# חדוא 1

# תוכן העניינים

# חדוא 1

## פרק 1 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

### גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

23) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

24) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

35) $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) $\frac{5}{6}$ | 2) $\frac{20}{17}$ | 3) $n-1$ | 4) $4$ | 5) $\frac{1}{6}$ |
| 6) $\frac{3}{2}$ | 7) $\frac{5}{6}$ | 8) $-\frac{3}{2}$ | 9) $1$ | 10) $\ln\frac{a}{b}$ |
| 11) $\frac{1}{2}$ | 12) $\frac{1}{6}$ | 13) $-\frac{1}{2}$ | 14) $2$ | 15) $1$ |
| 16) $1$ | 17) $\frac{a}{b}$ | 18) $\frac{a}{b}$ | 19) $\frac{1}{6}$ | 20) $\frac{1}{2}$ |
| 21) $\frac{1}{2}$ | 22) $\frac{1}{8}$ | 23) $\frac{1}{3}$ | 24) $-\frac{1}{3}$ | 25) $-\frac{1}{2}$ |
| 26) $-\frac{3}{4}$ | 27) $1$ | 28) $1$ | 29) $\frac{2}{3}$ | 30) $\frac{1}{2}$ |
| 31) $\frac{1}{2}$ | 32) $\infty$ | 33) $0$ | 34) $\infty$ | 35) $0$ |

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 6 9) $\frac{5}{2}$

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

### גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

1) $0$

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים :

**1)** $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

**3)** $\lim\limits_{x\to2^+} (2x-4)^{x-2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$

**6)** $\lim\limits_{x\to0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

**7)** $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

**8)** $\lim\limits_{x\to0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

**9)** $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin x)^{\tan x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\tan x}$

**11)** $\lim\limits_{x\to0} (x+1)^{\cot x}$

**12)** $\lim\limits_{x\to0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

**13)** $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

**14)** $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to1^-} [\ln(1-\ln x)]^{x-1}$

## תשובות סופיות

**1)** $e$ **2)** $1$ **3)** $1$ **4)** $1$ **5)** $e^2$

**6)** $1$ **7)** $e^3$ **8)** $e^{1/3}$ **9)** $e^{-1/2}$ **10)** $1$

**11)** $1$ **12)** $e$ **13)** $1$ **14)** $e$ **15)** $0$

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$

# חדוא 1

## פרק 2 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

### תוכן העניינים

# מציאת מספר הפתרונות של משוואה

## שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x-0.25\sin x=7$

**4)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

**5)** נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

**6)** $e^{x-1}=x$

**7)** $\arctan x-x=0$

**8)** $\ln(x+5)-4=x$

**9)** $x^2+x\sin x=1-\cos x$

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת: $f(1)=2,\ f(0)=1,\ f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

**11)** $e^x-5x=0$ **12)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$ **13)** $1+4x^4=8x^3$

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

**14)** $ax^2+bx+c=0$

**15)** $ax^3+bx^2+cx+d=0$

**16)** $x+a\cos(bx)=1$

**17)** $ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$ $(n>4,\ odd)$

**18)** מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר $a$ קבוע ממשי.

**19)** הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר $a$ קבוע ממשי.

**20)** הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

**21)** נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.
א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.
ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.
מה מספר השורשים של הפולינום?

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}>1$ , $\frac{1}{ab}<-1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) אם $a=0$ , למשוואה אין פתרון. אם $a\neq 0$ , למשוואה יש פתרון יחיד.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

# פתרון משוואות פולינומיאליות

## שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

**2)** $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

**3)** $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

פתרו את המשוואות הבאות:

**4)** $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

**5)** $k^3+2k^2-3k+20=0$

**6)** $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

**7)** $k^3-6k^2+12k-8=0$

**8)** $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

**9)** $k^3-k^2+k-1=0$

**10)** $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

**11)** $7x^3-33x^2+21x+61=0$

## תשובות סופיות

1) $x^2+1$

2) $0$

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$.

# שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

**1)** $1+4x^4=8x^3$

**2)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

## תשובות סופיות

**1)** פתרון מדויק $x=-1$.

**2)** פתרונות מקורבים: $x=1.9672,\quad x=0.5576$.

# חדוא 1

## פרק 3 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

### תוכן העניינים

# משפט רול

## שאלות

**1)** בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי $c$ המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

**2)** נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה $c$, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, $x_0,x_1,x_2$, עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים $c$ ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

**4)** תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל $n$ טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

**6)** נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי $f$ פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

**7)** נתונה פונקציה $f$, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי $g$ מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראו כי $g$ גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, $g'$,
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

**8)** הוכיחו:
אם $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

**9)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $2\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

**10)** אם $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\ldots+\dfrac{c_{n-1}}{n}+\dfrac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

**12)** תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל $x$ ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\neq g'(x)f(x)$.
הראו שבין כל שני שורשים של $f$ קיים לפחות שורש אחד של $g$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

ננִיח שלכל $n$ טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.

הוכיחו שקיים $n$ טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

**15)** תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נניח שלכל $n$ טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

חשבו את $f''(1)$.

**16)** נתון כי $f,g$ גזירות לכל $x$ וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.

$A$ קבוע כלשהו.

**17)** נתון כי $f$ גזירה לכל $x$ וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.

תהי $x_0$ נקודה כלשהי.

הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה $x_0$ יש נקודה משותפת אחת ויחידה - $x_0$.

במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצא כולו מעל המשיק או מתחתיו.

**18)** נתון כי $f$ גזירה פעמיים בקטע $(a,b)$, ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.

הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.

תנו דוגמה לפונקציה $f$ המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

**19)** נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.

נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.

**20)** הפונקציות $f$ ו- $g$ רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- $(a,b)$.
ידוע כי $f(a) \ge g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- $(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- $(a,b]$.

## תשובות סופיות

**1)** א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

**2)** לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

**14)** א. 0 ב. שאלת הוכחה.

**15)** 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

**1)** $$\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a} \quad (0<a<b)$$

**2)** $$\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (0<a<b)$$

**3)** $$(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b} \quad (a<b)$$

**4)** $$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b} \quad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$$

**5)** $$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2} \quad (0<a<b)$$

**6)** $$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (0<a<b<1)$$

**7)** $$\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (0<a<b)$$

**8)** $$\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2} \quad (0<a<b<1)$$

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $\quad(0<a<b)$

10) $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $\quad(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $\quad(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $\quad(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $\quad(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $\quad(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$

## שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\quad x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$

2) $(x>0)\quad \frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$

3) $(0<x<1)\quad x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $(x>0)\quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$

5) $(0<x<1)\quad x<\operatorname{arctanh}(x)<\frac{x}{1-x^2}$

6) $(x>0)\quad \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

7) $(x>0)\quad 1+x<e^x<1+xe^x$

8) $(x>0)\quad \sin x\le x$

9) $\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)\quad \tan x<4x$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

## שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{1}{3}<\ln\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}+1<\sqrt{2}<1.5$

3) $\frac{3}{25}+\frac{\pi}{4}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{15}+\frac{\pi}{6}<\arcsin\left(0.6\right)<\frac{1}{8}+\frac{\pi}{6}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט לגראנז' – שאלות כלליות

## שאלות

**1)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$.
הוכיחו כי $f(2)=8$.

**2)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x$, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(4)=18$ , $f(1)=3$.
הוכיחו כי $4\le f(2)\le 10$.

**3)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$, ונניח ש- $f(a)=f(b)=0$,
וכן שקיימת נקודה $c$, כאשר $c\in(a,b)$, כך ש- $f(c)>0$.
הוכיחו שקיימת נקודה $m$ בקטע $(a,b)$, כך ש- $f''(m)<0$.

**4)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, כך ש- $f'$ חסומה בקטע $(a,b)$.
א. הוכיחו שקיים $M>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$ מתקיים:
$|f(y)-f(x)|\le M|y-x|$.
ב. הוכיחו ש- $f$ רציפה במידה שווה ב- $(a,b)$.
כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x$ ו- $y$ ב- $(a,b)$,
המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**5)** נניח כי $f$ רציפה ב- $[0,\infty)$ וגזירה ב- $(0,\infty)$.
כמו כן, $f(0)=0$, ו- $f'$ מונוטונית עולה.
א. הוכיחו כי $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ ב- $(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,\infty)$.

**6)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב- $[a,\infty)$ וגזירות ב- $(a,\infty)$.
נתון כי $f(a)=g(a)$ ו- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x>a$.
הוכיחו כי $f(x)\le g(x)$ לכל $x\ge a$.

**7)** נניח כי $f$ גזירה ב- $(0,\infty)$.
א. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$.
ב. נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

**8)** תהי $f$ פונקציה גזירה לכל $x$.
הוכח:
א. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.
ב. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=L$ אז $L=0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).
ג. ייתכן שהגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ לא קיים.
ד. אם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.
ה. אם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)>0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)<0\right)$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$.
הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

**9)** נניח כי $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.
האם נכון לומר כי מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ ?
הוכיחו או הפריכו.
הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז',
הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

**10)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)|<1$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים לכל היותר $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c$.

**11)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x)<0$ לכל $0\le x\le 1$.
הוכיחו שקיים בדיוק $c$ אחד ב- $[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^2$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $[a,b]$.

הוכיחו שקיימים $c_1,c_2,c_3\in(a,b)$, כך ש- $c_2\neq c_3$ ו- $f'(c_1)=\frac{f'(c_2)+f'(c_3)}{2}$.

**13)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0,f(0))$ ו- $(1,f(1))$,

חותך את הגרף של $f$ בנקודה $(a,f(a))$, כאשר $0<a<1$.

הוכיחו שקיים $x_0\in[0,1]$, כך ש- $f''(x_0)=0$.

**14)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש- $f$ גזירה ב- $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f_+'(a)$ קיים וש- $f_+'(a)=L$.

**15)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0)=0$.

נניח שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\leq|f(x)|$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**16)** נתון כי $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$.

א. ידוע כי $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f$ קבועה ב- $[a,b]$.

ב. ידוע כי $f'(x)=m$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f$ לינארית ב- $[a,b]$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי $f,g$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע $(a,b)$.
ידוע כי $f'(x)=g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)+c$ ב- $[a,b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

**18)** נתון כי $f$ גזירה בקטע $(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

א. הוכח כי $f'$ לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח $f'$ שואפת ל- $\infty$ או $-\infty$?

## תשובות סופיות

**8)** ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

## שאלות

**1)** הוכיחו שלכל $1\le a<b$ מתקיים $n(\ln b-\ln a)<b^n-a^n$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

**2)** הוכיחו כי עבור כל $a,b$ המקיימים $0<a<b<1$,
מתקיים $\frac{b}{1+b^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{\ln b-\ln a}<\frac{a}{1+a^2}$.

**3)** הוכיחו כי עבור כל $a,b$ המקיימים $1<a<b$,
מתקיים $\frac{2\sqrt{a}}{1+a^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}<\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2}$.

**4)** הוכיחו כי $|\tan y-\tan x|\le 8|\sin x-\sin y|$ לכל $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

**5)** הוכיחו כי $\arctan x>\ln(1+x)$ לכל $x\in(0,1)$.

**6)** הוכיחו שלכל $x\ne 0$ מתקיים $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x$.

**7)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$.
הוכיחו שבקטע $(0,1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1)-f(0)=\frac{f'(x)}{2x}$.

**8)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,1]$ וגזירה ב-$(0,1)$, ויהי $n$ מספר טבעי כלשהו.
הוכיחו שקיים $0<c<1$, המקיים $f(1)-f(0)=\frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

**9)** יהיו $a$ ו- $b$ מספרים חיוביים כלשהם.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $\left(a^3-b^3\right)\cos x=3x^2\left(\sin a-\sin b\right)$.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב-$[a,b]$, כאשר $a \ge 0$.

הוכיחו שקיימים $c_1, c_2 \in [a,b]$, כך ש- $\frac{f'(c_2)}{2c_2} = \frac{f'(c_1)}{a+b}$.

**11)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכיחו שלמשוואה $f'(x)\cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$

קיים פתרון בקטע $[a,b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפט דרבו

## שאלות

**1)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x<1\\ x-1 & x\ge 1\end{cases}$ ?

**2)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4x & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ ?

**3)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$ ?

**4)** האם קיימת פונקציה גזירה $f$ , שמקיימת $f'(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\ne 0\end{cases}$ ?

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.
הוכיחו:
אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$ , אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות סליקה.

ב. האם קיימת פונקציה $f$ , גזירה ב- $\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}4 & x=0\\ x^2 & x\ne 0\end{cases}$ ?

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.
הוכיחו:
אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$ , אז $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I.

ב. האם קיימת פונקציה $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$,
שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 4x & x<1\end{cases}$ ?

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$.

הוכיחו:

אם $f'$ לא רציפה ב- $x_0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\neq\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\neq\pm\infty$.

כלומר, $x_0$ היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $\mathbb{R}$,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$ ?

**8)** האם קיימת פונקציה $f$, גזירה ב- $[0,1]$,

שהנגזרת שלה ב- $[0,1]$ נתונה על ידי $f'(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ?

**9)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$, ונניח כי $f(0)=0,\ f(1)=f(2)=1$.

הוכיחו שקיים $x\in(0,2)$, שעבורו $f'(x)=\frac{1}{4}$.

**10)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $(a,b)$, ומקיימת $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו כי $f$ מונוטונית בקטע $(a,b)$.

**11)** ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי ויירשטראס?

הוכיחו או הפריכו זאת.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 2$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=x^2+x$.

**13)** תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 1$, לכל $x$ בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ ב- $[0,1]$, כך ש- $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$.

14) תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, המקיימת $0\le f'(x)\le 1$, לכל $x$ בקטע.
הוכיחו כי קיימת נקודה $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כך ש- $f'(x)=\sin x$ .

15) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $f(0)=f(1)=0$ .
הוכיחו שקיים $x$ ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רציונלי השונה מ-0.

## תשובות סופיות

1) לא.
2) לא.
3) לא.
4) לא.
5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
8) לא.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.

# חדוא 1

## פרק 4 - טורי טיילור - מקלורן

### תוכן העניינים

# טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

**1)** $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

**4)** $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

**7)** $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

**10)** $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

**13)** $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

**16)** $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

**19)** $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

**22)** $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

**25)** $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

## תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(-1<x<1\right)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $\left(|x|<1\right)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $\left(|x|<1\right)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $\left(|x|<5\right)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $\left(|x|<3\right)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $\left(|x|<1\right)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $\left(|x|<1\right)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1<x\le 1\right)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(|x|<1\right)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $\left(-5\le x<5\right)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $\left(|x|\le 3\right)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

# טור טיילור סביב $x = x_0$

## שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות :

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$

## תשובות סופיות

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$

# חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

1) $e$ 2) $e^{-2}$ 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

# חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

**3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

**4)** נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר $k$ קבוע שונה מאפס.
מצאו את $n$ ואת $k$.

**5)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

**6)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

**7)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\dfrac{1}{120}$

**2)** $\dfrac{1}{3}$

**3)** $\dfrac{1}{3}$

**4)** $k=1, n=3$

**5)** 1

**6)** 216

**7)** $-\dfrac{1}{2}$

# חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

## שאלות

בשאלות **1-3** חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

**1)** $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשב בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב :

**4)** $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

**7)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

**8)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x|< 0.01$?

**9)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

**10)** עבור אילו ערכי $x$, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

**11)** עבור אילו ערכי $x$, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

## תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

11) $|x| < \sqrt[9]{9/100}$

# חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

## שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$ $(\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ $(\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ $(\varepsilon = 0.0001)$

## תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

# חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

**1)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

**2)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

**3)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

**4)** רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

**5)** חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של $10^{-3}$.

**6)** חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^{\circ}$ ? נמקו.

**7)** נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$ .

**8)** נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$ , והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$ , עבור $0.1\le x\le 0.9$ .

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$ .

**9)** נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ , עבור $|x|\le 0.5$ .

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ , עבור $-1<x$ .

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:
$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ , עבור $0\le x\le 1$ .

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$ , שעבורו $|e^x-p(x)|<10^{-5}$ .

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:
$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

**13)** תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים $M$, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

**15)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

**16)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

**17)** נניח ש- $f$ גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- $f''$ חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**18)** הוכיחו כי $e$ הוא מספר אי-רציונלי.

## תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{(\frac{\pi}{5})^3}{3!}+\frac{(\frac{\pi}{5})^5}{5!}-\frac{(\frac{\pi}{5})^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

**11)** א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**<u>הערה לגבי קירובים</u>**

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** $n$ **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-n}$.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

# נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן | תחום התכנסות |
|---|---|
| $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ | $-1<x\le 1$ |
| $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ | $-1\le x\le 1$ |
| $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$ | $-1<x<1$ |
| $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$<br>$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$ | $-1\le x\le 1\ (m>0)$<br>$-1<x\le 1\ (-1<m<0)$<br>$-1<x<1\ (m\le -1)$<br>$m\ne 0,1,2,3,\ldots$ |

# חדוא 1

## פרק 5 - אינטגרלים מיידיים

### תוכן העניינים

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבון את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$
2) $\int x^4 dx$
3) $\int \frac{1}{x^2} dx$
4) $\int \sqrt{x} dx$
5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$
6) $\int 4x^{10} dx$
7) $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$
8) $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$
9) $\int \left(x^2+1\right)^2 dx$
10) $\int \left(x^2+1\right)\left(x+2\right) dx$
11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$
12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$
14) $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)^{10} dx$
15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$
16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$
17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$
18) $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$
19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$
20) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$
22) $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$
23) $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$
24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$
25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$
26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **29-27**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

**28)** $\int\left(e^{x+1}\right)^2 dx$

**29)** $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבון את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבון את האינטגרלים בשאלות **33-31**:

**31)** $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

**32)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**33)** $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

## תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

**8)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$ ,

ונתון בנוסף כי לכל $x_0$ ממשי: $|x_0|=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $(G(x)-f(x))'$ .

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$ . ב. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$ .

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$ . ה. $0$

# חדוא 1

## פרק 6 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### תוכן העניינים

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2xdx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}xdx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$

11) $\int \cos(\sin x)\cdot \cos xdx$

12) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$
2) $\ln\left|\sin x\right|+c$
3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$
4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$
5) $\ln\left|\ln|x|\right|+c$
6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$
7) $e^{x^2}+c$
8) $e^{\tan x}+c$
9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$
10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$
11) $\sin\left(\sin x\right)+c$
12) $\sin\left(\ln x\right)+c$
13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$
14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$
15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$
16) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$
17) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$
18) $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$
19) $2\sqrt{x^2+1}+c$
20) $\sqrt{2\sin x}+c$
21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$
22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$
23) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$
24) $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$

# חדוא 1

## פרק 7 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### תוכן העניינים

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23:

1) $\int xe^x dx$

2) $\int x^4 \ln x dx$

3) $\int x \sin x dx$

4) $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$

5) $\int x^2 \sin 4x dx$

6) $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$

8) $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

9) $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$

11) $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

12) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

14) $\int x \arctan x dx$

15) $\int x^2 \ln(x^2+1) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$

17) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

18) $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$

20) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

21) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

22) $\int x \tan^2 x dx$

23) $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx, \quad \int e^{ax} \cos bx dx$.

## תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}(x\ln x - x) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln|x-2|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln|\cos x| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

21) $\dfrac{e^x}{x+1}+c$

22) $x(\tan x - x)+\ln|\cos x|+\dfrac{x^2}{2}+c$

23) $\dfrac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\dfrac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c$

24) $x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

25) $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

26) $\dfrac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\}$

27) $\dfrac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5(\cos x\sin x+x)\right)+c$

28) $\dfrac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right)$

29) $\dfrac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5(x-\sin x\cos x)\right)+c$

30) $\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{x}{(1+x^2)^n}+\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^n}(2n-1)\right)$

31) $\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{x}{(1+x^2)^3}+\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{x}{(1+x^2)^2}+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

32) $\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad \int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$

# חדוא 1

## פרק 8 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos(x^2+1)dx$

11) $\int x^3(3x^2-1)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin(\ln x)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3x-3\ln^2x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$

18) $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+c$

19) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22) $\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+c$

23) $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

# חדוא 1

## פרק 9 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### תוכן העניינים

# אינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{\left(x^2-2x+1\right)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-4x+4\right)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{\left(x^2+1\right)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx$

18) $\int \frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)\left(x^2+4\right)^2}dx$

## תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

# חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

## תשובות סופיות

1) $x^3-x^2+2x+c$

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) $x^3-x^2+x+c$

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

# אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

## תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

## נוסחאות

$$\left(a-b\right)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$

# חדוא 1

## פרק 10 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos xdx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin xdx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan xdx = -\ln\|\cos x\|+c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\|+c$ |
| $\int \cot xdx = \ln\|\sin x\|+c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\|+c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2xdx$

8) $\int \tan^2 xdx$

9) $\int \frac{dx}{(\sin x\cos x)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5xdx$

11) $\int (\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x)dx$

12) $\int \left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 xdx$

14) $\int \sin^2 4xdx$

15) $\int \cos^3 xdx$

16) $\int \sin^3 4xdx$

17) $\int \cos^4 xdx$

18) $\int \sin^4 4xdx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי :

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx=\left|\begin{array}{c}\sin x=t\\(x=\arcsin t)\end{array}\right|=\int f(t)dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx=\left|\begin{array}{c}\cos x=t\\(x=\arccos t)\end{array}\right|=\int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\dfrac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\dfrac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\dfrac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{array}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{array}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c}x=\dfrac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{array}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

## תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

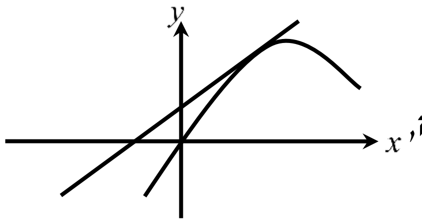
10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

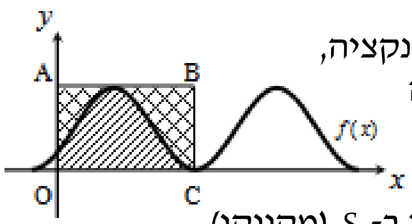
# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

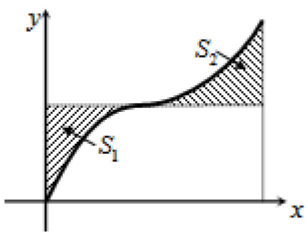
**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$ .
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.
א. מצאו את משוואת המשיק.
ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

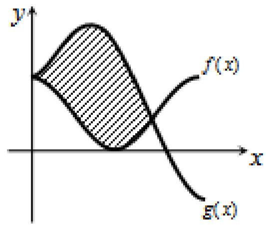



**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$ ,
בתחום $-0.25\pi\le x\le 1.75\pi$ .
נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$ (מקווקו).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ יסומן ב- $S_2$ .
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ .




**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$ , בתחום $0\le x\le 2\pi$ .
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.
ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2\pi$ ,
ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו- $S_2$ , שווים.

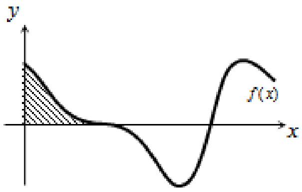





4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le\pi$ .

א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ .

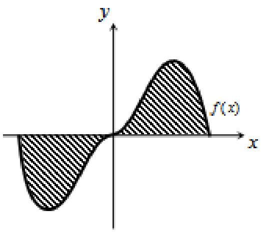



5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$ .

א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$ .
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- $x$ .

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.




6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$ .

א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$ .
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ ,
בתחום $-\pi\le x\le\pi$ .

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ ,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ .
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ .

## תשובות סופיות

1) א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

1) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.
ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

4) א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

6) $b=-2$ , $a=2$

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\[2mm]\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\[2mm]1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\[2mm]\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\[2mm]\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\[2mm]\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\end{cases}$$

# חדוא 1

## פרק 11 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

### תוכן העניינים

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_{1}^{4}\left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_{1}^{2}\frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$

**4)** $\int_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_{0}^{\pi}\cos^2 10x dx$

**7)** $\int_{0}^{4}f(x)dx$, כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^{4}\sqrt{4+|x-1|}dx$

**9)** $\int_{0}^{2}\max\left\{x,x^2\right\}dx$

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$ :

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$ .

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$ .

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ .

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$ .

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ .

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$ . הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^{a} f(x)dx$ .

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ .

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx \quad \left(n\in\mathbb{N}\right)$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x} dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.
חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$.

**26)** הוכיחו:
אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$
אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב- $[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,
אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

**1)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

**2)** $$\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$$

**3)** $$6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$$

**4)** $$2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$$

**5)** $$\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$$

**6)** $$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$$

**7)** $$\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$$

**8)** $$\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$$

**9)** $$-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$$

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \ge \int_1^n f(x)dx \ge f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$
וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.
נניח כי $f$ עולה ו- $g$ אי-שלילית.
הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$$

**2)** $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$$

**3)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$$

**4)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$$

**5)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$$

**6)** $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$$

**7)** $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$$

**8)** חשבו: $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n\left(n+1\right)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 xdx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin xdx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},\ldots,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ :

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$ .

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$ , בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$ , החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$ .

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# אינטגרביליות לפי דארבו

## שאלות

**1)** נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי $f(x)=x$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע
ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$ .

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f$ , כך ש- $|f|$ ו- $f^2$ אינטגרביליות,
אך $f$ לא אינטגרבילית.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$ .
הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**6)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.
נניח שקיימת חלוקה $P_n$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}L(P_n,f)=\lim\limits_{n\to\infty}U(P_n,f)$ .

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

**א.** $f(x)=x$ , בקטע $[0,1]$.

**ב.** $f(x)=x^2$ , בקטע $[0,2]$.

**8)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

**תשובות סופיות**

**1)** א. $\overline{\int_0^1} f=\underline{\int_0^1} f=\frac{1}{2}$ ב. $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$

**2)** א. $\overline{\int_0^2} f=\underline{\int_0^2} f=\frac{8}{3}$ ב. $\int_0^2 f\,dx=\frac{8}{3}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

# אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

## שאלות

**1)** תהי $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- $n$ תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n=6,8,10,20$.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהיו $P$ ו- $Q$ שתי חלוקות של הקטע, כך ש- $Q$ עידון של $P$, אז $L(Q,f)\ge L(Q,P), U(Q,f)\le U(Q,P)$.

ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אז $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:
פונקציה חסומה $f$ היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:
תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $(P_n)$ היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\underset{n\to\infty}{\to}0$.
הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית.

ג. נתון $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases} x & x=1/n \\ 0 & x\ne 1/n \end{cases}$.
הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

**4)** הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

**5)** סדרת פונקציות $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{1+x} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$.

הוכיחו כי $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\frac{1}{2}$.

**6)** תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל $x$ רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל $x$ אי-רציונלי.
העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של $f$, והראו כי $f$ אינה אינטגרבילית.

**7)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{אם } x=\dfrac{p}{q}\neq 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול- } p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$$

א. תהי $A_N$ מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\,|\,x=\dfrac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול- $p,q$ אין גורמים משותפים.
הראו שהקבוצה $A_N$ סופית.

ב. ל- $N\in\mathbb{N}$ ו- $\varepsilon>0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],\ldots,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<\ldots<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup\ldots\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+\ldots+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראו ש- $f$ אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, $g$ ו- $h$ ב- $[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

**8)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראו ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ חסומה ב-$[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\;\; M'=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$

$$m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[c,d]\},\;\; m'=\inf\{|f(x)|\,|\,x\in[c,d]\}$$

הוכיחו כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו-$f^2$ אינטגרביליות.

**10)** תהיינה $f$ ו-$g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-$\frac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ (כלומר, $f(x)\ge 0$).

א. הוכיחו כי אם $f$ רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: $f$ לא תהיה רציפה.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[c,1]$.

א. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$

אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

**13)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה $fg$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי $g$, מתקיים $\int_a^b (fg)(x)\,dx=0$.

הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x,y\ge 0$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{x,y\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b \left(f(x)\right)^n dx\right)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

**15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots y_n\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n (tx_i+y_i)^2\ge 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\le\left(\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b \left[tf(x)+g(x)\right]^2 dx\ge 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

**16)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של $f$ במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

**17) סעיף א'**

1. הוכיחו כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+\ldots++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$,
כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי $(k+1)^n<\dfrac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<k^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

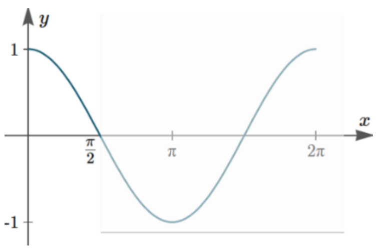
3. הוכיחו כי $\sum\limits_{k=1}^{m}k^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<\sum\limits_{k=1}^{m-1}k^n$.
כלומר, $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n<\dfrac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n$.

**סעיף ב'**

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0,1]$ ל- $m$ קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.




**18)** תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית ב-$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, וחשבו את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלקו את $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ל- $n$ קטעים שווים, והניחו כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו- $\theta\in\mathbb{R}$,

$\sin\dfrac{\theta}{2}\cos k\theta=\dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\dfrac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:

$$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right].$$

**19)** חשבו את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\ldots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $x_i=2^{\frac{i}{n}}\ (0\le i\le n)$, וגם:

א. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

ב. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad P_4=\left\{1,2^{\frac14},2^{\frac24},2^{\frac34},2\right\}$

**20)** תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

**21)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**22)** נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם $f$ רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם $f$ אינטגרבילית, אז כך גם $f^2$.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם $f$.

**23)** חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le x\}$ (פונקציית הערך השלם).

**24)** הוכיחו כי אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$,
אז $\alpha f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, וכן $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.
רמז: הניחו תחילה כי $\alpha\ge0$, והיעזרו בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

**25)** הוכיחו כי אם $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,
ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
רמז: הוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

**26)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש-$|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: $f$ אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה]

הוכיחו כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

**27)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $|g(x)|\geq c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**28)** הניחו כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש-$a<c<b$, והוכיחו כי:

א. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$.

ב. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

**29)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכיחו כי גם $\varphi,\psi$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=?$

**30)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,...,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו-$B_\varepsilon(P)$ של $\{1,...,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו-$i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\geq\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $P$ כנ"ל $\|P\|<\delta\ \Rightarrow\ s_\varepsilon(P)<\tau$.

**31)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

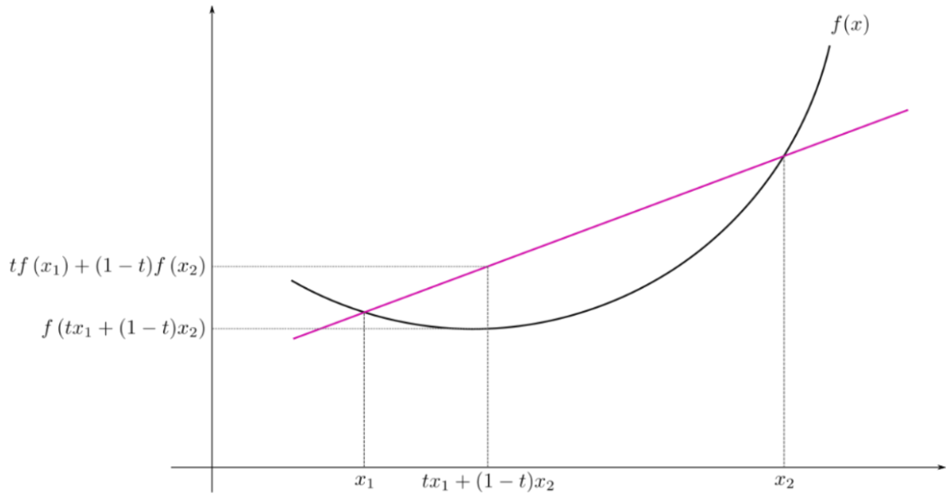
א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\dots,c_n\}$ ל-$P$,

כך ש-$S(f;P,C)=L(f,P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש-$x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי $f$ רציפה?

**32)** זכרו כי פונקציה $f$ על קטע $I$ תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(t\cdot a+(1-t)\cdot b\right)\le t\cdot f(a)+(1-t)\cdot f(b)$.




א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1,\dots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון

$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ia_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(a_i)$. 	[רמז: אינדוקציה על $n$]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\le\int_0^1 f\left(g(x)\right)dx$.

**33)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי $f$ אי-זוגית אם ורק אם $F$ זוגית.

ב. הוכיחו כי $f$ זוגית אם ורק אם $F$ אי-זוגית.

**34)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

א. הוכיחו כי אם $F$ מחזורית, אז גם $f$ מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה $f$ מחזורית אבל $F$ לא-מחזורית.

**35)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^c f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx$.

**36)** תהי $A$ קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,
ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$ : $\boxed{\int_0^x f(t)\,dt = f(x)-1}$.

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- $A$.

ב. הוכיחו כי אם $f\in A$ , אז $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.

(רמז: תחילה הראו ש- $f$ רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות $f$ ב- $A$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# חדוא 1

## פרק 12 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

### תוכן העניינים

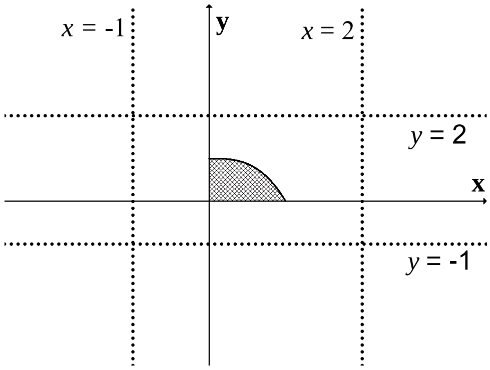
# חישוב נפח גוף-סיבוב

## שאלות

**1)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

**2)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $y$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=1-x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות **3-8**:




**3)** ציר ה- $x$.

**4)** הישר $y=-1$.

**5)** הישר $y=2$.

**6)** ציר ה- $y$.

**7)** הישר $x=-1$.

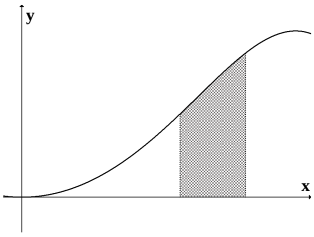
**8)** הישר $x=2$.

**9)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

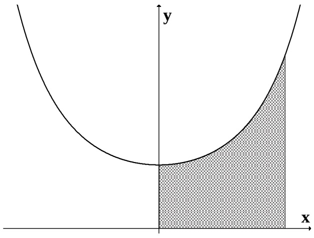
**10)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

**11)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.

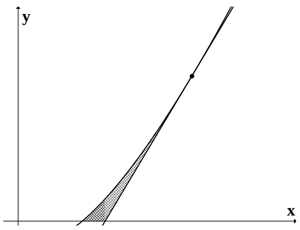
**12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$
והישרים $y=0$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$
והישרים $x=1$, $x=0$, $y=0$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\ln x$,
המשיק לגרף בנקודה $\left(e,e\right)$ וציר ה- $x$,
מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**15)** השטח הכלוא בין הגרפים של $x=0$, $f(x)=2x+8$, $f(x)=x^2$
מסתובב סביב הישר $x=4$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{64}{15}\pi$ ב. $\frac{64}{15}\pi$

2) א. $\frac{8}{3}\pi$ ב. $\frac{8}{3}\pi$

3) $\frac{9\pi}{14}$

4) $\frac{15\pi}{7}$

5) $\frac{33\pi}{14}$

6) $\frac{3\pi}{5}$

7) $2.1\pi$

8) $\frac{12\pi}{5}$

9) $V=\pi R^2\cdot H$

10) $V=\frac{\pi R^2\cdot H}{3}$

11) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

12) $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

13) $\pi\left(e-1\right)$

14) $\frac{e^3-4}{54}\pi$

15) $128\pi$

# חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

## שאלות

1) הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$ , עבור $-1\le x\le 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x=\sqrt{9-y^2}$ , עבור $-2\le y\le 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

## תשובות סופיות

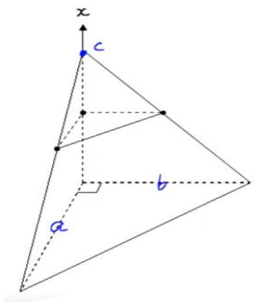
1) $8\pi$
2) $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$
3) $S=4\pi R^2$
4) $24\pi$

# חישוב נפח גוף כללי

## שאלות

**1)** מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה $h$ ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו $a$.

**2)** חשבו את נפחה של פירמידה, שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).




## תשובות סופיות

**1)** $V=\frac{a^2h}{3}$

**2)** $\frac{abc}{6}$

# חדוא 1

## פרק 13 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

### תוכן העניינים

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

## שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו"א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

**1)** $$I(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt \quad\Rightarrow\quad I'(x)=f(b(x))b'(x)$$

**2)** $$I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad\Rightarrow\quad I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

**3)** $I(x)=\int_2^x e^{-t^2}dt$

**4)** $I(x)=\int_1^{x^3}\frac{\ln t}{t^2}dt$

**5)** $I(x)=\int_2^{x^3+x} t\ln t dt$

**6)** $I(x)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

**7)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

**8)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$

**9)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_4^x e^{t^2}dt$

**10)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

**11)** חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$ , כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$ .

חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי $f$ רציפה).

**13)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

**14)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$ .

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

**15)** תהי $f$ פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$ .

**16)** מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$ , אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$ .

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$ , בנקודה $x_0=2\pi$ .

## תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) $I'(x)=e^{-x^2}$

4) $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{\left(x^3\right)^2}\cdot 3x^2$

5) $I'(x)=\left(x^3+x\right)\left(3x^2+1\right)\ln\left(x^3+x\right)$

6) $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{3}$

9) $4e^{16}$

10) $0$

11) תחום הגדרה: כל $x$.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל $x$.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$ , $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$ , $x<-1$.

12) $40$

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

17) $y=x-2\pi$

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$ ?

**2)** נתונה הפונקציה $f$ המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_{-1}^x f(t)dt$ לכל $x$ בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$ ?

**3)** נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

הוכיחו כי $F'=f$ ב- $[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

**4)** נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.

5) תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(t)\,dt > 1$.

הוכיחו שקיים $x_1$, בקטע $(a,b)$, עבורו $\int_a^{x_1} f(t)\,dt = 1$.

6) תהי $f$ פונקציה רציפה ומחזורית לכל $x$, עם מחזור $p$.

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי $C$ עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

8) תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,1)$, כך ש- $f(c) = 3c^2$.

9) תהי $f$ פונקציה רציפה ב-$[0,\pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt = 0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,\pi/2)$, כך ש- $f(c) = 2\cos 2c$.

10) תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0,\pi/4]$, כך ש-$f(c) = 2\cos 2c \int_0^{\pi/4} f(t)dt$.

11) תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0,1)$, כך ש-$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$.

12) תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\forall x \in [a,b]$ $\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt$.

הוכיחו כי $\forall x \in [a,b]$ $f(x) = 0$.

**13)** תהי $f$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,
בקטע $(a,b)$, שעבורן מתקיים $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים $c$, בקטע $(a,b)$, כך ש- $f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- $f$ רציפה ב- $[a,b]$, ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$? נמקו.

**14)** מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,
ונניח שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.
הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

## תשובות סופיות

**1)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל $x$ בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

**7)** א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

**14)** $F(x)=\begin{cases} -e^{-x}+D+2 & x \ge 0 \\ e^{x}+D & x < 0 \end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

## שאלות

**1)** בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

**2)** תהי $f$ רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

**3)** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_2} f(t)dt=\int_a^{x_1} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים $x$, בקטע $(a,b)$, שעבורו $f(x)=0$.

**4)** הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**5)** תהי $f$ פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

**6)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=g(c)$.

**7)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.

**8)** תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

**9)** חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

**10)** ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

**11)** הוכח כי $\frac{3}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{6}{\ln 2}$.

**12)** הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{2\pi^2}{9}$.

**13)** הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int\limits_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x\,dx\le\frac{1}{2}\ln 2$.

**14)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

**15)** נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

GOOL
בשביל התירגול

# חדוא 1

## פרק 14 - אינטגרלים לא אמיתיים

### תוכן העניינים

# אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

**1)** $\int_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

**2)** $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

**3)** $\int_{1}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

**4)** $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2+5}dx$

**5)** $\int_{1}^{\infty} x^2e^{-2x}dx$

**6)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

**7)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\alpha-\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2e}$

4) מתבדר: $\infty$.

5) $\frac{5}{4e^2}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

**2)** $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

## תשובות סופיות

**1)** מתבדר: $\infty$.

**2)** מתבדר: $\infty$.

# אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

## שאלה

**1)** חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

## תשובה

**1)** מתבדר: $\infty$.

# שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

## שאלות

**(1** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$ , הישר $x=1$ וציר ה- $x$ ,
עבור $x\le 1$ .

**(2** חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$
והישר $x=5$ .

**(3** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$ .
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $0\le x\le k$ ,
שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום $x\ge k$ .
מצאו את הקבוע $k$ .

## תשובות סופיות

**(1** $\frac{1}{2}e^2$

**(2** $2\sqrt{5}$

**(3** $k=\sqrt[3]{\ln 2}$

# מבחני השוואה

## שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$

## תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

# התכנסות בהחלט

## שאלות

בשאלות **3-1** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

**1)** $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

**2)** $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

**3)** $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

**4)** הוכיחו: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס.

**2)** מתכנס.

**3)** מתכנס.

**4)** שאלת הוכחה.

# מבחן דיריכלה

## שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

**1)** $\int_{1}^{\infty} \frac{(\ln x)^{p} \cos x}{x} dx$

**2)** א. $(p>0)$ $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{p}} dx$

ב. $\int_{1}^{\infty} \sin\left(x^{2}\right) dx$

**3)** $(p>0)$ $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^{p}} dx$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# התכנסות בתנאי

## שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

**1)** א. $(p>1)$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $(p>1)$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ג. $(p>1)$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

**2)** א. $(0<p\le 1)$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $(0<p\le 1)$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ג. $(0<p\le 1)$ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

**3)** א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

**4)** $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

**5)** $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin(\tan x)}{\cos x}dx$

## תשובות סופיות

**1)** א. מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$ ומתבדר עבור $p\ge 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$ ומתבדר עבור $p\ge 2$.

**2)** א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

**3)** א. מתכנס בתנאי עבור $0<p\le 1$, מתכנס בהחלט עבור $1<p<2$,

מתבדר עבור $p\ge 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3<p\le 1$, מתכנס בהחלט עבור $1<p<5$,

מתבדר עבור $p\ge 5$.

**4)** מתכנס בתנאי.

**5)** מתכנס בתנאי.

# חדוא 1

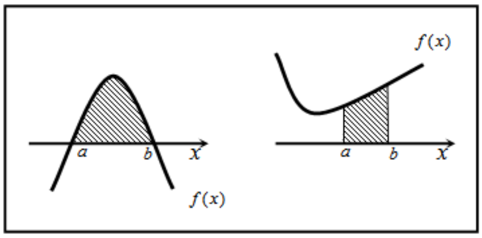
## פרק 15 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

### תוכן העניינים

# חישוב שטחים

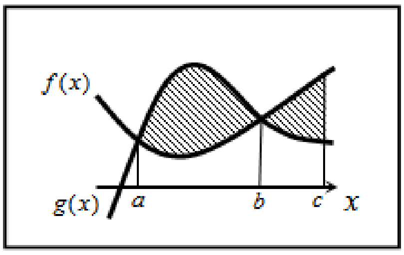
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :




$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני:

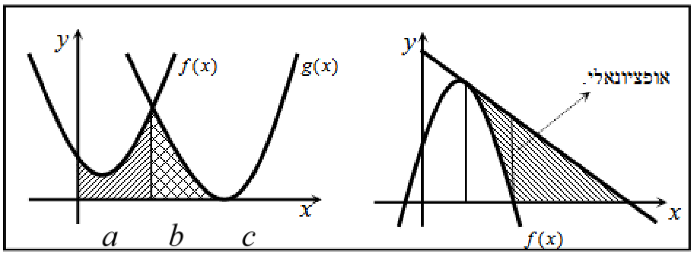



$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

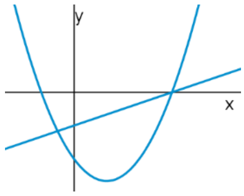
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

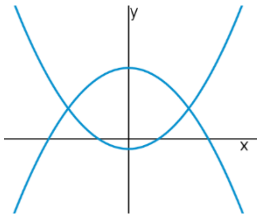



$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

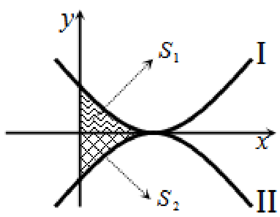
## שאלות



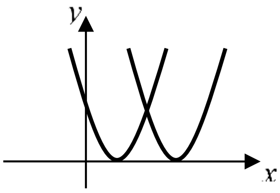

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



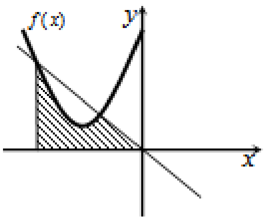

**2)** נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$ , $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



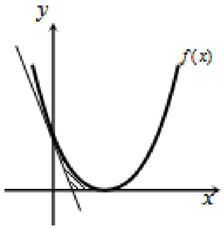

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.
א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.



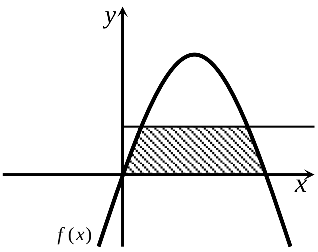

**4)** נתונות הפונקציות $g(x)=x^2-6x+9$ , $f(x)=x^2-2x+1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.



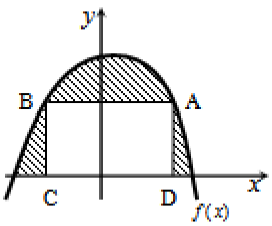

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.
א. מצאו את משוואת הישר.
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.



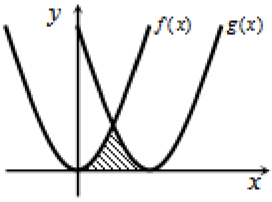

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.
א. מצאו את משוואת המשיק.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



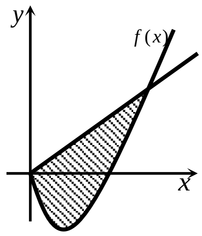

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$.
א. מצאו את ערך הפרמטר $k$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



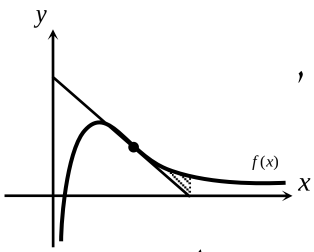

**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$. ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$.
א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



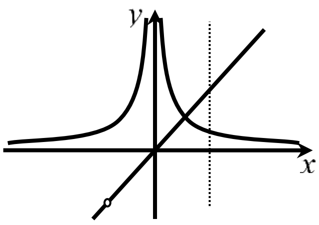

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).



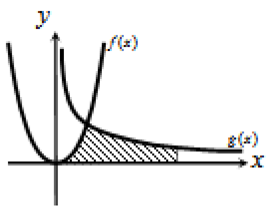

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.
א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



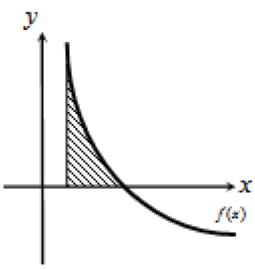

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.



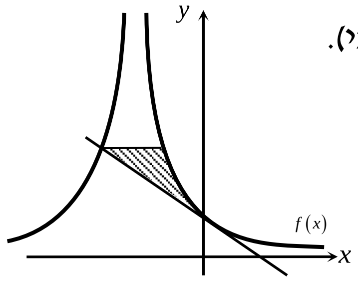

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.




**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.




**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)
חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.




**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$, הוא $-\frac{1}{9}$.

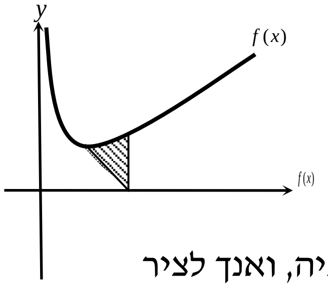
א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

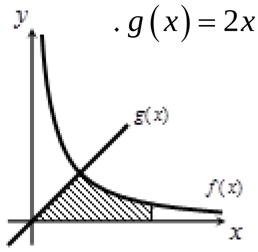



**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- $x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



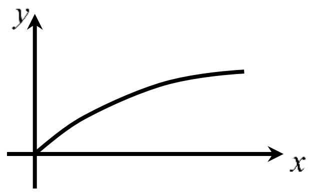

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$.

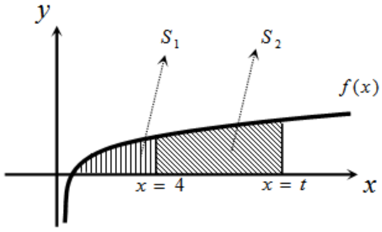



**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).
נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ ב- $S_1$,
ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנכים ב- $S_2$.
ידוע כי $8S_1=S_2$.
מצאו את $t$.



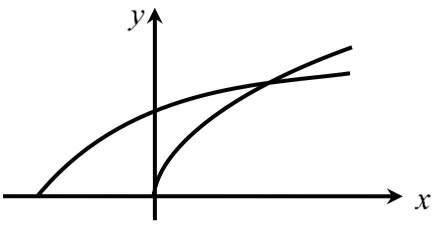

**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:
1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

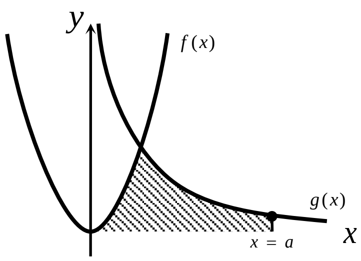
ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.
מצאו את נקודת ההשקה.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ ואנך לציר ה- $x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
וציר ה- $x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,
ברביע הראשון.
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$
ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,
ציר ה- $x$ והישר (השטח המסומן).
ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.
מצאו את $a$.



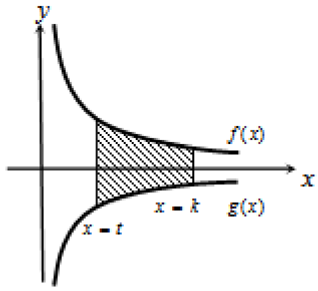
**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

א. הראו כי $k=4t$.

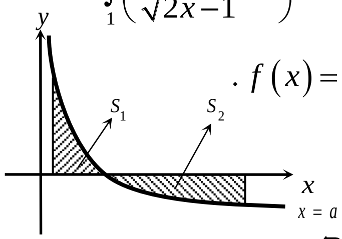
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את $t$.




**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
נעביר שני אנכים לציר ה- $x$, $x=1$ ו- $x=13$,
כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.



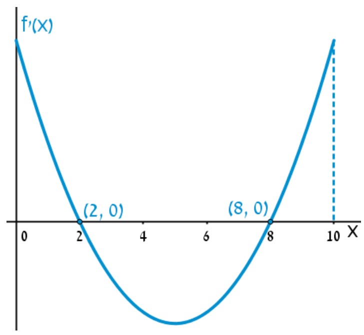

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$.
נמקו.

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

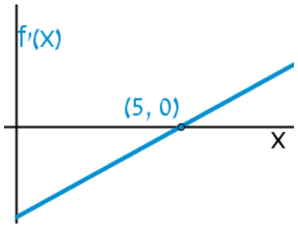
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.




א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$,
וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$ , אשר חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

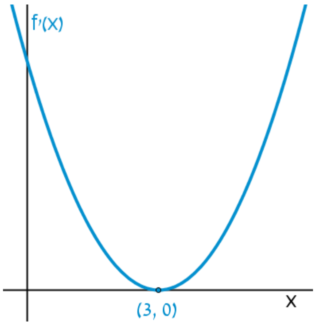
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$ שלה הוא $y=-2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$ כאשר $y=8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$ .

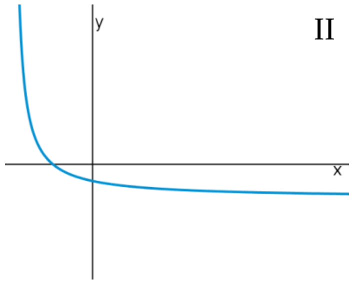


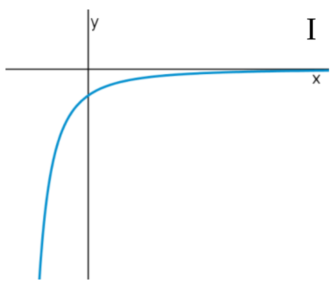

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ , אם ידוע כי $f(3)=4$ , וכי היא חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ :



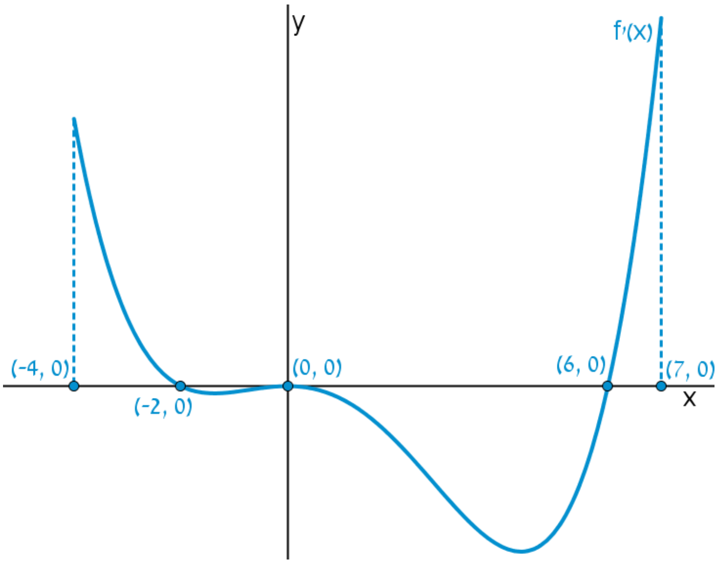




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$ , וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-2$ .

מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ , הצירים והישר $x=10$ ?

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,
לפי הנתונים $f(0)=-2$ , $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע השלישי.

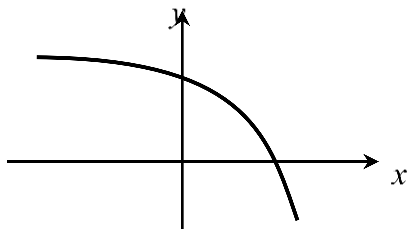
ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ ברביע הרביעי.

# פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^x dx=e^x+c$ |

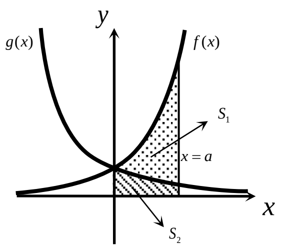
**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=5-e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.



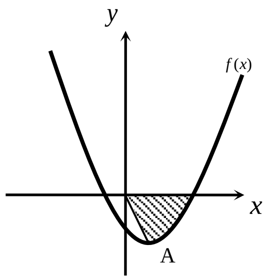

**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{bx}$, כאשר $b>0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x)=e^{-x}$ ו-$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה-$x$, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

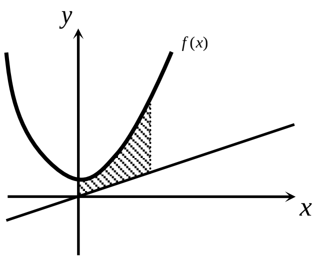
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$,
כאשר $a>0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצאו את $a$.



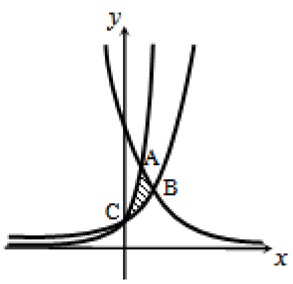
**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$.



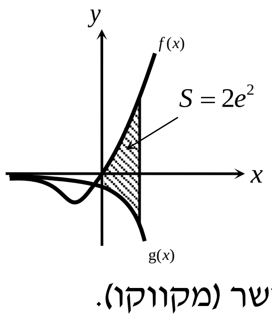

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.
ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$.




**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:
1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$
א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.
ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
ג. חשבו את השטח המסומן באיור.




**38)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.
ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$.
נעביר ישר $x=a$, כאשר $a>0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
מצאו את $a$.

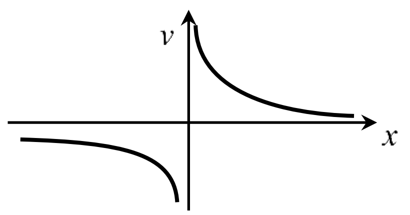


# פונקציות לוגריתמיות

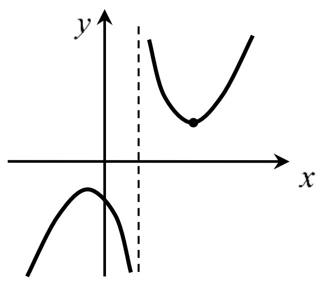
## אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$ | $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו- $x=-4$ וציר ה- $x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

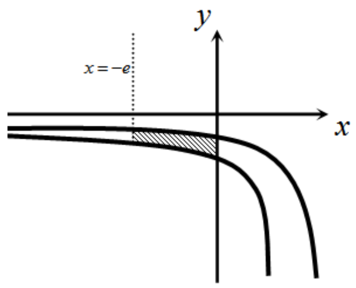


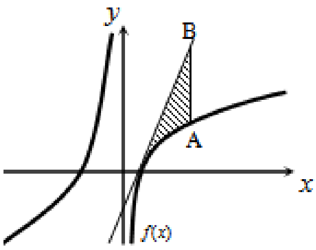

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה- $x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.




**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו- $g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$ והישר $x=-e$.

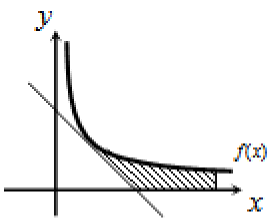




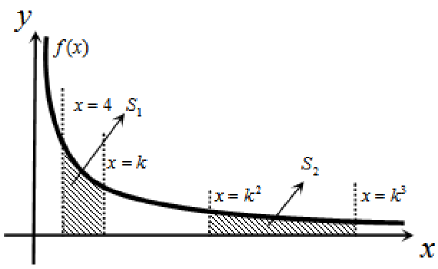

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ היא $y=18x-9$.
א. מצאו את $a$ ו- $b$ וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

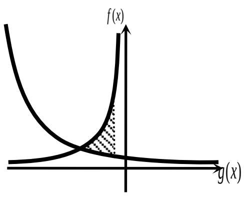
ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



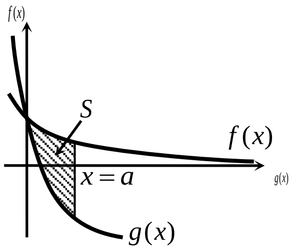

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.
א. מצאו את $f(x)$.
ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$ והישר $x=e^2$.




**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.
נעביר את הישרים $x=k^3$, $x=k^2$, $x=k$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.
א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב- $k$, וחשבו את ערכו.
ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.




**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.
גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.



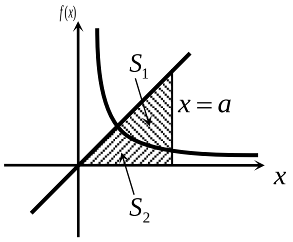

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור). מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם. האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\ln 7$.

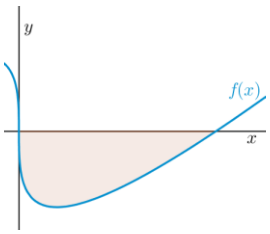
ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.

## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

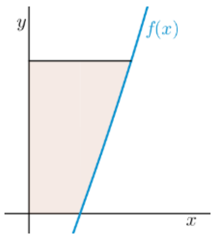
### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \dfrac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

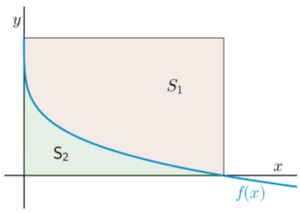
תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.




**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.
א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

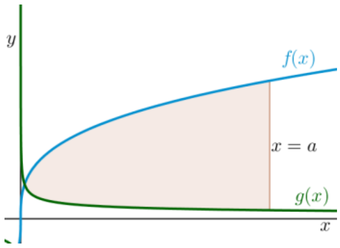



**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$.
ג. נעביר אנך לציר ה- $y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.




**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.
נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$.
מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

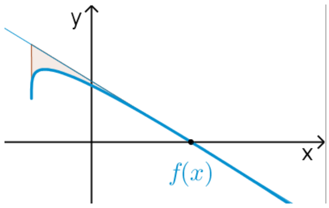
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$ ($a$ פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש. מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר. ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.




א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

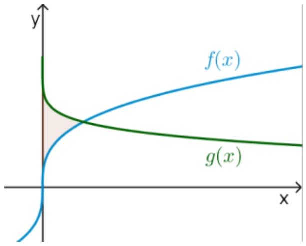
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

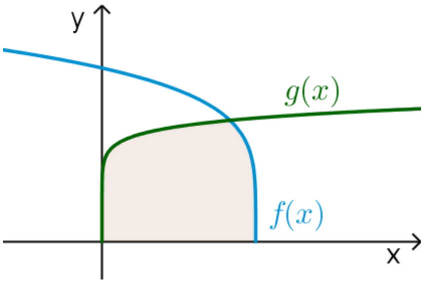
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות
$g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$.

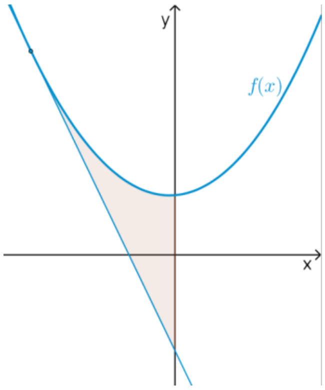
**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.2$.




א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$.

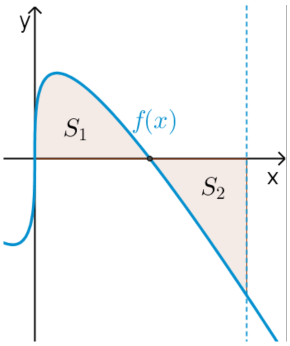
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
נעביר ישר $x=k$ , אשר יוצר את השטח $S_2$ , כמתואר באיור.
מצאו את $k$ , אם ידוע כי $S_1=S_2$ .

## תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$   ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$   ב. $(-3,3)$   ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$   ב. $(1,0)$   ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$   ב. $(1,9)$   ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$   ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$   ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$   ב. $(0,0)$   ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$   ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$ , $(2,8)$   ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$   ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$   ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$   ג. הוכחה.   ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$   ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$   ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$   ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$   ii. $(4,0)$   iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$   ב. $(16,14)$   ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

**43)** א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq-1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$ .

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$ .

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון :

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)

# חדוא 1

## פרק 16 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

### תוכן העניינים

# הצגה פרמטרית של עקום

## שאלות

**1)** עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \ge 0,\ \ x = t^2 + 1,\ \ y = t^2$

ב. $0 \le t \le \pi,\ \ x = \sin t,\ \ y = \cos^2 t$

ג. $\pi \le t \le 2\pi,\ \ x = \cos t,\ \ y = 4\sin t$

**2)** עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \le x \le 4,\ \ y = x^4 + 1$

ב. $-2 \le x \le 2,\ \ y = -\sqrt{4 - x^2}$

ג. $-2 \le x \le 2,\ \ y = +\sqrt{4 - x^2}$

**3)** להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר $t$, מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים $x$ ו- $y$ בלבד:

א. $x = t - 4,\ \ y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t,\ \ y = 1 + 2\sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t,\ \ y = 4\sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1,\ \ y = t(0.5t + 1) + 1$

ה. $x = \dfrac{20t}{4 + t^2},\ \ y = \dfrac{20t - 5t^2}{4 + t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t},\ \ y = ke^t - ke^{-t}$ ( $k$ קבוע).

## תשובות סופיות

1) א. $y = x-1,\ x \geq 1$ ב. $y = 1-x^2, -1 \leq x \leq 1$

ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

2) א. $x = t,\ y = t^4+1,\ 1 \leq t \leq 4$ ב. $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ \pi \leq t \leq 2\pi$

ג. $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \leq t \leq \pi$

3) א. $y = (x+4)^2$ ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$ ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$ ה. $x^2 + y^2 = 25$ ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

# הנגזרת ושימושיה

## שאלות

**1)** חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$, הנתונה בצורה פרמטרית.

**2)** נתון העקום $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=1-2t \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t=-1$.

**3)** נתון העקום $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=3t^2-9 \end{cases}$.

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,
ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של $t$ העקום קמור/קעור?

## תשובות סופיות

**1)** $y'=\dfrac{\cos t-\sin t\cdot t}{1-\cos t}$ , $y''=\dfrac{(-t\cos t-2\sin t)(1-\cos t)-\sin t(\cos t-t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

**2)** א. ראו בסרטון. ב. $y'=\dfrac{-2}{2t+1}$ ג. $y=2x+3$ ד. $y=-0.5x+3$

**3)** א. ראו בסרטון. ב. $y=\pm\sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0,-9)$ אנכי $(-2,-6),(2,-6)$

ד. $-1<t<1$ קמור. $t>1$ או $t<-1$ קעור.

# שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבון את השטח הכלוא בעקום $C:\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin 4t\end{cases}$.

2) חשבון את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a,b>0$.
* שימו לב שאם $a=b=r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס $r$.

3) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=t+\sin t,\quad x=\cos t,\quad 0\le t\le \pi$
לבין ציר ה- $x$.

4) חשבון את השטח הכלוא בין העקום $y=\sin^2 t,\quad x=4\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$
לבין ציר ה- $x$.

5) חשבון את אורך העקום $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

6) חשבון את אורך העקום $\begin{cases}x=\cos t\\ y=t+\sin t\end{cases}$, מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,\pi)$.

7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית
$\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\sin 2t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$
מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

8) חלק העקום $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\pi$, מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חלק העקום $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$, שבין $t=0$ לבין $t=\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבון את אורך העקום $-\pi\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x=4\sin t\\ y=10t\\ z=4\cos t\end{cases}$.

**11)** חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\left(e^t\right)\mathbf{k}$, $1\le t\le 3$.

## תשובות סופיות

**1)** $8/3$

**2)** $\pi ab$

**3)** $1.5\pi$

**4)** $16/3$

**5)** 8

**6)** 4

**7)** אורך העקום הוא $2\pi$. המרחק שעבר החלקיק הוא $4\pi$.

**8)** $4\pi r^2$

**9)** $6\pi/5$

**10)** $6\pi\sqrt{29}$

**11)** $\sqrt{3}e\left(e^2-1\right)$