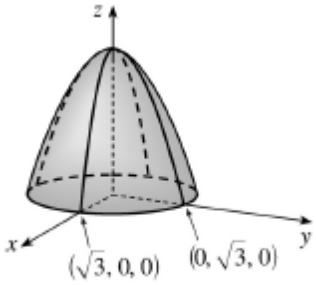
דוגמאות שונות



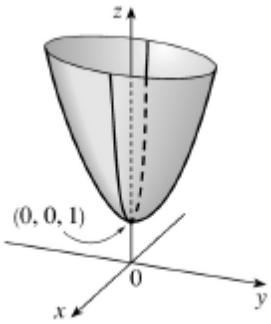
$x^2+y^2+z^2=1$



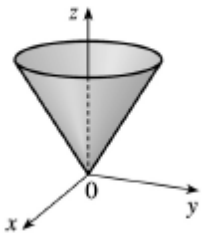
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



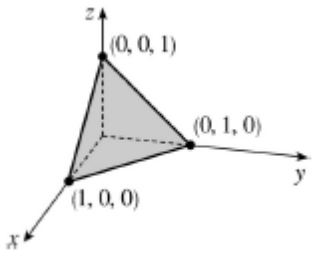
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 12 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 101
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 103
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 105
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 106

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\middle|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2=4\right\}$

8) $D=\left\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\right\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

11) $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\right\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|\,x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\left\{(x,y)\middle|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $(k=0,4)\quad f(x,y)=(x-y)^2$

12) $(k=0,2)\quad f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\}$

13) $(k=1)\quad f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\geq y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y.

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:

א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$

ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

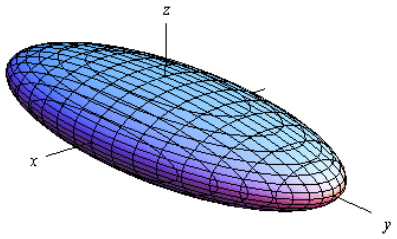
4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – משטחים ממעלה שנייה

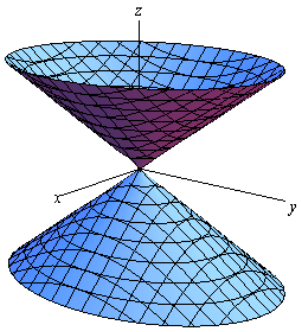
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

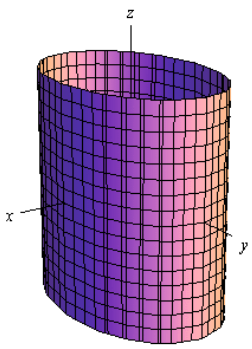


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי



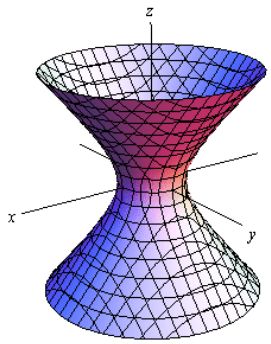
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

היפרבולואיד חד-יריעתי

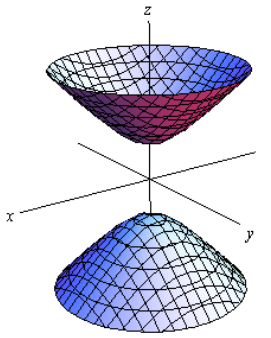


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

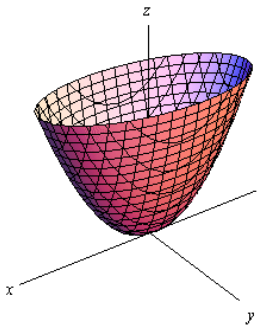


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

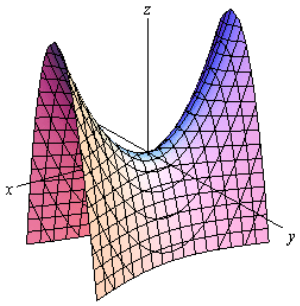
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פרבולואיד היפרבולי



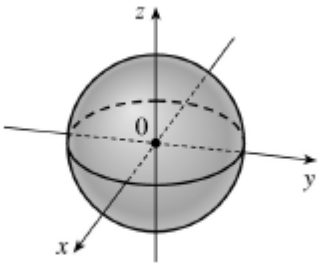
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

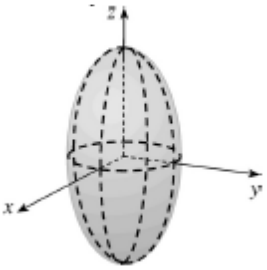
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

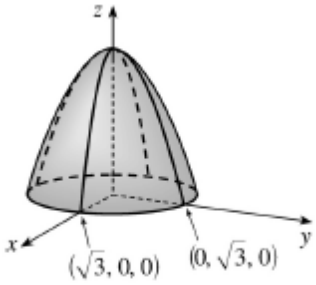
דוגמאות שונות



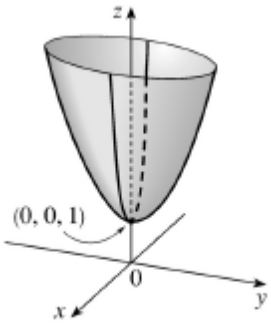
$x^2+y^2+z^2=1$



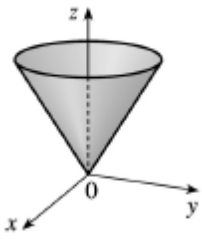
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



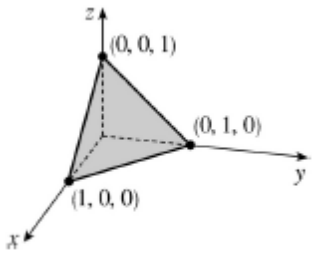
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 13 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון 109
2. נגזרות חלקיות מסדר שני 111

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin(xy)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

(1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2 y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

(2) $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

(3) $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

(4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

(5) $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

(6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$ $\quad f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$

$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

(7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

(8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$,

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

(9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

(10)

$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(11)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(12)

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

(13)

$$f_x=10\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$$

$$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$$

(14)

$$f_x=yz\qquad f_y=xz\qquad f_z=xy$$

$$f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$

$$f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x$$

$$f_{zx}=y\qquad f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0$$

(15) -2

(16) -1

(17) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(18) $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 14 - נוסחת הקירוב הלינארי

תוכן העניינים

1. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי 115

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

1) חשבו בקירוב: $\ln\left(0.01^2+0.99^2\right)$.

2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

4) נתונות שתי צלעות במלבן $a=10\,\text{cm},\quad b=24\,\text{cm}$.
חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- $4\,\text{mm}$ ואת הצלע b יקצרו ב- $1\,\text{mm}$.

5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה.
השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%.
העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

1) $\cong -0.01$

2) $2\frac{7}{3200}$

3) 8%

4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.

5) 5%

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 15 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 116

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)\ ,\ y=u^2+v^2\ ,\ x=2u-v$.
חשבו: $z_u\ ,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}\ ,\ u=t^2+4m\ ,\ v=4t+k$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

11) נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

12) נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

14) נתון: $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_y=-v_x$, $u_x=v_y$.

הוכיחו כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)\left(h_{uu}+h_{vv}\right)$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

18) נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2+\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 16 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני 120

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y' , כאשר $x^2+y^5=xy+1$,
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.
חשבו את $y_z(0,0)$, $y_x(0,0)$.

6) נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$.
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$.

7) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצאו $z_{xx}(1,1)$.

8) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

10) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את w_x, w_y.

ב. חשבו y_x, y_w.

11) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1}, u_y=\frac{4v+2}{8uv-1}, v_x=\frac{3-2u}{8uv-1}, v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$ $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)$ $\left(u\neq v\right)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}$ $\left(u\neq\pm v\right)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 17 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 123

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצאו שני מספרים, $b>a$, כך ש- $\int_a^b\left(24-2x-x^2\right)^{\frac{1}{5}}dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

2) $(1,\ 2)$ מינימום ; $(-1,-2)$ מקסימום ; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

3) $(0,0)$ אוכף; $(1,1)$ מינימום.

4) $(-1,\ -1)(-1,\ 1)$ מינימום ; $(1,\ 0)$ מקסימום ; $(1,\ -1)$ $(-1,\ 0),(1,1)$ אוכף.

5) $(0,\ 2)$ מקסימום.

6) $(4,\ 4)$ מקסימום.

7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

8) אין נקודות קריטיות.

9) $z=4,\quad z=3$

10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ.

11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3,4/3,10/3)$.

12) $P_1=10\$,\quad P_2=12\$$ רווח מקסימלי $288\$$.

13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2,\ a=2$, לא ניתן לדעת; $a<-2,\ a>2$ אוכף; $-2<a<2$ מינימום.

14) $a=-6,\ b=4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 18 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים 125

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **1-5**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **7-11** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.
מצאו ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_b=0$, $f_a=0$,
נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$, $a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 19 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ 127

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $f(x,y)=x^2+y^2;\quad 2x^2+3xy=1-2y^2$

2) $f(x,y)=x^2-y^2;\quad x^2+y^2=1$

3) $f(x,y)=4x+6y;\quad x^2+y^2=13$

4) $f(x,y)=x^2y;\quad x^2+2y^2=6$

5) נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\}\quad s.t.\quad x+3y=12$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\}\quad s.t.\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

2) $\max\left(\pm1,0\right)$ $\min\left(0,\pm1\right)$

3) $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

4) $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

5) $\max\left(6,2\right)$

6) $\max\left(9,36\right)$

7) $\left(6,2\right)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max\left(6,2\right)$

12) $\max\left(2,3\right)$

13) $\min\left\{2K+L\right\};\ \sqrt{K}+\sqrt{L}=100$

14) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 20 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 130

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס״מ, אורך 4 ס״מ, גובה 2 ס״מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3})$.

4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חדוא 2

פרק 21 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 132

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
3) מקסימום מוחלט $33\frac{1}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©