

חדו"א



תוכן העניינים

1	משוואת הישר	(ללא ספר)
2	משוואות ממעלה שנייה ופרבולות	(ללא ספר)
3	הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות	1
4	גבול של פונקציה	27
5	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים	38
6	חישוב נגזרת של פונקציה	48
7	כלל לופיטל	61
8	חקירת פונקציה	67
9	נוסחת הקירוב הלינארי	84
10	גמישות הביקוש	85
11	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)	87
12	בעיות גדילה ודעיכה	100
13	סדרות	113
14	נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה	122

חדוא א

פרק 1 - משוואת הישר

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חדוא א

פרק 2 - משוואות ממעלה שנייה ופרבולות

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

חדוא א

פרק 3 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה 1
9. הרכבת פונקציות 3
10. הפונקציה ההפוכה 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 10
12. פונקציה מפוצלת 12
13. תרגילים משולבים 13
14. מבוא לתורת הקבוצות 17

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

תשובות סופיות

- (1) כל x
- (2) $x \neq \pm 2$
- (3) כל x
- (4) $x \neq 0, 1, -1$
- (5) $x \neq 2, -1$
- (6) $x \geq 4$
- (7) $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל x
- (9) $-1 < x < 1$
- (10) $x < -2, x > 1$
- (11) $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל x
- (13) $x > 0, x \neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

(1) נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(2) נתון $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

(3) נתון $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$.

(4) נתון $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

(5) נתון $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

(6) נתון $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את $f(g(x))$, $g(f(x))$

(7) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

8 נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9 נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאו את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע? מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f(x) = \frac{x-1}{3}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב. $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

ג. $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$

ד. $f(x) = x^2 - 4$; $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0,1] \quad \text{ג.}$$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.

ג. אם f ו- g על אז h על.

ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h על.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

(1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .

(2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.

(3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.

(4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.

(5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.

(6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.

(7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.

(8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.

(9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.

(10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.

(11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

(12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: \mathbb{R} ; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.

(13) א. תחום הגדרה וטווח: \mathbb{R} , תמונה: $(0, 1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה \mathbb{R} , טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 4x^3 \quad (1) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 1 \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 2^x \quad (5) \quad y = \ln x + x^2 \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות 1-6 : זוגית : 2,3 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 5,6.

(7) k אי-זוגית, z זוגית.

(8) טענה ב'.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

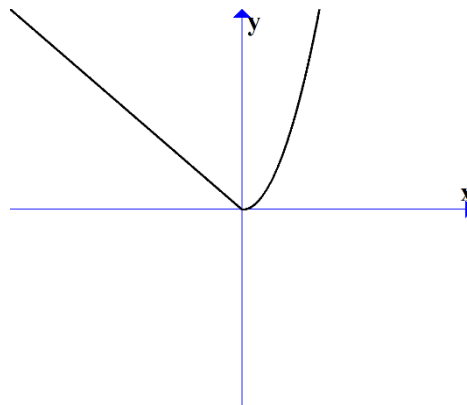
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1) = 1$, $f(4) = 16$, $f(-4) = 4$, $f(0) = 0$, $f(7) = \text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על \mathbb{R} .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על \mathbb{R} .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי $h(x) = f(g(x))$.

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי $h(x) = f(g(x))$.

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} :
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על \mathbb{R} .
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$. ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה: כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$. ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$. ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית \Rightarrow . $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית \Leftrightarrow (אם ורק אם). $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' \vee .
- הסימן 'וגם' \wedge .

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- \emptyset , כלומר $\emptyset = \{ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן $A \subseteq B$.

תמיד מתקיים:

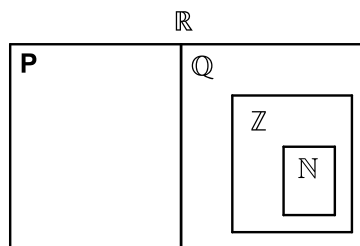
$$A \subseteq A \quad \bullet$$

$$\emptyset \subseteq A \quad \bullet$$

עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

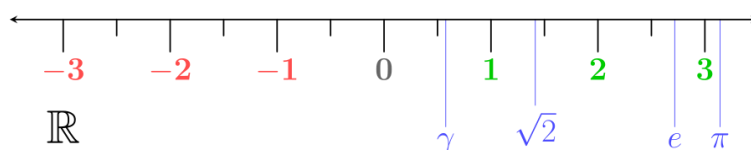
קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט \mathbb{P}).
- קבוצת המספרים הממשיים: \mathbb{R} (כוללת את \mathbb{Q} ואת \mathbb{P}).



ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a
(a, ∞)	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרו הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרו הסגורה מ- a עד ∞ כולל a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרו הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של A , נקראת קבוצת החזקה של A , ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \phi = \phi$	$A \cup \phi = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B , המסומן $A - B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B , כלומר $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $U - A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A , כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

שאלות

(1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ($n-1$ ו- k טבעיים).

(2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

(3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

(4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| א. $5 \in A$ | ב. $2 \in A$ | ג. $\{2\} \in A$ |
| ד. $\{2\} \subseteq A$ | ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ | ו. $\emptyset \in A$ |
| ז. $\emptyset \subseteq A$ | ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ | ט. $\{2, 4\} \subseteq A$ |
| י. $\{2, 4\} \in A$ | יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ | יב. $\{2, 5\} \subseteq A$ |
| יג. $\{2, 5\} \in A$ | יד. $\{1, 4\} \in A$ | |

(7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$.

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$.

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$.

(9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12 נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$.

ב. חשבו את $A - (B - C)$.

13 נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, $A = \{12, 15, 18\}$, $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

14 הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

15 מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- \mathbb{R} , של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$ | ב. $A \cup B$ |
| ג. A^c | ד. $A \cap B^c$ |
| ה. $A^c \cap B$ | ו. $A \cup B^c$ |
| ז. $A^c \cup B$ | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ | |

17 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.
- ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
- טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
- טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$.
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 נתונה הקבוצה $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

20 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

- א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.
- ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \not\subseteq P(A)$.

21 הוכיחו כי: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.
 ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

חדוא א

פרק 4 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

27	1. הצבה
28	2. צמצום
29	3. הכפלה בצמוד
30	4. פונקציה שואפת לאינסוף
31	5. x שואף לאינסוף
33	6. הגבול של אוילר
34	7. כלל הסנדוויץ'
35	8. גבול של פונקציה מפוצלת
36	9. גבול לפי הגדרה
(ללא ספר)	10. הסבר כללי

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x - 6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)

$-\infty$ (3)

ϕ (2)

ϕ (1)

ϕ (8)

∞ (7)

∞ (6)

$-\infty$ (5)

ϕ (11)

1 (10)

0 (9)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$$
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (4) \qquad -\infty \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad 0 \quad (1)$$

$$-3 \quad (8) \qquad -1 \quad (7) \qquad 1 \quad (6) \qquad -5 \quad (5)$$

$$0 \quad (12) \qquad \frac{1}{4} \quad (11) \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad (10) \qquad 1.5 \quad (9)$$

$$\ln 3 \quad (16) \qquad 2 \quad (15) \qquad \frac{1}{9} \quad (14) \qquad 4 \quad (13)$$

$$0 \quad (18) \qquad e^{\frac{1}{3}} \quad (17)$$

$$-\infty: b=0, a < 0 : \text{אם} \quad \infty: b=0, a > 0 \text{ אם} \quad \lim = \sqrt[b]{a} : b \neq 0 \text{ אם} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (23) \qquad \frac{1}{2} \quad (22) \qquad \frac{k}{2} \quad (21) \qquad 2.5 \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \quad (24)$$

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

(היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

תשובות סופיות

e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)
	e^{30} (7)	e^{-12} (6)	e^3 (5)

כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

$$\text{חשבו את הגבולות } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$$

תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2+x-2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2+x-2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

- (1) ϕ (2) ϕ (3) 1 (4) -1
- (5) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשבו על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f(x) < -4$.

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצאו ערך של $M > 0$ עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$. $\forall x > M$

$$(15) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה:}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2} \text{ , מצאו } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta \text{ , מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L \text{ , אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L$$

$$\text{ד. אם הגבולות: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

תשובות סופיות

(6) $\pm \infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר GOOL.co.il

חדוא א

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

38	1. רציפות של פונקציה
42	2. משפט ערך הביניים
45	3. שיטת החצייה
46	4. תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-2 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר¹ שלהן, ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.
 ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7, מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 8-10, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

(11) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(12) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$(13) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. הפונקציה f חסומה לכל x .
- ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
- ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
- ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

$$(14) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x . האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

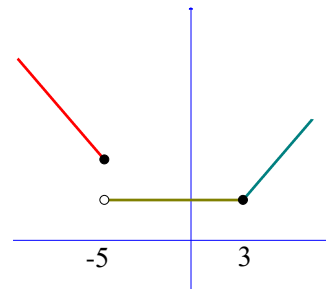
$$(15) \text{ תהי } f \text{ פונקציה חסומה בקטע } (0,1).$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ תהי } g \text{ הפונקציה המוגדרת בקטע } (0,2), \text{ על ידי}$$

- א. האם יתכן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.
- ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.
- (4) $k=1$
- (5) $k=4$
- (6) $k=\frac{2}{3}$
- (7) $k=-1$
- (8) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (9) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 4-5 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(4) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(5) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(6) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(7) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0,2)$?

(8) תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, המקיימות:

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b)$$

הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$, שבה $f(c) = g(c)$.

- 9 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$, כך ש- $f(c) = c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.
- 10 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$, כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.
- 11 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$, כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$, כך ש- $f(c) = f(d)$.
- 12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$, כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.
- 13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$, כך ש-
 $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$.
- 14 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.
- 15 יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, ונניח כי $a_0 < 0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.
- 16 יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות:
 $0 < k \in \mathbb{R}$ כאשר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

(17) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה x_1, \dots, x_n (כאשר $n > 1$)

נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) ,

$$\text{כך ש-} f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות x_1, \dots, x_n , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש-} f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))?$$

הוכיחו זאת.

תשובות סופיות

$$(6) \quad [0.1, 1]$$

$$(7) \quad \text{א. } f(2) = 5, f(0) = -1 \quad \text{ב. לא.}$$

שאלות 1-5 ושאלות 8-17 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

- (1) נתונה המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
 בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2, 3]$, מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי
 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?
- (2) נתונה המשוואה $x^3 - x - 2 = 0$.
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של
 השורש בדיוק של 0.001?
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.
 הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

- (1) 0.07
 (2) א. $[1, 2]$ ב. 10 ג. $x = 1.520$

תכונות נוספות של פונקציות רציפות – רמה מתקדמת

שאלות

- (1) קבעו בכל סעיף, האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת. קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:
- א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
 - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
 - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
 - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
 - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
 - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
 - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
 - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
 - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
 - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
 - יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f , היא קטע.
- (1) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x) > 0$ לכל $x \in [a,b]$. הוכיחו שקיים $\alpha > 0$, כך ש- $f(x) \geq \alpha$ לכל $x \in [a,b]$.
- (2) תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים. הוכיחו ש- f חסומה.
- (3) תהי $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$ פונקציה על. הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

(4) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K , כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a,b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ** :
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$

הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b) .
 * נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

(5) הוכיחו או הפריכו :

א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .

ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

(6) הוכיחו : אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

תשובות סופיות

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוא א

פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	48
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	51
4. גזירה סתומה	54
5. כלל השרשרת	56
6. גזירה לוגריתמית	59
7. נגזרת הפונקציה ההפוכה	60

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1-4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3-4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1-\ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right] \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x\right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x^1$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ז.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \end{array}$$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\ f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\ f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\ f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.} \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה (3,4).
- 5) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה (1,1).
- 6) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה (1,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה (1,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה (0,2) – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
 א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
 ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

- (13)** נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,
 מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .
 נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
 הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

-1 (12)

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1) = -2$, $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

נתונה הפונקציה $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

נתונה הפונקציה $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

נתונה הפונקציה $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

נתונה הפונקציה $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

נתונה הפונקציה $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

		40 (1)
	ב. שאלת הוכחה.	א. -16 (1)
ג. $2e+1$	ב. שאלת הוכחה.	א. $2e+1$ (2)
ג. $g'(x) < 0$	ב. יורדת.	א. -4 (3)
		ד (4)
		$\frac{17}{80}$ (5)
		36 (6)
		$\frac{8}{9}$ (7)
		44 (8)
		-2 (9)

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוא א

פרק 7 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 61
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 63
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 64
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 65
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 66

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x} - 2 - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקה):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

חדוא א

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד	(ללא ספר)
2. חקירת פולינום	67
3. חקירת פונקציה רציונלית	69
4. חקירת פונקציה מעריכית	73
5. חקירת פונקציה לוגריתמית	76
6. חקירת פונקציה עם שורשים	80
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט	81

שלבי עבודה והערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קמורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.

3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק הרלוונטי עבורכם.

4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.

5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 1 .

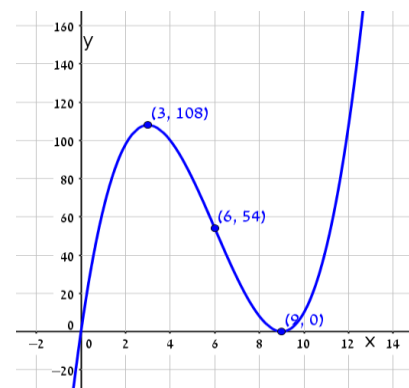
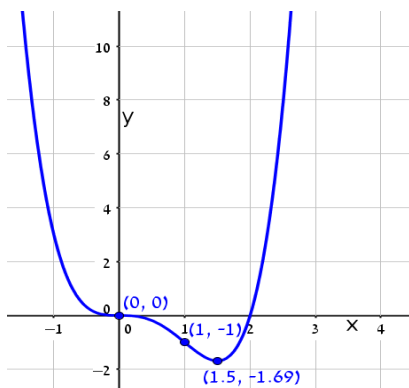
נקודות קיצון: מינימום: $(1.5, \frac{-27}{16})$.

תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.

נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן, קיבלנו שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

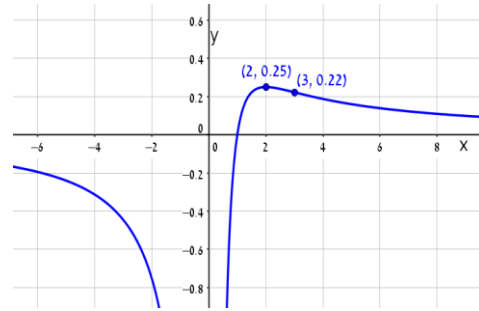
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $(3, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{9})$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x > \sqrt{12}$ or $x < -\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-3, -\frac{27}{4})$.
תחום עלייה: $x > -1$ or $x < -3$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

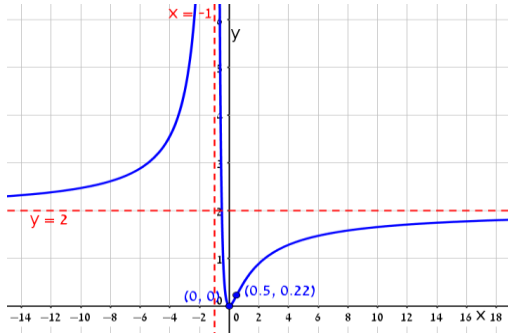
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $x < -1$ or $2 < x < 5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x < -2$, $x > 1$ or $-2 < x < -1$; ירידה: $-1 < x < 0$ or $-1 < x < 0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

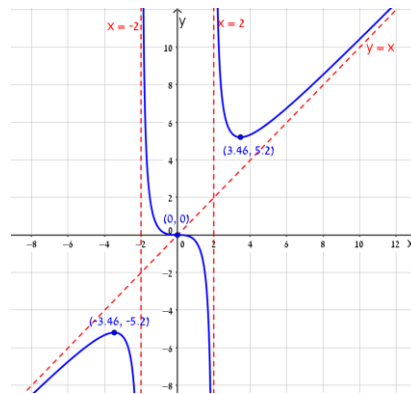
(1)



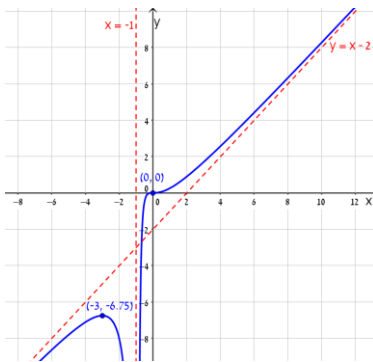
(2)



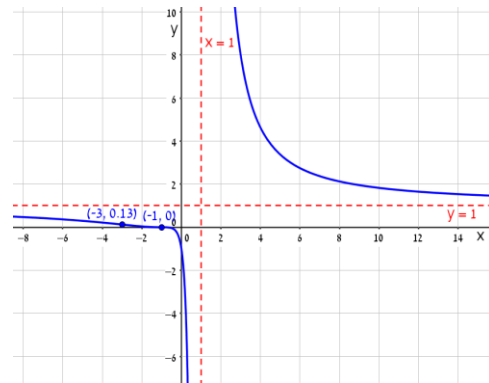
(3)



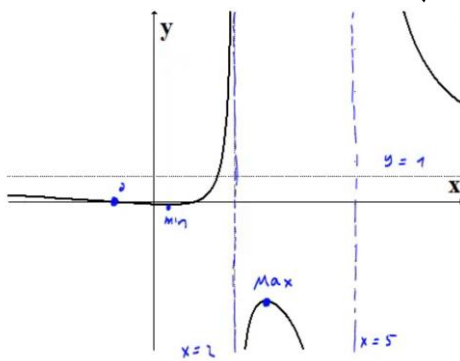
(4)



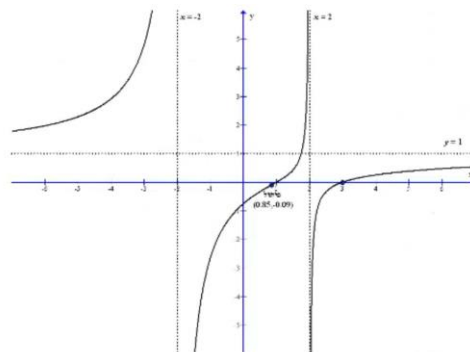
(5)



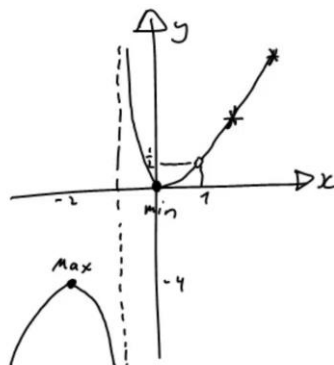
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

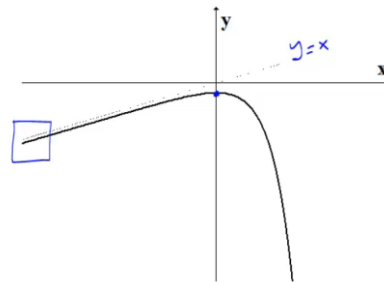
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

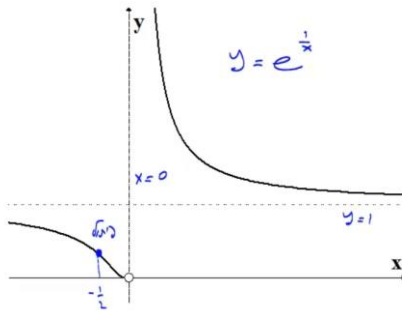
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
- תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $0 < x < 2$ or $-1 < x < 0$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
- תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
- תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות: $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

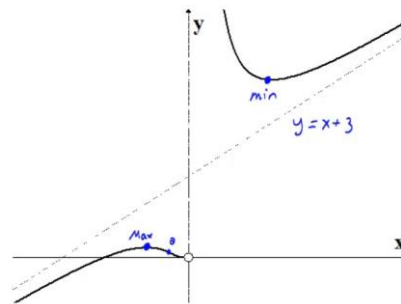
(1)



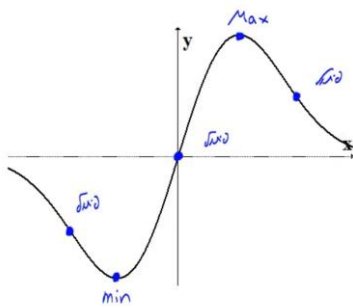
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

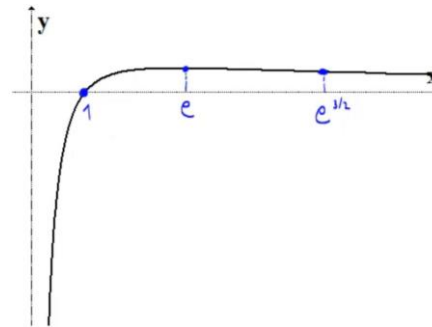
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$.
 תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

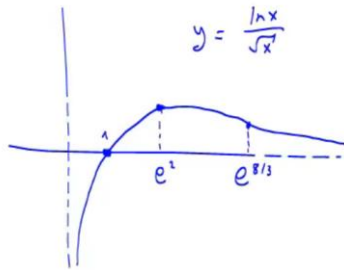
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $e^{-1} < x < 1$ or $x > e$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

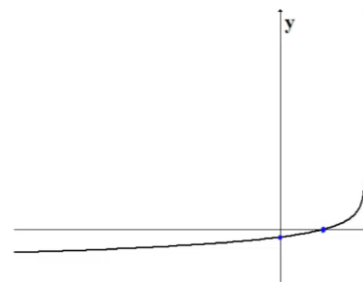
(1)



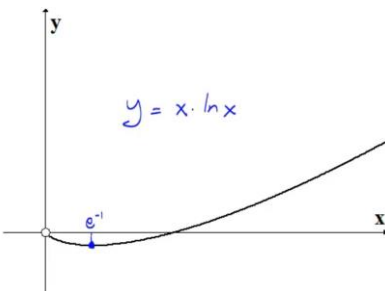
(2)



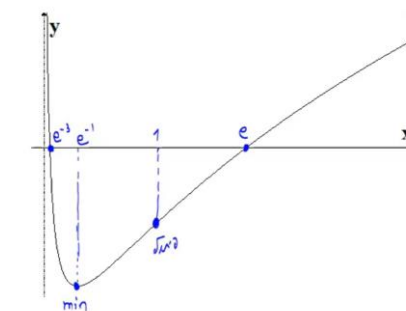
(3)



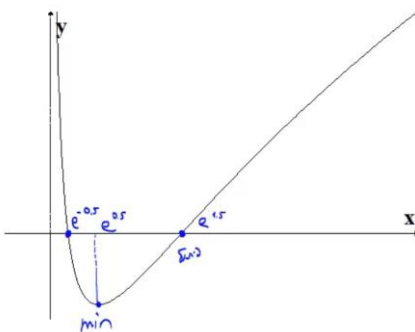
(4)



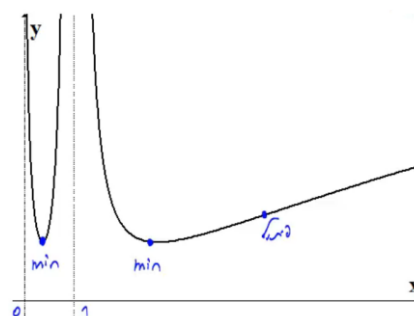
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקרו את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

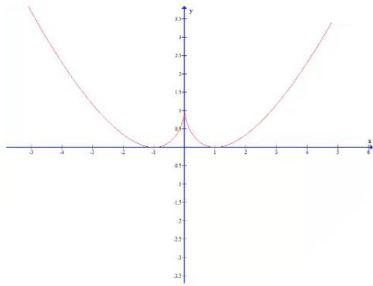
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

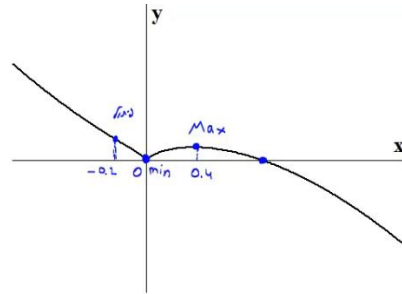
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
 תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
 נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
 תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
 תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$ or $x < -1$.
 נקודות פיתול: אין.
 תחום קמירות: קמורה לכל x .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
 תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.
 נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
 תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
 נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
 תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
 נקודות פיתול: $(3, 0)$.
 תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

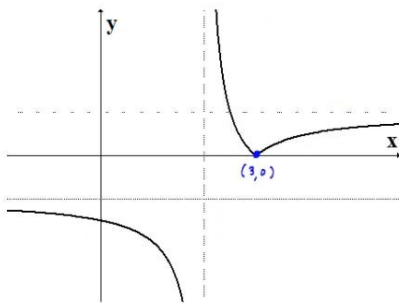
גרפים



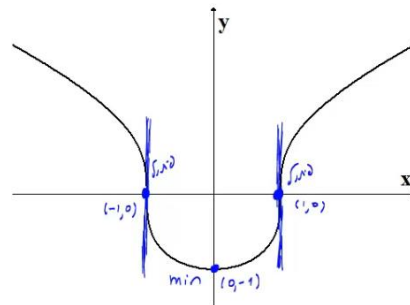
(2)



(1)



(4)



(3)

חדוא א

פרק 9 - נוסחת הקירוב הלינארי

תוכן העניינים

1. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם 84

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$.

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\ln 2$, $\sqrt[3]{9}$.

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

חדוא א

פרק 10 - גמישות הביקוש

תוכן העניינים

85 1. גמישות הביקוש

גמישות הביקוש

שאלות

1) חשבו את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + 4x$

ב. $f(x) = xe^x$

ג. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

ד. $f(x) = \ln(\ln x)$

2) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = 10 - p$.

מצאו את גמישות הביקוש, אם $p = 4$.

3) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$.

א. מצאו את המחיר, p , בו $\eta_D = 0$.

ב. מצאו את המחיר, p , בו $\eta_D = -1$.

4) פונקציית הביקוש נתונה על ידי $x = a \cdot \sqrt{b - p}$,

כאשר: x – כמות, p – מחיר, $a, b > 0$ קבועים.

מצאו את x ו- p , עבורם גמישות הביקוש שווה -1 .

5) הוכיחו כי $\eta_{\ln f} = \frac{\eta_f}{\ln f(x)}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad \text{ד.} \quad \frac{x^2}{x^2+4} \quad \text{ג.} \quad 1+x \quad \text{ב.} \quad \frac{2x+4}{x+4} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$p = \frac{a}{2b} \quad \text{ב.} \quad p = 0 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$p = \frac{2b}{3}, \quad x = a\sqrt{\frac{b}{3}} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

חדוא א

פרק 11 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1.	הסבר כללי על בעיות קיצון	(ללא ספר)
87	בעיות קיצון יסודיות עם מספרים	
88	בעיות קיצון בהנדסת המישור	
90	בעיות קיצון בפונקציות וגרפים	
92	בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון	
98	בעיות קיצון כלכליות מסוג שני	

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים $x + 6y = 60$.
 א. הביעו את y באמצעות x .
 ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

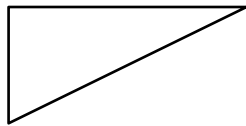
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

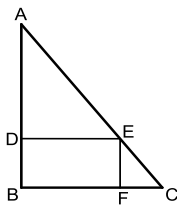
שאלות



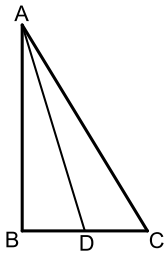
- 1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



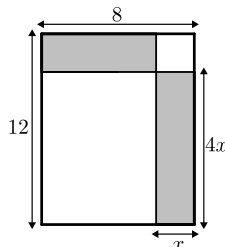
- 2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 3) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- 4) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



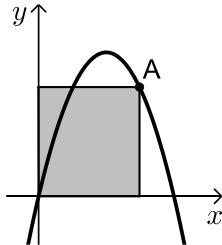
- 5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

תשובות סופיות

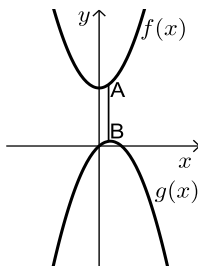
- (1) 4.6
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $8.48 \approx 6\sqrt{2}$ ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר = S .
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5) $x = 2.75$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

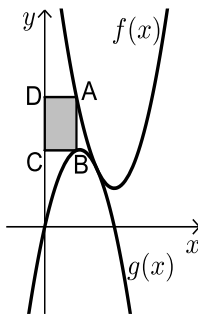
שאלות



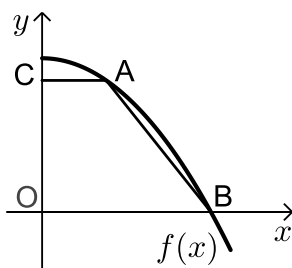
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



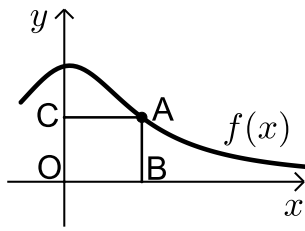
- (2) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$ כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

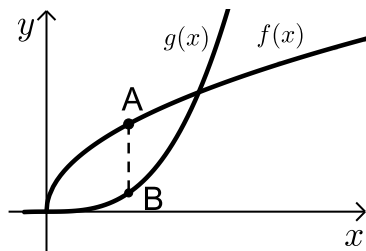


(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x \geq 0$.

נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

(1) A(4,8)

(2) A(0.5,12.25)

(3) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$

(4) א. A(2,32) ב. $S = 128$

(5) א. A(2,2) ב. A(0,4)

(6) A(1,2)

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
 ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
 ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:
 א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.
 ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

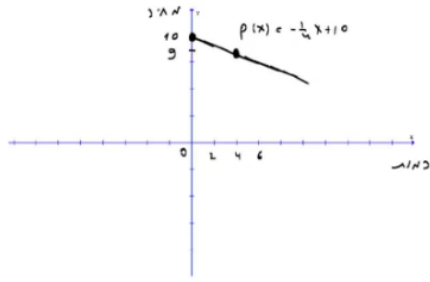
16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.
 א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם ייתכן להפך?
 ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
 א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

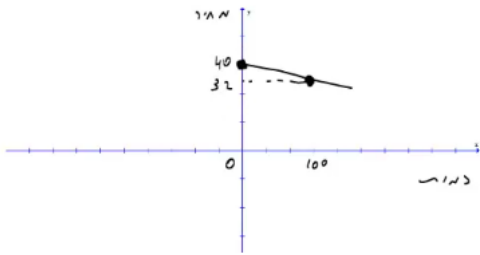
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 100$ ₪, $A = 372,000$ ₪.

תשובות סופיות

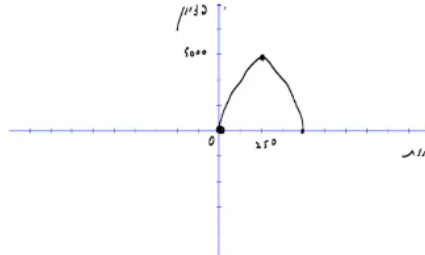


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$. ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

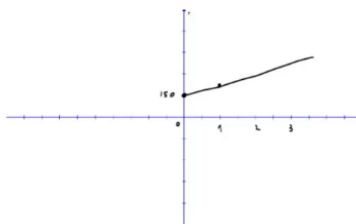
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

25 (12)

(13) הכמות : 800 , המקסימום : 38,200 .

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- (3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200.

על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- (6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.
 (6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) 350

חדוא א

פרק 12 - בעיות גדילה ודעיכה

תוכן העניינים

100	1. שאלות חימום
104	2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית
105	3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית
106	4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה
107	5. שאלות העוסקות במציאת הזמן
108	6. שאלות שונות

שאלות חימום:

סיכום כללי:

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן t , המסומנת M_t , כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב הגידול/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- | | |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$ | ב. $q = 1.6$ |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את M_0 :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$ | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ | |

(4) מצא את q :

א. $25 = 10 \cdot q^6$
 ב. $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$
 ג. $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$
 ד. $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$
 ה. $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{3\frac{1}{3}}$
 ו. $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(5) מצא את t :

א. $10 \cdot 1.05^t = 70$
 ב. $62.08^t = 39.68$
 ג. $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2. בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.
 א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?
 ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?
 ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%. במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.
 א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?
 ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?
 ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה. מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם. ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי. כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה. כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.
 א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?
 ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה. כיום יש באגם $2 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
- א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?
 ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?
 ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
- א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?
 ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
- א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?
 ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5 \cdot 10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג. בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
- א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?
 ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.
- א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?
 ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
- א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.
 ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

ד. 1.15	ג. 1.05	ב. 0.6	א. 1.2 (1)
	ח. 0.5	ו. 3. ז. 0.75	ה. 2
ד. 28% דעיכה.	ג. 15% דעיכה	ב. 60% גדילה	א. 20% גדילה (2)
	ג. 150	ב. 45	א. 80 (3)
ד. 1.028	ג. 0.732	ב. 0.7469	א. 1.165 (4)
		ו. 1.03	ה. 0.22
	ג. 33.01	ב. 0.89	א. 39.88 (5)
	ג. 52,428,800	ב. 200	א. 100 (6)
	ג. כן. 456.747 גרם.	ב. 1422.4 גרם.	א. 1889.56 גרם. (7)
			ש. 592.6 (8)
			מ. 1.41 ק"מ. (9)
	ב. 467,304 תושבים.		א. 578,642 תושבים. (10)
	ג. 4,525,483.4 ק"ג.	ב. 50,000 ק"ג.	א. 3,200,000 ק"ג. (11)
		ב. 9.6 מיליון תושבים.	א. 1.029 (12)
		ב. 2117 תוכים.	א. 1.032 (13)
			14.16% (14)
		ב. 70.35 גרם.	א. 0.9671 (15)
		ב. 77.1%	א. 0.90657 (16)
		ב. 6.15	א. 3.18% (17)

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

שאלות:

(1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

(2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

תשובות סופיות:

(1) 5,062 חסידות.

(2) 101,342 תושבים.

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

שאלות:

3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

תשובות סופיות:

3) 34,907 זברות.

שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

שאלות:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

תשובות סופיות:

- (4) 2.3%
- (5) 3.5%
- (6) 921 חיידקים.

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

שאלות:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

תשובות סופיות:

- (7) 9.41 שנים.
- (8) 7.47 שנים.
- (9) 16.43 שעות.
- (10) 12.43 שעות.
- (11) 9.43 ימים.
- (12) 16:00

שאלות שונות:

שאלות:

13 בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

14 נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבית א' היו 4,000 חיידקים ובתרבית ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבית א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.
 t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבית ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית א'.

חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

15 מספר החיידקים בתרבית גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבית וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבית. הבע את t באמצעות p .

הערה:

שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$. מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

17 נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

18 כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

- 19** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- 20** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'. רפי משקיע סכום k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'. למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות? נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
- 21** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
- מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
- ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
- א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
- ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪. איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- 22** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
- 23** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.

- (24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .
- (25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
- (26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.
- א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.
 ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.
- (27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.
- א. מצא את t .
 לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.
 ב. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.
- א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.
 ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

- (29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
- (30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- (31)** אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .
- (32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

תשובות סופיות:

(13) בנק א'.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad (15)$$

(16) מינימום, $x = 17.04$.

(17) 11 חודשים.

(18) 100,000 עצים.

(19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

(20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

(21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

(22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

(23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

(24) 14.82%

(25) ב-5.95%

(26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

(27) א. $t = 4$ ב. $p = 20\%$

(28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

(29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

(30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.

(31) 16.63%

(32) ב-6.6%

חדוא א

פרק 13 - סדרות

תוכן העניינים

113	1. היכרות עם סדרות
115	2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות
116	3. חישוב גבול לפי אוילר
118	4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ
119	5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש
121	6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית
	7. חישוב גבול לפי ההגדרה

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (20) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (22) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (21)$$
- * רמז לשאלה 22: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|---|------------------------|
| 4 (2) | 0 (1) |
| 0 (4) | ∞ (3) |
| 1 (6) | -5 (5) |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8) | 1.5 (7) |
| 4 (10) | 0.25 (9) |
| $\ln 3$ (12) | 2 (11) |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13) |
| $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[n]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ (14) | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16) | 2.5 (15) |
| 0.5 (18) | 0.5 (17) |
| 0.5 (20) | $\frac{a-b}{2}$ (19) |
| 1 (22) | $\frac{1}{3}$ (21) |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (2)$$

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) \quad (5)$$

רמו לשאלה 4: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(6) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0:

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0, 1)$$

(7) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$

$$(8) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

תשובות סופיות

- 4 (1)
- 0 (2)
- 1 (3)
- 0 (4)
- 1 (5)
- שאלת הוכחה. (6)
- שאלת הוכחה. (7)
- 9 (8)

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \text{ יהיו } a > 0, x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- \sqrt{a} .

$$(5) \text{ יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6)$, לכל n .

- א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \text{ יהיו } 0 < b_1 < a_1.$$

נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, לכל n .

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$(7) \quad \text{נתונה הסדרה } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1.$$

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

(1) הגבול 2.

(2) הגבול 1.

(3) הגבול 1.

(4) הגבול הוא \sqrt{a} .

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.

ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חדוא א

פרק 14 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

122	1. קואורדינטות קוטביות
124	2. הנגזרת ושימושיה
125	3. שימושי האינטגרל המסוים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4 \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \text{ א.} \quad r \cos \theta = 10 \text{ ב.} \quad r \sin \theta = 4 \text{ ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א.} \quad y = x \text{ ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג.}$$

$$(6) \quad 6(\sqrt{x^2 + y^2})^3 \cdot y = 4\sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ד.}$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8\sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2\sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

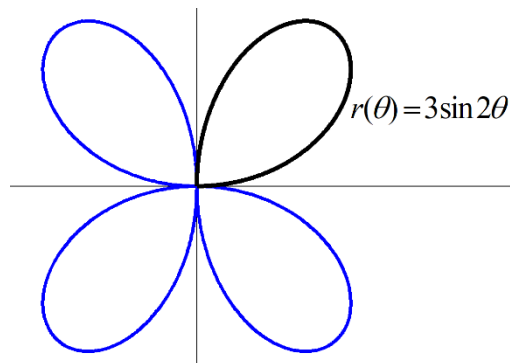
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- (1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r = 2(1 + 2\cos\theta)$.
- (2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 6 + 4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y .
- (3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 3 + 2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- (5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ומחוץ ל- $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r = 2$ ובתוך $r = 3 + 2\sin\theta$.
- (7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r = 2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- (8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r = 1 + \cos\theta$.
- (9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- (10) מצאו את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- (11) העקום $r = \cos\theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

(12) העקום $r = 4 + 4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
 מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

$$(1) \quad r \cos \theta = a \quad - \text{ הישר } x = a$$

$$(2) \quad r \sin \theta = b \quad - \text{ הישר } y = b$$

$$(3) \quad \theta = \beta \quad - \text{ הישר העובר דרך הראשית } y = (\tan \beta)x$$

מעגלים

$$1. \quad r = a \quad - \text{ מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו } a$$

$$2. \quad r = 2a \cos \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (a, 0) \text{ ורדיוסו } |a|$$

$$3. \quad r = 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנקודה } (0, b) \text{ ורדיוסו } |b|$$

$$4. \quad r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta \quad - \text{ מעגל שמרכזו בנק' } (a, b) \text{ ורדיוסו } \sqrt{a^2 + b^2}$$

קרדיוודות ולמניסקטות

$$(1) \quad \text{קרדיוודות } r = a \pm a \cos \theta, r = a \pm a \sin \theta$$

גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

$$(2) \quad \text{למניסקטות עם לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a < b)$$

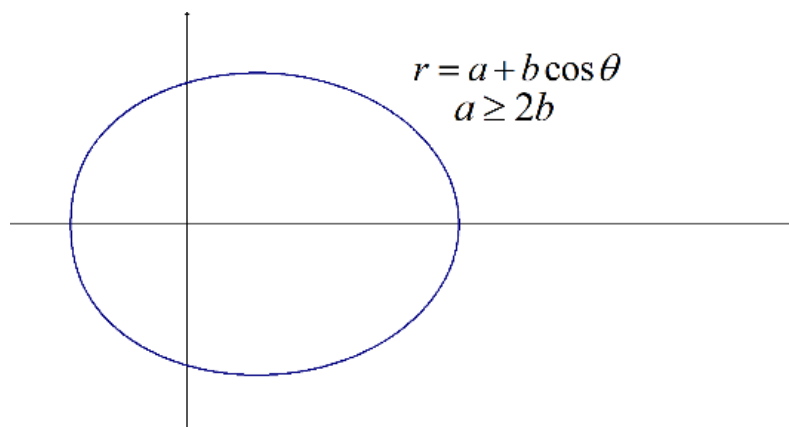
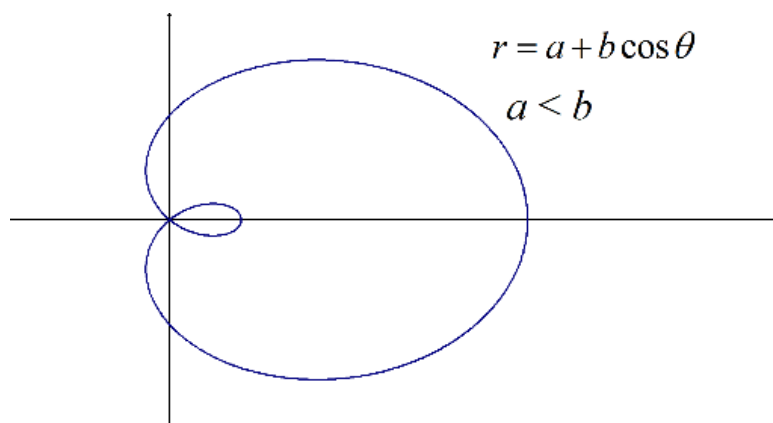
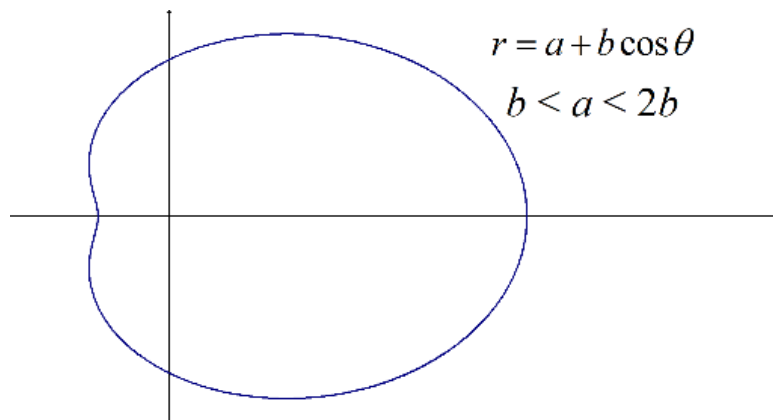
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

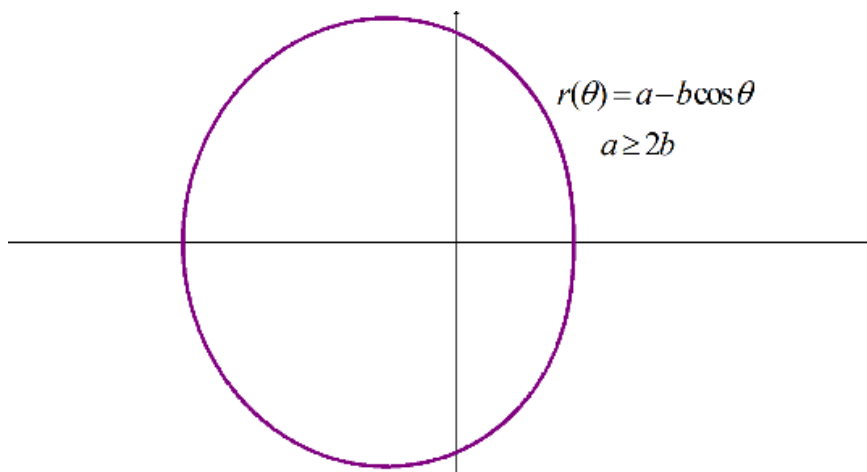
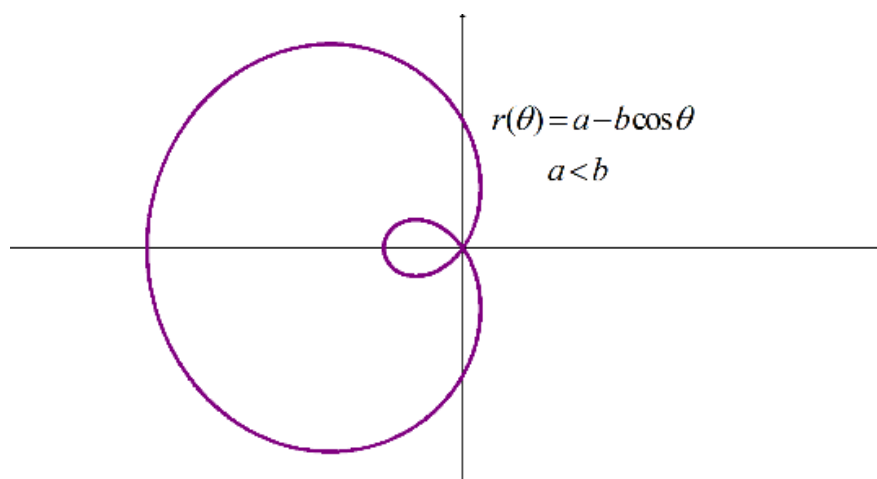
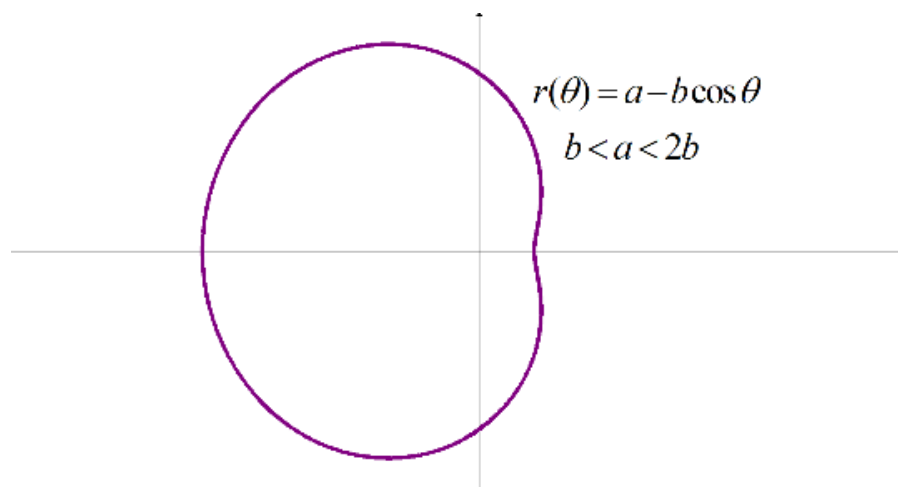
$$(3) \quad \text{למניסקטות ללא לולאה פנימית } r = a \pm b \cos \theta, r = a \pm b \sin \theta \quad (a > b)$$

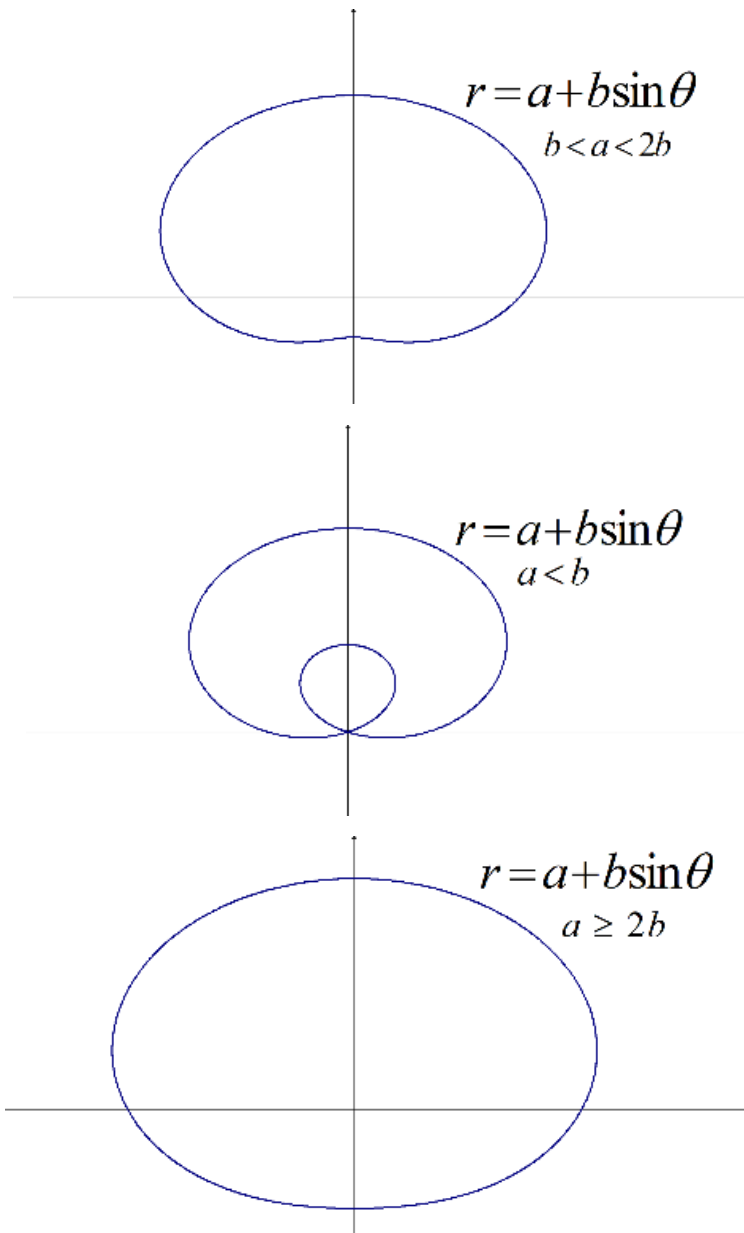
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

$$* \text{ נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

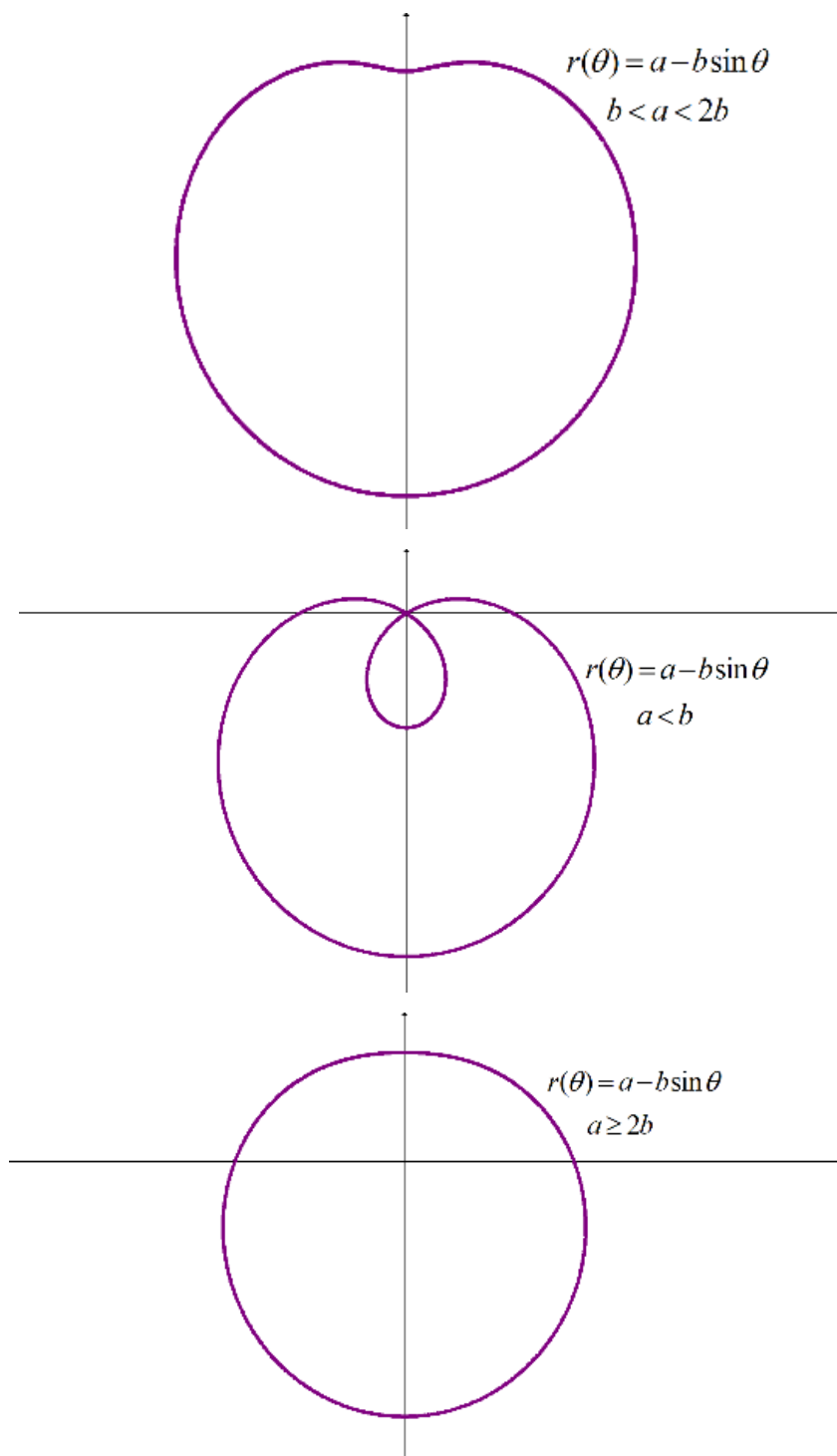
למינסקטות ביתר פירוט

 הגרף של $r = a + b \cos \theta$:


הגרף של $r = a - b \cos \theta$ 

הגרף של $r = a + b \sin \theta$ 

הגרף של $r = a - b \sin \theta$



גרפים נפוצים נוספים

