

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1	1. יסודות ההסתברות
5	2. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים
14	3. קומבינטוריקה - כלל המכפלה
18	4. קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה
21	5. קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה
23	6. קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה
26	7. קומבינטוריקה - שאלות מסכמות
31	8. הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד
34	9. הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד
38	10. דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה
43	11. תלות ואי תלות בין מאורעות
46	12. שאלות מסכמות בהסתברות
51	13. המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות
55	14. המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן
59	15. המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית
62	16. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים
65	17. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית
69	18. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית
72	19. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית
75	20. התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית
78	21. המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות
85	22. התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית
93	23. הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

96	24. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי
114	25. מושגי יסוד באמידה
119	26. רווח סמך לתוחלת (ממוצע)
129	27. רווח סמך לפרופורציה
135	28. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים
141	29. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
150	30. בדיקת השערות על פרופורציה

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 1 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 1

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A, B, C . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A = \{5, 6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B = \{2, 4, 6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega| = 6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A| = 2, |B| = 3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון x	מספר התלמידים – השכיחות f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$.

שאלות:

- (1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.
 א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.
 ב. רשמו את המקרים למאורע:
 i. במילה נמצאת האות E.
 ii. במילה האותיות שונות.
 ג. רשמו את המקרים למאורע \bar{A} .

- (2) מטילים זוג קוביות.
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
 i. סכום התוצאות 7.
 ii. מכפלת התוצאות 12.
 ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

- (3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

- (4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

10	22	18	28	22	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מקלטים

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- (5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

10	30	100	40	20	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מכוניות

- נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
- א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
- i. התקבל פעם אחת עץ.
- ii. התקבל לפחות פלי אחד.
- ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
- ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

1) א. $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$

ב. $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$, $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$

ג. $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$

2) א. $\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{matrix} \right\}$

ב. $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.

3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5

4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32

5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8

6) א. $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$

ב. $A = \{PPE, PEP, EPP\}$, $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$

ג. $\bar{D} = \{EEE\}$

ד. $\frac{1}{8}$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

תוכן העניינים

1. כללי 5

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

פעולת חיתוך:



נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
 חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A \cap B$.
 מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B = \{2, 4, 6\}$.
 החיתוך שביניהם הוא: $A \cap B = \{6\}$.

פעולת איחוד:



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A \cup B$.
 הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- A או ב- B .
 כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

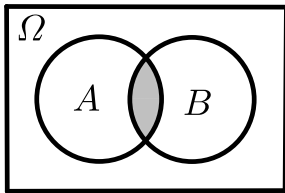
דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$.
 האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף: $A \cap B = \{ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

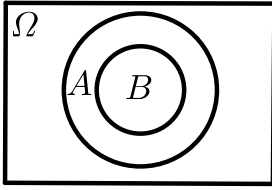
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A \cap B) = 0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$ והאפשרות לקבל 3

היא: $B = \{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A \cap B = \{ \}$.

מאורעות מוכלים:


נתונים שני מאורעות A ו- B , השונים מאפס. נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B מוכלות בתוך מאורע A .

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

למשל:

שאלות:

- (1) מהאותיות E, F ו- G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - במילה נמצאת האות E .
 - B - במילה אותיות שונות.
- א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B .
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
 $A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$
 - ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.
- נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
- להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .
- קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
- $A \cup \bar{A}, \bar{\phi}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \phi, A \cap \phi, \bar{A}$

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\overline{A} \cap B$

ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$

ה. $\overline{\overline{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עמיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עמיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A) = 0.6$,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A} \cap B)$.

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב

שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$.
 ב. האם A ו- B מאורעות זרים?
 ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15 A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א. $A \cap B = B \cap A$.
 ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$.
 ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$.
 ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

17 נתון ש- A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$.

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$?
 ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$?
 ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $P(A \cup B)$?
 ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A \cup B)$?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
 ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
 ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
 ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
 ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
 ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
 ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- 19** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20 הוכיחו: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.

- 21** A ו- B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$?

תשובות סופיות:

- (1) א. $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$
 ב. $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- (2) א. $B \cap \bar{A}$ ב. $A \cap \bar{B}$ ג. $A \cap B$ ד. $A \cup B$ ה. $\bar{A} \cap \bar{B}$ ו. \bar{B}
- (3) א. $A = 0, 2, 4, 6, 8, B = 0, 1, 2, 3, 4, \bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9$
 $A \cap B = 0, 2, 4, A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$
- ב. $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- (4) $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$
 $A \cap \bar{A} = \phi, \bar{\phi} = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega$
- (5) א. $A \cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8.
 ב. $A \cup B$: כל גובה אפשרי.
 ג. $\bar{A} = \bar{A} \cap B$: גובה לכלל היותר 1.7.
 ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$: לכלל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
 ה. $A = \bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.
- (6) א. $A \cap B \cap C$ ב. $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ג. $A \cup B \cup C$
 ד. \bar{C} ה. $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- (7) א. $P(A \cup B) = 0.24$ ב. $P(A \cap B) = 0.04$ ג. $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- (8) א. $P(A \cap B) = 10\%$ ב. $P(A \cup B) = 50\%$ ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- (9) א. $P(A \cap B) = 0.2$ ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$ ג. $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- (10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- (11) א. כן. ב. $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- (12) הטענה הנכונה היא ג'.
- (13) א. 0.05. ב. 0.95.
- (14) א. $P(A \cap B) = 0.06$ ב. לא. ג. $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- (15) $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- (16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- (17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A \cup B) = 0.5$ ד. $P(A \cup B) = 0.3$
- (18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- (19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) נכון.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

14 1. כללי

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k

אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
- הטלת קובייה פעמים.
 - מספר תלת ספרתי.
 - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
 - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- המספר הוא זוגי.
 - במספר כל הספרות שונות.
 - במספר כל הספרות זהות.
 - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - במספר לפחות שתי ספות זהות.
 - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- כולם ירו בקומה החמישית.
 - כולם ירדו באותה קומה.
 - כולם ירדו בקומה אחרת.
 - ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- בקוד אין את הספרה 5.
 - בקוד מופיעה הספרה 3.
 - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.36 ב. 0.900 ג. 0.70 ד. 0.90
- (2) א. 0.36 ב. i. $\frac{1}{36}$ ב. ii. $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5 ב. 0.3024 ג. 0.0001 ד. 0.9999 ה. 0.6976 ו. 0.01
- (4) א. $\frac{1}{8^5}$ ב. $\frac{1}{8^4}$ ג. 0.205 ד. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 0.3375 ב. 0.2730
- (6) א. $\frac{1}{216}$ ב. $\frac{5}{18}$ ג. $\frac{13}{18}$ ד. $\frac{215}{216}$
- (7) א. $\frac{23^5}{26^5}$ ב. $\frac{1}{26^4}$ ג. $1 - \frac{1}{26^4}$ ד. $\frac{1}{26^2}$
- (8) א. 0.9^a ב. $1 - 0.9^a$ ג. 0.5^a
- (9) 2^n

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

1. כללי..... 18

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

הערה: $0! = 1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba ?

שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים
 א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
 ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
 א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
 ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
 ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
 א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
 ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
 א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?
 ב. שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
 א. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
 ב. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
 ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
 א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
 ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
 ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.24 ב. 0.120
- (2) א. 0.2 ב. 0.8 ג. 0.022
- (3) א. 0.362880 ב. 0.2880
- (4) א. 0.3628800 ב. 0.2 ג. 0.8 ד. $\frac{1}{45}$
- (5) א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$
- (6) א. 0.75 ב. 0.014 ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 5 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 21

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3 = 1,000$, $k = 3$, $n = 10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$\cdot (n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8000 ב. 6840
- (2) א. 0.0001 ב. 0.6561 ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04 ב. 0.48
- (5) א. 40^5 ב. 78,960,960

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 23

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין

$$\text{משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: } \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
 - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 10-2, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
 - מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
 - מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
 - מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

- 6 במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

$$7 \quad \text{הוכיחו כי: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- 8 $2n$ בנים ו- $2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

- 1 א. 53130 ב. 20475 ג. 3003
- 2 א. 252 ב. 100 ג. 100 ד. 60
- 3 א. 0.1117 ב. 0.1445 ג. 0.9819
- 4 א. 0.02 ב. 0.187 ג. 0.972 ד. 0.00246
- 5 א. 0 ב. 0.1923 ג. 0.009 ד. 0.837
- 6 א. $6.45 \cdot 10^{-5}$ ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$ ג. 0.3225
- 7 שאלת הוכחה.

$$8 \quad \text{א. } \binom{2n}{n}^2 \quad \text{ב. } \sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 7 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי 26

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - אין תפקידים שונים בוועד.
- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
 - כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
 - כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
 - בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
- (4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
- מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
 - מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
 - מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
 - מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- 5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
 - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
 - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
 - מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- 6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
 - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
 - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
 - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
 - מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
 - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
 - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- 7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
 - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
 - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- 8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- ללא הגבלה.
 - כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
 - שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- 9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

- 10** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.
 כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.
 א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
 ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
 ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
 ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

- 11** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה 41 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.



- 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.
 א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?
 ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?
 ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?
 ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).
 ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?
 ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.
 ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?
 ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

- 12** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
 א. כמה סיסמאות שונות יש?
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

- 13** מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n .
 א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
 ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
 ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

- 14** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):
- א. בקוד אין את הספרה 5.
 - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000 ב. 78,960,960 ג. 658008
- (2) א. 810,000 ב. 657,720 ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000 ב. 1,404,000 ג. 5,616,000 ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024 ב. 0.00098 ג. 0.05933 ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098 ב. 0.17798 ג. 0.02929 ד. 0.02197
- (6) א. $\frac{1}{4096}$ ב. $\frac{1}{32,768}$ ג. 0.205 ד. 0.795
- ה. 0.0105 ו. 0.5129 ז. 0.1071
- (7) א. 4,200 ב. 50,400 ג. 604,800
- (8) א. 604,800 ב. 2,880 ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512 ב. 0.014 ג. 0.059 ד. $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320 ב. 0.1071 ג. 0.2142 ד. 0.0357
ה. 0.5714 ו. 0.1429 ז. 0.0143 ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176 ב. 45,239,040 ג. 48,484,800
- (13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$ ב. $n \cdot (n-1)(n-2)$ ג. n^3
- (14) $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א. 0.9^a ב. $1-0.9^a$ ג. 0.5^a

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 8 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד

תוכן העניינים

1. כללי 31

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

- (1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
- (2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
- (3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
 A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
 B - מכפלת התוצאות 12.
 חשבו את $P(A|B)$.
- (4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
- (5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
- (6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
- (7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
- (8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?
- (9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?
- (10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערך ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

תשובות סופיות:

(1) 0.2

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 0.5

(4) 0

(5) $\frac{1}{6}$

(6) $\frac{2}{11}$

(7) $\frac{1}{3}$

(8) $\frac{3}{4}$

(9) $\frac{2}{3}$

(10) $\frac{1}{4}$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 9 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

1. כללי 34

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
 במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

- (1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 B - לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
 חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
- התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?
- (2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.
- איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
- (3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
- מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

- א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
- ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?
- ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
- ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
- ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
- ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט",
 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראלכרט,
 8% מחזיקים ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?

תשובות סופיות:

(1) א. 0.833 ב. 0.9375 ג. 0.0625 ד. 0.5 ה. 0.789

(2) א. 5% ב. 0.0833 ג. 0.786 ד. 0.6875

(3) א. 0.4 ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.25 ד. $\frac{6}{7}$

(4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.6 ד. $\frac{23}{30}$

סה"כ	לא אקדמאי	אקדמאי	
200	180	20	שכיר
100	70	30	עצמאי
300	250	50	סה"כ

ה. 0.3 ו. 0.72

(5) א. 0.625 ב. 0.133 ג. 0.402

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 10 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

1. כללי 38

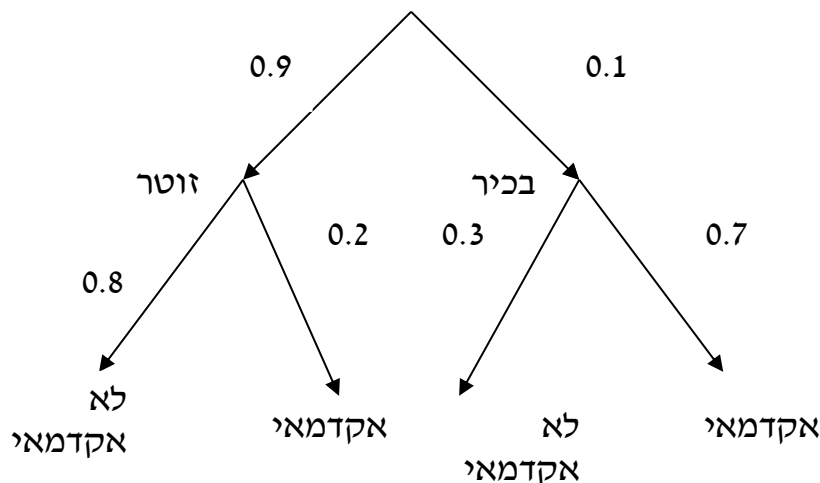
דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף. נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

(1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$.

(2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ? $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

(3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$.

(4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר? מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72 \text{ : מותנה}$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B , מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- A_1, \dots, A_n כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

$$. P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right) \text{ אזי:}$$

נוסחת בייס:

$$. P\left(\frac{A_j}{B}\right) = \frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

שאלות:

- (1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.
- א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
- ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?
- (2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
- א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
- ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
- ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
- ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
- (3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
- ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
- (4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
- א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
- ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
- ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

- (5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו. 70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
- א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
 ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
 ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?
- (6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
- מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
 מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
 30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
 כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
- א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
 ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?
- (7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D. אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
- א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
 ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
 ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?
- (8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
- א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
 ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

- (9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P , ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות. אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?
- (10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
 - רונית, דולב, רונית.
- בכל משחק מישהו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2}{7}$ ב. $\frac{23}{49}$
- (2) א. 6% ב. 58% ג. 0.241 ד. 0.2
- (3) א. 0.544 ב. 0.5
- (4) א. 9% ב. 0.09375 ג. 0.9722
- (5) א. 0.14 ב. 0.3488 ג. 0.2442
- (6) א. 70% ב. 0.8125
- (7) א. 0.57 ב. 0.3158 ג. 0.7543
- (8) א. 0.0886 ב. 0.2889 ג. 0.3137 ד. 0.8778
- (9) $\frac{kp}{1+p(k-1)}$
- (10) א'

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 11 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

1. כללי 43

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A .

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B .

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.

שאלות:

- (1) נתון: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.6$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
- (2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?
- (3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?
- (5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (6) עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
 $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.9$.
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים?
- (7) הוכיח שאם: $P(A/B) = P(B/A)$, אז: $P(A) = P(B)$.

8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו!

- א. אם: $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.
 ב. מאורע A כלול במאורע B : $0 < P(B) < 1$, $P(A) > 0$, לכן: $P(A/B) < P(A)$.
 ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.
 ד. A ו- B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו- B מאורעות זרים.
 ה. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

תשובות סופיות:

- 1) א. כן.
 2) א. 0.28, ב. 0.18.
 3) א. 0.0064, ב. 0.1536.
 4) א. 0.5904, ב. 0.9984.
 5) א. 0.08^5 , ב. 0.3409.
 6) לא, הם תלויים.
 7) שאלת הוכחה.
 8) א. לא נכון, ב. לא נכון, ג. נכון, ד. לא נכון, ה. נכון.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 12 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 46

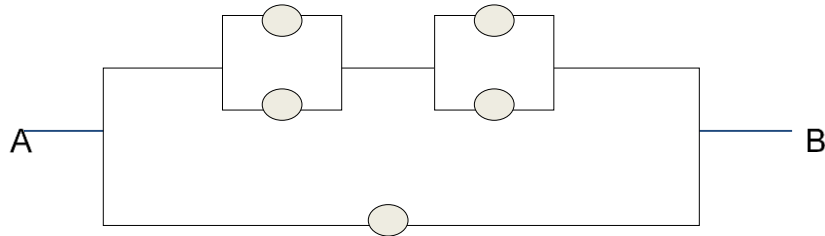
שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

- (1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
- ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
- מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
- ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
- (2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.
- כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
- ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
- ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
- ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?
- (3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי: בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם ייצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
- ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?
- ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?
- ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

- 4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 - אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 - מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
 - נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
- 5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 - נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 - נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
- 6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.
- חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
 - האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
 - ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?
- 7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?
 - אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
 - האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
 - אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
 - מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
 - אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8) נתונה המערכת החשמלית הבאה :



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p .
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B .
 הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P + (1 - P)(2P - P^2)^2$.

9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.
 א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?
 ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?
 ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10) נתונים שלושה מאורעות: A , B ו- C . ידוע ש: $P(A|B) = 1$, $P(A|C) = 1$.
 תנו דוגמא ספציפית למאורעות: A , B ו- C שבה המאורעות B ו- C תלויים.

11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:
 אם A ו- B בלתי תלויים, אז A ו- \bar{B} בלתי תלויים.

12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P כאשר: $0 < P < 1$.
 נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.
 B - המשחק הראשון היה ניצחון.
 מה ערכו של P , עבורו A ו- B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

13 טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים

$$\frac{N+1}{3(N-1)} : \text{שונים של המכחול הוא}$$

14 הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול: $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25 ב. 0.75 ג. 0.6 ד. 0.5
- (2) א. 0.2 ב. 0.267 ג. 0.524 ד. תלויים.
- (3) א. 0.2 ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06
- (4) א. 0.94 ב. 0.255 ג. 0.03 ד. 0.168
- (5) א. 15% ב. 0.692 ג. לא זרים ותלויים.
- (6) א. 0.65 ב. תלויים. ג. 0.5384
- (7) א. 8% ב. 0.733 ג. תלויים.
- ד. i. 0.478 ד. ii. 0.15
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) א. $\frac{19}{480,700}$ ב. $\frac{27,132}{480,700}$ ג. 0.4015
- (10) ראו סרטון.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) $\frac{1}{2}$
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 13 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 51

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.

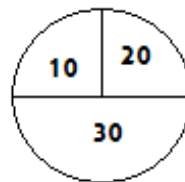
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה. סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

- (1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא :
 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 70 משפחות עם מכונית אחת.
 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 20 משפחות עם 3 מכוניות .
 בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (2) מהאותיות : A, B, C יוצרים קוד דו תווי.
 א. כמה קודים ניתן ליצור?
 ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
 ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
 בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים : מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו : $k = 1, 2, \dots, 4$, $P(X = k) = \frac{k}{A}$. מצאו את ערכו של A .

- (7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:
 20% צופים בערוץ 2.
 8% צופים בערוץ 1.
 10% צופים בערוץ 10.
 כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
 10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
 נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.1	0.3	0.35	0.25	$P(X)$

(2) להלן טבלה:

2	1	0	X
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$P(X)$

(3) להלן טבלה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

(4) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.343	0.147	0.21	0.3	$P(X)$

(5) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	$P(X)$

(6) 10.

(7) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	$P(X)$

(8) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.01	0.1	0.15	0.74	$P(X)$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 14 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. כללי 55

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$\text{מגדירים תוחלת באופן הבא: } E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

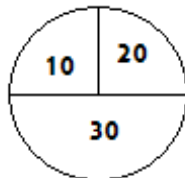
$$\text{מגדירים שונות באופן הבא: } V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD = \sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

40	20	0	-30	X
0.2	0.3	0.1	0.4	$P(X)$

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון. חשבו את: $E(X)$.

- (3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר. א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת וסטית התקן של X .

- (4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח. א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X .

5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	X
0.2		0.3		$E(X)$

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את: $V(X)$.

6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5-0 ו-5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי:

X	P
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{4}$

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של X ?

תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2, שונות: 796.

(2) 0.9.

(3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36, סטיית תקן: 1.603.

(4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	X
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(X)$

(5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

8	6	4	2	X
0.2	0.1	0.3	0.4	$P(X)$

(6) ראו טבלה:

5	0	-5	X
0.2	0.6	0.2	$P(X)$

(7) 2.33.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 59

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a, b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונויות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

$$\text{חישבנו קודם ש: } E(X) = 22.5 = \mu, \quad V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

שאלות:

(1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

(2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

(3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

(4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y = 7 - X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

(5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
 מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנייל?

(6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	X
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(X)$

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

- השלימו את פונקציית ההסתברות.
- חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
 כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
 מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

(7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X = k) = \frac{k}{A}$, $k = 1, 2, \dots, 4$.

א. מצא את ערכו של A .

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2} - 4$.

תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 14, שונות: 32.

(2) תוחלת: 8, שונות: 12.

(3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

(4) תוחלת: 3, שונות: 3.

(5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

0	25	50	100	X
0.929	0.05	0.02	0.001	$P(X)$

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

(6) ב. $V(X) = 1.8275$.

(7) א. $A = 10$. ב. $E(X) = 3$, $V(X) = 1$. ג. $E(X^3) = 35.4$, $V(X^3) = 616.84$.

ד. $E(Y) = -2.5$, $V(Y) = 0.25$.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 16 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

תוכן העניינים

1. כללי 62

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: X_n, \dots, X_2, X_1 משתנים מקריים אזי:

$$. E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם: X_n, \dots, X_2, X_1 משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$. V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4.

מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

(1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

(2) X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

(3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה: X - סכום הזכייה במשחק הראשון. Y - סכום הזכייה במשחק השני. נתון:

$$\sigma(X) = 3, \quad E(x) = 10$$

$$\sigma(Y) = 4, \quad E(y) = 12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

(4) ברולטה הסיכוי לזכות ב-30 ש"ח הוא חצי, ב-10 ש"ח רבע וכך גם ב-20 ש"ח. מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

(5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K = 2, 3, 4, 5, \quad P(X = K) = \frac{A}{K-1}$$

$$0 \text{ אחר } t$$

מצאו את ערכו של A .

א. חשבו את התוחלת והשונות של X .

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 9, שונות: 15.
- (2) 5.
- (3) תוחלת: 22, שונות: 5.
- (4) תוחלת: 90, שונות: 275.
- (5) א. $A = \frac{12}{25} = 0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.
ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 17 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

1. כללי 65

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

תוחלת: $E(X) = np$

שונות: $V(X) = npq$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
- (3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
 - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
 - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?
- (3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
 - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?
- (4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מסי' בעלי ההשכלה הנמוכה?

- (5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
- (6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
- (7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
- (8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את: $E(X^2)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
 ד. 0.0729 ה. 0.40954 ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45
- (2) א. 0.5314 ב. 0.2335 ג. 0.1493 ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449
- (3) א. 0.5314 ב. 0.0984 ג. 0.1143
 ד. תוחלת: -18, סטיית תקן: 14.697
- (4) א. 0.1789 ב. 2
- (5) א. 0.1956 ב. 0.4253
- (6) א. 0.85 ב. 0.182 ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8
- (7) א. 0.401 ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193
- (8) 7.5

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 18 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

תוכן העניינים

1. כללי 69

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
 X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.
 נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
 $X \sim G(p)$

פונקציית ההסתברות: $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$.

תוחלת: $E(X) = \frac{1}{p}$

שונות: $V(X) = \frac{q}{p^2}$

תכונות חשובות:

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,
 דהיינו, $P(X > k) = q^k \cdot P(X = (n+k) / X > k) = P(X = n)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- מה ההסתברות שהוצאו יותר מ-5 כדורים?
- אם הוצאו יותר מ-3 כדורים, מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

שאלות:

- (1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. שידגום 3 מוצרים.
 - ב. שידגום 4 מוצרים.
 - ג. שידגום 5 מוצרים.
 - ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
 - ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.
- (2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
- א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
- (3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
- א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים, אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
- (4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

- (5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?
- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
 ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
 ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.
 מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
 ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?
- (6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.
- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?
 ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
 ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
 ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגות הגבינה שדגם האדם?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.04512 ב. 0.0428 ג. 0.0407 ד. 0.6983 ה. 0.6983
- (2) א. 0.009 ב. 0.0001 ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234
 ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5
- (3) א. 0.999 ב. 0.875 ג. 0.03125 ד. 1
- (4) א. 0.1029 ב. 9.72
- (5) א. 0.06 ב. 0.7176 ג. 0.0729 ד. 9.487
- (6) א. 0.015 ב. 0.0215 ג. תוחלת: $63\frac{1}{3}$, שונות: $2777\frac{7}{9}$
 ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

1. כללי..... 72

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim pois(\lambda)$. התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

שאלות:

- (1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
- מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - מה שונות מספר הפניות בדקה?
- (2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
- מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
 - אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בכל החלק ישנן 15 טעויות?
 - אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
- (3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
- מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
- (4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
- מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
- (5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
- מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

- 6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.
- א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?
- ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

תשובות סופיות:

- | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|------------------------------|
| 1 | א. 0.0337 | ב. 0.9933 | ג. 0.1246 | ד. 0.5 |
| 2 | א. 0.084 | ב. 0.099 | ג. 0.151 | |
| 3 | א. 4 | ב. 0.407 | | |
| 4 | א. 0.1804 | ב. 0.8647 | ג. 0.6767 | ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41 |
| 5 | א. 0.0139 | ב. 0.2196 | ג. 0.6948 | |
| 6 | א. 16.7 | ב. 0.0708 | | |

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית

תוכן העניינים

1. כללי 75

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים, מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה. X מוגדר להיות מספר הפריטים ה"מיוחדים" שנדגמו. משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N, D, n) יסומן על ידי: $X \sim H(N, D, n)$.

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{התוחלת של ההתפלגות:}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad \text{השונות של ההתפלגות:}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

- א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
- ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

שאלות:

- (1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
- (2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.
 נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה (לא בטבלה).
 ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$.
- (3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה. אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה. זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
 א. האוכלוסייה גדולה מאד.
 ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
- (4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
 א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
 ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

תשובות סופיות:

(1) א. ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{5}{9}$.

3	2	1	0	x
$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$	$P(x)$

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{20}{27}$.

(2) א. $\frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$. ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

(3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

(4) א. 0.0256. ב. 0.8.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי 78

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

(1) נתון כי: $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

- א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X .
- ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W .
- ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T .
- האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?
- (2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

- א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?
- ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?
- (3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- ב. חשבו את התוחלת והשונות של X .
- ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

- (4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?
- ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?
- ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

- (5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
 - יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל). מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
 - ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?
- (6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
- הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
 - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
 - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
- ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
 - מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
 - מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
- (7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.
- נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?
 - בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

- 8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
 ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
 ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
 ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X) = 2$ וכן: $V(X) = 1$.
 חשבו: $E(X - 5)^2$.

- 10) הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.
- א. חשבו את ערכו של P .
 ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
 מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?
 ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?
 ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?
 ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

- 11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P . ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1 - P$ שמאלה ביחידה אחת. נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n .

- 12) למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).
 ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P .
 ג. לאלו ערכי P המשחק כדאי?

- 13** מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ. רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.
- 14** נתונות N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N . מתוך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל החולצות. נגדיר את X_1 - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1. נגדיר את X_N - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר N . חשבו את: $V(X_1 + X_N)$.
- 15** n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם, האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם. מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?
- 16** הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א' הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א' בהכרח ניגש למועד ב' ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב' הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון. נתון שלמועד א' נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס. מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?
- 17** לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה. יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו. מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.
- 18** לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים. נסמן ב- X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים. חשבו את $E(\sqrt{x+7})$.

19) בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.

א. מצאו את ההתפלגות של X .

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

תשובות סופיות:

1. א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1. ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
2. א. 0.03 ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
3. א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(x)$

- ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.
4. א. 0.9975 ב. 0.0172 ג. 1.0025
5. א. 0.375 ב. 0.6
6. א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

3	2	1	0	x
0.084	0.428	0.392	0.092	$P(x)$

- ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.
7. א. 0.4348 ב. 0.0923
8. א. 2.013 ב. 0.5256 ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
- ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.
9. 10.
10. א. 0.6 ב. 0.0384 ג. 0.0256
- ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11 ה. 0.24

$$P(X = k) = \binom{n}{k+n} \cdot p^{\frac{k+n}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \quad (11)$$

$$P(X = k) = \begin{cases} P & k = -1 \\ (1-P)^{k-1} \cdot P & k = 2, 3, \dots, \infty \end{cases} \quad (12)$$

$$0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ג.}$$

$$. P(X = k) = \binom{m+k}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}, k = 0, 1, \dots, \infty \quad (13)$$

$$. n \cdot \left(\frac{2}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \quad (14)$$

$$. \frac{2^n}{2n} \quad (15)$$

(16) ראו טבלה :

3	2	1	X
0.7099	0.2893	0.0008	P(X)

$$. \frac{e^{-6}}{6} [e^6 - 1] \quad (17)$$

$$. 2.675 \quad (18)$$

א. $P(X = k) = \frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}, k = 0, 1, \dots, n-2$. ב. הוכחה. (19)

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 22 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

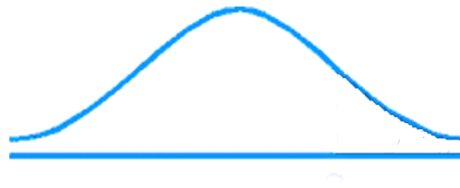
תוכן העניינים

1. כללי 85

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

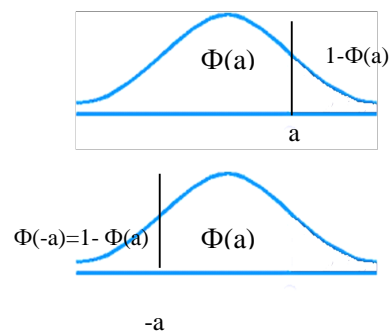
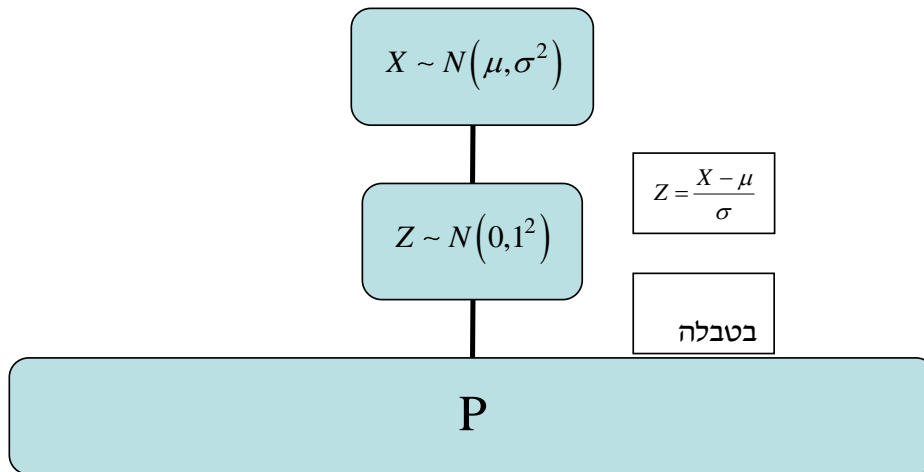
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא

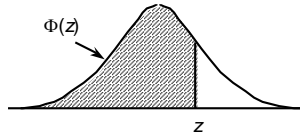
תסומן באות Z : $Z \sim N(0, 1^2)$.

$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

- (1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
- (2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
 - מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
 - מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
 - מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
- (3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
 - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
 - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
 - מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?
- (4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
 - מצאו את האחוזון ה-95.
 - מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225.
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה-20?
 - מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
 - מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 - במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
 - בעשירון העליון.
 - בממוצע.
 - בשונויות.
 - לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
 - 1.
 - 2.
 - 3.
 - אין לדעת.



- 9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- 10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T ?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T ?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
- 11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

ה. 50%	ד. 50%	ג. 0	ב. 2.28%	א. 89.25%	(1)
	ד. 68.26%	ג. 0%	ב. 3.76%	א. 0%	(2)
	ד. 0.383	ג. 39.44%	ב. 89.44%	א. 26.43%	(3)
				ה. 100%	
		ג. 2787.2	ב. 3958	א. 3812.8	(4)
	ד. 87.4	ג. 112.6	ב. 80.8	א. 119.2	(5)
		ג. 453.48	ב. 532.9	א. 500	(6)
	ד. 733	ג. 0.3446	ב. 100	א. 500	(7)
				ה. 267	
		ג. 1	ב. בממוצע.	א. 3	(8)
	ד. 0.3975	ג. 0.8563	ב. 0.0228	א. 0.1587	(9)
		ג. 0.1587	ב. 0.2266	א. 1925	(10)
	ד. 0.25	ג. 100	ב. 0.675	א. 0.1359	(11)

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 23 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

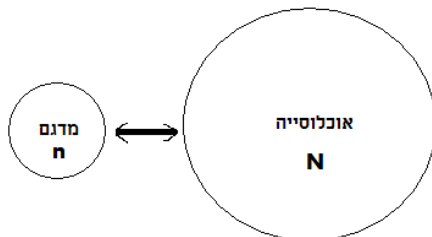
1. כללי 93

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	ממוצע
μ	\bar{X}	
P	\hat{p}	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	50
1	250
2	350
3	300
4	50
	סך הכול $N = 1000$

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. \bar{X} = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 24 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

96	1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי
103	2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי
105	3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית
110	4. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_x = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושוונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
 מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושוונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
 דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
 מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?

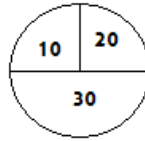
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה ביישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 - מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 - מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 - בקבוקי היין שבארגו נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 80 וסטיית תקן 4.
- מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 - מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 - הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
 ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
 ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
 ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

- 12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?
 ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
 ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם \bar{X} לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונויות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.
- ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- \bar{X} קבוע.
- ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
- ד. μ ו- \bar{X} יהיו קבועים.

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
 ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.
 ד. 2.
 ה. 78.
 ו. 10.6.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(X)

ב. $\sigma = 0.973$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\mu = 2.05$

ג. $\sigma(\bar{X}) = 0.486$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\mu_{\bar{x}} = 2.05$

(3) $\sigma(\bar{X}) = 1.21$, $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

- (4) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0 ד. 0.1974
- (5) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 0.178.205
- (6) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (7) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5
- (8) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (9) א. להלן טבלה:

30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	P(X)

- א. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.
- ב. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
- ד. 0.8997
- (10) 0.0475
- (11) 0.1814
- (12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 0.271
- (13) 0.5
- (14) ב'
- (15) ד'
- (16) ג'

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T = \sum_{i=1}^n X_i$.
 כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: X_1, \dots, X_n -
 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:
 התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T) = n\mu, V(T) = n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי: $Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$,
 אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \rightsquigarrow N(n\mu, n\sigma^2)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪.
 נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורתיהם לסניף בנק.
- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
 - מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

שאלות:

- (1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
 ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
 ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
- (2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
 ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
 מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
 ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?
- (3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
 ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

תשובות סופיות:

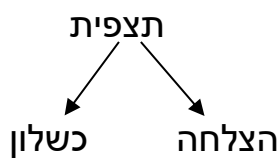
- (1) א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5
- (2) א. תוחלת 3000 מ"ל, סטיית תקן 40 מ"ל. ב. 0.0062
 ג. סעיף א'- לא משתנה, סעיף ב'- לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.
- (3) א. 0.0571 ב. 2036.8

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר: $q = 1 - p$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n : $Y \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y) = np$.

שונות: $V(y) = npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n, p)$, ומתקיים ש:

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \rightsquigarrow N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

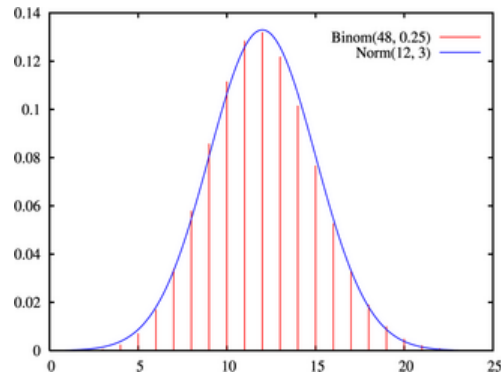
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
- א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
- א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
- א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אךן יגיע הוא 0.9.
- א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---|------------|------------|----|
| ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649. | ב. 0.3758. | א. 0.201. | (1 |
| | ב. 0.6915. | א. 0.9332. | (2 |
| | | 0.1611. | (3 |
| ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778. | ב. 0.9406. | א. 0.9406. | (4 |
| | ב. 0.398. | א. 0.015. | (5 |
| | | 0.9996. | (6 |
| | | 0.8643. | (7 |

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
 Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם.}$$

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n = 200$:

מספר המובטלים : $Y = 20$.

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ : פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
 נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

$$\text{אם: } np \geq 5 \text{ \& } nq \geq 5, \text{ אזי: } \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \cdot Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
 התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
 1. $n \cdot p \geq 5$
 2. $n \cdot (1 - p) \geq 5$
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
 1. $n \cdot p \geq 10$
 2. $n \cdot (1 - p) \geq 10$
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- מה ההסתברות שהשכיחות היחסית (\hat{p}) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

שאלות:

- (1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
- מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
- (2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
- (3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
- מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
 - מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
 - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
- (4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
- מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
 - מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?
 - כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
 - מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
- (5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6 נתון ש- $X \sim B(n, p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $E(\hat{P}) = p$, $V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

- (1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.
- (2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.
- (3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.
- (4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 0.481. ד. 0.77436.
- (5) 0.0154.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 25 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 114

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ .
- שגיאת אמידה: $|\hat{\theta} - \theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
 - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $E(\hat{\theta}) = \theta$: יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ .
 - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם:}$$

$$E(\bar{x}) = \mu \quad \text{לכן } \bar{x} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} \mu \text{ . כמו כן, טעות תקן: } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$$

פרופורציה באוכלוסייה p :

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:}$$

$$E(\hat{p}) = p, \quad \text{לכן } \hat{p} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} p \text{ . כמו כן טעות התקן: } \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

שונות האוכלוסייה σ^2 :

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{האומד הנקודתי שלו יהיה:}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{ולכן } S^2 \text{ הינו אומד חסר הטיה ל-} \sigma^2 \text{ .}$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
 להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.
 אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$.
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
 - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של המדגם.
 - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

- א. כאשר n קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומדן חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) X_1, X_2, \dots, X_{16} מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומדן ל- μ היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומדן חסר הטיה?

- א. אומדן שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומדן שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומדן שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומדן שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
- (2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
 ב. 100 ג. 2342 ד. 58
- (3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
- (4) א. 8.1 ב. 3.16
- (5) ד'
- (6) ג'
- (7) ד'
- (8) ד'
- (9) ג'

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 26 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 119 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה
- 124 2. קביעת גודל מדגם
- 126 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$.

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?

2. מה המשתנה באוכלוסייה?

3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

4. מהו רווח הסמך?

5. מה אורך רווח הסמך?

6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: \bar{x} .

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

• אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.

• ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.

• ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.

• ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- 1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
 - מה רווח הסמך לפרמטר?
 - מהי רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רווח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- 3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- 4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- ממוצע המדגם.
 - שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- מהו ממוצע המדגם?
 - מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
 - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5%?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
 - המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
 - רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\bar{X} = 6$.

ג. $\bar{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג. μ . ד. $9200 < \mu < 9800$.

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

2) $4920.6 < \mu < 4979.4$

3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.

ג. ראה סרטון.

4) א. $10,116 < \mu < 9284$. ב. הסטיה המירבית בין \bar{x} ל- μ היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

6) א. $4.42 < \mu < 83.5$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

8) ב'.

9) ג'.

10) ד'.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב

$$.n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
 א. כמה מתגייסים יש לדגום?
 ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ . מהו גודל המדגם הנדרש?

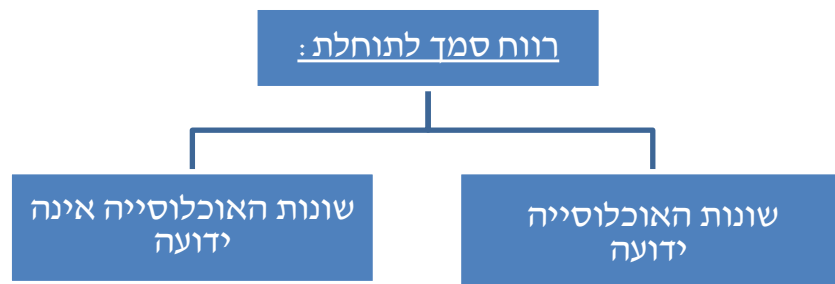
תשובות סופיות:

- (1) .780
 (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.
 (3) $n = 62$.

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

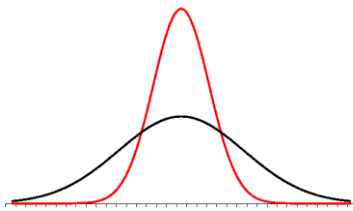


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
 ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
 ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S = 13$ ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27. א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
 ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13. א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
 ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
 ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח $\sigma = 20$. סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל $S = 20$. למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
 א. סטטיסטיקאי א'.
 ב. סטטיסטיקאי ב'.
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

- (1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א. $96.63 < \mu < 107.37$ ב. $96.90 < \mu < 107.10$ ג. ראה בסרטון.
- (5) $3.149 < \mu < 3.351$
- (6) $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 27 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

129 1. רווח הסמך לפרופורציה

132 2. קביעת גודל מדגם

רווח הסמך לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{ מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
 ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
 ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
 א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).
 ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
 ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:
 $0.08 < p < 0.18$
 א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
 ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 40-35 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
 ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

תשובות סופיות:

- (1) א. $.18.1\% < p < 29.9\%$
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
 ג. $.14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א. $0.545 \leq p \leq 0.655$
 ב. האורך שלו היה קטן.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 52
 ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א. $.30.9\% > p > 22.5\%$
 ב. $.60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 200

קביעת גודל מדגם:

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$. החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.

ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד (\hat{p}).

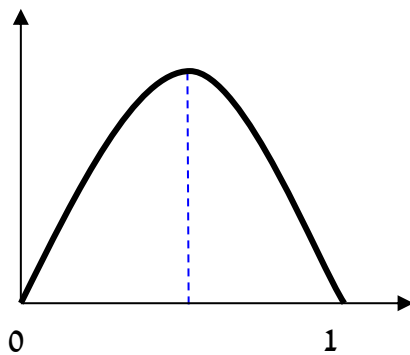
$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$.n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין לנו יודעים את \hat{p} .

נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על \hat{p} נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p} = 0.5$.

$$.n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

שאלות:

- (1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- (2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
 א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
 ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
- (3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
 א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
 ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
 ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
 ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
- (5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
 א. כמה מחוסנים יש לדגום?
 ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
 ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% מדוע הוא קטן מ-3%?

תשובות סופיות:

- (1) .1068
- (2) א. .423 ב. .271
- (3) א. .601 ב. 108,000 ₪.
- (4) א. .335 ב. $0.367 < p < 0.473$.
- ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.
- (5) א. .1509 ב. 0.15 ± 0.02 ג. ראה סרטון.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

פרק 28 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

135	1. הקדמה
139	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
 הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
 בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
 אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מה מסקנת המחקר?
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
 ב. מה המשתנה הנחקר?
 ג. מה הפרמטר הנחקר?
 ד. מה השערות המחקר?
 ה. מה מסקנת המחקר?
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
 (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.
- ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

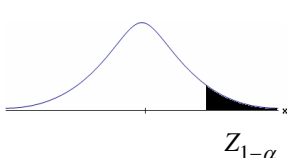
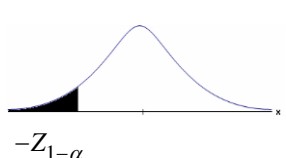
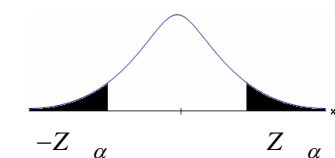
פרק 29 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 141 1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה
- 145 2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה)

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :
			
דוחים את H_0 ■	דוחים את H_0 ■	דוחים את H_0 ■	

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה H_0 אם מתקיים:
--	--	--	-----------------------

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: $X =$ יבול העגבניות בטון לעונה.

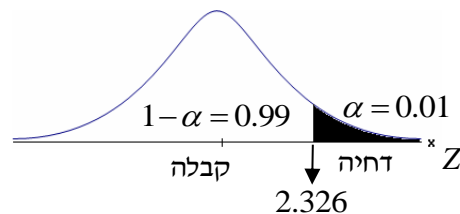
הפרמטר: $\mu =$ תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1. $X \sim N$

2. $\sigma = 2.5$

כלל הכרעה:

נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב: $Z_{\bar{x}} = \frac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 ס"מ³ וסטיית תקן 20 ס"מ³. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 ס"מ³ במדגם בגודל 25. א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%? ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) נקבל H_0 , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל H_0 , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$, דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. σ ידועה			תנאים:
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

כאשר בהנחת השערת האפס: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה: $X =$ משקל בק"ג.

פרמטר: μ .

$$H_0: \mu = 65$$

השערות: $H_1: \mu > 65$

תנאים:

$$1. X \sim N$$

$$2. \sigma = 12$$

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$. המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100$, $\bar{x} = 74$. מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
 ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
 ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

- 6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
 בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- 7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
 - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
 - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- 8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\text{ value} = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א. $H_0: \mu = 100$
 ב. 0.1056 ג. 0.1056
 ד. $H_1: \mu < 100$
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן ג. נכריע שאין כיול. ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסאי תעשייה וניהול

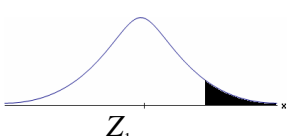
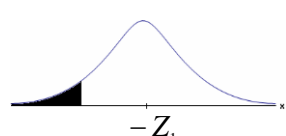
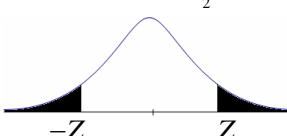
פרק 30 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

- 150 1. התהליך
- 153 2. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית

התהליך:

רקע:

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0 :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
- א. רשמו את ההשערות.
 ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
- א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
- א. $\alpha_1 = \alpha_2$.
 ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.
 ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.
 ד. המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) א. $H_0: p = 0.2$
 ב. $H_1: p \neq 0.2$
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה H_0 .
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \ \& \ n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} < p_0$	p-value

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
 א. מהי מובהקות התוצאה?
 ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.
 א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
 ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
 ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
 ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5%:
 (בחרו בתשובה הנכונה)
 א. יקבל את השערת האפס
 ב. ידחה את השערת האפס.
 ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה:
 "במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p\text{-value}$ של 3%, לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי), היינו מקבלים ערך $p\text{-value}$ של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0455.
ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0 .
ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0548. ב. 0.0548. ג. מעל 0.0548.
ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3) $p_v = 0$, נדחה את H_0 .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.