# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

# תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים ..... 1
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 6
3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 8
4. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 12
5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות ..... 15
6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות ..... 17
7. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) ..... 28
8. שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת) ..... 49
9. המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים ..... 52
10. אינטגרלים לא אמיתיים ..... 60
11. טורים עם איברים קבועים ..... 71
12. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות ..... 85
13. טורי טיילור - מקלורן ..... 92
14. משוואות מסדר ראשון ..... 107
15. משוואות ליניאריות מסדר שני ..... 121
16. משוואות ליניאריות מסדר n ..... 136
17. מערכת משוואות לינאריות ..... 145
18. שימושים של משוואות דיפרנציאליות ..... 152
19. בעיות שטורם ליוביל ..... 160
20. נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות ..... 165
21. נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה ..... 176
22. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה ..... 181
23. אינטגרלים משולשים ושימושיהם ..... 192

# תוכן העניינים

24. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות ..... 195
25. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן) ..... 199
26. אינטגרלים משטחיים ושימושיהם ..... 200
27. האינטגרל המסוים, אינטגרבילויות לפי רימן ולפי דארבו ..... 203

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 1
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 4

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

**1)** $\int 4dx$

**2)** $\int x^4 dx$

**3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

**4)** $\int \sqrt{x} dx$

**5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

**6)** $\int 4x^{10} dx$

**7)** $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$

**8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

**9)** $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$

**10)** $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x + 2\right) dx$

**11)** $\int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx$

**12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

**13)** $\int (4x+1)^{10} dx$

**14)** $\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$

**15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

**16)** $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

**17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

**18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

**19)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$

**20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

**21)** $\int \frac{1}{4x} dx$

**22)** $\int \frac{1 + x + x^2}{x} dx$

**23)** $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

**24)** $\int \frac{1}{4x-1} dx$

**25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

**26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$ **29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

**31)** $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$ **32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $4x+c$

**2)** $\frac{x^5}{5}+c$

**3)** $-\frac{1}{x}+c$

**4)** $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

**5)** $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

**6)** $\frac{4x^{11}}{11}+c$

**7)** $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

**8)** $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

**9)** $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

**10)** $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

**11)** $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

**12)** $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

**13)** $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

**14)** $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

**15)** $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

**16)** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

**17)** $10\sqrt{2x+4}+c$

**18)** $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

**19)** $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

**20)** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

**21)** $\frac{\ln|x|}{4}+c$

**22)** $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

**23)** $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

**24)** $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

**25)** $x+\ln|x+2|+c$

**26)** $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

**27)** $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

**28)** $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

**29)** $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

**30)** $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

**31)** $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

**32)** $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

**33)** $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.

מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.

מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.

מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.

שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.

מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.

שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,

וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.

מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.

מצאו את הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$,
ונתון בנוסף כי לכל $x_0$ ממשי: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$.

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x\to 0} f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
חשבו את הנגזרת $\big(G(x)-f(x)\big)'$.

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$. ב. $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. $0$

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 6

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$

11) $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x dx$

12) $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$
2) $\ln\left|\sin x\right|+c$
3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$
4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$
5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$
6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$
7) $e^{x^2}+c$
8) $e^{\tan x}+c$
9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$
10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$
11) $\sin\left(\sin x\right)+c$
12) $\sin\left(\ln x\right)+c$
13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$
14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$
15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$
16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$
17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$
18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$
19) $2\sqrt{x^2+1}+c$
20) $\sqrt{2\sin x}+c$
21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$
23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$
24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים . . . . . 8

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

**1)** $\int xe^x dx$

**2)** $\int x^4 \ln x dx$

**3)** $\int x\sin x dx$

**4)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

**5)** $\int x^2 \sin 4x dx$

**6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**7)** $\int \ln x dx$

**8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**9)** $\int \arctan x dx$

**10)** $\int \arcsin x dx$

**11)** $\int x\cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

**12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

**13)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

**14)** $\int x\arctan x dx$

**15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

**16)** $\int \ln^2 x dx$

**17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

**18)** $\int e^x \cos x dx$

**19)** $\int e^{2x} \sin 4x dx$

**20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$

**21)** $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2} dx$

**22)** $\int x\tan^2 x dx$

**23)** $\int \left(x+1\right)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**24)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

**25)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

**26)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**27)** חשבו את $\int \cos^4 x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $xe^x - e^x + c$

**2** $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

**3** $x\cos x + \sin x + c$

**4** $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

**5** $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

**6** $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

**7** $x\ln x - x + c$

**8** $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

**9** $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

**10** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

**11** $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

**12** $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

**13** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

**14** $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

**15** $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

**16** $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

**17** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

**18** $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

**19** $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

**20** $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(21** $\frac{e^x}{x+1}+c$

**(22** $x\left(\tan x-x\right)+\ln\left|\cos x\right|+\frac{x^2}{2}+c$

**(23** $\frac{2}{9}\left(x+1\right)\left(x+2\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}\left(x+2\right)^{\frac{11}{2}}+c$

**(24** $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

**(25** $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

**(26** $\frac{1}{n}\left\{\left(\cos x\right)^{n-1}\sin x+(n-1)\int\left(\cos x\right)^{n-2}dx\right\}$

**(27** $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5\left(\cos x\sin x+x\right)\right)+c$

**(28** $\frac{1}{n}\left(-\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x+\left(n-1\right)\int\left(\sin x\right)^{n-2}dx\right)$

**(29** $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5\left(x-\sin x\cos x\right)\right)+c$

**(30** $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\left(2n-1\right)\right)$

**(31** $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

**(32** $\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad\int e^{ax}\sin bxdx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 12

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x\right)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{x^2+1}+c$

**2)** $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

**3)** $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

**4)** $\arctan\left(e^x\right)+c$

**5)** $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

**6)** $\arcsin\left(\ln x\right)+c$

**7)** $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

**8)** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

**9)** $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

**10)** $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

**11)** $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

**12)** $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)\right)+c$

**13)** $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

**14)** $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

**15)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

**16)** $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

**17)** $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18** $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

**19** $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

**20** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

**21** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

**22** $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

**23** $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

**24** $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית ..... 15

# אינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

**2)** $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

**3)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

**4)** $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

**5)** $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

**6)** $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

**7)** $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

**8)** $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

**9)** $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

**10)** $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

**11)** $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

**12)** $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

**13)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

**14)** $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

**15)** $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

**16)** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

**17)** $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

**18)** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2(x^2+1)}+c$

**19)** $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 17
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 19
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 20
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 21
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 24

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

**2)** $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

**3)** $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

**4)** $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

**5)** $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

**6)** $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

**7)** $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

**8)** $\int \tan^2 x dx$

**9)** $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

**10)** $\int \sin 7x\cos 5x dx$

**11)** $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

**12)** $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

**13)** $\int \cos^2 x dx$

**14)** $\int \sin^2 4x dx$

**15)** $\int \cos^3 x dx$

**16)** $\int \sin^3 4x dx$

**17)** $\int \cos^4 x dx$

**18)** $\int \sin^4 4x dx$

**19)** $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

**20)** $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

**21)** $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

**22)** $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

**23)** $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

**24)** $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

**2)** $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

**3)** $-10\cot 10x+c$

**4)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**5)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**6)** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

**7)** $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

**8)** $\tan x-x+c$

**9)** $\tan x-\cot x+c$

**10)** $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

**11)** $\sin x+c$

**12)** $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

**13)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

**14)** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

**15)** $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

**16)** $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

**17)** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

**18)** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

**19)** $-\cot x-x+c$

**20)** $2\sin x+c$

**21)** $\ln\left|\cos x\right|+c$

**22)** $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

**23)** $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

**24)** $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ (x = \arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ (x = \arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin^2 x+\sin x+2\right)\cos x dx$

2) $\int\left(\cos^3 x+\cos x-2\right)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=\frac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

**2)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

**3)** $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

**4)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

**5)** $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**6)** $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

**2)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

**3)** $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

**4)** $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

**5)** $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

**6)** $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

**7)** $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

**8)** $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

**9)** $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

**10)** $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

**11)** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

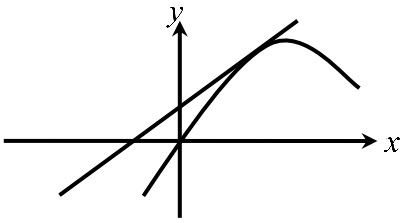

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



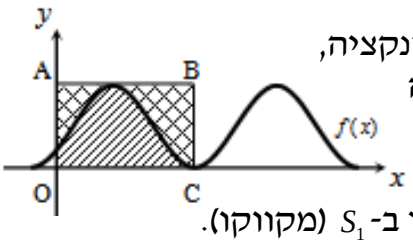

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$, ברביע הראשון והשני.

**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.

נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה-$x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.




השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב-$S_1$ (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-$y$ יסומן ב-$S_2$.

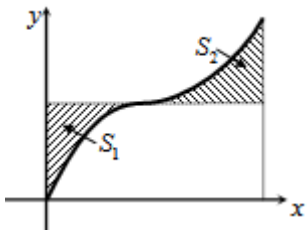
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

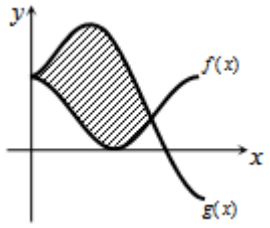
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה-$x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו-$S_2$, שווים.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le \pi$.

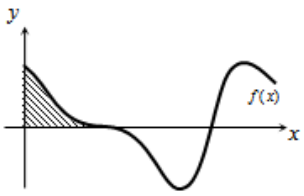



א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



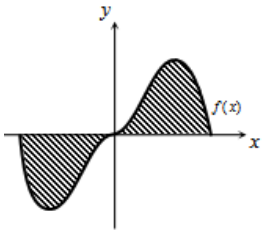

א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות $f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**6)** נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.




א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.

באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ , בתחום $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**1)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

**2)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

**3)** א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

**4)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$ .

**6)** $a=2$ , $b=-2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$


www.GooL.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 7 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

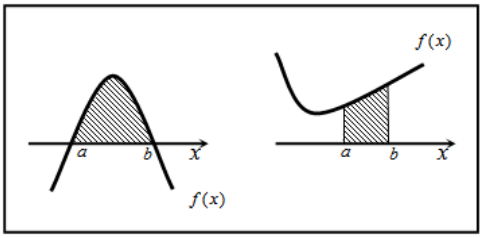
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים ..... 28
2. אורך קשת ..... 48

# חישוב שטחים

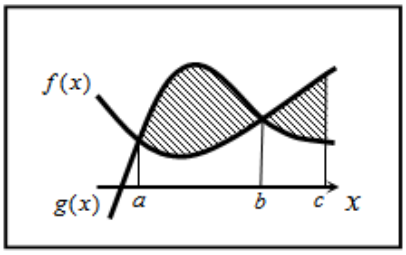
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



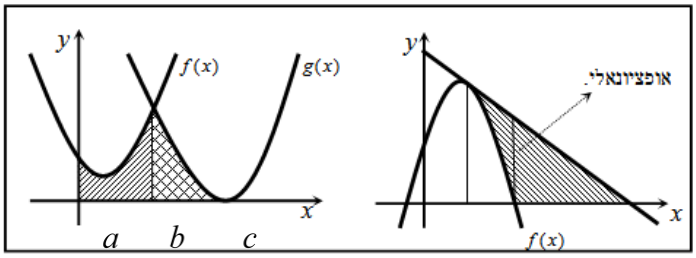

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :




$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

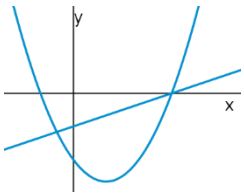



$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

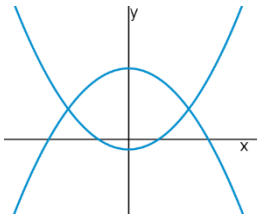

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



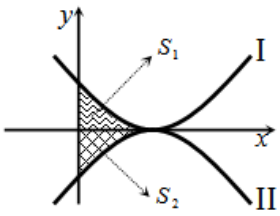

**2)** נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$ , $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



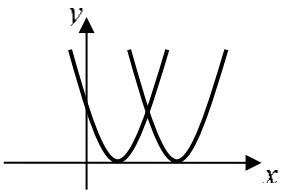

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

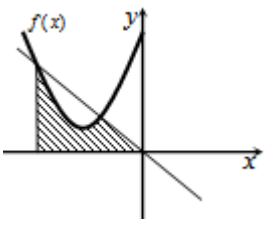



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

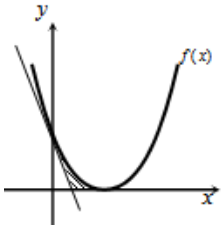
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .



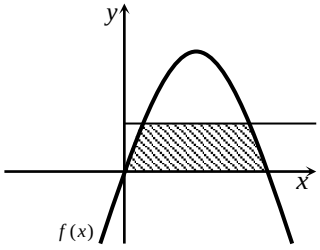

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .




הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

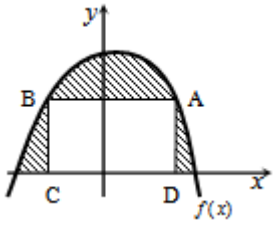
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,




היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,

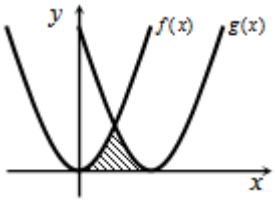
כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$




את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .

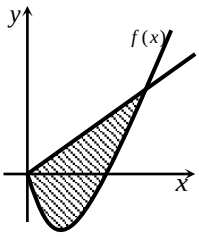
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



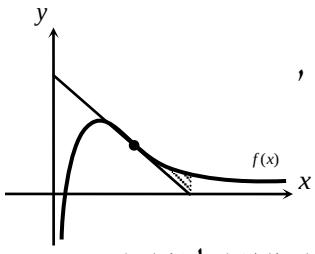

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה-$y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

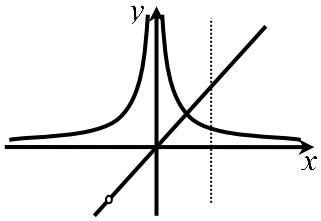
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

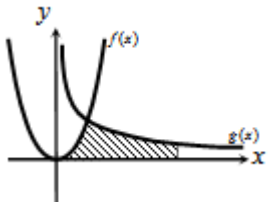
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה-$x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

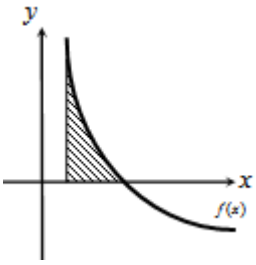



$f(x)=2x^2$ ו-$g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)



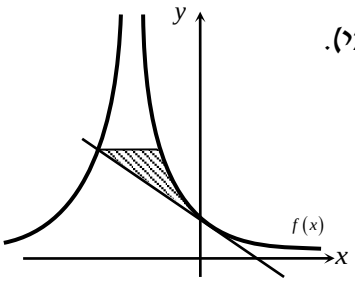

חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $(6,0)$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה-$x$ והישר $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$, הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

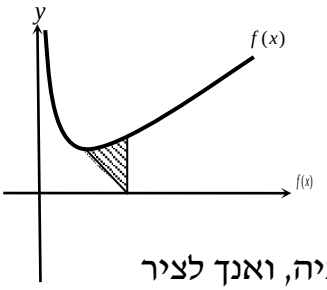
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

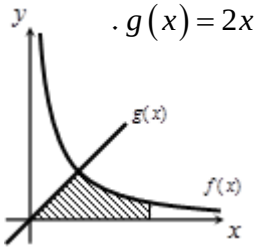



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה-$x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה-$x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



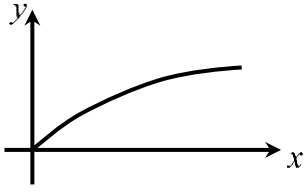

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

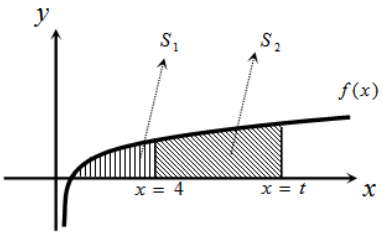

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=4$ ו-$x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ ב-$S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים ב-$S_2$.




ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.

**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

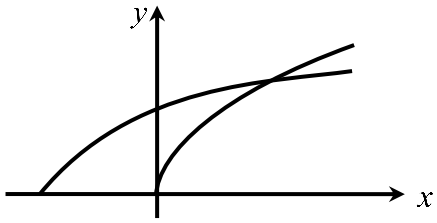
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

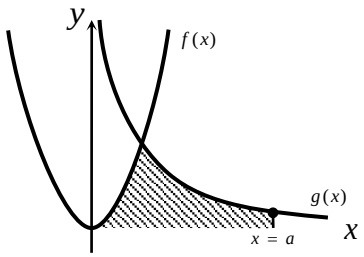
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה-$x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.

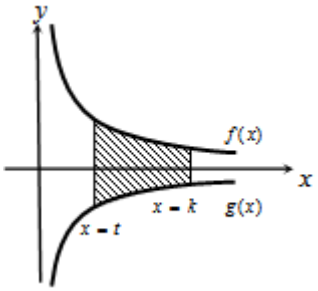




לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.




ידוע כי $AB=2CD$.

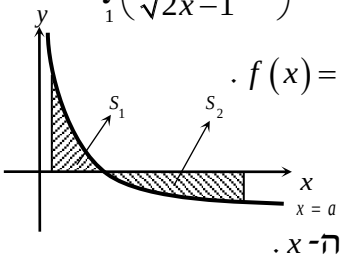
א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$, יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.




נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

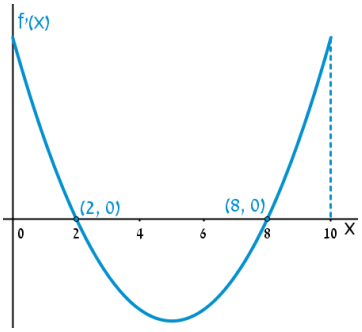
מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$. נמקו.

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.



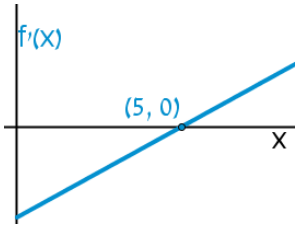

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

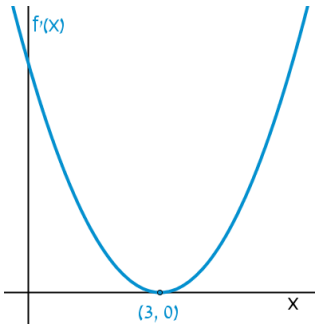
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

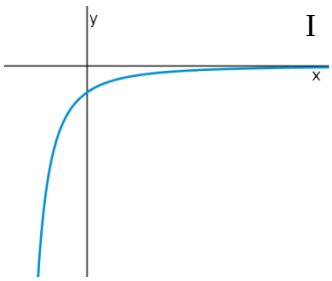


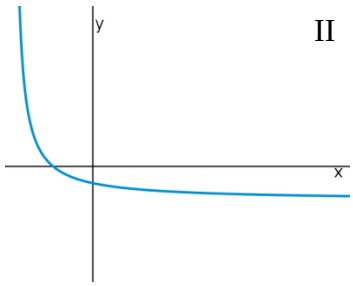

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:



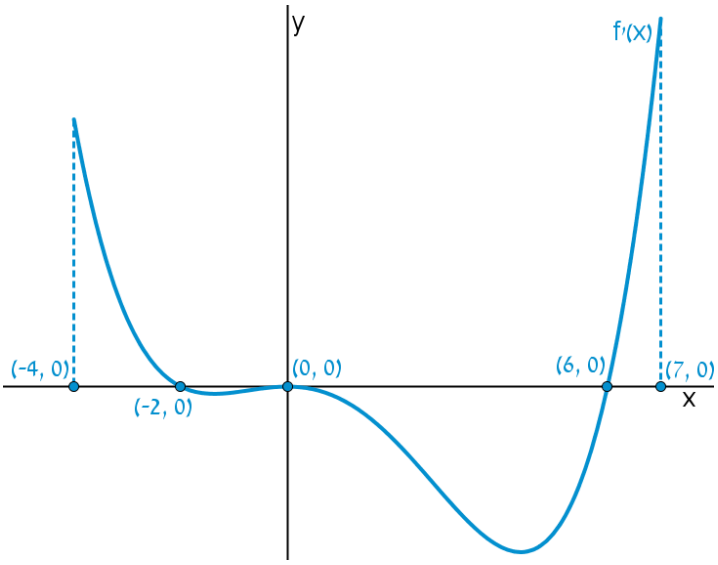




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$. מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ ,

לפי הנתונים $f(0) = -2$ , $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע הרביעי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

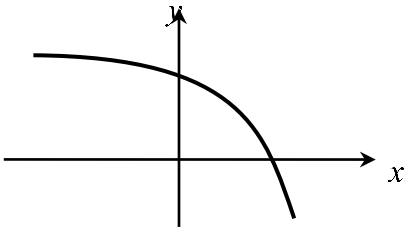
| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=5-e^{x}$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.

ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.




**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{bx}$, כאשר $b>0$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x)=e^{-x}$ ו-$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$, ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה-$x$, כך שנוצר מלבן.

הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

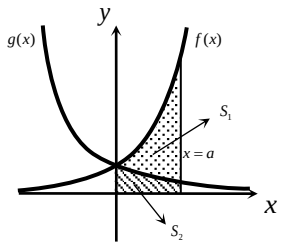
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{-2x}$.

נעביר אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$, כאשר $a>0$, כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.

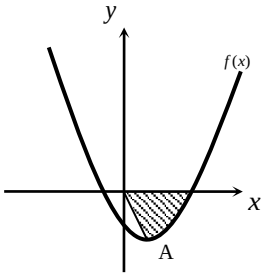
מצאו את $a$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

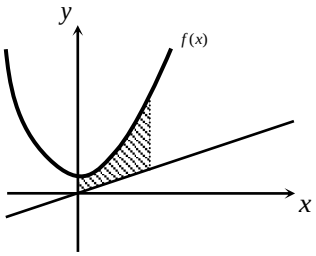
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .



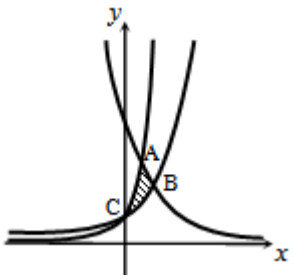

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:



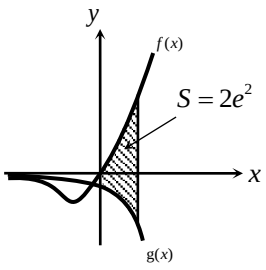

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

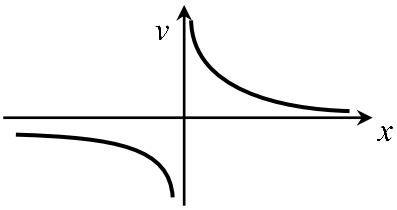

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

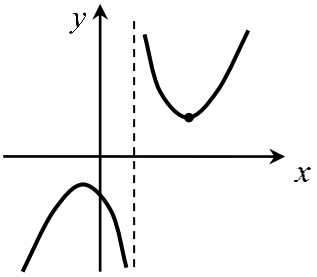
| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.



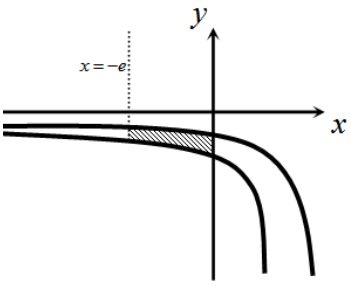

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$



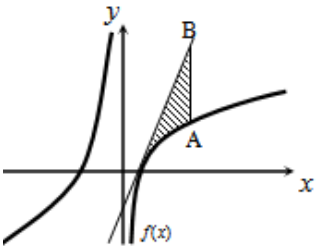

ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.




ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא $y=18x-9$.

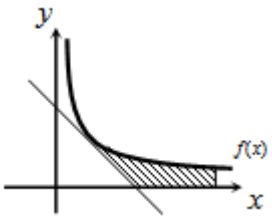
א. מצאו את $a$ ו-$b$ וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה-$y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

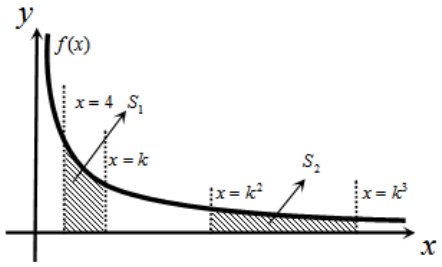



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.



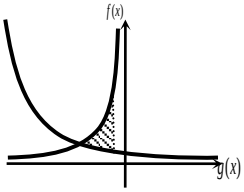

נעביר את הישרים $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$ ו-$x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו-$g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף $g(x)$ חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

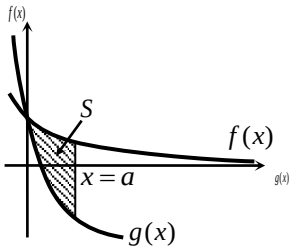
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$, בתחום $x\geq 0$.

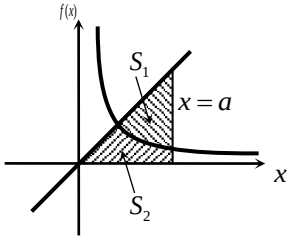



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

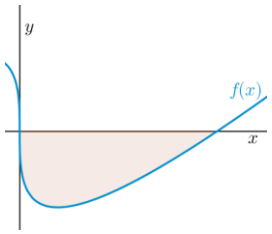
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

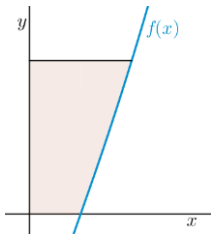
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



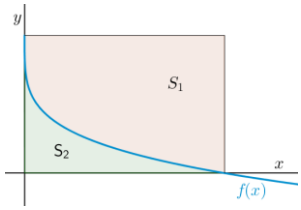

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. נעביר אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

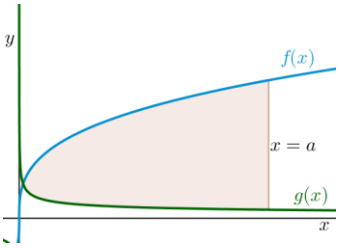
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-$S_1$,

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

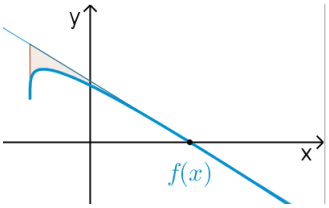
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה-$x$, $x=a$ ($a$ פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש. מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.




ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

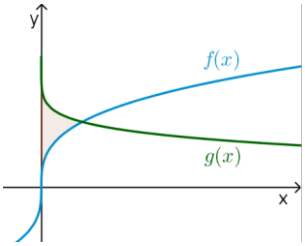
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

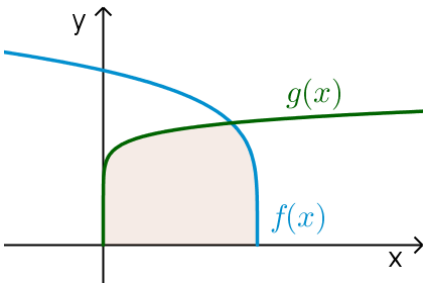
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.

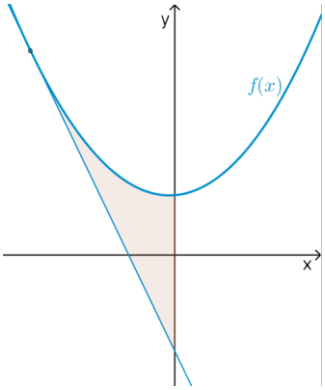



ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה-$x$.

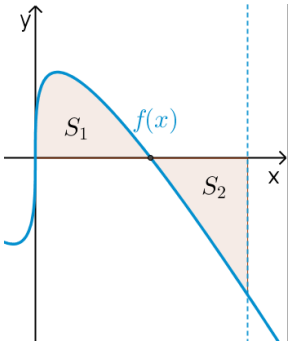

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-$y$.




**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ יסומן ב-$S_1$.
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח $S_2$, כמתואר באיור.
מצאו את $k$, אם ידוע כי $S_1=S_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=\left|-S_1\right|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f(x):\text{II}$, $f'(x):\text{I}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $C(0,1)$, $A(1,4)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. $S=6+\ln 256\approx 11.54$ יח"ש.

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f\left(x\right)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $\left(-1.2,1.2\right)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $\left(1,1\right)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f\left(x\right)=\left(6-5x\right)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(0,0\right)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) $21$

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) $9$

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\quad\left(\text{Decimal: }3.16784\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב ..... 49

# חישוב נפח גוף-סיבוב

## שאלות

**1)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

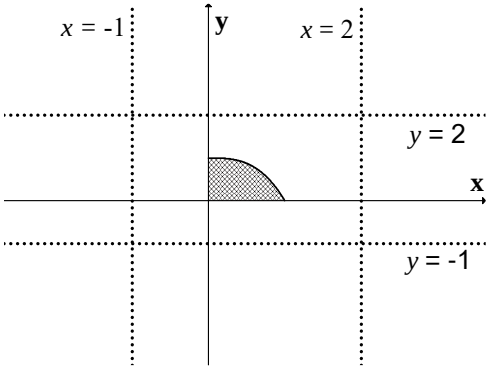
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

**2)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $y$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=1-x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות **3-8**:




**3)** ציר ה- $x$.

**4)** הישר $y=-1$.

**5)** הישר $y=2$.

**6)** ציר ה- $y$.

**7)** הישר $x=-1$.

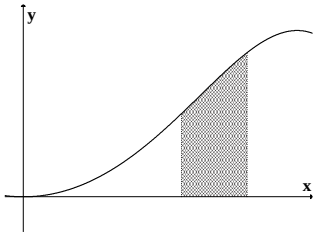
**8)** הישר $x=2$.

**9)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

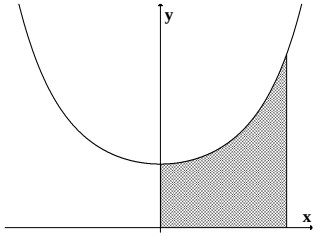
**10)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

**11)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.

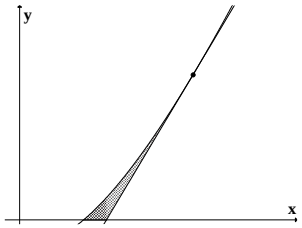

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©




**12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$
והישרים $y=0,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{3}},\ x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$
והישרים $y=0,\ x=0,\ x=1$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\ln x$,
המשיק לגרף בנקודה $\left(e,e\right)$ וציר ה- $x$,
מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו נפח הגוף המתקבל?

**15)** השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x)=x^2,\ f(x)=2x+8$, $x=0$
מסתובב סביב הישר $x=4$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{64}{15}\pi$ ב. $\frac{64}{15}\pi$

2) א. $\frac{8}{3}\pi$ ב. $\frac{8}{3}\pi$

3) $\frac{9\pi}{14}$

4) $\frac{15\pi}{7}$

5) $\frac{33\pi}{14}$

6) $\frac{3\pi}{5}$

7) $2.1\pi$

8) $\frac{12\pi}{5}$

9) $V=\pi R^2\cdot H$

10) $V=\frac{\pi R^2\cdot H}{3}$

11) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

12) $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

13) $\pi\left(e-1\right)$

14) $\frac{e^3-4}{54}\pi$

15) $128\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 9 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי חישוב . . . . . 52
2. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי תיאוריה . . . . . 55
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים . . . . . 58

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

## שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו״א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו-$b(x)$ גזירות, אזי:

**1)** $I(x)=\int_{a}^{b(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I'(x)=f\left(b(x)\right)b'(x)$

**2)** $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I'(x)=f\left(b(x)\right)b'(x)-f\left(a(x)\right)a'(x)$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

**3)** $I(x)=\int_{2}^{x} e^{-t^2}dt$

**4)** $I(x)=\int_{1}^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

**5)** $I(x)=\int_{2}^{x^3+x} t\ln t dt$

**6)** $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

**7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

**8)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$

**9)** $\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_{4}^{x} e^{t^2}dt$

**10)** חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_{0}^{x} e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{0}^{x} e^{2t^2}dt}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$, כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$.

חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי $f$ רציפה).

**13)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**14)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$.

הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

**16)** מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$.

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$ בנקודה $x_0=2\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** $I'(x)=e^{-x^2}$

**4)** $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

**5)** $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

**6)** $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

**7)** $\frac{1}{2}$

**8)** $\frac{2}{3}$

**9)** $4e^{16}$

**10)** $0$

**11)** תחום הגדרה: כל $x$.

נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל $x$.

נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.

תחומי קמירות: $x>1$ , $-1<x<-\frac{3}{7}$.

תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$ , $x<-1$.

**12)** $40$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

**17)** $y=x-2\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

**2)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

**3)** נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

הוכיחו כי $F'=f$ ב-$[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו״א?

**4)** נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(t)dt>1$.

הוכיחו שקיים $x_1$, בקטע $(a,b)$, עבורו $\int_a^{x_1} f(t)dt=1$.

**6)** תהי $f$ פונקציה רציפה ומחזורית לכל $x$, עם מחזור $p$.

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x\in\mathbb{R}$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי $C$ עבורו מתקיים $f(x)=C$ לכל $x\in(0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ לכל $x>0$.

**8)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וניח כי $\int_0^1 f(x)dx=1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,1)$, כך ש- $f(c)=3c^2$.

**9)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב- $[0,\pi/2]$ וניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt=0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,\pi/2)$, כך ש- $f(c)=2\cos 2c$.

**10)** תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c\in[0,\pi/4]$, כך ש- $2\cos 2c\int_0^{\pi/4} f(t)dt=f(c)$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

**12)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt\ \ \forall x\in[a,b]$.

הוכיחו כי $f(x)=0\ \ \forall x\in[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, וננית כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,

בקטע $(a,b)$, שעבורן מתקיים $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים $c$, בקטע $(a,b)$, כך ש-$f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- $f$ רציפה ב-$[a,b]$, ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$? נמקו.

**14)** מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,

וננית שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.

הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל $x$ בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

**7)** א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

**14)** $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+D+2 & x\ge 0\\ e^{x}+D & x<0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

## שאלות

**1)** בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

**2)** תהי $f$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

**3)** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, וניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_1} f(t)dt=\int_a^{x_2} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים $x$, בקטע $(a,b)$, שעבורו $f(x)=0$.

**4)** הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**5)** תהי $f$ פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**6)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=g(c)$.

**7)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נתון כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

**9)** חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

**10)** ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

**11)** הוכח כי $\frac{3}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{6}{\ln 2}$.

**12)** הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{2\pi^2}{9}$.

**13)** הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x dx\le\frac{1}{2}\ln 2$.

**14)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

**15)** נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 10 - אינטגרלים לא אמיתיים

### תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון ..... 60
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני ..... 62
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי ..... 63
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים ..... 64
5. מבחני השוואה ..... 65
6. התכנסות בהחלט ..... 67
7. מבחן דיריכלה ..... 68
8. התכנסות בתנאי ..... 69

# אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

**1)** $\int_1^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

**2)** $\int_1^\infty \frac{dx}{\left(1+x\right)\sqrt{x}}$

**3)** $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$

**4)** $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}dx$

**5)** $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$

**6)** הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

**7)** הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$
2) $\frac{\pi}{2}$
3) $\frac{1}{2e}$
4) מתבדר: $\infty$.
5) $\frac{5}{4e^2}$
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

**2)** $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

## תשובות סופיות

**1)** מתבדר: $\infty$.

**2)** מתבדר: $\infty$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

## שאלה

**1)** חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

## תשובה

**1)** מתבדר: $\infty$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

## שאלות

**1)** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$ , הישר $x=1$ וציר ה- $x$ , עבור $x\le 1$ .

**2)** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$ והישר $x=5$ .

**3)** נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$ .
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $0\le x\le k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $x\ge k$ .
מצאו את הקבוע $k$ .

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{2}e^2$

**2)** $2\sqrt{5}$

**3)** $k=\sqrt[3]{\ln 2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני השוואה

## שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

**2)** $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

**3)** $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

**4)** $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot \ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

**5)** $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

**6)** $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

**7)** $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

**8)** $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

**9)** $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

**10)** $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

**11)** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

**12)** $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

**13)** $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

**14)** $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

**15)** $\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

**16)** $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט

## שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

**1)** $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx$

**2)** $\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx$

**3)** $\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

**4)** הוכיחו: אם $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס, אז $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס.

**2)** מתכנס.

**3)** מתכנס.

**4)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן דיריכלה

## שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

**1)** $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

**2)** א. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p>0)$

ב. $\int_1^\infty \sin\left(x^2\right) dx$

**3)** $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p>0)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בתנאי

## שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

**1)** א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

**2)** א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

**3)** א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

**4)** $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

**5)** $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

**2)** א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

**3)** א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,

מתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,

מתבדר עבור $p \geq 5$.

**4)** מתכנס בתנאי.

**5)** מתכנס בתנאי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 11 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים ..... 71
2. מבחן ההתבדרות של טורים ..... 74
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים ..... 75
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים ..... 77
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 79
6. תרגילי תיאוריה ..... 80

# טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

## שאלות

### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

**10)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

**11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

### טור הרמוני מוכלל

**12)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תכונות אלגבריות של טורים

**13)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**14)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

**15)** מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.141414...+0.123123123...$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.

**2)** מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.

**3)** מתבדר.

**4)** מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.

**5)** מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.

**6)** מתכנס ל- $8$.

**7)** מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.

**8)** מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.

**9)** מתבדר.

**10)** $S=\frac{1}{\ln 2}$

**11)** $\frac{1}{12}$

**12)** א. מתכנס.
ב. מתבדר.
ג. מתבדר.
ד. מתבדר.
ה. מתכנס.
ו. מתכנס.

**13)** א. מתכנס.
ב. מתבדר.
ג. מתבדר.

**14)** $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

**15)** $\frac{323}{1221}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן ההתבדרות של טורים

## שאלות

**1)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

**1)** א-ו: מתבדר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים חיוביים

## שאלות

### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

**4)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

### מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה**

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**16)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

**17)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

**18)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

**19)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

**20)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

**21)** $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

**22)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

**23)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

**24)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

**25)** $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

**26)** $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

## תשובות סופיות

**1)** מתבדר.
**2)** מתבדר.
**3)** מתכנס.
**4)** מתכנס.
**5)** מתבדר.
**6)** א. מתכנס. ב. 0
**7)** מתכנס.
**8)** מתבדר.
**9)** מתכנס.
**10)** מתבדר.
**11)** מתכנס.
**12)** מתכנס.
**13)** מתבדר.
**14)** מתכנס.
**15)** מתכנס.
**16)** מתבדר.
**17)** מתכנס.
**18)** מתכנס.
**19)** מתכנס.
**20)** מתכנס.
**21)** מתכנס.
**22)** מתכנס.
**23)** מתכנס.
**24)** מתכנס.
**25)** מתבדר.
**26)** מתבדר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים כלליים

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

### מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

**4)** $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

**5)** $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

**6)** הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

**7)** הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:

$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ \left(\theta\neq 2\pi k\right)$.

**8)** בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

**9)** הוכיחו שאם הסדרה $b_n$ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

**10)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)\pmod 7$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)\pmod 7}{\sqrt{n+1}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

**11)** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

**12)** $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

**13)** $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

**14)** $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס.
**2)** מתכנס.
**3)** מתכנס.
**4)** מתכנס.
**5)** מתכנס.
**6)** הוכחה.
**7)** הוכחה.
**8)** מתבדר.
**9)** הוכחה.
**10)** א. הוכחה.
ב. מתכנס.
**11)** מתכנס.
**12)** מתכנס.
**13)** מתכנס.
**14)** מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

## שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

**5)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

**6)** א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum|a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

**7)** תהי $(a_n)$ סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum\frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

**9)** הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל $n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

**10)** נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

**11)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה $b_n$ חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**12)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

**13)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

**14)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל $n$, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל $n$, אז הטור מתבדר.

**15)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

**17)** הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**18)** הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

**19)** נתון $a_n \geq 0$ לכל $n$.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

**20)** הסדרה $(a_n)$ מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

**22)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל $n$ מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

**23)** נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1$, $4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

**24)** נניח כי $(a_n)$ סדרה המקיימת $a_n > 0$, $a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

**25)** $(a_n)$ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

**26)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

**27)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה $a_n$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** פונקציה $f$ מוגדרת לכל $x$, גזירה ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.

הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

**29)** נתון $p(x)$ פולינום.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

**30)** יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 12 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

### תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות ..... 85
2. טורי פונקציות ..... 88
3. טורי חזקות ..... 90

# סדרות פונקציות

## שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

**1)** $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

**2)** $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

**3)** $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

**4)** $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

**5)** $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

**6)** $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

**7)** $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

**8)** $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

**9)** $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

**10)** $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

**11)** $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

**13)** נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

**14)** נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

**15)** נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר $\alpha$, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר $\alpha$, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

**2)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

**3)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

**4)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

**5)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

**6)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

**7)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

**8)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

**9)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

**10)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

**11)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ . ב. לא במידה שווה.

**12)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

**13)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. לא במידה שווה. ג. כן.

**14)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$ . ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

**15)** א. לכל ערך של $\alpha$ ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טורי פונקציות

## שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

**2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

**4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\quad(-\infty<x<\infty)$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}\quad(-1\le x\le 1)$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}\quad(-\infty<x<\infty)$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)\quad\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

**11)** $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\quad(-a\le x\le a)$

**12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}\quad(-\infty<x<\infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x>0$
2) $x\neq 5$
3) $x<3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0<x\neq\frac{1}{n}$
5) $x>0$
6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טורי חזקות

## שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

**2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

**4)** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

**7)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$

**11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$

**12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

**13)** $f(x)=\frac{1}{1+x}$

**14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$

**15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

**16)** $f(x)=\frac{1}{x-5}$

**17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$

**18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

**19)** $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$

**20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

**<u>הערות חשובות</u>**

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

**2)** $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

**3)** $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

**4)** $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

**5)** $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

**6)** $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

**7)** $x = 1\ ,\ R = 0$

**8)** $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

**9)** $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

**10)** $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

**11)** $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

**12)** $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

**13)** $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

**14)** $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

**15)** $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

**16)** $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

**17)** $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

**18)** $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

**19)** $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

**20)** $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 13 - טורי טיילור - מקלורן

### תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 92
2. טור טיילור סביב $X=X0$ ..... 94
3. חישוב סכום של טור ..... 95
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן ..... 96
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ ..... 97
6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים ..... 99
7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' ..... 100
8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 106

# טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

**1)** $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

**4)** $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

**7)** $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

**10)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

**13)** $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

**16)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

**19)** $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

**22)** $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

**25)** $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**2** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**3** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**4** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**5** $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**6** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**7** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**8** $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

**9** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

**10** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

**11** $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

**12** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

**13** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

**14** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

**15** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

**16** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

**17** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

**18** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

**19** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

**20** $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

**21** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

**22** $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

**23** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

**24** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

**25** $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

**26** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

**27** $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

# טור טיילור סביב $x=x_0$

## שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות:

**1)** $f(x)=\ln x \qquad (x_0=1)$

**2)** $f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x_0=2)$

**3)** $f(x)=\sin x \qquad \left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0<x\le 2)$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0<x<4)$

**3)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty<x<\infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

1) $e$

2) $e^{-2}$

3) $\sqrt{e}$

4) $2e$

5) $\pi/4$

6) $\sin 1$

7) $\cos 1$

8) $\ln 2$

9) $\ln\frac{3}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

**4)** נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר $k$ קבוע שונה מאפס.
מצאו את $n$ ואת $k$.

**5)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

**6)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

**7)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\dfrac{1}{120}$

**2)** $\dfrac{1}{3}$

**3)** $\dfrac{1}{3}$

**4)** $k=1, n=3$

**5)** $1$

**6)** $216$

**7)** $-\dfrac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

**1)** $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

**4)** $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

**7)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

**8)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

**9)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

**10)** עבור אילו ערכי $x$, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

**11)** עבור אילו ערכי $x$, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

## שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ :

**1)** $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

**2)** $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

**3)** $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{449}{2250}$

**2)** $\frac{39}{400}$

**3)** $\frac{143}{576}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

**1)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

**2)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

**3)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

**4)** רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

**5)** חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של $10^{-3}$.

**6)** חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

**7)** נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

**8)** נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

**9)** נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
וננית ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.

הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

**13)** תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים $M$, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, וננית כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

**15)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
וננית כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

**16)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים וננית כי קיימים:

$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.

הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** נניח ש- $f$ גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- $f''$ חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**18)** הוכיחו כי $e$ הוא מספר אי-רציונלי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

**2)** א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

**4)** נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

**5)** $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

**6)** א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

**7)** א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

**8)** א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

**9)** א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

**10)** א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**<u>הערה לגבי קירובים</u>**

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל- $n$ ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-n}$.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן | תחום התכנסות |
|---|---|
| $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ | $-1<x\le 1$ |
| $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ | $-1\le x\le 1$ |
| $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$ | $-1<x<1$ |
| $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$<br>$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$ | $-1\le x\le 1\ (m>0)$<br>$-1<x\le 1\ (-1<m<0)$<br>$-1<x<1\ (m\le -1)$<br>$m\ne 0,1,2,3,\ldots$ |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 14 - משוואות מסדר ראשון

### תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים ..... 107
3. משוואה הומוגנית ..... 109
4. משוואה לינארית מסדר ראשון ..... 111
5. משוואת ברנולי ..... 113
6. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד ..... 114
7. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון ..... 117
8. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה ..... 119

# הפרדת משתנים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

**2)** $(1-x)y'=y^2$

**3)** $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

**4)** $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

**5)** $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

**6)** $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

**7)** $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

**8)** $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

**9)** $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

**10)** $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \quad (\cos x\neq 0)$

**11)** $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

**2** $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

**3** $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

**4** $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

**5** $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

**6** $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

**7** $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

**8** $x=1+\tan\left(t+c\right)$

**9** $y=-\frac{1}{\cos x}$

**10** $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

**11** $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואה הומוגנית

## שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

**1)** $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

**2)** $y'=\frac{4y-3x}{2x-y}$

**3)** $y^2+x^2y'=xyy'$

**4)** $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

**5)** $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$

**6)** $y'=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

**7)** $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

**8)** $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

**9)** נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע $n$, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של $n$ שנמצא בסעיף א.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\,,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

**2** $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\,,\quad y=x,\ y=-3x$

**3** $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

**4** $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

**5** $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

**6** $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\quad y=0$

**7** $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

**8** $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

**9** $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואות ליניאריות מסדר ראשון

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

**2)** $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

**3)** $(x>2)\quad (x-2)y'=y+2(x-2)^3$

**4)** $(x>0)\quad x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

**5)** $y(0)=1\ ;\ \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

**6)** $(\sin x>0)\quad \frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

**7)** $(\sin x>0)\quad y'-2y\cot x=1$

**8)** $z(\pi)=0\ ;\ x^2z'+2xz=\cos x$

**9)** $ydx=(2x+y^3)dy$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואת ברנולי

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $x^2y'+2xy-y^3=0$

**2)** $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

**3)** $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

**4)** $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

**5)** $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad \left(\sin x\neq 0\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

**2)** $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

**3)** $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

**4)** $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

**5)** $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

## שאלות

**1)** נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$ , $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש-$y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ , $y_1(x)=-x+1$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

**2)** נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$ , $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

**3)** פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$ , $y(4)=0$.

**4)** נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$ , $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

**5)** נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה $(x_0,y_0)$, כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך $(x_0,y_0)$.
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך $(x_0,y_0)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר $n$ (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר $n$ מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

**7)** כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

**8)** נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

**9)** נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

**10)** הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

**11)** הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

**12)** הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

**3)** $y(x)=0$

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**5)** א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה $(x_0,y_0)$, שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

**6)** א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

**7)** אחד.

**8)** א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

**9)** א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

**10)** הוכחה.

**11)** הוכחה.

**12)** הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

## שאלות

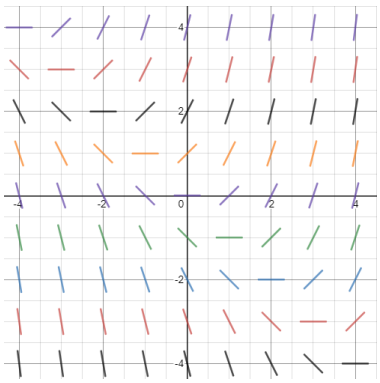
**1)** שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

**2)** התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

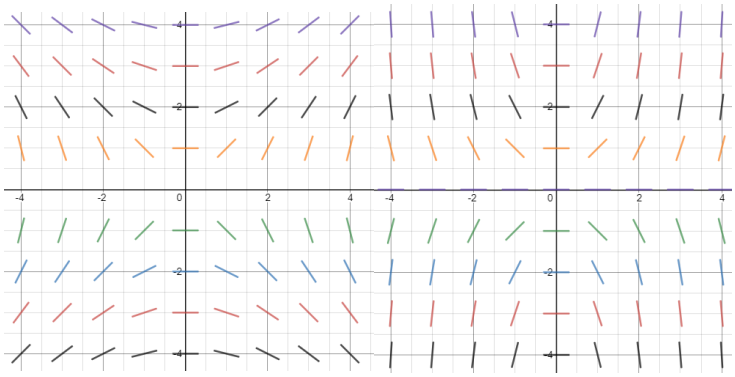
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2



איור 3

**3)** נתונה המד"ר $y'=y-x$ , $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

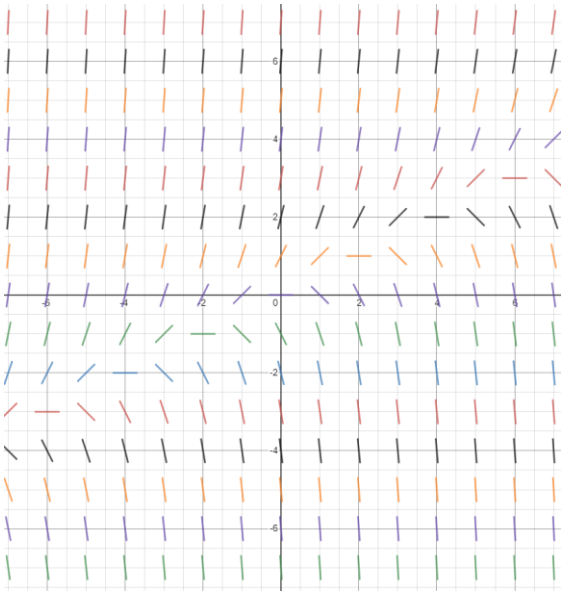
**4)** נתונה המד"ר $y'=x+y$ , $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)**



**2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

**3)** $y(1)=4.593$

**4)** $y(2)=6.95328$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

**הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.**

**הערת סימון:** בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

**2)** $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

**3)** $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

**4)** $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

**5)** $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

**6)** $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\ \ x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 15 - משוואות ליניאריות מסדר שני

### תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה ..... 121
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים ..... 123
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" ..... 125
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" ..... 127
5. וריאציית פרמטרים ..... 129
6. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 130
7. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
8. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל ..... 132
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני ..... 133
10. השיטה האופרטורית ..... 134

# משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $(x \neq 0)\ \ x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x}$

**2)** $(\cos x \neq 0)\ \ y'' \tan x - 1 = y'$

**3)** $2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0$

**4)** $y'' x \ln x = y'$

**5)** $xy'' = x^2 e^x + y'$

**6)** $yy'' + (y')^2 = 0$

**7)** $2y''y - (y')^2 = 1$

**8)** $(\cos y \neq 0)\ \ y'' \tan y = 2(y')^2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

**2)** $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

**3)** $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2;y=\pm x+C_3$

**4)** $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;y=C_3$

**5)** $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

**6)** $\frac{y^2}{2}=cx+k\ \ ;\ \ y=c$

**7)** $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

**8)** $\cot y=-\left(cx+k\right)\ \ ;\ \ y=c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

## שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

**1)** $y''-100y=0$

**2)** $y''-4y'=0$

**3)** $y''-8y'+7y=0$

**4)** $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

**5)** $y''-2y'+y=0$

**6)** $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

**7)** $y''+4y=0$

**8)** $y''+10y'+125y=0$

**9)** $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

**10)** $5y''+8y'+4y=0$

**11)**
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

## תשובות סופיות

**1)** $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

**2)** $y=c_1+c_2e^{4x}$

**3)** $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

**4)** $z=e^{x}$

**5)** $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

**6)** $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

**7)** $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

**8)** $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

**9)** $y=e^{2}\sin 3x$

**10)** $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

**11)** $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

**12)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

**2)** $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

**3)** $y''-y'-2y=4\sin 2x$

**4)** $y''-2y=xe^{-x}$

**5)** $y''-y=3e^{2x}\cos x$

**6)** $z''+z=\sin x$

**7)** $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

**8)** $y''+3y'=9x$

**9)** $y''-3y'+2y=e^x$

**10)** $y''-2y'=6x^2-2x$

**11)** $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

**12)** $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

**2)** $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

**3)** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

**4)** $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

**5)** $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

**6)** $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

**7)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x}$

**8)** $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

**9)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - xe^x$

**10)** $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

**11)** $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

**12)** $y = e^{-x}\sin 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

**2)** $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

**3)** $y''-y'-2y=4\sin 2x$

**4)** $y''-2y=xe^{-x}$

**5)** $y''-y=3e^{2x}\cos x$

**6)** $z''+z=\sin x$

**7)** $y''+3y'=9x$

**8)** $y''-3y'+2y=e^{x}$

**9)** $y''-2y'=6x^2-2x$

**10)** $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

**11)** $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

**12)** $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

**2** $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

**3** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

**4** $y = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

**5** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

**6** $z = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

**7** $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

**8** $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - xe^{x}$

**9** $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

**10** $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

**11** $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2e^{x} - 3xe^{x} + 2e^{3x}$

**12** $y = e^{-x}\sin 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# וריאציית פרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

**2)** $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

**3)** $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

**4)** $y(1)=0\,,\ y'(1)=0\quad;\quad y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$

**5)** $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

**6)** $y''+4y=\sec 2x$

## תשובות סופיות

**1)** $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

**2)** $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

**3)** $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2\left(x+1\right)^{3/2}\right]$

**4)** $y=e^x-xe^x+xe^x\ln x\quad(x>0)$

**5)** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

**6)** $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוורונסקיאן ושימושיו

## שאלות

**1)** האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$ , הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ , עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

**2)** הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$ , בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$ .
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

**3)** בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$ ,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$ , בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

**4)** נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$ , $y_2=\left|x^3\right|$ , בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$ .
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$ , $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע $I$ ,
וניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ , $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$ ,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2$ , $y_2(x)=x^4$ הן פתרונות שלה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$ , הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$ ,
בקטע $I$ , כאשר $p,q$ רציפות בקטע $I$ .
הראו כי אם קיימת נקודה $c$ בקטע $I$ , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$ ,
אז $\{y_1(x),y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

## תשובות סופיות

**1)** לא.

**2)** $W=-2x$

**3)** כן.

**4)** א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

**5)** א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

**6)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

## שאלות

**1)** פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$ , כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$ .

**2)** פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$ .

**3)** הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

**2)** $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

**3)** שאלת הדגמה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

## שאלות

**1)** נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

**2)** נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

**3)** האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

**2)** לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

**3)** לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# השיטה האופרטורית

**הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.**

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \Leftrightarrow \left(aD^2+bD+c\right)y=Q(x)$.

## שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

**1** $\left(D^2-D-2\right)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

**2** $\left(D^2-2D+1\right)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

**3** $\left(D^2+D-2\right)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

**4** $\left(D^2+4\right)y=\sin 5x$

**5** $\left(D^2-4\right)y=\sin x\cos x\cos 2x$

**6** $\left(D^2+D-2\right)y=\cos x-3\sin x$

**7** $\left(D^2+2D-3\right)y=2\cos x\cos 2x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

**2)** $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

**3)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4x e^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

**4)** $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

**5)** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

**6)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

**7)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 16 - משוואות ליניאריות מסדר n

### תוכן העניינים


1. משוואה חסרה מסדר שלישי ..... 136
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים ..... 137
3. שיטת השוואת מקדמים ..... 140
4. שיטת וריאציית הפרמטרים ..... 142
5. משוואת אוילר מסדר שלישי ..... (ללא ספר)
6. הוורונסקיאן ושימושיו ..... 143
7. השיטה האופרטורית ..... 144

# משוואה חסרה מסדר שלישי

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y'y'''-(y'')^2-3y''(y')^2-4(y')^4=-16y(y')^3$,
עם תנאי ההתחלה $y''(0)=-12,\ y'(0)=-3,\ y(0)=0$.

**2)**
$$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2 \end{cases}$$

**3)**
$$\begin{cases} y'''-\dfrac{(y'')^2}{y'}=y''y'-2(y')^2y \\ y(0)=-1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0 \end{cases}$$

**4)**
$$3y'''y-y'y''=0$$
$$y(1)=1,\ y'(1)=3,\ y''(1)=6$$

**5)**
$$\left(y'y'''-2(y'')^2\right)y^2=-(y')^4$$
$$y>0$$
$$y(1)=y'(1)=y''(1)=1$$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{4}\ln\left|-3+4y\right|=x+\frac{1}{4}\ln 3$

**2)** $y=\frac{1}{1-x}-1$

**3)** $y=\tan x-1$

**4)** $y=x^3$

**5)** $y=e^{x-1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

## שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-15**:

**1)** $y'''-2y''-3y'=0$

**2)** $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

**3)** $y'''-2y''-y'+2y=0$

**4)** $y^{(4)}-5y''+4y=0$

**5)** $y^{(4)}-y=0$

**6)** $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

**7)** $y^{(4)}+y=0$

**8)** $y^{(6)}-y''=0$

**9)** $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

**10)** $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

**11)** $z'''-6z''+12z'-8z=0$

**12)** $y^{(4)}-4y=0$

**13)** $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)**
$$\begin{cases} y'''-y''+y'-y=0 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=4 \\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

**15)**
$$\begin{cases} y''''-3y'''+6y''-12y'+8y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=5 \\ y''(0)=-19 \\ y'''(0)=-47 \end{cases}$$

**16)** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2e^x\cos 2x$.

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצאו את המשוואה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

4) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{0x}\left[c_3 \cos x + c_4 \sin x\right]$

6) $y = c_1 e^{-4x} + e^{x}\left[c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x\right]$

7) $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

8) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x$

9) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x}$

10) $y = e^{x}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right] + xe^{x}\left[c_3 \cos x + c_4 \sin x\right] + \\ + e^{-x}\left[c_5 \cos x + c_6 \sin x\right] + xe^{-x}\left[c_7 \cos x + c_8 \sin x\right]$

11) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$

12) $y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos\sqrt{2}x + c_4 \sin\sqrt{2}x$

13) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$

14) $y = e^{x} + 2\cos x + 3\sin x$

15) $y = e^{x} - 2e^{2x} + 3\cos 2x + 4\sin 2x$

16) א. $y = e^{x}\left[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right] + xe^{x}\left[c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x\right] + \\ + x^2 e^{x}\left[c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x\right]$

ב. $y'''''' - 6y''''' + 27y'''' - 68y''' + 135y'' - 150y' + 125y = 0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטת השוואת מקדמים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

**2)** $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

**3)** $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

**4)** $y'''-3y'+2y=e^x$

**5)** $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

**6)** $\begin{cases} y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

**7)** $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + x^3 + 4$

4) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^{x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x\left(\cos x - \sin x\right)$

6) $y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

7) $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטת וריאציית הפרמטרים

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1)** $y'''+y'=\frac{1}{\cos x}$

**2)** $y'''-3y''+2y'=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$

**3)** $y'''-3y''+3y'-y=\frac{e^x}{x}$

## תשובות סופיות

**1)** $y=c_1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x+\ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|-x\cos x+\sin x\ln\left|\cos x\right|$

**2)** $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+$
$+\frac{1}{2}\left(e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$

**3)** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-\frac{3}{4}x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\ln\left|x\right|$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הוורונסקיאן ושימושיו

## שאלות

**1)** האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$,
בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$,
כך שהפונקציות $y_1(x)=x$ , $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ , הן פתרונות שלה?

**2)** נתונות הפונקציות $y_1(x)=4-x,\ y_2(x)=4+x,\ y_3(x)=20+x$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות.

ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty,\infty)$.

ג. ענו שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y''=0$.

**3)** פתרו את הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$ , $y_2(x)$ , $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$.
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע $I$ , כך ש- $y_1(x)$ , $y_2(x)$ , $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x)=x$ , $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=x^3$ הן פתרונות שלה.

## תשובות סופיות

**1)** לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x=0$.

**2)** א. $W=0$ ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.

**3)** א. שאלת הוכחה. ב. $x\neq 0$ , $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# השיטה האופרטורית

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

**1** $\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$

**2** $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$

**3** $\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$

**4** $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$

**5** $\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin\left(2x+1\right)+\cos\left(x+10\right)$

**6** $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$

**7** $\left(D^4-3D^3+6D^2-12D+8\right)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$

## תשובות סופיות

**1** $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

**2** $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

**3** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

**4** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

**5** $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin\left(2x+1\right)-\cos\left(x+10\right)$

**6** $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

**7** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 17 - מערכת משוואות לינאריות

### תוכן העניינים

1. חזרה מאלגברה לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ..... 145

2. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכסון ..... 147

# חזרה מאלגברה לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

## שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של $A$ :

**1)** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

**2)** $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

**3)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

**4)** $A=\begin{pmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

**5)** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

**6)** $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

**7)** $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$

**8)** $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x=0,\ x=1,\ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ x=2,\ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ v_{x=2}(1,1,1),\ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=3,\ v_{x=2}=(1,1,1),\ v_{x=3}^{(1)}=(1,0,1)\ x_{x=3}^{(2)}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ x=-1,\ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\quad v_{x=-1}=(-1,2),\ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ v_{x=1}=(1,1,1)$ ,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right),\ v_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכסון

## שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **1-2**:

**1)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**2)** $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

**3)** נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $z(t)=y(t)$.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **4-5**:

**4)** $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

**5)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**6)** נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$.

חשבו: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} y_1'+5y_1-2y_2'=0 \\ 3y_2'-4y_1'-5y_2=0 \end{cases}$.

**8)** פתרו: $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$, כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה: בשאלות **7** ו-**8** יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות **9-14**:
(שימו לב שכל המערכות <u>אינן</u> ניתנות ללכסון)

**9)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**10)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**11)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**12)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**13)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$

**14)** $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** דני פתר את המערכת $x'(t)=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&2&6\\-1&-1&-3\end{pmatrix}x(t)$,

וקיבל $x(t)=c_1e^{-1t}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2{}^{0t}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{0t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$.

נתון תנאי התחלה: $x(0)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכים של הקבועים הממשיים, $a,b,c$, הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הנתון יהיה חסום לכל $t$ ממשי?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

**2)** $$\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

**3)** $$z(t)=y(t)$$

**4)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

**5)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

**6)** 0

**7)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

**8)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+c_3e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$$

**9)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\t\end{pmatrix}$$

**10)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-2t+1\\2t-1\\t\end{pmatrix}$$

**11)** $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t-1\\0.5t^2\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2t-1\\t\\t\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{bmatrix}t^2-t+2\\\frac{t^2}{2}+1\\\frac{t^2}{2}\end{bmatrix} \quad (12$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\t-1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+c_4e^{1t}\begin{pmatrix}1\\t-2\\\frac{t^2}{2}-t+1\\\frac{t^3}{6}\end{pmatrix} \quad (13$$

$$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-2t+1\\-4t\\-2t\end{pmatrix} \quad (14$$

$$a=-c,\quad b=2a \quad (15$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 18 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

### תוכן העניינים


1. בעיות גדילה ודעיכה ..... 152
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית ..... 154
3. עקומות אורתוגונליות ..... 156
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום ..... 157
5. בעיות שונות ..... 158

# בעיות גדילה ודעיכה

## שאלות

**1)** קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.

א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?

ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?

ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).

**2)** האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.

א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.

ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.

**3)** אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש״ח.

א. כמה כסף הפקיד האדם?

ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש״ח?

**4)** מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיות בר.

**5)** ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.

א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
מכמות התחלתית של 100 גרם?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.

א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

## תשובות סופיות

**1)** א. 7.28 מיליארד. ב. 3.54 מיליארד. ג. בשנת 2,106.

**2)** א. 2% ב. 15.92 שנים.

**3)** א. 4093.65 ₪. ב. 13.41 שנים.

**4)** 40.77 חודשים.

**5)** א. 88.69 גרם. ב. 19,188 שנים.

**6)** א. 3.04 שבועות. ב. 14.6 שבועות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות גיאומטריות

## שאלות

**1)** על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה $(x,y)$ על העקום, שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצאו את משוואת העקום.

**2)** מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

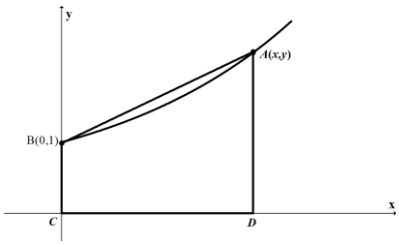
**3)** מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

**4)** תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את $A$ עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- $y$ של הנקודה $A$.

**5)** מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

**6)** קטע הנורמל לעקום בנקודה $(x,y)$ שבין נקודה זו וציר ה- $x$, נחצה על ידי ציר ה- $y$.
מצאו את משוואת עקום זה.

**7)** נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה $A$ שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?




**8)** נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$,
ושיפוע המשיק אליו בנקודה $(x,y)$ שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
מצאו את משוואת העקום.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
ושבכל נקודה $(x,y)$ שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

**10)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה-$y$, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x,y)$ והקטע OM, מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN
(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה-$y$).
ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

## תשובות סופיות

**1)** $x^2+y^2=k$

**2)** $x^2+y^2=k$

**3)** $y^2=ax$

**4)** $y=2xe^{x-2}$

**5)** $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$

**6)** $2x^2+y^2=k$

**7)** $y=2e^{x^2/4}-1$

**8)** $2xy+x^2=7$

**9)** $x^3-3y^2x=11$

**10)** $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# עקומות אורתוגונליות

## שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות **1-4**:

**1)** $2\ln x+\ln y=c$

**2)** $xy=c$

**3)** א. $x^2+2y^2=c$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$,
בנקודה $(1,2)$ שעליה.

**4)** $x^2+y^2=cx$

**5)** מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של $45°$
עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

## תשובות סופיות

**1)** $2\ln x+\ln y=c$

**2)** $y^2-x^2=k$

**3)** $y=2x^2$ , $y=ax^2$

**4)** $y=m(x-c)^2 \quad y>0$

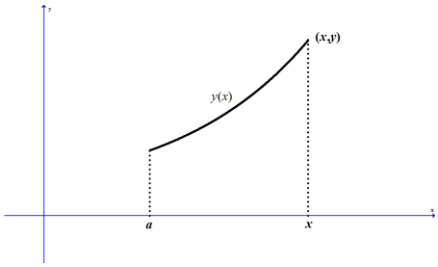
**5)** $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

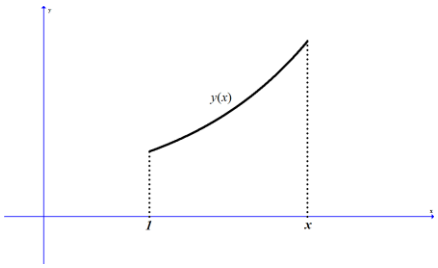
# בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

## שאלות

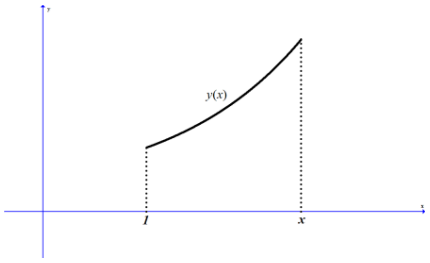
**1)** שטח $S$ מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-$x$, $x=a$, ו-$x$ משתנה (ראו ציור).
ידוע כי השטח $S$ פרופורציונלי לאורך הקשת
בין הנקודות $(a,y(a))$ ו-$(x,y(x))$.
מצאו את משוואת העקום.




**2)** שטח $S$ מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-$x$, $x=1$, ו-$x$ משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך ששטחו של $S$ שווה ל-$2y(x)$?




**3)** שטח $S$ מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה-$x$, $x=1$, ו-$x$ משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך שהשטח של $S$ שווה ל-$y(x)-2$?




## תשובות סופיות

**1)** $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$

**2)** לא.

**3)** כן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות שונות

## שאלות

**1)** בזמן $t=0$, יש במיכל 4 ק״ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים.
נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק״ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.

א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.

ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?

**2)** סירה נגררת בקצב של 12 קמ״ש.
ברגע $t=0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
משקל החותר והסירה הוא 500 ק״ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר $v$ נמדדת במטר/שניה.

א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.

ג. מצאו את המהירות הסופית.

**3)** חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

**4)** נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס״מ וגובהו 4 ס״מ. הגליל מלא במים.
ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
נסמן ב-$h(t)$ את גובה פני המים, וב- $k$ את קבוע הפרופורציה.

א. רשמו מד״ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$.
פתרו את המד״ר.
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס״מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס״מ.

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן $t$.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

**6)** מבלון מלא אוויר, שרדיוסו $R$, מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן $t$.
הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות **5** ו-**6** נדרש ידע בהפרדת משתנים.

## תשובות סופיות

**1)** א. 26.75 ק״ג. ב. 0.942 דקות.

**2)** א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.

**3)** א. $43\frac{1}{3}^\circ$ ב. 1.13 שעות.

**4)** א. $h(0)=4\ ;\ \pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ ב. $h=(2-t)^2\ ;\ t=\sqrt{2}+2$

**5)** א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. 4.5 שעות.

**6)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 19 - בעיות שטורם ליוביל

### תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל ..... 160

# בעיות שטורם-ליוביל

## שאלות

**1)** הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

**2)** הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

**3)** הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

**4)** $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$

**7)** $\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

**9)** פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}$.

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$.

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1 \ , \ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}$.

פתחו את הפונקציה $f(x)=x \ , \ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

**10)** פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$.

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases}1 & 1\le x\le\sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e\end{cases}$ , לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$ , $x=1.5$ , $x=\sqrt{e}$.

**זהויות שכדאי להכיר:**

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

**5)** פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

**6)** פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

**7)** פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

**8)** א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

**9)** א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$ כאשר $(0<x<2)$.

**10)** א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$ כאשר $0<x<\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 20 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

### תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון ..... 165
2. נגזרות חלקיות מסדר שני ..... 167
3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה ..... 171
4. דיפרנציאבילות ..... 173

# נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

**1)** $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

**2)** $f(x,y)=x^5\ln y$

**3)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק $f_x$).

**4)** $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

**6)** $f(x,y)=\sin(xy)$

**7)** $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

**8)** $f(r,\theta)=r\cos\theta$

**9)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$

**10)** $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

**11)** נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

**12)** נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

### הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

**2)** $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

**3)** $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

**4)** $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

**5)** $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

**6)** $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

**7)** $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

**8)** $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

**9)** $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

**10)** $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

### הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות מסדר שני

## שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

**2)** $f(x,y)=x^4\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

**4)** $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

**5)** $f(x,y)=xy(x-y)$

**6)** $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

**8)** $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

**9)** $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

**10)** $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

**11)** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

**12)** $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

**13)** $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

**14)** $f(x,y,z)=xyz$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$ .

**16)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ .

**17)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**18)** נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$ .

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

**הערת סימון**

$$f=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**(1)** $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2 y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

**(2)** $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

**(3)** $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

**(4)** $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

**(5)** $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

**(6)** $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{yy} = 2\left[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0\right]$ $\quad f_{xx} = 2\left[8y - 0 - 24\right]$

$f_{xy} = 2\left[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0\right]$

**(7)** $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

**(8)** $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$ ,

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

**(9)** $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2 y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(10)**

$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

**(11)**

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

**(12)**

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

**(13)**

$$f_x=10\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$$

$$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$$

$$f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$$

**(14)**

$$f_x=yz\qquad f_y=xz\qquad f_z=xy$$

$$f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$

$$f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x$$

$$f_{zx}=y\qquad f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0$$

**(15)** $-2$

**(16)** $-1$

**(17)** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

**(18)** $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

**2)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**3)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

**הערה**

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאביליות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

## תשובות סופיות

**1)** א. $f_y(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

**2)** $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

**3)** $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f_y(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$

**5)** א. $f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ב. לא רציפות.

**6)** א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# דיפרנציאבילות

## שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

**1)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)** $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**4)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**5)** בדקו דיפרנציאבילות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

**8)** תהי $f$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- $\phi$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

**9)** בדקו דיפרנציאבילות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0,0)$.

**10)** נתונה $f:R^n\to R$ , המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם $f$ דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** לא דיפרנציאבילית.

**2)** דיפרנציאבילית.

**3)** לא דיפרנציאבילית.

**4)** לא דיפרנציאבילית.

**5)** דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.

**6)** א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$

**7)** א. $m<1$ ב. לכל $m$ ג. $m<0.5$

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** דיפרנציאבילית.

**10)** כן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 21 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום ..... 176
2. הנגזרת ושימושיה ..... 178
3. שימושי האינטגרל המסוים ..... 179

# הצגה פרמטרית של עקום

## שאלות

**1)** עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0,\ x = t^2 + 1,\ y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi,\ x = \sin t,\ y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi,\ x = \cos t,\ y = 4\sin t$

**2)** עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4,\ y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2,\ y = -\sqrt{4 - x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2,\ y = +\sqrt{4 - x^2}$

**3)** להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר $t$, מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים $x$ ו- $y$ בלבד:

א. $x = t - 4,\ y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t,\ y = 1 + 2\sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1,\ y = t(0.5t + 1) + 1$

ה. $x = \dfrac{20t}{4 + t^2},\ y = \dfrac{20t - 5t^2}{4 + t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t},\ y = ke^t - ke^{-t}$ ($k$ קבוע).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x-1,\ x\geq 1$ ב. $y=1-x^2,-1\leq x\leq 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1,\ -1\leq x\leq 1, y\leq 0$

**2)** א. $x=t,\ y=t^4+1,\ 1\leq t\leq 4$ ב. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ \pi\leq t\leq 2\pi$

ג. $x=2\cos t\ ,\ y=2\sin t\ ,\ 0\leq t\leq \pi$

**3)** א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנגזרת ושימושיה

## שאלות

**1)** חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$, הנתונה בצורה פרמטרית.

**2)** נתון העקום $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=1-2t \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

**3)** נתון העקום $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=3t^2-9 \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי, ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של $t$ העקום קמור/קעור?

## תשובות סופיות

**1)** $y'=\dfrac{\cos t-\sin t\cdot t}{1-\cos t}$ , $y''=\dfrac{(-t\cos t-2\sin t)(1-\cos t)-\sin t(\cos t-t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

**2)** א. ראו בסרטון. ב. $y'=\dfrac{-2}{2t+1}$ ג. $y=2x+3$ ד. $y=-0.5x+3$

**3)** א. ראו בסרטון. ב. $y=\pm\sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0,-9)$ אנכי $(-2,-6),(2,-6)$

ד. $-1<t<1$ קמור. $t>1$ או $t<-1$ קעור.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי האינטגרל המסוים

**1)** חשבו את השטח הכלוא בעקום $C:\begin{cases}x=\cos 2t\\y=\sin 4t\end{cases}$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.

* שימו לב שאם $a=b=r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס $r$.

**3)** חשבו את השטח הכלוא בין העקום $x=\cos t,\quad y=t+\sin t\quad 0\le t\le \pi$ לבין ציר ה- $x$.

**4)** חשבו את השטח הכלוא בין העקום $x=4\cos t,\quad y=\sin^2 t\quad 0\le t\le 2\pi$ לבין ציר ה- $x$.

**5)** חשבו את אורך העקום $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

**6)** חשבו את אורך העקום $\begin{cases}x=\cos t\\y=t+\sin t\end{cases}$, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,\pi)$.

**7)** חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית

$\begin{cases}x=\cos 2t\\y=\sin 2t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

**8)** חלק העקום $\begin{cases}x=r\cos t\\y=r\sin t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\pi$, מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

**9)** חלק העקום $\begin{cases}x=\cos^3 t\\y=\sin^3 t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

**10)** חשבו את אורך העקום $-\pi\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x=4\sin t\\y=10t\\z=4\cos t\end{cases}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\left(e^t\right)\mathbf{k}$ $1\le t\le 3$.

## תשובות סופיות

**1)** $8/3$

**2)** $\pi ab$

**3)** $1.5\pi$

**4)** $16/3$

**5)** $8$

**6)** $4$

**7)** אורך העקום הוא $2\pi$. המרחק שעבר החלקיק הוא $4\pi$.

**8)** $4\pi r^2$

**9)** $6\pi/5$

**10)** $6\pi\sqrt{29}$

**11)** $\sqrt{3}e\left(e^2-1\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 22 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. קואורדינטות קוטביות ..... 181
2. הנגזרת ושימושיה ..... 183
3. שימושי האינטגרל המסוים ..... 184

# קואורדינטות קוטביות

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנגזרת ושימושיה

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=3+8\sin\theta$ בנקודה $\theta=\frac{\pi}{6}$.

**2)** מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=1-2\sin\theta$ בראשית הצירים.

## תשובות סופיות

**1)** $y=\frac{11\sqrt{3}}{5}x-\frac{98}{5}$

**2)** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ , $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי האינטגרל המסוים

## שאלות

**1)** חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r=2(1+2\cos\theta)$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=6+4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה-$y$.

**3)** חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=3+2\sin\theta$.

**4)** חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=3+2\sin\theta$ ומחוץ ל-$r=2$.

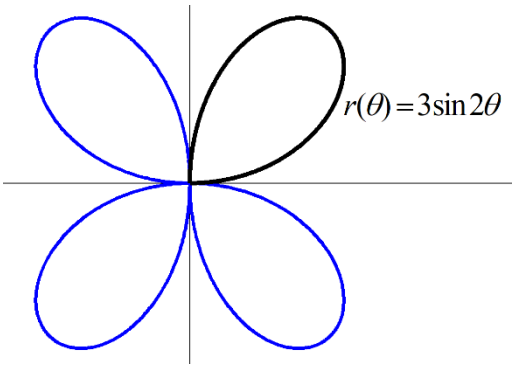
**5)** חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ומחוץ ל-$r=3+2\sin\theta$.

**6)** חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ובתוך $r=3+2\sin\theta$.

**7)** חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r=2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r=1$.

**8)** מצאו את אורך הקרדיואידה $r=1+\cos\theta$.

**9)** מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r=3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!




**10)** מצאו את אורך העקום $r=\theta$, כאשר $0\le\theta\le 1$.

**11)** העקום $r=\cos\theta$, כאשר $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה-$x$.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** העקום $r=4+4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

## תשובות סופיות

**1)** $S=4\pi-6\sqrt{3}=2.174$

**2)** $S=22\pi-48$

**3)** $S=11\pi$

**4)** $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$

**5)** $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$

**6)** $10.37$

**7)** $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

**8)** $8$

**9)** $\ell=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2\theta}\,d\theta$

**10)** $\ell=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

**11)** $S_x=\pi$

**12)** $S_y=102.4\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

## קווים

1) $r\cos\theta = a$ - הישר $x = a$.
2) $r\sin\theta = b$ - הישר $y = b$.
3) $\theta = \beta$ - הישר העובר דך הראשית $y = (\tan\beta)x$.

## מעגלים

1. $r = a$ - מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו $a$.
2. $r = 2a\cos\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו $|a|$.
3. $r = 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(0,b)$ ורדיוסו $|b|$.
4. $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנק' $(a,b)$ ורדיוסו $\sqrt{a^2+b^2}$.

## קרדיודות ולמניסקטות

1) קרדיודות $r = a \pm a\cos\theta,\ r = a \pm a\sin\theta$:
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

2) למניסקטות עם לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a < b)$:
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

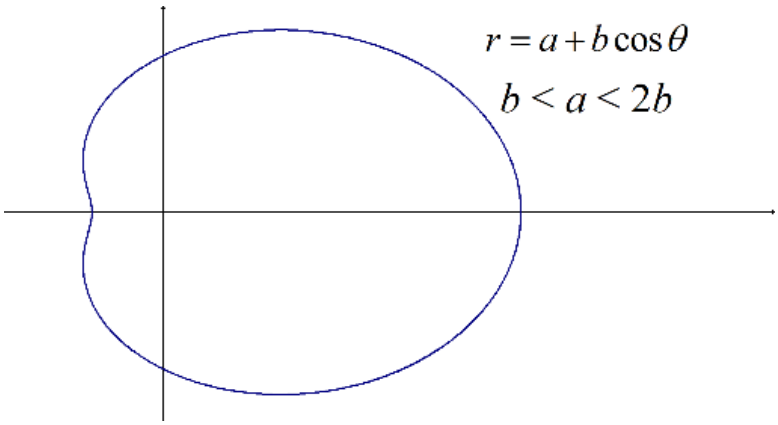
3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a > b)$:
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

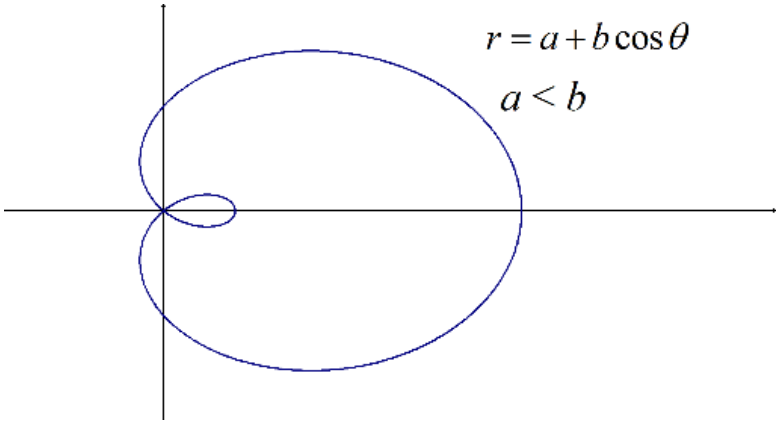
* נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם $0 \le \theta \le 2\pi$.

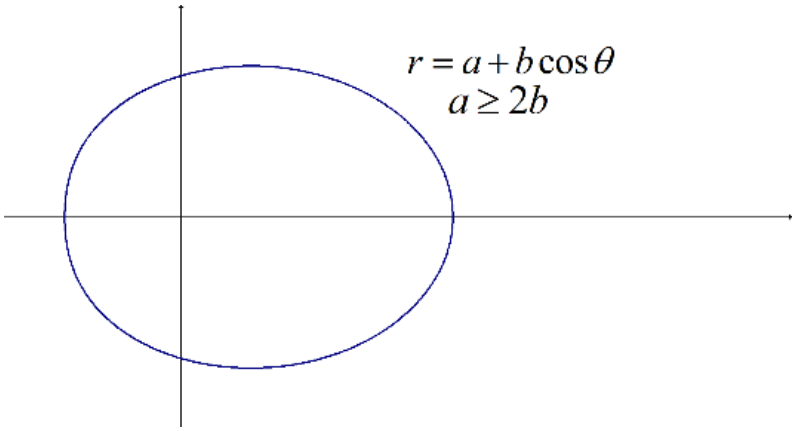

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## למינסקטות ביתר פירוט

**הגרף של** $r=a+b\cos\theta$ :



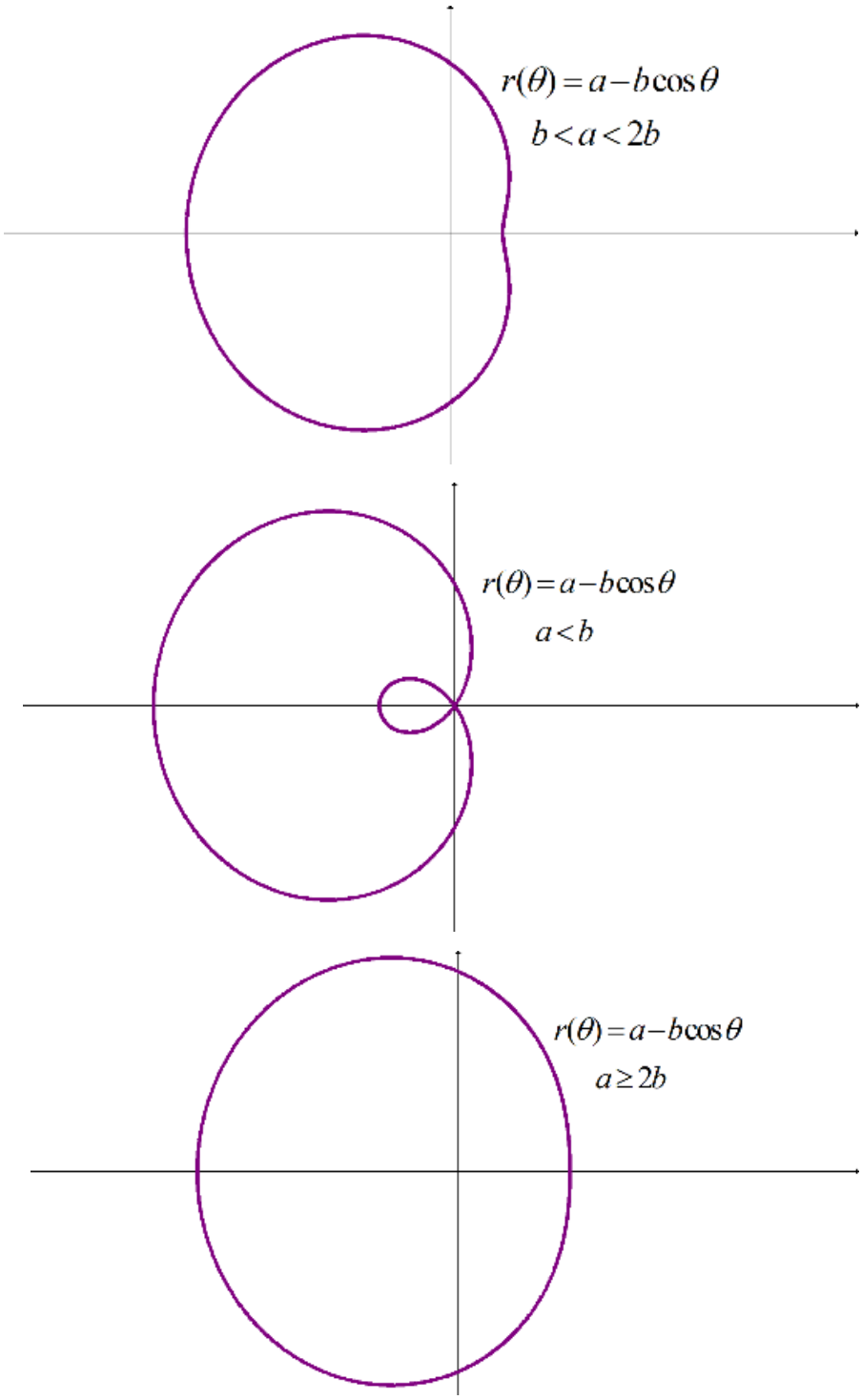





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

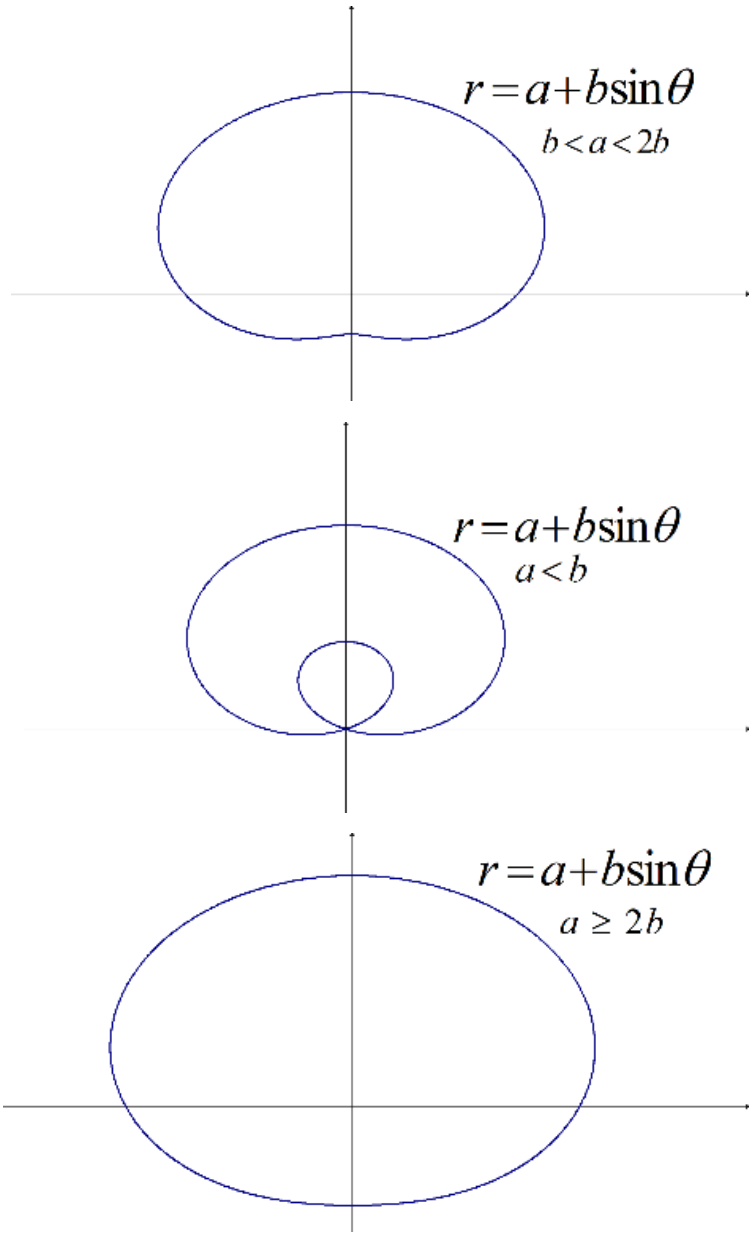
**הגרף של** $r=a-b\cos\theta$





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

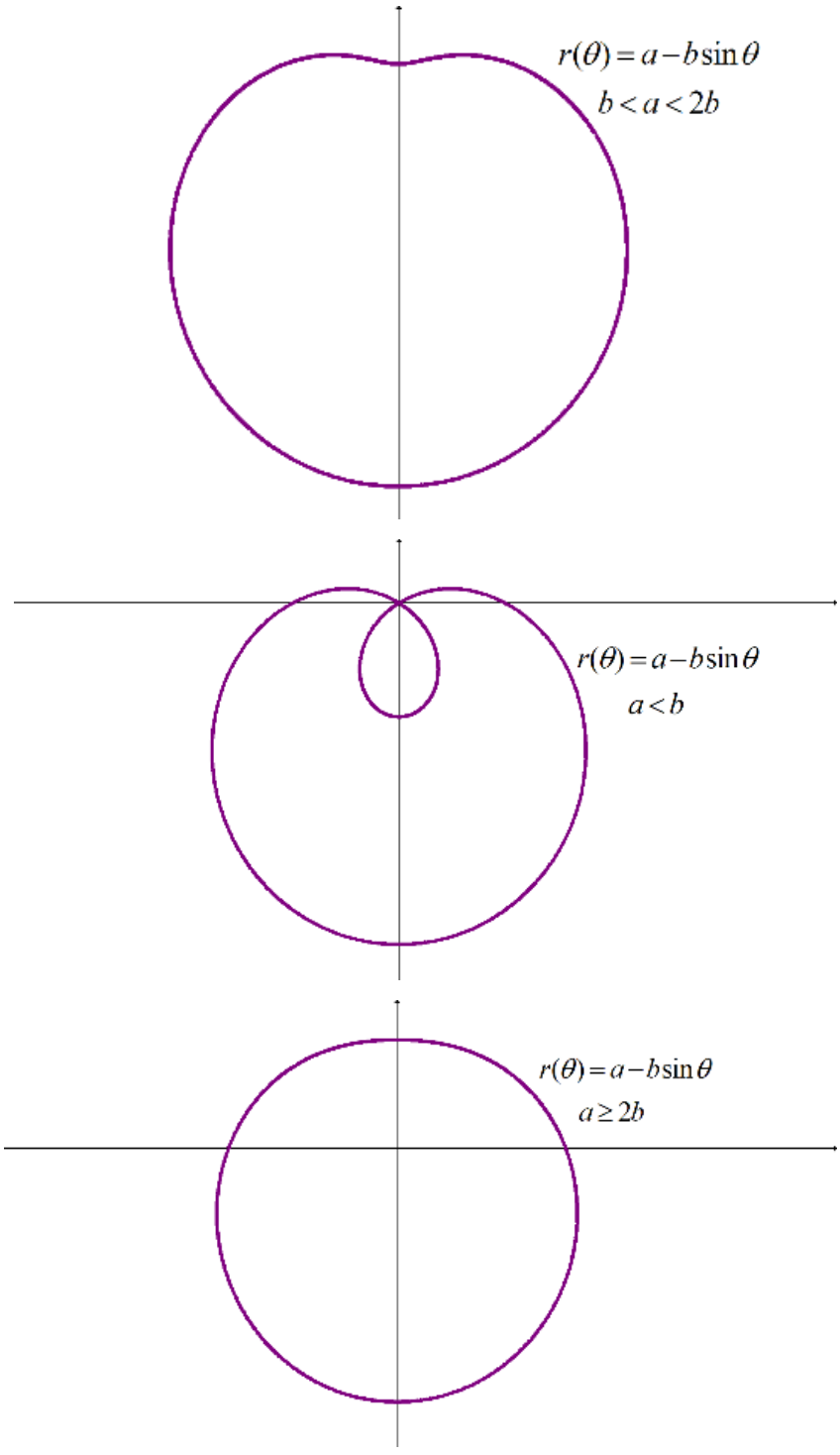
**הגרף של** $r=a+b\sin\theta$





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

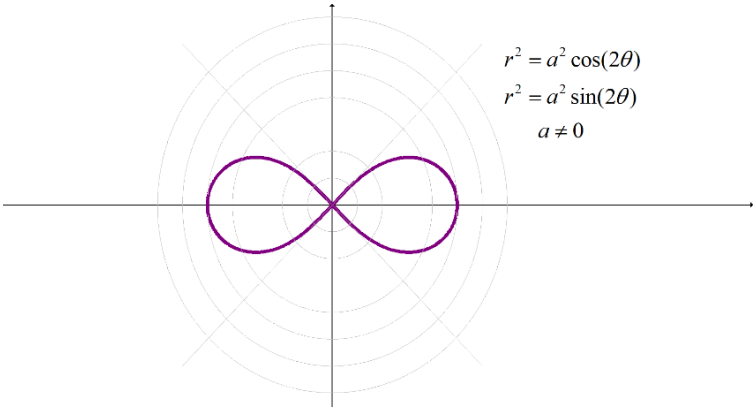
**הגרף של** $r=a-b\sin\theta$

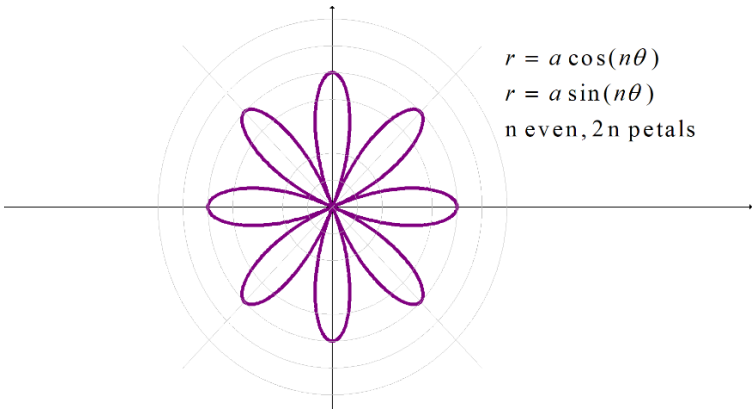


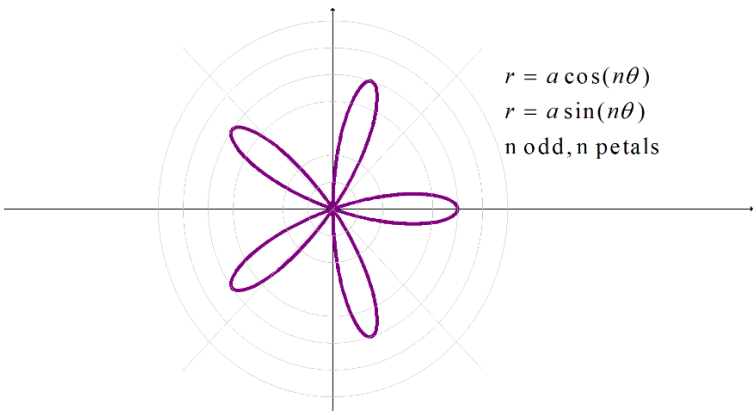


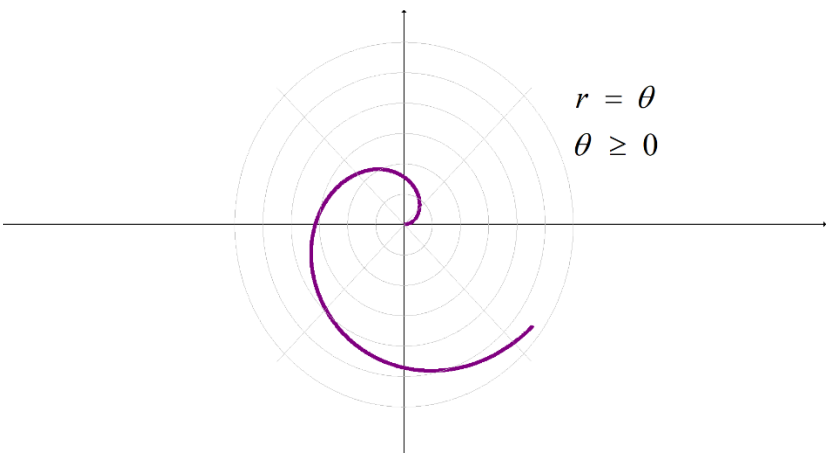
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גרפים נפוצים נוספים





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 23 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם ..... 192

# אינטגרלים משולשים ושימושיהם

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

**1)** $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$

**2)** $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

**3)** $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}$ , $\iiint_B xyz^2dV$

**4)** $B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\,,\,0\le y\le \sqrt{x}\,,0\le z\le 1+x+y\right\}$ , $\iiint_B 6xydV$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

**5)** $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}dxdydz$

**6)** $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}dydxdz$

**7)** $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}dxdydz$

**8)** $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}dydzdx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

**9)** $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

**10)** $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

**11)** $(x\geq 0)\ \ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

**12)** $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

**13)** $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

**14)** $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

**15)** חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו $h$ ורדיוס הבסיס שלו $r$.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

**16)** חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- $z$.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, $M$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $1$

**2)** $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

**3)** $\frac{27}{4}$

**4)** $\frac{65}{28}$

**5)** $2\sin 4$

**6)** $3e-6$

**7)** $4$

**8)** $\frac{\sin^2 4}{2}$

**9)** $\frac{5}{6}$

**10)** $\frac{88}{100}$

**11)** $\frac{17}{6}$

**12)** $16\frac{1}{5}$

**13)** $\frac{8}{3}$

**14)** $36$

**15)** $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\ M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

**16)** $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 24 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות ..... 195

# אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

## שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

**1)** $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2}21xy^2dzdydx$

**2)** $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dzdydx$

**3)** $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

**4)** $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$

**5)** גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור $xy$ מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

**6)** חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

**7)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

**8)** מצאו את הנפח של התחום מעל המישור $xy$, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

**9)** חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

**11)** חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**12)** חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.

א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**13)** הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

**14)** חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.

ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

**15)** ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta$

ב. $V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

ב. $V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4$

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$

ג. $V=\int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 25 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

### תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים ..... 199

# החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

## שאלות

**1)** חשבו את $\iiint_G (z-y)^2 xydV$, כאשר $G$ הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$.

**2)** חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**3)** חשבו את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר $G$ הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**4)** חשבו את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=4z^2,\quad y=z^2,\quad y=4x-12,\quad y=4x,\quad y=2z,\quad y=z$.

**5)** חשבו את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר $G$ הוא כדור
שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

## תשובות סופיות

**1)** $2\ln 3$

**2)** $\frac{4}{3}\pi abc$

**3)** $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$

**4)** $\frac{105}{32}$

**5)** $\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 26 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 ..... 200
2. הצגה פרמטרית של משטח ..... (ללא ספר)
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 ..... 202

# אינטגרלים משטחיים מסוג I

## שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את האינטגרל המשטחי:

**1)** $\iint_S x^2yzdS$, כאשר $S$ הוא המישור $z=1+2x+3y$,
מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

**2)** $\iint_S xdS$, כאשר $S$ הוא המשטח $y=x^2+4z$, $0\le z\le 2$, $0\le x\le 2$.

**3)** $\iint_S yzdS$, כאשר $S$ הוא המישור $z=y+3$, שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$.

**4)** $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$, כאשר $S$ הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$.

**5)** $\iint_S xyzdS$, כאשר $S$ הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$,
המקיים $0\le v\le\frac{\pi}{2}$, $1\le u\le 2$.

**6)** חשבו את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס $R$.

**7)** היריעה הדקה $S$ היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$, שמתחת למישור $z=1$,
וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$, קבועה.
חשבו את **מסת** היריעה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $171\sqrt{14}$

2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$

3) $\pi\sqrt{2}/4$

4) $16\pi$

5) $93/\sqrt{10}$

6) $4\pi R^2$

7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרל משטחי מסוג II

## שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך $S$.

1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

4) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ; $S$ חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$, שבו $z\geq 0$.

5) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$, $S$ הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור $xy$.

## תשובות סופיות

1) $\frac{11}{6}$
2) $\frac{8\pi}{3}$
3) $27$
4) $12\pi$
5) $-16\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 27 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

### תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א ..... 203
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים ..... 209
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות ..... 212
4. משפטי האינטגרביליות ..... 215
5. אינטגרביליות לפי דארבו ..... 216
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית ..... 218

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_0^1 xe^{-x}dx$

**4)** $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx$

**7)** $\int_0^4 f\left(x\right)dx$, כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

**9)** $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$. הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\left(n\in\mathbb{N}\right)\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

**26)** הוכיחו:

אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$

אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

**1)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
וננית כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

**2)** $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

**3)** $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}dx\le 6\sqrt{17}$

**4)** $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

**5)** $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

**6)** $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

**7)** $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

**8)** $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

**9)** $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)dx \le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$

וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי $f$ עולה ו- $g$ אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

**8)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+...+n=0.5n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 xdx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin xdx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},...,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\dfrac{1}{2},\ x\neq\dfrac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו

## שאלות

**1)** נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי $f(x)=x$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$ .

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f$ , כך ש- $|f|$ ו- $f^2$ אינטגרביליות, אך $f$ לא אינטגרבילית.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$ .

הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**6)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P_n$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\int_a^b f(x)dx$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x)=x$ , בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x)=x^2$ , בקטע $[0,2]$.

**8)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\overline{\int_0^1} f=\underline{\int_0^1} f=\frac{1}{2}$ ב. $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$

**2)** א. $\overline{\int_0^2} f=\underline{\int_0^2} f=\frac{8}{3}$ ב. $\int_0^2 f\,dx=\frac{8}{3}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

## שאלות

**1)** תהי $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל-$n$ תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n=6,8,10,20$.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהיו $P$ ו-$Q$ שתי חלוקות של הקטע, כך ש-$Q$ עידון של $P$, אז $L(Q,f)\ge L(Q,P), U(Q,f)\le U(Q,P)$.

ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אז $\underline{\int_a^b} f(x)dx\le\bar{\int_a^b} f(x)dx$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:
פונקציה חסומה $f$ היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:
תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $(P_n)$ היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P_n,f)-L(P_n,f)\underset{n\to\infty}{\to}0$.
הוכיחו ש-$f$ אינטגרבילית.

ג. נתון $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}x & x=1/n\\ 0 & x\ne 1/n\end{cases}$.
הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

**4)** הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** סדרת פונקציות $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$.

הוכיחו כי $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\frac{1}{2}$.

**6)** תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל $x$ רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל $x$ אי-רציונלי.
העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של $f$, והראו כי $f$ אינה אינטגרבילית.

**7)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{אם } x=\frac{p}{q}\neq 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול-} p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$

א. תהי $A_N$ מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\mid x=\frac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול-$p,q$ אין גורמים משותפים.
הראו שהקבוצה $A_N$ סופית.

ב. ל-$N\in\mathbb{N}$ ו-$\varepsilon>0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],...,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<...<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup...\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+...+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראו ש- $f$ אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, $g$ ו- $h$ ב-$[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

**8)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראו ש- $f$ אינטגרבילית ב-$[c,d]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ חסומה ב-$[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad M'=\sup\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$
$$m=\inf\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad m'=\inf\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

הוכיחו כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו-$f^2$ אינטגרביליות.

**10)** תהיינה $f$ ו-$g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-$\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge0}$ (כלומר, $f(x)\ge0$).

א. הוכיחו כי אם $f$ רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: $f$ לא תהיה רציפה.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[c,1]$.

א. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$

אינטגרבילית ב-$[0,1]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה $fg$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי $g$, מתקיים $\int_a^b (fg)(x)dx=0$.

הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x,y\geq 0$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{x,y\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^n dx\right)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

**15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1,x_2,...x_n,y_1,y_2,...y_n\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n\left(tx_i+y_i\right)^2\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left(g(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b\left[tf(x)+g(x)\right]^2dx\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

**16)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של $f$ במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17) סעיף א'**

1. הוכיחו כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+...++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$, כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי $k^n<\frac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<(k+1)^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

3. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{m-1}k^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m}k^n$.

כלומר, $1^n+2^n+...+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+...+(m-1)^n+m^n$.

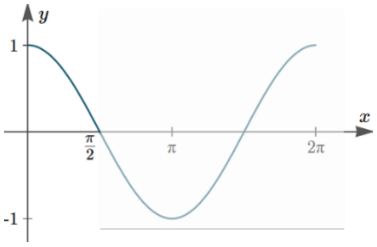
**סעיף ב'**

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0,1]$ ל-$m$ קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.

**18)** תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.




השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש-$f$ אינטגרבילית ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, וחשבו את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלקו את $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ל-$n$ קטעים שווים, והניחו כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו-$\theta\in\mathbb{R}$,

כדי להעריך את הסכום: $\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2k-1)\theta}{2}\right]$.

$$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right].$$

**19)** חשבו את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\ldots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $x_i=2^{\frac{i}{n}}\ (0\le i\le n)$, וגם:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\quad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

**21)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**22)** נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם $f$ רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם $f$ אינטגרבילית, אז כך גם $f^2$.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם $f$.

**23)** חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\}$

(פונקציית הערך השלם).

**24)** הוכיחו כי אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$,

אז $\alpha f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, וכן $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

רמז: הניחו תחילה כי $\alpha\ge0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

**25)** הוכיחו כי אם $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,

ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

רמז: הוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

**26)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש-$|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: $f$ אינטגרבילית ואינה אפס; חסומה $\frac{1}{f}$]

הוכיחו כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $|g(x)|\geq c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**28)** הניחו כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש-$a<c<b$, והוכיחו כי:

א. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$.

ב. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$.

**29)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכיחו כי גם $\varphi,\psi$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=$?

**30)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו-$B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\ldots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו-$i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\geq\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $P$ כנ"ל $\|P\|<\delta\ \Rightarrow\ s_\varepsilon(P)<\tau$.

**31)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\ldots,c_n\}$ ל-$P$,

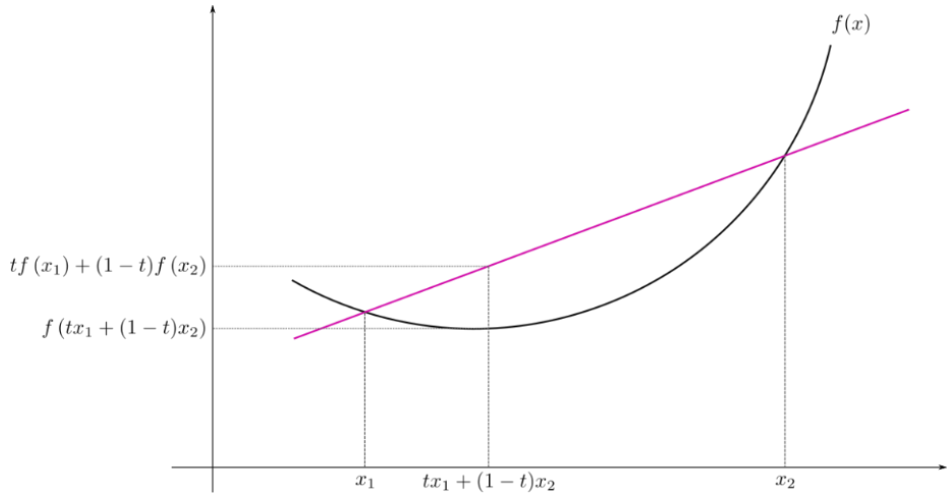
כך ש-$S(f;P,C)=L(f,P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש-$x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי $f$ רציפה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** זכרו כי פונקציה $f$ על קטע $I$ תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(t\cdot a+(1-t)\cdot b\right)\le t\cdot f\left(a\right)+(1-t)\cdot f\left(b\right)$.




א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון $f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_i f\left(a_i\right)$.

[רמז: אינדוקציה על $n$]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $f\left(\int_0^1 g\left(x\right)dx\right)\le\int_0^1 f\left(g\left(x\right)\right)dx$.

**33)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$.

א. הוכיחו כי $f$ אי-זוגית אם ורק אם $F$ זוגית.

ב. הוכיחו כי $f$ זוגית אם ורק אם $F$ אי-זוגית.

**34)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$.

א. הוכיחו כי אם $F$ מחזורית, אז גם $f$ מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה $f$ מחזורית אבל $F$ לא-מחזורית.

**35)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^c f\left(x\right)dx=\int_c^b f\left(x\right)dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**36)** תהי $A$ קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$ : $\boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x)-1}$ .

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב-$A$ .

ב. הוכיחו כי אם $f\in A$ , אז $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ .
(רמז : תחילה הראו ש- $f$ רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות $f$ ב-$A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il