

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425



תוכן העניינים

1.	יסודות ההסתברות (פרק 2 ממ"ח 10)	1
2.	פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים (פרק 2 ממ"ח 10)	5
3.	קומבינטוריקה - כלל המכפלה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	14
4.	קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	18
5.	קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים (פרק 2,1 ממ"ח 10)	21
6.	קומבינטוריקה - סידור עצמים במעגל (פרק 2,1 ממ"ח 10)	23
7.	קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	26
8.	קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	28
9.	קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	31
10.	קומבינטוריקה - שאלות מסכמות (פרק 2,1 ממ"ח 10)	35
11.	כלל ההכלה וההפרדה (פרק 2,1 ממ"ח 10)	42
12.	הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד (פרק 3 ממ"ח 11)	47
13.	הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד (פרק 3 ממ"ח 11)	50
14.	דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (פרק 3 ממ"ח 11)	54
15.	תלות ואי תלות בין מאורעות (פרק 3 ממ"ח 11)	59
16.	שאלות מסכמות בהסתברות (פרק 3 ממ"ח 11)	63
17.	המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות (פרק 4 ממ"ח 20)	68
18.	המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (פרק 4 ממ"ח 20)	72
19.	המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד (פרק 4 ממ"ח 20)	76
20.	המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית (פרק 4 ממ"ח 20)	79
21.	תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (פרק 4 ממ"ח 20)	82
22.	התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית (פרק 4 ממ"ח 20)	85
23.	התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית (פרק 4 ממ"ח 20)	89

תוכן העניינים

24.	התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות אחידה (פרק 4 ממ"ח 20).....	92
25.	התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית (פרק 4 ממ"ח 20).....	95
26.	התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית (פרק 4 ממ"ח 20).....	98
27.	התפלגויות בדידות מיוחדות -התפלגות בינומית שלילית (פרק 4 ממ"ח 20).....	101
28.	המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (פרק 4 ממ"ח 20).....	104
29.	המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (פרק 5 ממ"ח 21).....	111
30.	התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית (פרק 5 ממ"ח 21).....	120
31.	התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה (פרק 5 ממ"ח 21).....	123
32.	התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית (פרק 5 ממ"ח 21).....	126
33.	טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף (פרק 5 ממ"ח 21).....	134
34.	משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת (פרק 6 ממ"ח 31).....	137
35.	משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים (פרק 7,6 ממ"ח 31,41).....	143
36.	המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות (פרק 7,6 ממ"ח 31,41).....	150
37.	התפלגות מולטינומית (פרק 6 ממ"ח 31).....	153
38.	קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית (פרק 6 ממ"ח 31).....	156
39.	קשרים בין התפלגויות מיוחדות (פרק 6 ממ"ח 31).....	159
40.	התפלגות מינימום ומקסימום (פרק 6 ממ"ח 31).....	179
41.	נוסחת התוחלת המותנית (פרק 7 ממ"ח 41).....	183
42.	נוסחת השונות המותנית (פרק 7 ממ"ח 41).....	186
43.	חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים (פרק 7 ממ"ח 41).....	188
44.	מערכות חשמליות (כללי).....	191
45.	פונקציה יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ח 41).....	194
46.	תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ח 41).....	200
47.	סכום מקרי(פרק 7 ממ"ח 41).....	205
48.	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי (פרק 8 ממ"ח 41).....	207
49.	אי שוויונים בהסתברות(פרק 8 ממ"ח 41).....	223
50.	אמידה נקודתית (פרק 9 ממ"ח 51).....	231
51.	בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) (פרק 9 ממ"ח 51).....	261

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 1 - יסודות ההסתברות (פרק 2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 1

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A, B, C . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A = \{5, 6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B = \{2, 4, 6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega| = 6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A| = 2, |B| = 3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון x	מספר התלמידים – השכיחות f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$.

שאלות:

(1) מהאותיות E, F ו- G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E .

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

(2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

(3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

(4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

(5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- (6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
 i. התקבל פעם אחת עץ.
 ii. התקבל לפחות פלי אחד.
 ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
 ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$
 ב. $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$, $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$
 ג. $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$
- (2) א. $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{pmatrix} \right\}$
 ב. $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$
 ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.
- (3) א. 0.4. ב. 0.4. ג. 0.5.
 (4) א. 0.22. ב. 0.78. ג. 0.32.
 (5) א. 0.1. ב. 0.2. ג. 0.8.
 (6) א. $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$
 ב. $A = \{PPE, PEP, EPP\}$, $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$
 ג. $\bar{D} = \{EEE\}$
 ד. $\frac{1}{8}$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים
(פרק 2 ממ"ח 01)

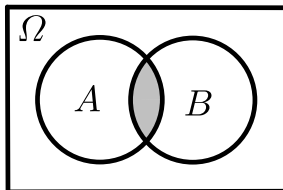
תוכן העניינים

1. כללי 5

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

פעולת חיתוך:

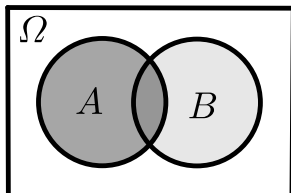


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A \cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B = \{2, 4, 6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A \cap B = \{6\}$.

פעולת איחוד:



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A \cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- A או ב- B .
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

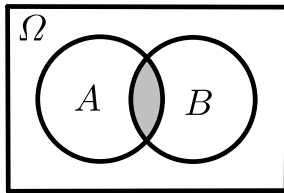
דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

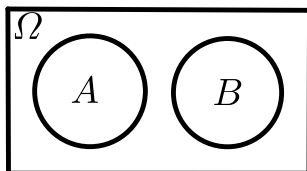
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
 $A \cap B = \{ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

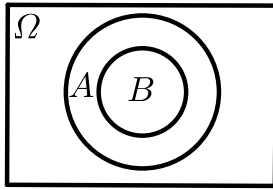
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A \cap B) = 0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$ והאפשרות לקבל 3

היא: $B = \{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A \cap B = \{ \}$.

מאורעות מוכללים:

נתונים שני מאורעות A ו- B , השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכלל במאורע A אם כל איברי
המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B
מוכללות בתוך מאורע A .

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6\} \\ B &= \{2, 4\} \end{aligned} \quad \text{למשל:}$$

שאלות:

- (1) מהאותיות E, F ו- G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - במילה נמצאת האות E .
 - B - במילה אותיות שונות.
- א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B .
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
- $$A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.
- נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
- להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .
- קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
- $$A \cup \bar{A}, \bar{\phi}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \phi, A \cap \phi, \bar{A}$$

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\overline{A} \cap B$

ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$

ה. $\overline{\overline{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

(9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

(10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

(11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A) = 0.6$,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A} \cap B)$.

(12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

(13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב. שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$.
- ב. האם A ו- B מאורעות זרים?
- ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15 A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$
מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א. $A \cap B = B \cap A$.
- ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$.
- ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$.
- ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

17 נתון ש- A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$.

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$?
- ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$?
- ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $P(A \cup B)$?
- ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A \cup B)$?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- (19)** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיסי האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

(20) הוכיחו: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.

- (21)** A ו- B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$?

תשובות סופיות:

- (1) א. $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$ ב. $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- (2) א. $B \cap \bar{A}$ ב. $A \cap \bar{B}$ ג. $A \cap B$ ד. $A \cup B$ ה. $\bar{A} \cap \bar{B}$ ו. $\bar{B}$
- (3) א. $\bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9, B = 0, 1, 2, 3, 4, A = 0, 2, 4, 6, 8$
 $A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, A \cap B = 0, 2, 4$
- ב. $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- (4) $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$
 $A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\phi} = \Omega, A \cap \bar{A} = \phi$
- (5) א. $A \cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A \cup B$: כל גובה אפשרי.
 ג. $\bar{A} = \bar{A} \cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
 ה. $A = \bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.
- (6) א. $A \cap B \cap C$ ב. $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ג. $A \cup B \cup C$ ד. $\bar{C}$ ה. $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- (7) א. $P(A \cup B) = 0.24$ ב. $P(A \cap B) = 0.04$ ג. $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- (8) א. $P(A \cap B) = 10\%$ ב. $P(A \cup B) = 50\%$ ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- (9) א. $P(A \cap B) = 0.2$ ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$ ג. $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- (10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- (11) א. כן. ב. $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- (12) הטענה הנכונה היא ג'.
- (13) א. 0.05. ב. 0.95.
- (14) א. $P(A \cap B) = 0.06$ ב. לא. ג. $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- (15) $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- (16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- (17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A \cup B) = 0.5$ ד. $P(A \cup B) = 0.3$
- (18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- (19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) נכון.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 14

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים :
- הטלת קובייה פעמים.
 - מספר תלת ספרתי.
 - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות :
 - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- המספר הוא זוגי.
 - במספר כל הספרות שונות.
 - במספר כל הספרות זהות.
 - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- כולם ירו בקומה החמישית.
 - כולם ירדו באותה קומה.
 - כולם ירדו בקומה אחרת.
 - ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
 - ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
 - ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- א. בקוד אין את הספרה 5.
 - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

תשובות סופיות:

(1	א. 36	ב. 900	ג. 70	ד. 90
(2	א. 36	ב. i. $\frac{1}{36}$	ב. ii. $\frac{1}{9}$	
(3	א. 0.5	ב. 0.3024	ג. 0.0001	ד. 0.9999
(4	א. $\frac{1}{8^5}$	ב. $\frac{1}{8^4}$	ג. 0.205	ד. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
(5	א. 3375	ב. 2730		
(6	א. $\frac{1}{216}$	ב. $\frac{5}{18}$	ג. $\frac{13}{18}$	ד. $\frac{215}{216}$
(7	א. $\frac{23^5}{26^5}$	ב. $\frac{1}{26^4}$	ג. $1 - \frac{1}{26^4}$	ד. $\frac{1}{26^2}$
(8	א. 0.9^a	ב. $1 - 0.9^a$	ג. 0.5^a	
(9	2^n			

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי..... 18

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

הערה: $0! = 1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba ?

שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?
שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

- 1) א. 0.24 ב. 0.120
- 2) א. 0.2 ב. 0.8 ג. 0.022
- 3) א. 0.362880 ב. 0.2880
- 4) א. 0.3628800 ב. 0.2 ג. 0.8 ד. $\frac{1}{45}$
- 5) א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$
- 6) א. 0.75 ב. 0.014 ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 21

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2

$$r\text{-}n_1 \text{ זהים מסוג } r : \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K

שאלות:

(1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

(2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ב, ע, ג?

(3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

(4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

(5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

(6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור, אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

(1) 10.

(2) 60.

(3) 90.

(4) 20.

(5) $\frac{1}{210}$.

(6) 12600.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 6 - קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. סידור עצמים במעגל 23

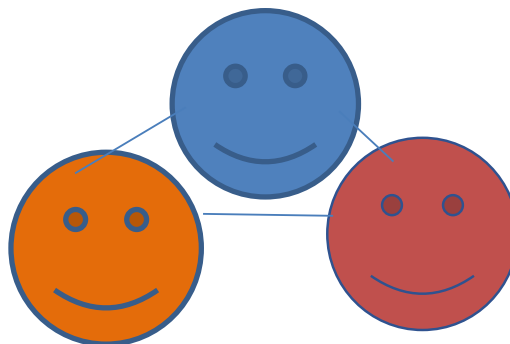
קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא: $(n-1)!$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד. בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



שאלות:

- (1) מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל. במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:
- א. גווני האפור צמודים זה לזה.
 - ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.



- (2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים. הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציור.
 - ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.



- (3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט. הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.
 - ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.



- (4) n בנים ו- n בנות הסתדרו במעגל באקראי.
- א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?
 - ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?
 - ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

תשובות סופיות:

(1) א. 2177280 ב. 7776

(2) א. $\frac{1}{9!}$ ב. $\frac{2}{9}$

(3) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{15}$

(4) א. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ ב. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ ג. $\frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה (פרק 1,2
ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 26

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

דוגמה:

בחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3 = 1,000$, $k = 3$, $n = 10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A (עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
- ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
- ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
- ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8000 ב. 6840
- (2) א. 0.0001 ב. 0.6561 ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04 ב. 0.48
- (5) א. 40^5 ב. 78,960,960

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 28

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- א. אין שום הגבלה לבחירה.
 - ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - ג. לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
- יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם: נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
 - ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
 - ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
 - ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

(6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

(7) הוכיחו כי:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(8) $2n$ בנים ו- $2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
 א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

(1)	א. 53130	ב. 20475	ג. 3003
(2)	א. 252	ב. 100	ג. 100
			ד. 60
(3)	א. 0.1117	ב. 0.1445	ג. 0.9819
(4)	א. 0.02	ב. 0.187	ג. 0.972
			ד. 0.00246
(5)	א. 0	ב. 0.1923	ג. 0.009
			ד. 0.837
(6)	א. $6.45 \cdot 10^{-5}$	ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$	ג. 0.3225
(7)	שאלת הוכחה.		

(8) א. $\binom{2n}{n}^2$ ב. $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 9 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 31

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

רקע:

מספר האפשרויות לבחור k עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך n עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים, ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת:

$$\cdot \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

דוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך אוכלוסייה של n עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ללא התחשבות בסדר הבחירה
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
ללא החזרה	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

שאלות:

- (1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?
- (2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?
- (3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:
 - א. הכדורים זהים.
 - ב. הכדורים שונים זה מזה.
- (4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:
 - א. המשחקים שונים זה מזה.
 - ב. במשחקים זהים זה לזה.
- (5) מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 = 3$.
- (6) מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$.
- (7) במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?
- (8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה אות יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?
- (9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:
 - א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.
 - ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

(10) ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים.

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

(11) ישנם k כדורים להכניס ל- n תאים ($n > k$).

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

תשובות סופיות:

(1) .495

(2) .21

(3) א. .45 ב. .6561

(4) א. 4^{10} ב. .286

(5) .4

(6) .1771

(7) .15

(8) .10

(9) א. $\frac{1}{4845}$ ב. $\frac{1}{8855}$

(10) א. 7776 ב. .252 ג. .720 ד. .6

(11) א. n^k ב. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ ג. $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ד. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 10 - קומבינטוריקה - שאלות מסכמות (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כללי 35

קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
 - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ג. אין תפקידים שונים בוועד.

- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
 - א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ב. כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
 - ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
 - א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
 - ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
 - ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
 - ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

- (4) בארונות 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונות. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
 - א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
 - ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
 - ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
 - ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- (5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
 - ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
 - ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
 - ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- (6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- א. מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
 - ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
 - ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
 - ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
 - ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
 - ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
 - ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- (7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- א. אין בוועדות תפקידים.
 - ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
 - ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- (8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- א. ללא הגבלה.
 - ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
 - ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- (9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10) 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.

כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

- א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?
- ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?
- ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?
- ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

(11) ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות

ישיבה נגד כיוון הנסיעה.

4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.

חלון				
	מעבר			

- א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?

ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?

ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).

ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?

ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?

ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12) סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות

ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.

- א. כמה סיסמאות שונות יש?
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

(13) מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים

שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n .

- א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
- ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
- ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

(14) שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים. בטאו באמצעות n את הסיכוי

שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).
חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות a):
- בקוד אין את הספרה 5.
 - בקוד מופיעה הספרה 3.
 - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 16** זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?
- 17** בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
 - מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?
- 18** במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
- מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
 - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
 - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
 - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
- 19** לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
- מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
 - מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
 - מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?
- 20** מסדרים n כדורים שונים ב n תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא i ($1 \leq i \leq n$) יהיו בדיוק k כדורים?
- 21** בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
- כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
 - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
 - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

(22) מטילים קובייה הוגנת k פעמים.

- א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא j ?
- ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא i ?
- ג. עבור $i \leq j$, מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא j וגם התוצאה הכי קטנה היא i ?

תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000 ב. 78,960,960 ג. 658008
- (2) א. 810,000 ב. 657,720 ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000 ב. 1,404,000 ג. 5,616,000 ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024 ב. 0.00098 ג. 0.05933 ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098 ב. 0.17798 ג. 0.02929 ד. 0.02197
- (6) א. $\frac{1}{4096}$ ב. $\frac{1}{32,768}$ ג. 0.205 ד. 0.795
- ה. 0.0105 ו. 0.5129 ז. 0.1071
- (7) א. 4,200 ב. 50,400 ג. 604,800
- (8) א. 604,800 ב. 2,880 ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512 ב. 0.014 ג. 0.059 ד. $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320 ב. 0.1071 ג. 0.2142 ד. 0.0357
- ה. 0.5714 ו. 0.1429 ז. 0.0143 ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176 ב. 45,239,040 ג. 48,484,800
- (13) א. $\frac{n!}{3!(n-3)}$ ב. $n \cdot (n-1)(n-2)$ ג. n^3
- (14) $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א. 0.9^a ב. $1 - 0.9^a$ ג. 0.5^a
- (16) לפחות 25 פעמים.
- (17) א. 0.35721 ב. 0.1759
- (18) א. 0.75 ב. 0.075 ג. 0.375 ד. 0.15
- (19) א. 0 ב. $\frac{450}{729}$ ג. $\frac{90}{729}$
- (20) $\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$
- (21) א. 720 ב. 360 ג. 432

$$(22) \quad \text{א. } \frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \quad \text{ב. } \frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \quad \text{ג. } \frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k}$$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 11 - כלל ההכלה וההפרדה (פרק 1,2 ממ"ח 01)

תוכן העניינים

1. כלל ההכלה וההפרדה 42

כלל ההכלה וההפרדה:

רקע:

אנו מעוניינים בנוסחה לחישוב הסתברות של איחוד מאורעות. אם קיימים n מאורעות זרים בזוגות, הסיכוי לאיחוד המאורעות הוא סכום ההסתברויות של כלל המאורעות.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

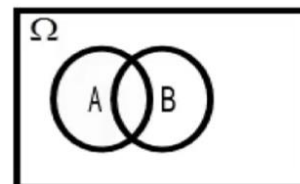


אם דנים במאורעות שאינם בהכרח זרים בזוגות, סכימת ההסתברויות של כלל המאורעות תוביל לספירה כפולה של חלק מהמאורעות. למשל: אדם מטיל קובייה. מה הסיכוי לקבל תוצאה זוגית או את התוצאה 2 לכל היותר?

בדוגמה שהוצגה לעיל מדובר בהסתברות לאיחוד שני מאורעות ומתקיים:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:

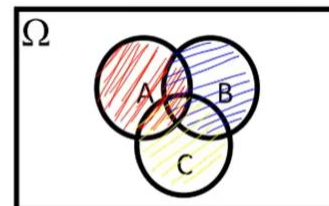


נוסחה זו היא נוסחת ההכלה וההפרדה לשני מאורעות.

במקרה של שלושה מאורעות נוסחת ההכלה וההפרדה תיראה כך:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:



כעת נכליל את הנוסחה ל- n מאורעות:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מטילים חמש קוביות. מה ההסתברות שלפחות אחת מהתוצאות הבאות לא תתקבל באף אחת מהקוביות: 1, 2, 3, 4?

שאלות:

(1) רני קיבלה ליום הולדתה חמש מתנות וסידרה אותן בשורה מימין לשמאל.



- א. מה ההסתברות שהמתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה הראשונה בשורה והמתנה העטופה בסרט ירוק לא תהיה האחרונה בשורה?
 ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהמאורעות הבאים יתרחש?
 i. המתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה השנייה בשורה.
 ii. המתנה הקטנה ביותר לא תהיה השנייה בשורה.
 iii. המתנה העטופה בנייר חום לא תהיה השלישית בשורה.

(2) אדם הטיל קובייה ארבע פעמים. נגדיר את המאורעות הבאים:



- A: התוצאה 1 התקבלה לפחות פעם אחת.
 B: התוצאה 2 התקבלה לפחות פעם אחת.
 C: התוצאה 3 התקבלה לפחות פעם אחת.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. $P(A \cap B)$
 ב. $P(A \cap B \cap C)$

(3) מפזרים באופן מקרי חמישה כדורים בעשרה תאים. הכדורים ממוספרים מ-1 עד 5. אין הגבלה על מספר הכדורים בכל תא.



חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. לפחות אחד משני התאים השמאליים ריק.
 ב. לפחות אחד משלושת התאים השמאליים ריק.
 ג. שני התאים השמאליים תפוסים.
 ד. ארבעת התאים השמאליים תפוסים.

(4) בוחרים מספר אקראי מהמספרים: $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$.
 מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק לפחות באחד מהמספרים: 2, 3, 5?



- (5) עשרה ילדי גן נתבקשו לבחור גיבור-על מרשימה של 14 גיבורי-על. אם כל ילד בוחר באקראי מתוך הרשימה ללא תלות בילדים אחרים, מה ההסתברות שבדיוק שישה גיבורי-על ייבחרו?

- (6) ניסוי מקרי הוא בעל מרחב המדגם: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$.
 $P(n)$ הוא ההסתברות לקבל את התוצאה n ממרחב המדגם.
 נתון ש: $P(n) = A \cdot 0.5^n$. כמו כן נתון ש- A הוא קבוע חיובי.
 א. מצאו את ערכו של הפרמטר A .
 ב. חשבו את: $P(n > 6)$.
 ג. חשבו את הסיכוי שהתוצאה שתתקבל בניסוי תהיה אי-זוגית.

- (7) יוצרים מספר בן 8 ספרות מהספרות: 1, 2, ..., 8. במספר שיוצרים כל ספרה מופיעה בדיוק פעם אחת.
 א. מה ההסתברות שבמספר לא מופיעים הרצפים: 12, 34, 56?
 ב. מה ההסתברות שבמספר מופיע לפחות אחד מהרצפים: 123, 234, 567?



- (8) מסדרים בשורה שמונה נעליים שהן ארבעה זוגות.
 מה ההסתברות שלפחות שתי נעליים שהן זוג יהיו זו לצד זו בשורה?

- (9) מפזרים באופן מקרי m כדורים ל- n תאים שונים ($m \geq n$). תא יכול להכיל גם יותר מכדור אחד. מצאו ביטוי להסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלתם.



- (10) בכיתה יש n תלמידים, ולכל תלמיד יומן אישי. המורה אסף את היומנים של כל התלמידים. יום למחרת חילק לכל תלמיד יומן מהיומנים שאסף, אך החלוקה הייתה אקראית (תלמיד לא בהכרח קיבל את היומן האישי שלו).
 א. מה ההסתברות שאף תלמיד לא קיבל את היומן האישי שלו?
 ב. למה שואפת ההסתברות מהסעיף הקודם אם: $n \rightarrow \infty$?



- 11** על השולחן עשרה מסמכים. מכניסים כל מסמך לאחת משמונה תיקיות ריקות באופן אקראי. לכל תיקייה צבע אחר. אין הגבלה על מספר המסמכים שיכולים להימצא בכל אחת מהתיקיות.
- א. מה ההסתברות שבתיקייה האדומה יהיו בדיוק שני מסמכים?
- ב. מה ההסתברות שהתיקייה הצהובה תישאר ריקה וגם בתיקייה הירוקה יהיה לפחות מסמך אחד?
- ג. מה ההסתברות שיהיו לפחות שש תיקיות ריקות?
- ד. מה ההסתברות שיהיו בדיוק שתי תיקיות ריקות?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.65 ב. $\frac{59}{60}$
- (2) א. 0.233 ב. $\frac{1}{12}$
- (3) א. 0.8533 ב. 0.9565 ג. 0.1467 ד. 0.0096
- (4) 0.734
- (5) 0.1706
- (6) א. 1 ב. 0.015625 ג. $\frac{2}{3}$
- (7) א. 0.6756 ב. 0.0496
- (8) 0.6571
- (9) $1 - \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (n-i)^m \cdot (-1)^{i-1}}{n^m}$
- (10) א. $\sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!}$ ב. 0.3679
- (11) א. 0.2416 ב. 0.2068 ג. 0.00003 ד. 0.4286

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 12 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד (פרק 3 ממ"ן 11)

תוכן העניינים

1. כללי 47

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש / לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

- (1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
- (2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
- (3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.
- (4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
- (5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
- (6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
- (7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
- (8) נבחרה משפחה בת שלושה ילדים, ונתון שהילד האמצעי בן.
מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?
- (9) בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו 4 ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?
- (10) חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה לצד זה באקראי,
בכיסאות מספר 5 עד 9. ידוע שערך ודין התיישבו זה ליד זה.
מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו-7?

תשובות סופיות:

(1) 0.2

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 0.5

(4) 0

(5) $\frac{1}{6}$

(6) $\frac{2}{11}$

(7) $\frac{1}{3}$

(8) $\frac{3}{4}$

(9) $\frac{2}{3}$

(10) $\frac{1}{4}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 13 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד (פרק 3 ממ"ן 11)

תוכן העניינים

1. כללי 50

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

- (1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
- א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?
- (2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.
- א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
- (3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
- א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

(4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

- א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
- ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?
- ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
- ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
- ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
- ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

(5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט",
 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראלכרט,
 8% מחזיקים ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראלכרט?

תשובות סופיות:

(1) א. 0.833 ב. 0.9375 ג. 0.0625 ד. 0.5 ה. 0.789

(2) א. 5% ב. 0.0833 ג. 0.786 ד. 0.6875

(3) א. 0.4 ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.25 ד. $\frac{6}{7}$

(4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.6 ד. $\frac{23}{30}$

סה"כ	לא אקדמאי	אקדמאי	
200	180	20	שכיר
100	70	30	עצמאי
300	250	50	סה"כ

ה. 0.3 ו. 0.72

(5) א. 0.625 ב. 0.133 ג. 0.402

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 14 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה (פרק
3 ממ"ן 11)

תוכן העניינים

1. כללי 54

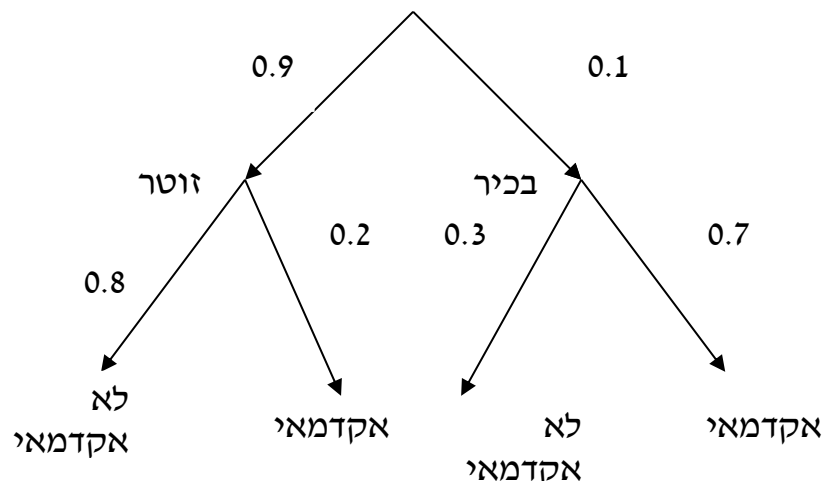
דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 20% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 80% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף. נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

(1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$.

(2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ? $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

(3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$.

(4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר? מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72 \text{ מותנה :}$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B , מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1, \dots, A_n$ כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

$$. P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right) \text{ אזי:}$$

נוסחת בייס:

$$. P\left(\frac{A_j}{B}\right) = \frac{P(A_j) P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

שאלות:

- (1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?
- (2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
- (3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
- (4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

- (5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו. 70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
- מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
 - מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
 - מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?
- (6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
- מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
- מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
 - נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?
- (7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D. אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
- מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
 - אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
 - אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?
- (8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
- מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
 - אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 - אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 - אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

- (9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P , ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות. אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?
- (10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:
- דולב, רונית, דולב.
 - רונית, דולב, רונית.
- בכל משחק מישו חייב לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

(1)	א. $\frac{2}{7}$	ב. $\frac{23}{49}$
(2)	א. 6%	ב. 58%
(3)	א. 0.544	ב. 0.5
(4)	א. 9%	ב. 0.09375
(5)	א. 0.14	ב. 0.3488
(6)	א. 70%	ב. 0.8125
(7)	א. 0.57	ב. 0.3158
(8)	א. 0.0886	ב. 0.2889
(9)	$\frac{kp}{1+p(k-1)}$	
(10)	א'.	

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 15 - תלות ואי תלות בין מאורעות (פרק 3 ממ"ן 11)

תוכן העניינים

1. אי תלות בין מאורעות (מורחב) 59

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A .

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B .

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A/B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1, \dots, A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.

שאלות:

- (1) נתון: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.6$. האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
- (2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחד?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?
- (3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווק, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?
- (5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (6) עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
 $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.9$.
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים?
- (7) הוכיח שאם: $P(A/B) = P(B/A)$, אז: $P(A) = P(B)$.

(8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם : $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.
 ב. מאורע A כלול במאורע B : $0 < P(B) < 1$, $P(A) > 0$, לכן : $P(A/B) < P(A)$.
 ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.
 ד. A ו- B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו- B מאורעות זרים.
 ה. $\bar{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

(9) זוג מעוניין להביא ילד לעולם, בבדיקה גנטית שהם עשו לאב התגלה שהאב אינו נשא של מחלה Q . מערכים את הסיכוי של האם להיות נשאית למחלה Q להיות 0.2. אם האם נשאית היא תלד בכל פעם ילד חולה בסיכוי 0.5 באופן בלתי תלוי בין הלידות. האם ילדה שני ילדים. האם המאורעות "הילד הראשון בריא" ו-"הילד השני בריא" הם מאורעות בלתי תלויים?

(10) מטילים פעמיים מטבע עם הסתברות p לעץ בכל הטלה, $0 < p < 1$.

A – יצא עץ בהטלה ראשונה.

B – יצאו תוצאות שונות.

עבור איזה ערכים של p המאורעות A ו- B בלתי תלויים?

(11) הוכח אם A ו- B בלתי תלויים, אזי $\bar{A}$, $\bar{B}$ בלתי תלויים.

(12) נתונה מערכת חשמלית שבשרטוט, כל מתג יכול להיות פתוח או סגור

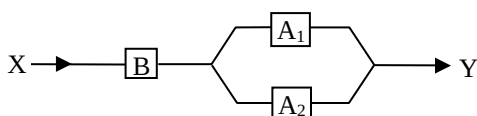
בהסתברויות שונות, אך באופן בלתי תלוי זה בזה.

להלן ההסתברות של כל מתג להיות סגור :

$$P(A_1) = 0.7, P(A_2) = 0.8, P(B) = 0.9$$

א. מה ההסתברות שיעבור זרם במערכת החשמלית?

ב. אם לא עובר זרם במערכת, מה הסיכוי שמתג B סגור?



(13) מטילים שתי קוביות הוגנות. נגדיר שלושה מאורעות :

A – תוצאה של קובייה ראשונה זוגית.

B – תוצאה של קובייה שניה אי זוגית.

C – סכום התוצאות של שתי הקוביות זוגי.

האם המאורעות בלתי-תלויים?

(14) ענה על הסעיפים הבאים :

א. המאורעות A ו- B הם מאורעות זרים של ניסוי כלשהו.
חוזרים על אותו ניסוי שוב באופן בלתי תלוי זה בזה.
הוכיחו שהסיכוי שמאורע A יתרחש בניסוי לפני שמאורע B יתרחש

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

בניסוי הוא :

ב. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל התוצאה 3?
ג. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל תוצאה גדולה מ-4?

תשובות סופיות:

- (1) כן.
- (2) א. 0.28 ב. 0.18
- (3) א. 0.0064 ב. 0.1536
- (4) א. 0.5904 ב. 0.9984
- (5) א. 0.08^5 ב. 0.3409
- (6) לא, הם תלויים.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
- (9) תלויים.
- (10) 0.5
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) א. 0.846 ב. 0.3506
- (13) תלויים.
- (14) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{3}{4}$ ג. $\frac{1}{2}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 16 - שאלות מסכמות בהסתברות (פרק 3 ממ"ן 11)

תוכן העניינים

1. כללי 63

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

- (1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

 - א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 - ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 - ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
 - ד. אם ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
- (2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.

כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

 - א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 - ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
 - ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
 - ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?
- (3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי: בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם ייצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

 - א. מה ההסתברות שהם ייצאו רק לבאולינג?
 - ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?
 - ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?
 - ד. מה ההסתברות שיום אחד הם ייצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא ייצאו לאף אחד מהמקומות?

(4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

- מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
- אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
- מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
- נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

(5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

- מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
- נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
- נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

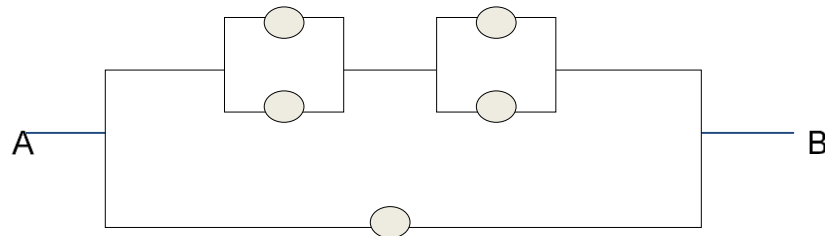
(6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש וב-B את ההטלה השנייה ראש.

- חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
- האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
- ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

(7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

- מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?
- אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
- האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
 - מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
 - אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

(8) נתונה המערכת החשמלית הבאה :



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p .
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
 הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P + (1 - P)(2P - P^2)^2$.

(9) ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות ו-6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי של 90%, אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.
 א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב?
 ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?
 ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא. מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

(10) נתונים שלושה מאורעות: A, B ו-C. ידוע ש: $P(A|B) = 1$, $P(A|C) = 1$.
 תנו דוגמא ספציפית למאורעות: A, B ו-C שבה המאורעות B ו-C תלויים.

(11) הוכיחו או הפריכו (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה:
 אם A ו-B בלתי תלויים, אז A ו- $\bar{B}$ בלתי תלויים.

(12) משחקים משחק מזל פעמיים, כך שבכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P כאשר: $0 < P < 1$.
 נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - תוצאות המשחקים שונות זו מזו.
 B - המשחק הראשון היה ניצחון.
 מה ערכו של P, עבורו A ו-B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

(13) טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים. בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכיחו שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים

$$\text{שונים של המכחול הוא : } \frac{N+1}{3(N-1)}.$$

(14) הוכיחו באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול: $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25 ב. 0.75 ג. 0.6 ד. 0.5
- (2) א. 0.2 ב. 0.267 ג. 0.524 ד. תלויים.
- (3) א. 0.2 ב. אינם זרים. ג. תלויים. ד. 0.06
- (4) א. 0.94 ב. 0.255 ג. 0.03 ד. 0.168
- (5) א. 15% ב. 0.692 ג. לא זרים ותלויים.
- (6) א. 0.65 ב. תלויים. ג. 0.5384
- (7) א. 8% ב. 0.733 ג. תלויים.
- (8) ד. i. 0.478 ד. ii. 0.15 שאלת הוכחה.
- (9) א. $\frac{19}{480,700}$ ב. $\frac{27,132}{480,700}$ ג. 0.4015
- (10) ראו סרטון.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) $\frac{1}{2}$
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 17 - המשתנה המקרי הבודד - פונקציית ההסתברות (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 68

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.

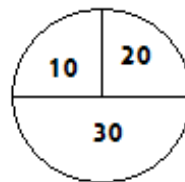
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה. סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

- (1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 - 70 משפחות עם מכונית אחת.
 - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 - 20 משפחות עם 3 מכוניות.
- בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (2) מהאותיות: A, B, C יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
 - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
 - ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k = 1, 2, \dots, 4$, $P(X = k) = \frac{k}{A}$. מצאו את ערכו של A .

(7) בגן ילדים 8 ילדים, מתוכם 5 בנים ו-3 בנות.
בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה.
נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה.
בנו את פונקציית ההסתברות של X .

(8) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X .

תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.1	0.3	0.35	0.25	$P(X)$

(2) להלן טבלה:

2	1	0	X
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$P(X)$

(3) להלן טבלה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

(4) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.343	0.147	0.21	0.3	$P(X)$

(5) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	$P(X)$

(6) 10.

(7) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	$P(X)$

(8) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.01	0.1	0.15	0.74	$P(X)$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן (פרק 4
ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 72

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$\text{מגדירים תוחלת באופן הבא: } E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

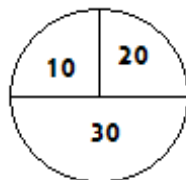
$$\text{מגדירים שונות באופן הבא: } V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים: $STD = \sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

40	20	0	-30	X
0.2	0.3	0.1	0.4	$P(X)$

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון. חשבו את: $E(X)$.

- (3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר. א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת וסטית התקן של X .

- (4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח. א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X .

(5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	X
0.2		0.3		$E(X)$

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את: $V(X)$.

(6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5-0 ו-5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

(7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי:

X	P
1	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
K	$\frac{1}{4}$

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של X ?

תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2, שונות: 796.

(2) 0.9.

(3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36, סטיית תקן: 1.603.

(4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	X
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(X)$

(5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

8	6	4	2	X
0.2	0.1	0.3	0.4	$P(X)$

(6) ראו טבלה:

5	0	-5	X
0.2	0.6	0.2	$P(X)$

(7) 2.33.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 19 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי
בדיד (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. ראשי.....76

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד:

רקע:

יהי X משתנה מקרי, ותהי $g(X)$ פונקציה של X . אז:

$$E(g(X)) = g(x_1)P(X=x_1) + g(x_2)P(X=x_2) + g(x_3)P(X=x_3) + \dots$$

$$= \sum_i g(x_i) \cdot P(x_i)$$

כאשר $x_1, x_2, x_3, \dots$ הם הערכים שהמשתנה X מקבל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

מצאו התפלגות ותוחלת של: $Y = X^2$.

שאלות:

- (1) מסובבים רולטה עליה המספרים 1 עד 4. יהיה X המספר שהתקבל לאחר סיבוב הרולטה. התפלגות X היא כדלהלן:

X	4	3	2	1
$P(X)$	0.3	0.4	0.2	0.1

א. חשבו את: $E(X)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

ב. האם: $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{E(X)}$?

- (2) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

חשבו את התוחלת של:

א. X^2 .

ב. 2^X .

- (3) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k) = \frac{k}{A}$, $k=1,2,\dots,4$.

א. מצאו את ערכו של A .

ב. חשבו את: $E([X - E(X)]^2)$.

- (4) בכל יום משחק ערן משחק יחיד בכל אחת מהאפליקציות הבאות: TWODOTS ו-PIANOTILES. בכל אחד מהמשחקים ישנם שלבים שיש לעבור. משחק בודד מסתיים בהצלחה אם ערן עבר את שלב, ובכישלון אם ערן לא עבר את השלב. ההסתברות שבאפליקציית TWODOTS ערן יעבור שלב היא 0.6 בכל יום. ההסתברות שבאפליקציית PIANOTILES ערן יעבור שלב היא 0.35 בכל יום. נניח שמעבר שלב בכל אחד מהמשחקים בלתי תלוי במשחק אחר. נסמן ב- W את מספר המשחקים שערן יעבור שלב בהם מחר.

א. חשבו את $E(W)$.

ב. חשבו את $E(W^3)$.

(5) יהי X משתנה מקרי בדיד עם תוחלת ושונויות סופיים: $Y = aX + b$, כאשר $a \neq 0$.
 a, b הינם פרמטרים. יש להוכיח ש: $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$.

(6) אלעד צופה בסדרה בת 6 פרקים. 3 פרקים מתוך ה-6 הם פרקים שצולמו בישראל ו-3 פרקים אחרים צולמו בבולגריה. פרק אחד מבין הפרקים שצולמו בבולגריה מצולם כולו ביער. אלעד צופה בפרקי הסדרה בסדר אקראי, עד אשר הוא מגיע לפרק שצולם ביער בבולגריה. נגדיר את W כמספר הפרקים שצולמו בבולגריה שבהם יצפה אלעד.
 א. מהי התפלגות W ?
 ב. חשבו: $E(W^3)$.

(7) למיקה יש 20 חולצות ו-3 מגירות. כאשר מיקה מסדרת את 20 החולצות במגירות היא בוחרת עבור כל חולצה, באופן מקרי ובלתי תלוי בחולצות האחרות, את המגירה אליה תכניס את החולצה (כל אחת מהמגירות יכולה להכיל את כל החולצות).
 נסמן ב- X את מספר המגירות המכילות בדיוק 10 חולצות.
 מצאו את התפלגות X ואת: $E(\sqrt{X+2})$.

(8) מטבע מוטל 10 פעמים. X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. הרווח במשחק הוא 4^X . מצאו את התוחלת של הרווח במשחק.
 רמז: היעזרו בבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $E\left(\frac{1}{X}\right) = 0.4083$, $E(X) = 2.9$. ב. לא.
- (2) א. 3.2. ב. 3.45.
- (3) א. 10. ב. 1.
- (4) א. 0.95. ב. 2.21.
- (5) הוכחה.
- (6) א. $X \sim U(1,3)$. ב. 12.
- (7) $E(\sqrt{X+2}) = 1.4659$.
- (8) א. $X \sim B(10, 0.5)$. ב. 2.5^{10} .

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 20 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית (פרק 4 ממ"ח
(02

תוכן העניינים

1. כללי 79

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a, b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X) = 68.75 = \sigma^2$, $E(X) = 22.5 = \mu$.

שאלות:

(1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

(2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

(3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

(4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y = 7 - X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

(5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
 מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הני"ל?

(6) יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	X
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(X)$

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

- השלימו את פונקציית ההסתברות.
 - חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
 - הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
- כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

(7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X = k) = \frac{k}{A}$, $k = 1, 2, \dots, 4$.

- א. מצא את ערכו של A .
- ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- ג. חשב את: $E(X^3)$.
- ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2} - 4$.

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 14, שונות: 32.
- (2) תוחלת: 8, שונות: 12.
- (3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.
- (4) תוחלת: 3, שונות: 3.
- (5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

0	25	50	100	X
0.929	0.05	0.02	0.001	$P(X)$

- ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.
- (6) ב. $V(X) = 1.8275$.
- (7) א. $A = 10$. ב. $E(X) = 3$, $V(X) = 1$. ג. $E(X^3) = 35.4$, $V(X^3) = 616.84$. ד. $E(Y) = -2.5$, $V(Y) = 0.25$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 21 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 82

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

(1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

(2) X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

(3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
 X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
 Y - סכום הזכייה במשחק השני.
 נתון:

$$\sigma(X) = 3, \quad E(x) = 10$$

$$\sigma(Y) = 4, \quad E(y) = 12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

(4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪. מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

(5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K = 2, 3, 4, 5, \quad P(X = K) = \frac{A}{K-1}$$

$$0 \text{ אחר } K$$

מצאו את ערכו של A .

א. חשבו את התוחלת והשונות של X .

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 9, שונות: 15.
 - (2) 5.
 - (3) תוחלת: 22, שונות: 5.
 - (4) תוחלת: 90, שונות: 275.
 - (5) א. $A = \frac{12}{25} = 0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.
- ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 22 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 85

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי :
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות : "הצלחה" ו"כישלון".
 למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
 בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
 מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
 ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1; \quad \text{כאשר}$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות:}$$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים :

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
- (3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
 נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
 - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
 - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?
- (3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
 - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?
- (4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:
- | השכלה | נמוכה | תיכונית | תואר I | תואר II ומעלה |
|-----------|-------|---------|--------|---------------|
| פרופורציה | 0.1 | 0.6 | 0.2 | 0.1 |
- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

- (5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרוב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
- (6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
- (7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
- (8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את: $E(X^2)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
- ד. 0.0729 ה. 0.40954 ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45
- (2) א. 0.5314 ב. 0.2335 ג. 0.1493 ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449
- (3) א. 0.5314 ב. 0.0984 ג. 0.1143 ד. תוחלת: 18, סטיית תקן: 14.697
- (4) א. 0.1789 ב. 2
- (5) א. 0.1956 ב. 0.4253
- (6) א. 0.85 ב. 0.182 ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8
- (7) א. 0.401 ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193
- (8) 7.5

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית (פרק 4 ממ"ח
(02

תוכן העניינים

1. כללי 89

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות גיאומטרית:

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
 X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה, כולל.
 נסמן ב- p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
 $X \sim G(p)$

פונקציית ההסתברות: $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$

תוחלת: $E(X) = \frac{1}{p}$

שונות: $V(X) = \frac{q}{p^2}$

תכונות חשובות:

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון,
 דהיינו, $P(X > k) = q^k \cdot P(X = (n+k) / X > k) = P(X = n)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד 10 כדורים ש-3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ-5 כדורים?
- ד. אם הוצאו יותר מ-3 כדורים, מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

שאלות:

- (1) קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש-5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- שידגום 3 מוצרים.
 - שידגום 4 מוצרים.
 - שידגום 5 מוצרים.
 - שידגום יותר מ-7 מוצרים.
 - שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.
- (2) צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם, והוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
- מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
- (3) מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
- מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים, אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי", מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
- (4) 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון כשלהו 10 מכוניות אקראיות.
- מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

- (5) אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?
- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים.
- מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?
- (6) במאפייה מייצרים עוגות גבינה ועוגות שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.
- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגת שוקולד?
- ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד. ידוע שעוגת גבינה עולה ליצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגות הגבינה שדגם האדם?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.04512 ב. 0.0428 ג. 0.0407 ד. 0.6983 ה. 0.6983
- (2) א. 0.009 ב. 0.0001 ג. תוחלת: 1.111, שונות: 0.1234
- ד. תוחלת: 44.4, שונות: 308.5
- (3) א. 0.999 ב. 0.875 ג. 0.03125 ד. 1
- (4) א. 0.1029 ב. 9.72
- (5) א. 0.06 ב. 0.7176 ג. 0.0729 ד. 9.487
- (6) א. 0.015 ב. 0.0215 ג. תוחלת: $63\frac{1}{3}$, שונות: $2777\frac{7}{9}$
- ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 92

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

התפלגות אחידה הינה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות. הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד. $X \sim U(a, b)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X = K) = \frac{1}{b - a + 1}$, $K = a, a + 1, \dots, b$

תוחלת: $E(X) = \frac{a + b}{2}$

שונות: $V(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

שאלות:

- (1) במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד 45. נתבונן במשתנה X - המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
- חשבו את $P(X = 2)$.
 - חשבו את $P(X \leq 30)$.
 - חשבו את $P(X > 4 | X \leq 10)$.
 - חשבו את $P(X = k)$.
- (2) קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100.
- בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
 - הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר:
 - מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ-80?
 - מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?
- (3) יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה התוחלת של X ?
 - קובייה הוטלה 4 פעמים. מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב-4 ההטלות?
- (4) בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?
- (5) יש לבחור מספר אקראי בין 1 ל-50, כולל.
- מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
 - מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ-20?
 - אם נבחר מספר גדול מ-20, מה ההסתברות שהוא קטן מ-28?
- (6) הוכיחו שאם: $X \sim U(a, b)$, אז מתקיים ש: $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{1}{45}$ ב. $\frac{30}{45}$ ג. 0.6
- (2) א. תוחלת: 50.5, סטיית תקן: 28.87.
 ב. i. 0.08192 ii. תוחלת: 303, סטיית תקן: 70.71
- (3) א. $X \sim U(1,6)$ ב. 3.5 ג. תוחלת: 14, שונות: 11.66
- (4) תוחלת: 5.5, שונות: 8.25
- (5) א. $\frac{1}{50}$ ב. $\frac{30}{50}$ ג. $\frac{7}{30}$
- (6) שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 25 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית (פרק 4 ממ"ח
(02

תוכן העניינים

1. כללי.....כללי 95

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim \text{pois}(\lambda)$.
התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

שאלות:

- (1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
- (2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
- (3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
- (4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
 - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
- (5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

- (6) במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.
- א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?
- ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

תשובות סופיות:

(1)	א. 0.0337	ב. 0.9933	ג. 0.1246	ד. 0.5
(2)	א. 0.084	ב. 0.099	ג. 0.151	
(3)	א. 4	ב. 0.407		
(4)	א. 0.1804	ב. 0.8647	ג. 0.6767	ד. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.41
(5)	א. 0.0139	ב. 0.2196	ג. 0.6948	
(6)	א. 16.7	ב. 0.0708		

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 26 - התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות היפרגאומטרית (פרק 4
ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 98

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות היפרגאומטרית:

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים, מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת – פריטים אלה נקראים "מיוחדים". בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה. X מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו. משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N, D, n) יסומן על ידי: $X \sim H(N, D, n)$.

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{התוחלת של ההתפלגות:}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad \text{השונות של ההתפלגות:}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

בכתה 40 תלמידים, שמתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

- א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?
- ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

שאלות:

- (1) בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו, פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
- (2) בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות.
 נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה (לא בטבלה).
 ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$.
- (3) נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה. אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה. זהו בסעיפים הבאים את ההתפלגות, וחשבו לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
 א. האוכלוסייה גדולה מאד.
 ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
- (4) בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו-5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
 א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
 ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

תשובות סופיות:

(1) א. ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{5}{9}$.

3	2	1	0	x
$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$	$P(x)$

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$, שונות: $\frac{20}{27}$.

(2) א. $\frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$. ב. תוחלת: 1.5, סטיית תקן: 0.748. ג. 0.9.

(3) א. תוחלת: 3.6, שונות: 1.44. ב. תוחלת: 3.6, שונות: 0.64.

(4) א. 0.0256. ב. 0.8.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 27 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית (פרק 4
ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 101

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית שלילית:

רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה- r . X = מספר החזרות עד שהתקבלו r הצלחות: $X \sim NB(r, p)$.

פונקציית ההסתברות: $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$, $k = r, r+1, \dots, \infty$.

תוחלת: $E(X) = \frac{r}{p}$.

שונות: $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קובייה מוטלת עד שמקבלים 3 פעמים תוצאה שגדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?

ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

שאלות:

(1) בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. כדור מוצא באקראי פעם אחר פעם ומוחזר בין הוצאה להוצאה. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוצאו עד שהתקבלו 2 כדורים לבנים בסך הכול (לא בהכרח ברצף).

א. חשבו את $P(X = 2)$.

ב. חשבו את $P(X = 3)$.

ג. חשבו את $P(X = 4)$.

ד. חשבו את $P(X = k)$.

(2) הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).

א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?

ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?

ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?

ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?

ה. מה הסיכוי שישחק k פעמים?

(3) הראו שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

(4) מטבע מוטל שוב ושוב עד שמתקבל שלוש פעמים עץ בסך הכול.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.

ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?

ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך

ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

(5) יהיה X_i מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי

תלויים זה בזה, כאשר $i = 1, 2, \dots, n$.

הוכיחו שהתוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^n X_i$ זהות לתוחלת והשונות של ההתפלגות

הבינומית השלילית $NB(n, p)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.36 ב. 0.288 ג. 0.0576 ד. $0.6^2 \cdot 0.4^{k-2}$
- (2) א. 0.16 ב. 0.192 ג. 0.1728 ד. 0.13824 ה. $0.4^2 \cdot 0.6^{k-2}$
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) ב. תוחלת: 6, שונות: 6. ג. 0.1886
- (5) שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 28 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות (פרק 4 ממ"ח 02)

תוכן העניינים

1. כללי 104

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

(1) נתון כי: $X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $Y \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

- א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X .
 - ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W .
 - ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T .
- האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

- (2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

- א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?
- ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?
- ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

- (3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - ב. חשבו את התוחלת והשונות של X .
 - ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

- (4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?
 - ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?
 - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

- (5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
 - יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל). מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
 - ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?
- (6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
- הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
 - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
 - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
- ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
 - מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
 - מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
- (7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.
- נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?
 - בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

(8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
- ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
- ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
- ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

(9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X) = 2$ וכן: $V(X) = 1$.

חשבו: $E(X - 5)^2$.

(10) הסיכוי לעבור מבחן הנהיגה הינו P . בוחרים באקראי ארבעה נבחנים.

ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל

הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P .

ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.

מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

(11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד

הוא נע בסיכוי P . ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1 - P$ שמאלה ביחידה אחת.

נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים.

רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n .

(12) למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא

ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת,

ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את

המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P .

ג. לאלו ערכי P המשחק כדאי?

- (13) מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ. רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.
- (14) נתונות N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N . מתוך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל החולצות. נגדיר את X_1 - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1. נגדיר את X_N - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר N . חשבו את: $V(X_1 + X_N)$.
- (15) n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם, האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם. מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?
- (16) הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א' הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א' בהכרח ניגש למועד ב' ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב' הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון. נתון שלמועד א' נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס. מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?
- (17) לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה. יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו. מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.
- (18) לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים. נסמן ב- X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים. חשבו את $E(\sqrt{x+7})$.

- 19** בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.
- א. מצאו את ההתפלגות של X .
- ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1. ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.
- (2) א. 0.03. ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

- (3) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

- ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.
- (4) א. 0.9975. ב. 0.0172. ג. 1.0025.
- (5) א. 0.375. ב. 0.6. ג. 0.282. ד. 0.282.
- (6) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

3	2	1	0	x
0.084	0.428	0.392	0.092	P(x)

- ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.
- (7) א. 0.4348. ב. 0.0923.
- (8) א. 2.013. ב. 0.5256. ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.
- (9) 10.
- (10) א. 0.6. ב. 0.0384. ג. 0.0256.
ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11. ה. 0.24.

$$P(X=k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \cdot p^{\frac{k+n}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \quad (11)$$

$$P(X=k) = \begin{cases} P & k=-1 \\ (1-P)^{k-1} \cdot P & k=2,3,\dots,\infty \end{cases} \quad (12)$$

ב. $\frac{1-2p^2}{p}$

ג. $0 < p < \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$P(X = k) = \binom{m+k}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad (13)$$

$$n \cdot \left(\frac{2}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \quad (14)$$

$$\frac{2^n}{2n} \quad (15)$$

(16) ראו טבלה:

3	2	1	X
0.7099	0.2893	0.0008	$P(X)$

$$\frac{e^{-6}}{6} [e^6 - 1] \quad (17)$$

$$2.675 \quad (18)$$

$$P(X = k) = \frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (19) \quad \text{א. ב. הוכחה.}$$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 29 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (פרק 5 ממ"ן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 111

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$. השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף X בעל פונקציית צפיפות $f(x)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא: $F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.
כמו כן מתקיים: $p(X > t) = 1 - F(t)$ ו- $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$.
שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$.

תוחלת של פונקציה של X :

תוחלת של פונקציית משתנה רציף X , המסומנת : $g(x)$, תחושב באופן

$$\text{הבא : } E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

אחוזונים :

האחוזון ה- p הוא ערך (נסמן אותו : x_p), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא p .

$$\text{כלומר : } p(X \leq x_p) = p$$

ריענון מתמטי :

נוסחאות לחישוב שטחים

$$\text{שטח משולש : גובה } (h) \text{ כפול הבסיס } (a) \text{ חלקי } 2 : S_{\text{triangle}} = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$\text{שטח מלבן : אורך } (a) \text{ כפול רוחב } (b) : S_{\text{rectangle}} = a \cdot b$$

משוואת קו ישר :

משוואת ישר מפורשת תסומן : $y = mx + n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- n היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

$$\text{שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות : } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ הוא : } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (x_1, y_1) ושיפועו הוא m , תחושב באופן

$$\text{הבא : } y - y_1 = m(x - x_1)$$

אינטגרלים מידיים:

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

שאלות:

(1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוט:

א. מצאו את ערכו של c .

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

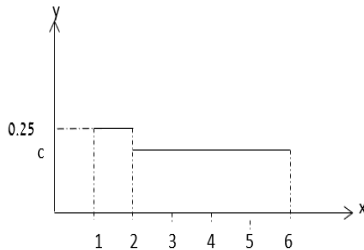
i. $P(x < 4)$

ii. $P(x > 1.5)$

iii. $P(1.5 < x < 5)$

iv. $P(5 < x < 10)$

v. מצאו את החציון של המשתנה.



(2) נתון משתנה מקרי רציף A שפונקציית הצפיפות שלו היא:

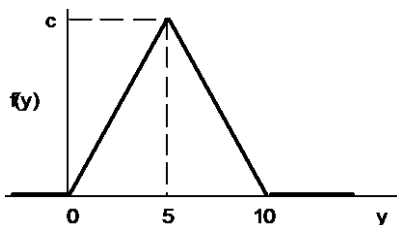
$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

וידוע ש- $P(0 < X < 1) = \frac{1}{4}$

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X .

ב. מצאו את החציון של X .

ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ-0.5?



(3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y :

א. מצאו את c .

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

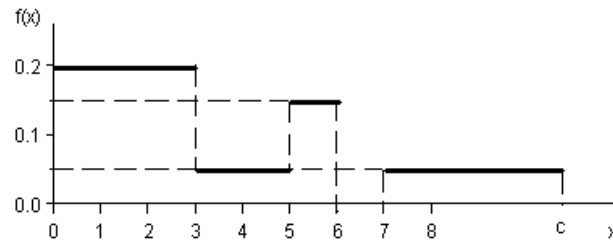
ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(Y > 4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y .

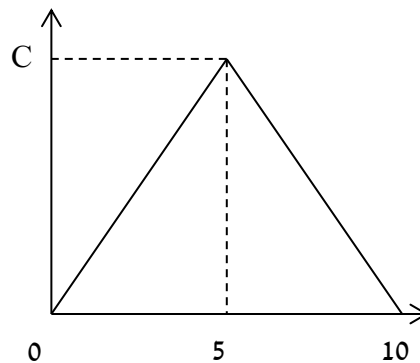
הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

(4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



- מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.
- מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- חשבו את ההסתברויות הבאות:
 $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

(5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



- מה ערכו של c ?
- מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

(6) נתונה פונקציית צפיפות: $f(X) = \frac{2}{x}$, המוגדרת מ-1 עד K .

- מצאו את ערכו של K .
- בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- חשבו את הסיכוי ש- X לפחות 1.5.
- מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.
- מה התוחלת של X ?

(7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X) = AX^2(10 - X)$, $0 < X < 10$.

A הינו קבוע חיובי.

א. מצאו את A.

ב. חשב את: $P(x > 5 | x > 2)$.

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

(8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X:

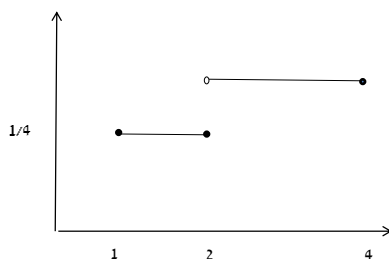
$$f(x) = 0.5 \cdot e^{2x}, \quad -\infty \leq x \leq \ln(c)$$

א. מצאו את ערכו של c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.

ג. חשב: $P(X > 0)$.

ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?



(9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X:

א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.

ה. חשבו את: $E(X^3)$.

(10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?

ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?

ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים

שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

(11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול

פחות מרבע שעה?

ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

(12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b .
- ב. חשבו את התוחלת של X .
- ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של y ?

(13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של k .
- ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ג. חשבו $P(x > 2.5)$.

(14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה : $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$

- א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.
- ג. מצאו את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

תשובות סופיות:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)0.25 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.25 + (t-2) \cdot \frac{3}{16} & 2 < t \leq 6 \\ 1 & t > 6 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } \frac{3}{16} \quad \text{ג. } \frac{5}{8} \quad \text{ד. } \frac{1}{3}$$

$$\text{א. } b=2, c=0.5 \quad \text{ב. } 1.41 \quad \text{ג. } 0.0625 \quad \text{ד. } \frac{1}{3}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.02t^2 & 0 \leq t \leq 5 \\ 1 - 0.02(t-10)^2 & 5 < t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 0.2 \quad \text{ג. } 0, 0.18, 0.125, 0.32$$

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.2t & 0 < t \leq 3 \\ 0.6 + (t-3) \cdot 0.05 & 3 < t \leq 5 \\ 0.7 + (t-5) \cdot 0.15 & 5 < t \leq 6 \\ 0.85 & 6 < t \leq 7 \\ 0.85 + (t-7) \cdot 0.05 & 7 < t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 0.10 \quad \text{ג. } 0.5$$

$$\text{א. } c=0.2 \quad \text{ב. } 5 \pm 1.46$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 \cdot \ln t & 1 \leq t \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 & t > e^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } e^{\frac{1}{2}} \quad \text{ג. } 0.189$$

$$\text{ד. } 1.051 \quad \text{ה. } 1.297$$

$$\text{א. } 0.0012 \quad \text{ב. } 0.7067 \quad \text{ג. תוחלת: 6, שונות: 4}$$

$$(8) \quad \text{א. 2.} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{2t} & t \leq \ln(2) \\ 1 & t > \ln(2) \end{cases} \quad \text{ג. 0.75} \quad \text{ד. 0.549}$$

$$(9) \quad \text{א.} \quad F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{8} & 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)0.25 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0.25 + (t-2) \cdot \frac{3}{8} & 2 < t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } 2\frac{2}{3} \quad \text{ד. תוחלת: } 2.625, \text{ שונות: } 0.6927 \quad \text{ה. } 23.4375$$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{7}{27} \quad \text{ב. } 0 \quad \text{ג. } 3.704$$

$$(11) \quad \text{א. עיין סרטוט בוידאו} \quad \text{ב. } 0.0498 \quad \text{ג. } 0.6321 \quad \text{ד. } 11.51$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{2}{3} \quad \text{ב. } 5.22 \quad \text{ג. } \frac{2}{9}$$

$$(13) \quad \text{א. } \frac{1}{6} \quad \text{ב.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t^3-1}{12} & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{7}{12} + \frac{t^2-4}{12} & 2 < t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases} \quad \text{ג. } 0.229$$

$$(14) \quad \text{א.} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{(t-b)}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases} \quad \text{ב. תוחלת: } E(X) = \frac{a+b}{2}, \text{ שונות: } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{ג. } \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 30 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית (פרק 5 ממ"ן 12)

תוכן העניינים

1. כללי..... 120

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות מעריכית:

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית): $X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$.

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד להתרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{לכל } x \geq 0.$$

$$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{פונקציית ההתפלגות המצטברת:}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{התוחלת:}$$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{השונות:}$$

$$P(X > a+b \mid X > a) = P(X > b) \quad \text{להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון:}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ-9 שעות?

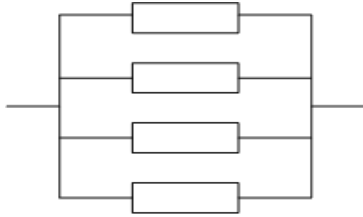
ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

שאלות:

- (1) הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
- מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
 - מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
 - מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.
- (2) הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
- מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?
- (3) משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
- מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
 - מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
 - אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
 - מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?
- (4) בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
- שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?
 - אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה שני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

(5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמתואר בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין. אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪.

כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.

מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

(1)	א. 0.368	ב. 0.865	ג. 0.347	
(2)	א. 24 שעות.	ב. 0.632	ג. 0.135	
(3)	א. 0.393	ב. 0.239	ג. 0.513	ד. 69.08
(4)	א. 0.264	ב. 0.368	ג. 0.233	
(5)	א. 0.8403	ב. $K < 0.0588A$		

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 31 - התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה (פרק 5 ממ"ן 12)

תוכן העניינים

1. כללי..... 123

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b .

$$X \sim U(a, b)$$

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \\ a \leq x \leq b$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}$$

התוחלת :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

X - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש- X קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של X ?

$$a = 20, b = 40$$

$$X \sim U(20, 40)$$

$$א. P(x < 25) = f(25) = \frac{25 - 20}{40 - 20} = 0.25$$

$$E(x) = \frac{20 + 40}{2} = 30$$

$$ב. V(x) = \frac{(40 - 20)^2}{12} = 33\frac{1}{3}$$

שאלות:

- (1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג: $U(13,16)$.
- מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של משך ההפסקה?
 - מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
 - מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?
- (2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
- הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
 - אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
 - מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?
- (3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).
- מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?
 - נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?
 - מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?
 - עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

תשובות סופיות:

- (1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{2}{3}$.
- (2) א. $X \sim U(0,10)$. ב. 0.6. ג. 10.
- (3) א. 0.2. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 109.
- ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 32 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית (פרק 5 ממ"ן 12)

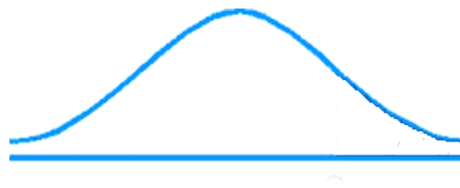
תוכן העניינים

1. כללי.....126

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

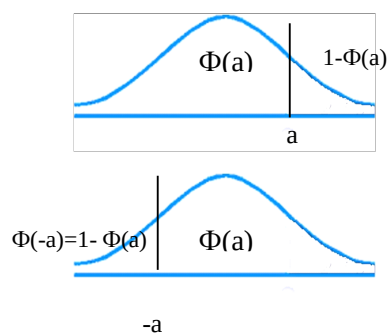
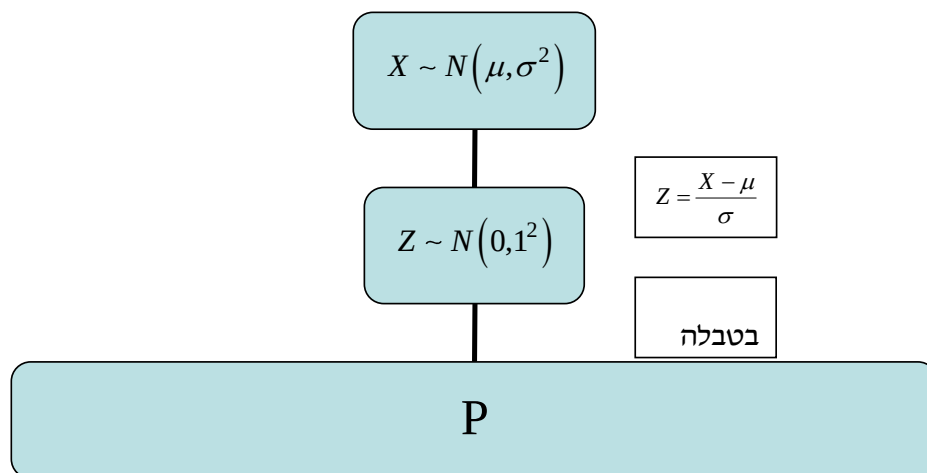
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z : $Z \sim N(0, 1^2)$.

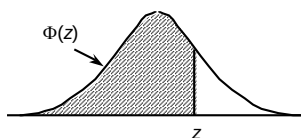
$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

(1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

(2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

(3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

(4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
 א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 ד. מהו האחוזון ה-20?
 ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
 א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
 א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
 ד. מהו המאיון העליון של אורך חיי מכשיר?
 ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
 א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
 i. בעשירון העליון.
 ii. בממוצע.
 iii. בשונות.
 ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
 i. 1.
 ii. 2.
 iii. 3.
 iv. אין לדעת.



- (9)** הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- (10)** ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T ?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטית תקן אחת מעל T ?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
- (11)** אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1	א. 89.25%	ב. 2.28%	ג. 0.	ד. 50%	ה. 50%
2	א. 0%	ב. 3.76%	ג. 0%	ד. 68.26%	
3	א. 26.43%	ב. 89.44%	ג. 39.44%	ד. 0.383	
	ה. 100%				
4	א. 3812.8	ב. 3958	ג. 2787.2		
5	א. 119.2	ב. 80.8	ג. 112.6	ד. 87.4	
6	א. 500	ב. 532.9	ג. 453.48		
7	א. 500	ב. 100	ג. 0.3446	ד. 733	
	ה. 267				
8	א. 3	ב. בממוצע.	ג. 1		
9	א. 0.1587	ב. 0.0228	ג. 0.8563	ד. 0.3975	
10	א. 1925	ב. 0.2266	ג. 0.1587		
11	א. 0.1359	ב. 0.675	ג. 100	ד. 0.25	

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 33 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף (פרק 5 ממ"ן 12)

תוכן העניינים

1. כללי 134

טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף:

רקע:

מצב שבו ידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון משתנה מקרי רציף X המתפלג אחיד בין 0 ל-1 .
 מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה Y ,
 כאשר הקשר בין X ל- Y נתון על ידי הנוסחה: $Y = e^x$.

שאלות:

- (1) יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1. הגדירו משתנה חדש: $Y = e^{-W}$.
 א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
 ב. זהו את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.
- (2) נתון: $X \sim U(0,1)$, ויוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R = X^2$.
 מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R .
- (3) ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y = \ln(X)$.
 הוכיחו שפונקציית הצפיפות של Y נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^Y + 1}$.
- (4) ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda=1)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$.
 א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .
 ב. זהו את ההתפלגות של Y .
- (5) אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2. מצאו את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.
- (6) נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t) = \theta^t - 1$, עבור התחום: $0 \leq t \leq 1$.
 א. מצאו את ערכו של הפרמטר θ .
 ב. מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה X .
 ג. יהי $Y = 2^X - 1$.
 מצאו את פונקציית הצפיפות של Y וזהו את התפלגותו.

תשובות סופיות:

(1) ב. $Y \sim U(0,1)$.

(2) $f(R) = \frac{1}{2\sqrt{R}}$ כאשר $1 > R > 0$.

(3) שאלת הוכחה.

(4) ב. $Y \sim U(-1,1)$.

(5) $f(y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ כאשר $1 < y < 8$.

(6) א. 2. ב. $Y \sim U(0,1)$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 34 - משתנה דו-מימדי בדיד - פונקציית הסתברות משותפת (פרק 6
ממ"ן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 137

משתנה דו מימדי בדיד – פונקציית הסתברות משותפת:

רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים. נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית, בה יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית: X ו- Y .

דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר. ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

נחשב את כל ההסתברויות המשותפות:

$$p(x=0, y=0) = 0.05$$

$$p(x=0, y=1) = 0$$

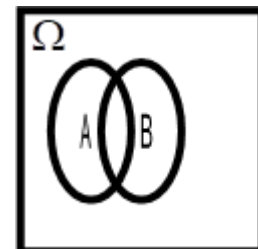
$$p(x=1, y=0) = 0.15$$

$$p(x=1, y=1) = 0.05$$

$$p(x=2, y=0) = 0$$

$$p(x=2, y=1) = 0.75$$

y / x	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75



שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציית הסתברות שוליות:

Y / X	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

משתנים בלתי תלויים:

X ו- Y יהיו משתנים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y אפשריים התקיים הדבר הבא: $p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$.

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

דוגמה:

$p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2) \cdot p(y=1) = 0.75 \cdot 0.8 = 0.6$.

ככלל, אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים, שאז הרי התנאי לא מתקיים. אך אם אין אפס בטבלה, אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

שאלות:

- (1) אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 0.3 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ-3 משחקים. נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y כמספר המשחקים שהאדם שיחק.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות.
 - מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?
 - אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

- (2) להלן פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים:

Y / X	0	1	2	$P(Y)$
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

- השלימו את ההסתברויות החסרות בטבלה.
 - האם X ו- Y תלויים?
 - מצאו את הסתברות ש- $Y=3$, אם ידוע ש- $X=1$.
- (3) מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $\frac{1}{10}$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקרת איכות. יהי X מספר המוצרים בחבילה, ו- Y מספר המוצרים הפגומים בחבילה.
- מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן $x=3$.
 - מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.
 - מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.
 - בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

- (4) מתוך כד עם 3 כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שניים ללא החזרה. יהי X המספר הקטן מבין השניים ו- Y הגדול מביניהם.
- א. חשבו את ההתפלגות של (X, Y) .
- ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמקסימאלי הוא 8?
- ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y = 4$. מצאו: $E(X / Y = 4)$.
- (5) ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב: ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב, ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב ול-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים. יהי X מספר הסניפים ביישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון, ויהי Y משתנה אינדיקטור:
- 1 – אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.
0 – אחרת.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
- ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.
- ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. 2.4 ג. תוחלת: 1.348, שונות: 0.575.

$x \setminus y$	0	50	100	$P(y)$
1	0	0	0.3	0.3
3	0.343	0.294	0.063	0.7
$P(x)$	0.343	0.294	0.363	1

(2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.125.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
2	0.2	0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05	0	0.15
4	0.1	0.27	0.08	0.45
$P(x)$	0.4	0.4	0.2	1

(3) א. $y/x = 3 \sim B\left(n = 3, p = \frac{1}{10}\right)$ ב. $y/x = k \sim B\left(n = k, p = \frac{1}{10}\right)$

ג. 0.3 ד. להלן טבלה:

$x \setminus y$	2	3	$P(y)$
0	0.405	0.3645	
1	0.09	0.1215	
2	0.005	0.0135	
3	0	0.0005	
$P(x)$	0.5	0.5	1

(4) א. להלן טבלה: ב. 0.5 ג. תוחלת: 2.

$x \setminus y$	2	4	$P(y)$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

5) א+ב. להלן טבלה: ג. 0.75.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.05	0.35	0	0.4
1	0	0.45	0.15	0.6
$P(x)$	0.05	0.8	0.15	1

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 35 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים (פרק 6,7 ממ"ן
(13,14

תוכן העניינים

1. כללי 143

משתנה דו מימדי בדיד – מתאם בין משתנים:

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב- ρ .
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.



מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים, שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם -1).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם:

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \text{הנוסחה של מקדם המתאם היא:}$$

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) \quad \text{השונויות המשותפת:}$$

תכונות של השונויות המשותפת:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \quad (1)$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (2)$$

משתנים בלתי מתואמים:

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס, וכדי שדבר כזה יקרה השונויות המשותפת צריכה להתאפס. משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין ביניהם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין ביניהם קשר ולכן גם הם בלתי מתואמים, אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

כלומר, טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר ביניהם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.

יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר, ויהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1, אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה, ו-0 אחרת. נחשב את מקדם המתאם:

X/Y	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

X	0	1	2
P_X	0.05	0.2	0.75

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.75 = 1.7$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = 0^2 \cdot 0.05 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.75 - 1.7^2 = 0.31 = \sigma^2$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.31} = 0.557$$

$$E(y) = \sum_i y_i P(y_i) = 0 + 0.8 = 0.8$$

$$V(y) = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 P(y_i) = \sum_i y_i^2 P(y_i) - \mu_y^2 = 0 + 0.8 - 0.8^2 = 0.16 = \sigma_y^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$E(xy) = 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0.75 = 1.55$$

$$\text{cov}(x, y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y) = 1.55 - 1.7 \cdot 0.8 = 0.19$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0.19}{0.557 \cdot 0.4} = 0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב-3 נקודות אקדמאיות.
מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y ?

שאלות:

- (1) הסיכוי שסטודנט יעבור את המבחן במועד א' בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך ב-0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2, והסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.
- נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט, ונגדיר את Y להיות מספר המבחנים שנכשל בהם.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.
- ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?
- ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?
- ד. האם המתאם בין X ל- Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבירו ללא חישוב.
- ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y .
- ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?
- (2) נטיל מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות, ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
- ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
- ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y . האם המשתנים מתאומים?
- ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
- ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?
- (3) נפזר שלושה כדורים שונים בשלושה תאים. נגדיר את המשתנים הבאים:
- X - מספר הכדורים בתא הראשון.
- Y - מספר הכדורים בתא השני.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
- ב. האם המשתנים בלתי מתאומים?

- (4) קובייה הוגנת הוטלה פעמיים.
יהי X ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות, ויהי Y מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.
- מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .
 - חשבו את מקדם המתאם של X ו- Y .
 - מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש- $X = 2$.
- (5) בבניין שלנו 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים:
- X - מספר הדירות המשופצות שנבחרו.
 - Y - מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.
- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.
 - האם המשתנים מתואמים?
 - מה מקדם המתאם בין X לבין Y ?
 - מה יהיה מקדם המתאם:
- בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.
 - בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.
- ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון ₪ וכל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון ₪. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. 0.994 ד. חלקי חיובי.

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
0	0.8	0	0	0.8
1	0	0.18	0	0.18
2	0	0.016	0.0028	0.0188
3	0	0	0.0012	0.0012
$P(x)$	0.8	0.196	0.004	1

ה. 0.963 ו. מתואמים.

(2) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מקדם המתאם: 0.5, מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

ד. 0.25 ה. 0.5

(3) א. להלן טבלה: ב. מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	0

(4) א. להלן טבלה: ב. 0.252.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$

ג. $\frac{2}{3}$.

(5) א. להלן טבלה: ב. X ו- Y מתואמים.

$x \setminus y$	0	1	2	$P(y)$
0	0.1	0	0	0.1
1	0.2	0.4	0	0.6
2	0	0.2	0.1	0.3
$P(x)$	0.3	0.6	0.1	1

ה. $-\frac{2}{3}$.

ii. -1.

ד. i. $-\frac{2}{3}$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 36 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות ליניאריות (פרק 6,7
ממ"13,14)

תוכן העניינים

1. כללי.....150

המשתנה המקרי הדו ממדי – קומבינציות לינאריות:

רקע:

יהיו שני משתנים מקריים X ו- Y .
התוחלת והשונות של סכומם היא:

$$\begin{aligned}E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \\V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)\end{aligned}$$

התוחלת והשונות של הפרשם היא:

$$\begin{aligned}E(X-Y) &= E(X) - E(Y) \\V(X-Y) &= V(X) + V(Y) - 2 \cdot \text{cov}(X, Y)\end{aligned}$$

קומבינציה ליניארית:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה ליניארית של שני משתנים אחרים:
 $W = (aX + b) + (cY + d)$. אזי:

$$\begin{aligned}\text{cov}[(aX + b), (cY + d)] &= a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y) \\E(W) &= E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d \\V(W) &= V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)\end{aligned}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- נתונים שני משתנים מקריים X ו- Y המקיימים:
- $$\mu_X = 80, \sigma_X = 15, \mu_Y = 70, \sigma_Y = 20, \text{cov}(X, Y) = 200$$
- א. מצאו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- ב. מצאו את התוחלת והשונות של X ו- Y .
- ג. מצאו את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W = 2X + 3Y$.

שאלות:

(1) נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y / X	1	2	3	$P(X)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

- השלימו את ההסתברויות החסרות.
- האם המשתנים תלויים?
- האם המשתנים בלתי מתואמים?
- חשבו את השונות המשותפת.
- חשבו את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- חשבו את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

- (2) מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100, עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי היא 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.
- חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.
 - חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.
 - חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.
 - עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

(3) נתון: $\text{var}(X + 2Y) = 3$, $\text{var}(X - 2Y) = 2$.חשבו: $\text{cov}(X, Y)$.(4) מטילים קובייה n פעמים. נגדיר את המשתנים הבאים: X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6. Y = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5בטאו את השונות המשותפת באמצעות n .

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. תלויים. ג. מתואמים. ד. -0.1 .

$x \setminus y$	1	2	3	$P(y)$
2	0.2	0.1	0.3	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
$P(x)$	0.4	0.2	0.4	1

ה. תוחלת: 4.4 , שונות: 0.84 . ו. תוחלת: -0.4 , שונות: 1.24 .

(2) א. 240 . ב. תוחלת: 190 , שונות: 1105 .

ג. תוחלת: 10 , שונות: 145 . ד. תוחלת: 1710 , שונות: 2785 .

(3) -0.125 .

(4) $-\frac{n}{36}$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 37 - התפלגות מולטינומית (פרק 6 ממ"ן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 153

התפלגות מולטינומית:

רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי r תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות

הצלחה: $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ כאשר מתקיים ש: $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

עבור: $i = 1, 2, \dots, r$, הרכיבו Y_i של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים

בהן נתקבלה התוצאה ה- i , כאשר: $\sum_{i=1}^r Y_i = n$.

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:

$$Y \sim \text{multi}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$$

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_r = y_r) = \binom{n}{y_1, y_2, \dots, y_r} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdot \dots \cdot y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

המועמד	% מצביעים
טד סול	62%
בוב שפירו	12%
דורית מון	26%

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

שאלות:

- (1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.
 - ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.
 - ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?
- (2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.
- א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?
 - ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתקבל התוצאה 1?
- (3) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:
- $$p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, n = 20$$
- X_i הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה i כאשר: $i = 1, 2, 3$.
- א. כיצד X_2 מתפלג?
 - ב. כיצד $X_2 + X_3$ מתפלג?
 - ג. האם X_1 ו- X_2 הינם משתנים בלתי תלויים?
 - ד. כיצד $X_2 | X_1 = 5$ מתפלג?
- (4) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.
- א. יש להוכיח שלכל $i \neq j$ מתקיים ש: $COV(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$.
 - ב. מהו מקדם המתאם בין X_i, X_j ? בטאו התשובה באמצעות n, p_i, p_j .

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0581 ב. 0.2362 ג. 0.246
- (2) א. 0.0169 ב. תוחלת: $\frac{5}{3}$, שונות: $\frac{25}{18}$
- (3) א. בינומי עם $n = 20, p = 0.3$ ב. בינומי עם $n = 20, p = 0.5$
- ג. לא. ד. בינומי עם $n = 20, p = 0.6$
- (4) א. הוכחה. ב. $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i) \cdot (1-p_j)}}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 38 - קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית (פרק 6 ממ"ן 13)

תוכן העניינים

1. כללי..... 156

קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית:

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית – מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, וגובהן של הנשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.
מה הסיכוי שגבר אקראי במדינה יהיה גבוה מאישה אקראית?

שאלות:

- (1) המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג, והמשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?
- (2) ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בלויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בלויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובלוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובלוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובלוי?
- (3) צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?
- (4) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
- (5) לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועיזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נמכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נמכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?
מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

תשובות סופיות:

- (1) 0.2177
- (2) א. תוחלת: 7000, סטיית תקן: 2247 ב. 0.3264 ג. 9881
- (3) א. תוחלת: 300, שונות: 576 ב. 0.3372 ג. 294
- (4) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062
- (5) א. 0.7549 ב. 0.1875 ג. 0.0314

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 39 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות (פרק 6 ממ"ן 13)

תוכן העניינים

159	1. התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות
163	2. התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות
166	3. התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות
169	4. התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות
173	5. התפלגות מותנית בסכום של משתנים המתפלגים בינומית
176	6. הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i=1,2,\dots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^n X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסוני עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i=1,2,\dots,n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז מתקיים: $\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייווצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות

ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

תשובה :



$$\text{א. } P(T=14) = e^{-12} \cdot \frac{12^{14}}{14!} = 0.0905$$

$$\text{ב. } T_j \sim P(12) \text{ מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה } j, \sum_{j=1}^{60} T_j \sim P(12 \cdot 60 = 720)$$

$$\text{ג. } P(X_1=4 \cap T=8) - P(X_1=4 \cap \sum_{i=2}^4 X_i=4) = P(X_1=4) \cdot P(\sum_{i=2}^4 X_i=4) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^4}{4!} = 0.0112$$

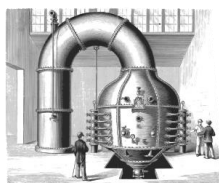
שאלות:

- (1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.



- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?
 ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

- (2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א' מתפלג פואסוני עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב' מתפלג פואסוני עם תוחלת של תקלה אחת ביום.



- מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.
 א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?
 ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?
 ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א'?

- (3) נתון ש- $X_i \sim P(1)$, $i=1,2,3$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה.

$$Y = \sum_{i=1}^3 X_i \text{ : באופן הבא :}$$

- א. מהי התוחלת ומהי השונות של Y ?
 ב. חשבו את: $E|Y-2|$.

- (4) לצומת נכנסות מכוניות מ-3 כיוונים שונים. מספר המכוניות הנכנסות מכיוון i הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסוני עם פרמטר i מכוניות לשעה כש- $i=1,2,3$. אין תלות בין מספרי המכוניות המגיעות לצומת מכיוונים שונים. W הוא משתנה מקרי שמייצג את מספר המכוניות המגיעות לצומת בשעה משלושת הכיוונים יחד.



- א. חשבו את: $P(W=k|W>0)$, $k=1,2,3,\dots$.
 ב. חשבו את: $E\left(\frac{1}{1+W}\right)$.

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שאם: $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ו- $X_2 \sim P(\lambda_2)$ והמשתנים בלתי תלויים זהבזה, אז מתקיים: $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.ב. הוכיחו שאם: $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i=1,2,\dots,n$ והמשתנים בלתי תלויים זהבזה, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.**תשובות סופיות:**(1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.

(2) א. פואסונית עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

(3) א. תוחלת: 3, שונות: 3. ב. $1 + \frac{10}{e^3}$.(4) א. $\frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k! (1 - e^{-6})}$. ב. $\frac{e^{-6} \cdot (e^6 - 1)}{6}$.

(5) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p . באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i = 1, 2, \dots, m$, והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^m n_i, p\right)$.

דוגמה:



ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים. מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3? מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה:

ב"ת

$$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right) \text{ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.}$$

$$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right) \text{ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.}$$

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4 + 2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(x) = n \cdot P$$

$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:



- (1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.
א. מה ההתפלגות של X ?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?



- (2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון. סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.
א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?
ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?



- (3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים. כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9. ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.
א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?
ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

- (4) נתון ש: $X \sim B(2, 0.5)$, $Y \sim B(3, 0.6)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.
א. מצאו את ההתפלגות של $X + Y$.
ב. מצאו את: $P(X + Y = 2 | X > 0)$.

- (5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים m ו- p .
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W = X + Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

- (6) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_x, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_y ו- p .
הוכיחו ש- $X + Y$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים $n_x + n_y$ ו- p .

תשובות סופיות:

א. $X \sim B(10, 0.5)$	ב. $E(X) = 5, V(X) = 2.5$
א. 0.0178	ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375
א. 0.0521	ב. 0.0751
א. עיין בסרטון הוידאו.	ב. 0.2133
המשתנים תלויים.	
שאלת הוכחה.	

התפלגות סכום התפלגויות גיאומטריות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות גיאומטרית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית שלילית עם פרמטר p . באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i = 1, 2, \dots, m$, ואם ידוע שהמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m, p) .

דוגמה:

עודד משחק בשני שלבים:

1. בשלב הראשון הוא מטיל קובייה עד אשר הוא מקבל את התוצאה 1. ברגע שהוא מקבל את התוצאה 1 הוא עובר לשלב השני,
- ובו הוא שוב מטיל את הקובייה עד שהוא מקבל את התוצאה 4.



א. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב הראשון?

ב. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות בשלב השני?

ג. מהי ההתפלגות של מספר ההטלות במשחק?

תשובות (פתרון בהקלטה):

א. $X_1 = \text{מספר ההטלות בשלב הראשון} \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ב. $X_2 = \text{מספר ההטלות בשלב השני} \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$.

ג. $X_1 + X_2 \sim NB\left(2, \frac{1}{6}\right)$.

שאלות:

- (1) יוסי מטיל מטבע עד לקבלת "עץ", ודנה מטילה מטבע (באופן לא תלוי ביוסי) עד לקבלת "פלי". X הוא מספר ההטלות של יוסי ודנה יחד.



- א. מה ההתפלגות של X ?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?

- (2) אדם מנסה להתקשר למוקד שירות. הוא מתקשר עד אשר יקבל מענה. ההסתברות למענה במוקד השירות היא 0.4 בכל פעם, ללא תלות בניסיונות האחרים. אחרי שסיים את השיחה שבה קיבל מענה, האדם נזכר ששכח לשאול שאלה נוספת. הוא מתקשר שוב למוקד השירות עד לקבלת מענה.



- א. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שש פעמים?
ב. מה ההסתברות שבסך הכול האדם התקשר למוקד השירות שבע פעמים, אם ידוע שבפעם הראשונה הוא נאלץ להתקשר שלוש פעמים עד לקבלת מענה?

- (3) X_i הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם הפרמטר 0.2 לכל: $i = 1, 2, \dots, 5$, וכמו כן נתון ש- $X_1, X_2, \dots, X_5$. בלתי-תלויים זה בזה.

א. מה ההסתברות ש: $\sum_{i=1}^5 X_i = 5$?

ב. חשבו את: $P\left(\sum_{i=1}^5 X_i = 12 \mid X_1 = 2\right)$.

- (4) נתון ש: $X \sim G(0.5)$, $Y \sim G(0.6)$. X ו- Y בלתי-תלויים זה בזה.

- א. מצאו את ההתפלגות של $X + Y$.
ב. מצאו את: $P(X + Y = 2 \mid X > 0)$.

- (5) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p ו- Y מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p . הוכיחו ש- $X + Y$ מתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים 2 ו- p .

- (6) הוכיחו את הטענה: אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג גיאומטרית עם הפרמטר p לכל: $i = 1, 2, \dots, m$ ואם: $X_1, X_2, \dots, X_m$ בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית שלילית עם הפרמטרים (m, p) .

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim NB\left(2, \frac{1}{2}\right)$. ב. תוחלת : 4, שונות : 4.
- (2) א. 0.10368 . ב. 0.0864
- (3) א. 0.00032 . ב. 0.0352
- (4) א. $P(X + Y = k) = 6 \cdot 4^k (1.25^k - 1.25)$, $k = 2, 3, \dots$. ב. 0.3
- (5) שאלה הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.

התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X

בהינתן $X + Y = n$ היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

דוגמה:



מספר בני האדם הנכנסים לבית קפה מסוים בשעה מתפלג פואסונית עם ממוצע 6. מספר הכלבים הנכנסים לבית הקפה בשעה מתפלג פואסונית עם שונות 1. נניח שאין תלות בין השניים. מה הסיכוי שבשעה האחרונה נכנסו לבית הקפה בדיוק שני כלבים, אם ידוע שבסך הכול נכנסו שבעה בני אדם וכלבים?

תשובה:

$X \sim P(\lambda_1 = 1)$ - מספר הכלבים הנכנסים בשעה.

$Y \sim P(\lambda_2 = 6)$ - מספר בני האדם הנכנסים בשעה.

X, Y ב"ת.

$$X \sim P(\lambda_1)$$

$$Y \sim P(\lambda_2)$$

$\Downarrow$

$$X | X + Y = n \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

$$X | X + Y = 7 \sim B\left(7, \frac{1}{7}\right)$$

$$P(X = 2 | X + Y = 7) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^5 = 0.1983$$

שאלות:

- (1) מספר הפסקות החשמל היוזמות במפעל זורקס מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 בחודש. מספר הפסקות החשמל הלא-יוזמות במפעל מתפלג פואסונית עם תוחלת של 3 בחודש. מספר הימים בחודש כלשהו זניח. אין תלות בין מספר ההפסקות היוזמות למספר ההפסקות שאינן יוזמות.



א. מה הסיכוי שברבעון הראשון של השנה יהיו בדיוק 5 הפסקות חשמל במפעל וגם שבחודש ינואר של אותה שנה תהיה בדיוק הפסקה אחת?

ב. מהי התוחלת של מספר החודשים שיעברו מינואר 2020 ועד החודש הראשון שבו לא יהיו כלל הפסקות חשמל?

ג. אם בחודש מרץ הבא יהיו בדיוק 6 הפסקות חשמל במפעל זורקס, מה התוחלת של מספר ההפסקות היוזמות שיהיו באותו החודש?

- (2) מספר המכירות המתרחשות בשעה בחנות הצעצועים טויזים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 6 בשעה. החנות פתוחה בכל יום במשך שמונה שעות, מהשעה 11:00.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יהיו לפחות 3 מכירות בחנות הצעצועים טויזים?

ב. מה ההסתברות שבשעה הראשונה שלאחר פתיחת החנות יהיו 4 מכירות, אם באותו היום יהיו בסך הכול 50 מכירות?

ג. בכל יום מנהל החנות מקבל דוח ובו פירוט של מספר הרכישות שהיו בכל שעה שלמה מאז פתיחת החנות. מה ההסתברות שמחר, מתוך שמונה השעות שבהן החנות פתוחה, תהיה בדיוק שעה אחת שבה יהיו בדיוק 5 רכישות?

- (3) מספר הגברים המגיעים לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה מתפלג פואסונית בקצב של 2 לשעה. מספר הנשים המגיעות לטיפול באותו חדר מיון מתפלג פואסונית בקצב של 1 לשעה. אין תלות בין מספר הגברים המגיעים לחדר המיון ובין מספר הנשים המגיעות אליו.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יגיע לפחות אדם אחד לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה?

ב. אם בשעה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 5 אנשים, מה ההסתברות שמתוכם יש בדיוק 2 נשים?

ג. אם ביממה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיוק 60 אנשים, מהי השונות של מספר הגברים שהגיעו לטיפול בחדר המיון באותה היממה?

(4) בסניף דואר מסוים יש שלושה אשנבים (1, 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 3, ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסונית עם הפרמטר 4.



אין תלות בין מספרי האנשים הנכנסים לסניף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים. כל אדם שנכנס לסניף הדואר פונה בהכרח לאחד מן האשנבים.

א. מהי ההסתברות שבין 8:00 ל-8:01 ייכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר?

ב. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו תשעה אנשים לסניף הדואר, מהי ההסתברות ששלושה מהם פנו לאשנב 1?

ג. אם ידוע שבין 8:00 ל-8:01 נכנסו לסניף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך הכול נכנסו לסניף הדואר באותה הדקה תשעה אנשים?

(5) הוכיחו את הטענה שאם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי

המותנה X , בהינתן $X + Y = n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

(6) $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ הם משתנים מקריים בלתי-תלויים.

נניח כי לכל: $i = 1, \dots, 100$ ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית

עם הפרמטר $\frac{i}{50}$.

א. מצאו את ההתפלגות המותנית של $\sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי ש: $X_{100} = n$.

ב. מצאו את ההתפלגות המותנית של X_{100} בתנאי ש: $\sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0946 ב. 148.4 ג. 2.4
- (2) א. 0.938 ב. 0.1209 ג. 0.3772
- (3) א. 0.9502 ב. $\frac{80}{243}$ ג. $13\frac{1}{3}$
- (4) א. 0.1318 ב. 0.2041 ג. 0.149
- (5) שאלה הוכחה.
- (6) א. $k \geq n$ ב. $B\left(n, \frac{2}{101}\right)$ $\frac{e^{-99} \cdot 99^{k-n}}{(k-n)!}$

התפלגות מותנית בסכום של משתנים המתפלגים בינומית:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים שמתפלגים בינומית עם הפרמטרים: (n_X, p) ו- (n_Y, p) בהתאמה, אז בהינתן ש- $X + Y = n$, המשתנה המקרי המותנה X יתפלג היפרגיאומטרית עם הפרמטרים: $D = n_X$, $N = n_X + n_Y$ ו- $n = n - 1$.

כלומר: $X \sim B(n_X, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה $\Leftrightarrow X | X + Y = n \sim HG(n_X + n_Y, n_X, n)$.

דוגמה:

אנליסט בנה תיק השקעות משמונה מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8, באופן בלתי תלוי במניות אחרות. הוא החליט להוסיף לתיק עוד ארבע מניות, שכל אחת מהן תעלה השנה בהסתברות של 0.8 באופן בלתי תלוי במניות אחרות, בכלל זה אלה שכבר נמצאות בתיק ההשקעות.



אם עשר מניות מהתיק יעלו השנה, מה הסיכוי ששלוש מהן יהיו מארבע המניות שנוספו לתיק?

תשובה:

$Y \sim B(n_Y = 8, P = 0.8)$ - מספר המניות המקוריות שיעלו השנה.

$X \sim B(n_X = 4, P = 0.8)$ - מספר המניות שנוספו שיעלו השנה.

$$X \sim HG(N, D, n)$$

$$X | X + Y = 10 \sim HG(12, 4, 10)$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 3 | X + Y = 10) = \frac{\binom{4}{3} \binom{8}{7}}{\binom{12}{10}} = 0.4848$$

שאלות:

- (1) חמישה אבירים וארבעה נסיכים מתאמנים בקליעה למטרה. כל אחד מתשעת המתאמנים מנסה לקלוע חץ אחד למטרה. הסיכוי של כל אחד מהאבירים לקלוע למטרה הוא 0.7, והסיכוי של כל אחד מהנסיכים לקלוע למטרה הוא 0.8. ניסיונות הקליעה למטרה בלתי-תלויים זה בזה.



א. מה ההסתברות שארבעה אבירים ושלושה נסיכים יקלעו למטרה?

ב. אם ארבעה אבירים קלעו למטרה, מה הסיכוי ששלושה נסיכים יקלעו למטרה?

ג. אם שמונה מתאמנים קלעו למטרה, מה התוחלת של מספר הנסיכים שקלעו למטרה?

- (2) מזכיר הכניס ארבע תיקיות לתוך מגירות בארונות. בארונות חמש מגירות. בחירת המגירה לכל תיקייה נעשית באקראי ובאופן בלתי תלוי בתיקיות אחרות. מגירה יכולה להכיל מספר רב של תיקיות. נגדיר:



X – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה העליונה.

Y – מספר התיקיות שהוכנסו למגירה התחתונה.

א. מה ההתפלגות של Y ומה ההתפלגות של X ?

ב. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן שלמגירה העליונה והתחתונה יחד הוכנסו בדיוק שלוש תיקיות.

- (3) מטילים מטבע תקין 50 פעמים. אם X הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בכל 50 ההטלות, ו- Y הוא מספר הפעמים שהתקבל "עץ" ב-20 ההטלות הראשונות.



א. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ב. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן ש: $Y = j$, לכל: $j = 0, 1, \dots, 20$. מה הקשר בין פונקציית ההסתברות שהתקבלה ובין ההתפלגות הבינומית?

ג. מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן ש: $X = i$, לכל: $i = 0, 1, \dots, 50$. זהו את ההתפלגות המותנית שהתקבלה.

- (4) הוכיחו את הטענה הבאה:

אם: $X \sim B(n_X, p)$ ו- $Y \sim B(n_Y, p)$, והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז: $X | X + Y = n \sim HG(n_X + n_Y, n_X, n)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.1475
ג. תוחלת: 3.6818
ב. 0.4096
- (2) א. $X \sim B\left(n_x = 4, P_x = \frac{1}{5}\right)$, $Y \sim B\left(n_y = 4, P_y = \frac{1}{3}\right)$ ב. עין בסרטון הוידאו.
- (3) א. $P(X = i, Y = j) = \binom{20}{j} \cdot \binom{30}{i-j} \cdot 0.5^{50}$, $0 \leq j \leq 2$, $j \leq i \leq j + 30$
ב. $P(X = i | Y = j) = \binom{30}{i-j} \cdot 0.5^{30}$, $0 \leq i - j \leq 30$
ג. $Y | Y + W = i \sim HG(50, 20, i)$
(4) שאלת הוכחה.

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ , אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.



א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$$

$Y \sim \exp(\lambda = 2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

א. $X \sim P(\lambda = 2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W \sim P(\lambda = 2 \cdot 60 = 120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}$$

$$e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} = \frac{3}{e^2} = 0.406$$

שאלות:

- (1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



- א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?
 ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

- (2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שתיים.



- א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?
 ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?
 ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

- (3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.



- א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?
 ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

- (4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.



- א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?
 ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?
 ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 20:21 ל-21:30?
 ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

- (5) הוכיחו שאם מספר המופעים ליחידת זמן מתפלג פואסונית בקצב λ , אז הזמן החולף מזמן 0 עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם פרמטר λ .

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0948 ב. 0.1
- (2) א. 103.7 ב. 240 ג. 0.5
- (3) א. 115.13 ב. 0.0713
- (4) א. 0.59399 ב. 0.0821 ג. 0.0200 ד. 0.3679
- (5) שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 40 - התפלגות מינימום ומקסימום (פרק 6 ממ"ן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 179

התפלגות מינימום ומקסימום:

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. מתקיים ש: $F_U(t) = (F_X(t))^n$,

ולכן: $f(u) = n \cdot (F_X(u))^{n-1} \cdot f_X(u)$.

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. מתקיים ש: $F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$,

ולכן: $f(z) = n \cdot [1 - F_X(z)]^{n-1} \cdot f_X(z)$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

הוכיחו כי: $\min(x_i) \sim \exp(n\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

שאלות:

- (1) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, מתקיים ש: $f(z) = n[1 - F_x(z)]^{n-1} \cdot f_x(z)$.
- ב. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i = 1, 2, \dots, n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $U = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$, מתקיים ש: $f(u) = n \cdot (F_x(u))^{n-1} \cdot f_x(u)$.
- (2) אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.
- א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.
- ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.
- ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב'?
- (3) בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדס תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדס התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדס התלמיד האחרון.
- א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?
- ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?
- (4) 3 אנשים משתתפים בתחרות ריצה ל-100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.
- א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?
- ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?
- ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצאו את התוחלת והשונות שלו?
- (5) X_1, X_2 מתפלגים נורמאלית סטנדרטית.
- נגדיר את: $Z = \min(X_1, X_2)$ ואת: $Y = \max(X_1, X_2)$.
- א. חשבו $P(Z > 1)$.
- ב. חשבו $P(Y > 1)$.
- ג. חשבו $P(Y > 1 / Y > 0)$.

- (6) רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית. משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.
- א. מצאו את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.
- ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

- (7) נתון ש: $X \sim \exp(\lambda)$ ו- $Y \sim \exp(\mu)$. $U = \min(x, y)$ כמו x, y בלתי תלויים. הוכיחו כי: $U \sim \exp(\mu + \lambda)$.

- (8) X_1 ו- X_2 שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1. נגדיר: $Y = \max(x_1, x_2)$. חשבו את: $P(Y > 0.5)$.

- (9) נתון ש- $X_i \sim U(0, 2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר: $i = 1, 2, \dots, 5$. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = \max(X_i)$.

- (10) נתון משתנה מקרי X בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{תא } \text{חר} \end{cases}$$

- נגדיר את: $W = \max(X_i)$ כאשר: $i = 1, 2, \dots, 10$. חשבו את $E(W)$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad \text{א. } F_u(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{30}t}\right)^3 \quad \text{ב. } Z \sim \exp\left(\lambda = \frac{1}{10}\right)$$

ג. תוחלת: 10, שונות: 100.

(3) א. 0.9817 ב. 0.

(4) א. 0.421875 ב. 0.216 ג. תוחלת: 11.5, שונות: 0.15.

(5) א. 0.02518 ב. 0.2922 ג. 0.3896.

(6) א. 0.9328 ב. 0.2898.

(7) הוכחה.

(8) 0.75.

$$(9) \quad \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^4$$

$$(10) \quad \frac{30}{31}$$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 41 - נוסחת התוחלת המותנית (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 183

נוסחת התוחלת השלמה:

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y , מתקיים: $E(X) = E[E(X/Y)]$.

עבור משתנה Y בדיד כלשהו: $E(X) = \sum_y E(X|Y=y) \cdot P(Y=y)$.

עבור משתנה Y רציף כלשהו: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) \cdot f(y) dy$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.

בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.

בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.

המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.

יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.

יש לחשב את $E(X)$.

שאלות:

(1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

(2) מטיילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש. כעת מטיילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.

(3) בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב-15₪. אחרת זוכים ב-50₪. חשבו את תוחלת סכום הזכיה.

(4) נתון ש- $Y/X \sim U(0, X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 2 \leq x \leq 6 \\ 0.2 & 6 < x \leq 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{הינה:}$$

חשבו את $E(Y)$.

(5) בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A - שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B - שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא ונקודה C - המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- X את זמן ההגעה לנקודת הסיום. חשבו את $E(Y)$.

תשובות סופיות:

(1) 4.4.

(2) $\frac{n}{4}$.

(3) 46.4.

(4) 3.05.

(5) .5

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 42 - נוסחת השונות המותנית (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. נוסחת השונות השלמה (שונות של משתנה מותנה) 186

נוסחת השונות השלמה (המותנית):

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y , מתקיים: $E(X) = E[E(X|Y)]$.
 כמו כן, מתקיים לגבי השונות: $\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X|Y]) + E[\text{Var}(X|Y)]$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.
 בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.
 בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.
 המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.
 יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.
 יש לחשב את $V(X)$.

שאלות:

- (1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטיילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

- (2) נטיל קובייה: $Y + 4$ פעמים. נתון ש- $Y \sim P(4)$. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 2.
 א. מצאו את התוחלת של X .
 ב. מצאו את השונות של X .

- (3) נתון ש- $Y | X \sim U(0, X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 2 \leq x \leq 6 \\ 0.2 & 6 < x \leq 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{הינה:}$$

חשבו את $V(Y)$.

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 4.4, שונות: 22.64.
 (2) תוחלת: $\frac{4}{3}$, שונות: $\frac{11}{9}$.
 (3) 4.4.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 43 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדקטורים (פרק 7 ממ"ן
(14

תוכן העניינים

1. כללי 188

חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים:

רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי, על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדיקטור. אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך:

X	1	0
$P(X)$	P	$1-P$

נגיד ש- X_i הינו משתנה אינדיקטור כאשר: $i = 1, 2, \dots, n$ ו- $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

ניעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של X .

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} \text{COV}(X_i, X_j)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש:

$$E(X_i) = P(X_i = 1)$$

$$V(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$$

$$\text{COV}(X_i, X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1)$$

דוגמא (פתרון בהקלטה):

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב- X את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון. חשבו את $E(X)$ ואת $V(X)$.

שאלות:

- (1) יהיו X ו- Y משתני אינדיקטורים. הוכיחו ש:
- $E(X) = P(X=1)$.
 - $V(X) = P(X=1) \cdot [1 - P(X=1)]$.
 - $COV(X, Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$.
- (2) 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.
- א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.
 - ב. נגדיר את X_i משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום i בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 עם יום הולדת באותו היום. חשבו את התוחלת והשונות של X_i .
 - ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ-400 האנשים הללו.
- (3) 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד. נסמן ב- W את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד. חשבו את התוחלת והשונות של W על ידי פירוק לאינדיקטורים.
- (4) A, B ו- C הם שלושה מאורעות כך ש: $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(C) = 0.1$.
- נגדיר את Y להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים. חשבו את התוחלת והשונות של Y כאשר:
 - א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.
 - ב. $C \subset B \subset A$.
 - ג. A, B ו- C זרים זה לזה.
- (5) נטיל קובייה 10 פעמים. נסמן ב- W את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.
- א. מצאו את $E(W)$.
 - ב. מצאו את $V(W)$.

- (6) נסדר בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק", אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה. נסמן ב- X את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:
- קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, מים, קולה, קולה, $X = 2$.
- חשבו את התוחלת והשונות של X .
- (7) נסדר בשורה n זוגות גרביים באקראי (בסך הכול $2n$ גרבים). חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך n הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.
- (8) בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב- X את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב- Y את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.
- א. חשבו את התוחלת והשונות של X .
- ב. בטאו את Y כפונקציה של X וחשבו את התוחלת והשונות של Y .
- ג. מהי השונות המשותפת של X ו- Y ?

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. 0.3667. ב. תוחלת: 0.3667, שונות: 0.2322.
- ג. תוחלת: 133.85, שונות: 88.89.
- (3) תוחלת: 1.92, שונות: 1.1136.
- (4) א. תוחלת: 0.6, שונות: 0.46. ב. תוחלת: 0.6, שונות: 1.04.
- ג. תוחלת: 0.6, שונות: 0.24.
- (5) א. 5.03. ב. 0.568.
- (6) תוחלת: 3, שונות: $\frac{2}{3}$.
- (7) תוחלת: $n-1$, שונות: $1 - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
- (8) א. תוחלת: 50.251, שונות: 25.126.
- ב. $Y = -0.5X + 50$. ג. -12.563.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 44 - מערכות חשמליות (כללי)

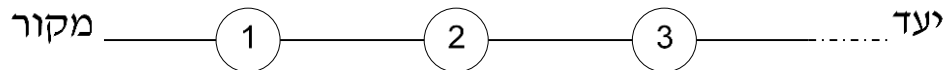
תוכן העניינים

1. כללי 191

מערכות חשמליות:

רקע:

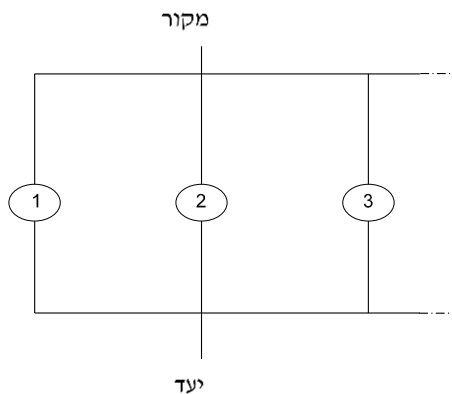
מערכת חשמלית בטור הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:



נסמן ב- A_i את המאורע: רכיב i פועל.

כדי שהמערכת כולה תפעל צריך להתקיים ש: $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

מערכת חשמלית במקביל הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא:



כדי שהמערכת החשמלית כולה תפעל צריך להתקיים ש: $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

במערכת חשמלית 4 רכיבים בלתי תלויים שלכל אחד מהם סיכוי P לפעול.
בטאו באמצעות P את הסיכוי שהמערכת תפעל.

א. כל הרכיבים מחוברים בטור זה לזה.

ב. כל הרכיבים מחוברים במקביל זה לזה.

שאלות:

(1) נתונים שלושה רכיבים חשמליים המחוברים בטור.

אורך החיים של כל מכשיר מתפלג באופן הבא:

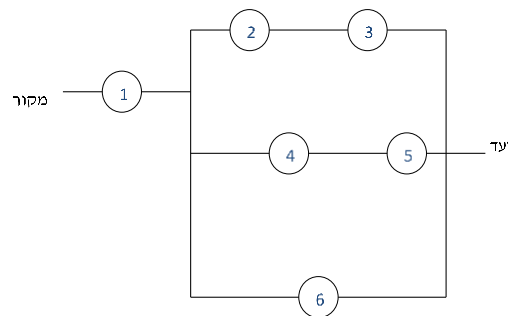
$$X_1 \sim U(2, 4)$$

$$X_2 \sim N(3, 1)$$

$$X_3 \sim \exp(1)$$

כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. כל הרכיבים הופעלו כעת. מה הסיכוי שבעוד 3 שעות המערכת תפעל?

(2) המערכת החשמלית הבאה מכילה 6 רכיבים כמוראה בשרטוט:



כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. רכיבים מספר 1, 2, 6 פועלים בסיכוי 0.9. רכיב מספר 3 פועל בסיכוי 0.8. רכיבים מספר 4, 5 פועלים בסיכוי P .

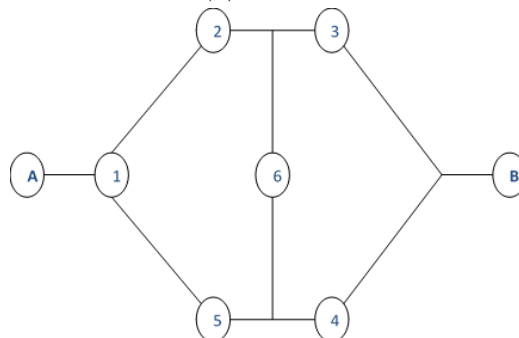
מצאו את P , אם הסיכוי שהמערכת תפעל הוא 0.887148.

(3) בין שני המחשבים A ו-B נמצאים 6 שרתים כמוראה בשרטוט. כל אחד מהשרתים תקין בסיכוי 0.9. על מנת שהודעה תצליח לעבור ממחשב A ל-B צריך להיות לפחות מסלול אחד שבו כל השרתים תקינים.

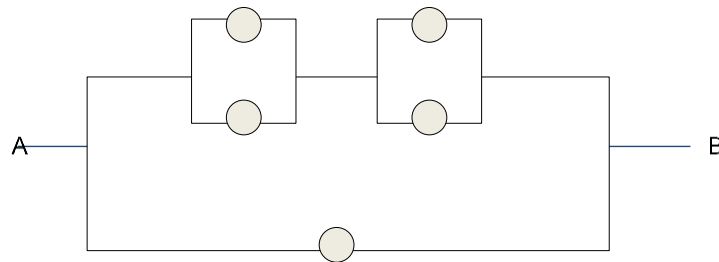
א. מה ההסתברות לכך שההודעה תעבור בהצלחה ממחשב A ל-B?

ב. ההודעה לא הצליחה לעבור ממחשב A למחשב B.

מה הסיכוי ששרת מספר 1 לא תקין?

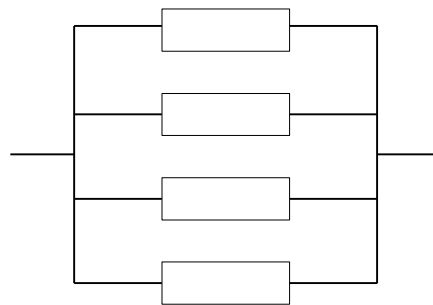


(4) נתונה המערכת החשמלית הבאה :



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות P .
 כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.
 הוכיחו שהסיכוי שהמערכת תפעל הוא: $P + (1 - P)(2P - P^2)^2$.

(5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט :



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין. אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.
 א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?
 ב. נרצה להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪. מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

(1)	0.1245
(2)	0.7
(3)	א. 0.880632 ב. 0.837745
(4)	שאלת הוכחה.
(5)	א. 0.8403 ב. $0.0588A > K$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 45 - פונקציה יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 194

פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות: $M_X(t) = E(e^{tx})$.
אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} \cdot P(X = k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_x e^{tx} \cdot f(x) dx$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות: $E(X^n)$.

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה- n ית לפי t של פונקציית

יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה $t = 0$. כלומר: $M_X^{(n)}(t)|_{t=0} = E(X^n)$.

משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{כלל שרשרת}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית: $X \sim \exp(\lambda)$,

היא: $\frac{\lambda}{\lambda - t}$. מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

שאלות:

- (1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.
 א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.
 ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- (2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית: $X \sim B(n, p)$,
 ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.
- (3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית: $X \sim G(P)$,
 וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.
- (4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית: $x \sim p(\lambda)$.
 מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

- (5) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- א. מצאו את ערכו של A .
 ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X .

- (6) יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X . Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$,
 ונתון: $m_y(t) = t \cdot m_x(t)$.
 חשבו את התוחלת והשונות של Y .

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t} \quad \text{ב. } \frac{2}{3}.$$

$$(2) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } (e^t \cdot p + 1 - p)^n.$$

$$(3) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^t p}{1 - e^t \cdot (1 - p)}.$$

$$(4) \quad \text{פונקציה יוצרת מומנטים: } e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{1 - e^{-7}}. \quad \text{ב. פונקציה יוצרת מומנטים: } \frac{e^7}{e^7 - 1} \cdot \frac{e^{7(t-1)} - 1}{t - 1}.$$

$$(6) \quad \text{תוחלת: 1, שונות: 9.}$$

נספחים:

פונקציית התפלגות מצטברת $F(X)$	פונקציית צפיפות $f(X)$	התפלגות
$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	אחיד $U(a,b)$
$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$	מעריכי $\exp(\lambda)$
$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n, p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה. $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון X - מספר ההצלחות	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$	$\left[pe^t + q \right]^n$
גיאומטרי $G(P)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. X - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	X - מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$.	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 46 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. כללי 200

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n, p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון x : מספר ההצלחות	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$	$[pe^t + q]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t - 1)}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X \sim P(\lambda = 4)$ ו- $Y \sim P(\lambda = 2)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X - 3$?

ב. נגדיר את: $T = X + Y$. מה ההתפלגות של T ?

שאלות:

(1) נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^n X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$.

(2) נתון: $Y \sim P(\lambda=2)$, $X \sim P(\lambda=10)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X + Y$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda=12)$.

ג. הוכיחו ש- $X/T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של X ,

בהינתן ש- $T=8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n=8$ ו- $p = \frac{5}{6}$.

(3) יהי: $X_i \sim \exp(1)$, $i=1, 2, \dots, n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T .

ג. יהי: $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T .

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z .

(4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \text{ לכל } t, \text{ כאשר: } X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

א. הוכיחו שאם $Y = 2X$ אזי $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$.

ב. הוכיחו שאם $T = X_1 + X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$.

תשובות סופיות:

(1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

(2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

(3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: n , שונות: n .

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{-\frac{1}{n^2}t} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^2}t\right)}\right)^n$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 47 - סכום מקרי (פרק 7 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

1. סכום מקרי..... 205

סכום מקרי:

רקע:

N הוא משתנה מקרי בדיד שערכיו שלמים ואי-שליליים.
 $X_1, X_2, \dots$ הם משתנים מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב- N .
 $\sum_{i=1}^N X_i$ הוא סכום מספר מקרי של אותם משתנים מקריים, הנקרא סכום מקרי.
 התוחלת והשונות של הסכום יחושבו על ידי הנוסחאות הבאות:

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1]$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E[N]\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \text{Var}(N)$$

אם $N = 0$ אז גם סכום המשתנים שווה ל-0.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מספר הפניות למוקד תשלומים במשך שעה הוא משתנה מקרי פואסוני עם הפרמטר 100. מספר התשלומים, המתבצעים בכל פנייה למוקד, הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים 4 ו-0.15.
 אין תלות בין פניות שונות שמתקבלות במוקד, ואין תלות בין מספרי התשלומים שנעשים בפניות השונות סך-כל הפניות שמתקבלות במוקד במשך שעה.

א. מהי התוחלת של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

ב. מהי השונות של מספר התשלומים שמתבצעים במוקד במשך שעה?

שאלות:

(1) N הוא משתנה מקרי אחיד בדיד המתפלג מ-10 ועד 99. $X_1, X_2, \dots$ הם משתנים

מקריים שווי-התפלגות ובלתי-תלויים זה בזה וב- N המתפלגים נורמלית עם

תוחלת 50 ושונות 10. מצאו את התוחלת והשונות של: $\sum_{i=1}^N X_i$.

(2) נתון ניסוי דו שלבי: בשלב הראשון מטילים קובייה הוגנת עד הפעם הראשונה

שמתקבלת התוצאה 4. בשלב השני מטילים קובייה הוגנת כמספר הפעמים

שהוטלה הקובייה בשלב הראשון. מהי התוחלת ומהי השונות של סכום כלל

התוצאות של הטלות הקובייה בשלב השני של הניסוי?

(3) מספר הקונים המגיעים ביום ראשון לסניף מסוים של סופרמרקט הוא משתנה

מקרי פואסוני עם הפרמטר 1,000. הקונה ה- i , שמגיע ביום ראשון לסניף זה

ממחזר X_i בקבוקים, לכל $i = 1, 2, \dots$, כאשר המשתנים המקריים X_i , מוגדרים

על ידי: $X_i = Y_i - 1$, עבור Y_i שהתפלגותו גיאומטרית עם הפרמטר 0.2. כמו כן,

נניח שאין תלות בין מספר הבקבוקים שקונים שונים ממחזרים, וכי גם אין

תלות בין מספר הקונים שמגיעים לסניף ביום ראשון למספר הבקבוקים שכל

אחד מהם ממחזר.

חשבו את התוחלת והשונות של מספר הבקבוקים הממוחזרים ביום ראשון על ידי

הקונים בסניף הסופרמרקט.

(4) X הוא משתנה מקרי רציף בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(X) = \begin{cases} KX & 2 < X < 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ביצעו מדגם מקרי בגודל Y מהתפלגותו של X . נתון ש- Y הוא משתנה מקרי המתפלג

גאומטרית עם סיכוי להצלחה בניסוי בודד של 0.2. מצאו את התוחלת של: $\sum_{i=1}^Y X_i$.

תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2,725, שונות: 1,687,837.

(2) תוחלת: 210, שונות: 385.

(3) תוחלת: 4,000, שונות: 36,000.

(4) תוחלת: $12\frac{2}{3}$.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 48 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי (פרק 8 ממ"ן 14)

תוכן העניינים

- 1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי. 207
- 2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי. 215
- 3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית. 218

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

גדול ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?

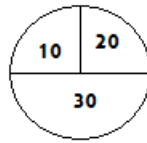
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ביישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?
- נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 - ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 - ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 - ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 - ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 - ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 - ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 - ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם $\bar{X}$. לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2 .
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
- ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
- ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
- ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17 משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.
א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

(18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

(19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

(20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 , ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות

$$\text{לגבי ממוצע המדגם: } E(\bar{x}) = \mu \text{ ו- } V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

תשובות סופיות:

(1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.

ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.

ה. 78.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	$P(X)$

ב. $\sigma = 0.973$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\mu = 2.05$

ג. $\sigma(\bar{X}) = 0.486$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\mu_{\bar{x}} = 2.05$

(3) $\sigma(\bar{X}) = 1.21$, $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

(4) א. 0.8413 ב. 0.0013

(5) א. 0 ב. 0

(6) א. 0.0465 ב. 27.71

(7) א. 0 ב. 0.1587

(8) א. 0.5468 ב. 0.6826

(9) א. להלן טבלה:

30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75

ד. 0.8997

(10) 0.0475

(11) 0.1814

(12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271

(13) 0.5

(14) ב'

(15) ד'

(16) ג'

(17) א. 2.429 ב. 0.25

(18) 0.6826

(19) 0.0071

(20) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T = \sum_{i=1}^n X_i$.
 כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1, \dots, X_n$ -
 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:
 התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T) = n\mu$, $V(T) = n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי: $Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.
- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
 - מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

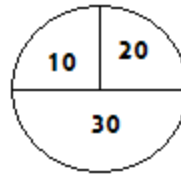
שאלות:

- (1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
- ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
- ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
- (2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
- ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
- ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?
- (3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
- ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
- (4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

- נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית ההסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).
- א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?
- ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

(5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

- א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?
- ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

(6) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda=1)$, כאשר: $i=1, 2, \dots, 100$.

$$\text{חשבו את הסיכוי: } P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$$

(7) אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0 < x < 1$, $f(x) = 2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

תשובות סופיות:

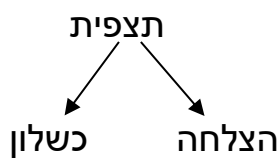
- (1) א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5
- (2) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062
- ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.
- (3) א. 0.0571 ב. 2036.8
- (4) א. 0.883 ב. 0.7949
- (5) א. 0.8997 ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239
- (6) 0.0668
- (7) 56

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n : $Y \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

תוחלת: $E(y) = np$.

שונות: $V(y) = npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n, p)$, ומתקיים ש:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

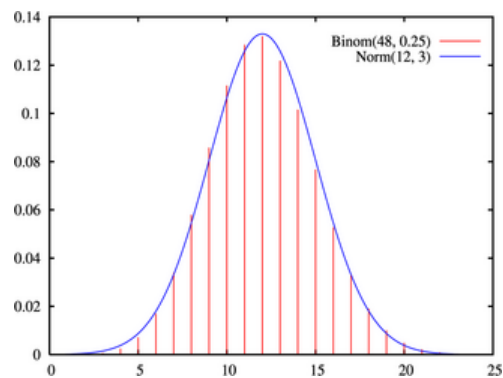
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
 - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.201 ב. 0.3758 ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
- (2) א. 0.9332 ב. 0.6915
- (3) 0.1611
- (4) א. 0.9406 ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
- (5) א. 0.015 ב. 0.398
- (6) 0.9996
- (7) 0.8643

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 49 - אי שוויונים בהסתברות (פרק 8 ממ"ן 14))

תוכן העניינים

1. אי שוויון מרקוב 223
2. אי שוויון צ'בישב 227

אי-שוויון מרקוב:

רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר a הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P(X < a) \geq 1 - \frac{E[X]}{a}$.

דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

X = אורך חיים של מכשיר (רציף).

$$X \geq 0, E[X] = 500$$

$$P(X \geq 1500) \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3}$$

לכן, $0 \leq P(X \geq 1500) \leq \frac{1}{3}$.

שאלות:

- (1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65. מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.
- (2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות. העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.
- (3) X משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15. האם ייתכן ש: $P(X > 65) = 0.3$?
- (4) X משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X > -2$, ותוחלתו 6. מצאו חסם תחתון ל- $P(X < 10)$.
- (5) X משתנה מקרי המקיים: $P(X \geq 0) = 1$ ו- $s > 0$ קבוע ממשי. הוכיחו כי: $P(X < sE(X)) \geq \frac{s-1}{s}$.
- (6) נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$ הם משתנים בלתי תלויים. מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda$.
- (7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב. רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X \geq a$.

(8) בשכונה חדשה בונים n בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי p ללא תלות בבתיים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים. נגדיר את X להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של X .

ב. כעת נניח ש- $p = \frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים

$$\text{יהיה קטן מ-} \frac{n}{4} \text{ הוא לפחות } \frac{7}{16}.$$

(9) הוכיחו את אי-שוויון צ'בישב: אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונויותו הן סופיות, אז לכל ערך k חיובי מתקיים: $P\{|X - E(X)| \geq k\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{k^2}$.

רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad P(X \geq 75) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$$

$$(2) \quad 0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \text{לא יתכן.}$$

$$(4) \quad \frac{1}{3}$$

$$(5) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(6) \quad 0 \leq P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(8) \quad \text{א. } n \cdot p(1-p)^2, \quad \text{ב. שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי

$$P\{|X - E(X)| \geq a\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מתקיים:}$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{מכאן גם נובע שמתקיים:}$$

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X .

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X) = 3$$

$$P\{|X - E(X)| < a\} \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2} \quad \text{נציב:}$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \geq 1 - \frac{3^2}{5^2} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0.64$$

$$P\{|X - E(X)| < 5\} \neq 0.6, \quad \text{לכן לא יתכן.}$$

שאלות:

- (1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 :
 - א. $p(2 < x < 14)$.
 - ב. $p(|x - 8| \geq 9)$.
- (2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.7$? הסבירו.
- (3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.
- (4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?
- (5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?
- (6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.
- (7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.
 - א. עבור $n = 10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
 - ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

(8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאוד. העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

(9) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n} : 0 < p < 1. \text{ הוכיחו שמתקיים:}$$

(10) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן

$$T = \sum_{i=1}^n X_i : \text{נסמן את:}$$

$$P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n} : \text{הוכיחו שמתקיים:}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל- $\frac{1}{9}$.
- (2) לא יתכן.
- (3) 0.75.
- (4) לפחות 0.7.
- (5) לפחות 30.
- (6) 0.52.
- (7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.
- (8) 0.7056.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 50 - אמידה נקודתית (פרק 9 ממ"ן 15)

תוכן העניינים

231	1. אומד חסר הטייה
238	2. אומד ניראות מקסימלית
246	3. MSE
249	4. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית
251	5. אומד נראות מקסימלית לשני פרמטרים (דו ממדי)
256	6. שאלות מסכמות

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ : $E(\hat{\theta}) = \theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	X
4θ	$1 - 60\theta$	2θ	הסתברות

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו- X_2 .

א. הראו שהאומד: $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל- θ .

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta}) - \theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1 ?

ג. תקנו את T_1 , כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל- θ , אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X = 3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X .

תזכורות חשובות:

אם: $Y = aX + b$, אזי: $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$, $\sigma_Y = |a| \sigma_X$.

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

שאלות:

- (1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ , נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1, \dots, X_5$. שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
- הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
- במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
- איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

- (2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i \quad \text{זה:}$$

- בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
- איזה אומד עדיף? נמקו.

- (3) $X \sim B(n, p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P

(סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n .

- פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
- מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?
- מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
- מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

(4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2}, P(X=1) = \frac{\theta}{3}, P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום,

במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

(5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1 - 4\theta$,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ .

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

(6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז $5T$ אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר 5θ .

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז T^2 אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר θ^2 .

- (7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$. דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

- (8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .
 א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2 , המתבסס על T_1 ו- T_2 .
 ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2 .

- (9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2 . נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^n p_i x_i$ אומד חסר הטיה ל- μ , כאשר: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

- (10) $X_i \sim N(\mu, 1)$, כאשר: $i = 1, 2, \dots, n$. נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו. מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

(11) נתונות n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל- β .
 ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

(12) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית

$$f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{הצפיפות הבאה :}$$

- א. בטאו את ערכו של A באמצעות θ , כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.
 ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך n התצפיות.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } T_1 \text{ ו- } T_2. \quad \text{ב. } \frac{2}{3}T_3. \quad \text{ג. } T_1 = 76.6, T_2 = 110. \quad \text{ד. } T_1.$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בוידאו.} \quad \text{ב. } T_2.$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x}{n}. \quad \text{ב. } 1 - \frac{x}{n}. \quad \text{ג. } X. \quad \text{ד. } \theta.$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3x}{2}. \quad \text{ב. } \frac{3\bar{x}}{2}.$$

$$(5) \quad \text{א. } 1 - \frac{x}{2}. \quad \text{ב. } 1 - \frac{1}{2}\bar{x}. \quad \text{ג. } 0.125. \quad \text{ד. } 3\left(1 - \frac{1}{2}\bar{x}\right).$$

$$\text{ה. לשונות } 0.917.$$

$$(6) \quad \text{א. נכון.} \quad \text{ב. לא נכון.}$$

$$(7) \quad \text{ב'.$$

$$(8) \quad \text{א. } T_1 \cdot T_2. \quad \text{ב. } T_1 - T_1 \cdot T_2.$$

$$(9) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.}$$

$$(10) \quad \bar{X}^2 - \frac{1}{n}.$$

$$(11) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } V(3\bar{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}.$$

$$(12) \quad \text{א. } A = \frac{2}{\theta^2}. \quad \text{ב. } \theta = \frac{3 - \bar{X}}{2}.$$

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.
נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x, \theta)$,
כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, \dots, X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.
נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).
אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות
שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta)$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ),
כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית
הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ .

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא p (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל
עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של p .

אומד נראות מקסימלית עבור θ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$. כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף $\ln$ כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p .

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ , אזי $g(\hat{\theta})$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g(\hat{\theta})$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

שאלות:

- (1) הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע).
 השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
 נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
 א. חשבו את פונקציית הנראות של p , וציירו גרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור p .
 ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- p , אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.
- (2) מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.
 א. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- λ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- λ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסוימים.
- (3) הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .
 דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
 התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 5, 7 ו-3.
 א. פתחו אומדן נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.
 ב. מהו האומדן לפרמטר?
- (4) משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0, q)$.
 כדי לאמוד את θ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.
 א. אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך התצפית.
 ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1.5, 3, 1.
 מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך המדגם הזה.
 ד. מצאו באופן כללי אומדן נראות מקסימלית ל- θ , על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1, \dots, X_n$.

(5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1, \dots, X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

(6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר p בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל n , בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

(7) X הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1, \dots, X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ^2 .

(8) בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

(9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

- 10) מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי X , בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ , באופן הבא:

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$1 - 4\theta + 4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 1, 0, 0 לקוחות ממתינים בתור.

- א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ , על-סמך המדגם הנתון.
 ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

- 11) אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

- א. מצא אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.
 ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

- 12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.
 א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.
 ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.
 ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

- 13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
 ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
 ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
 ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
 יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
 הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.
 א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.
 ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?
 ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

(14) $X_1, X_2, \dots, X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.

מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ .

(15) $X_1, X_2, \dots, X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1 - (1-P)^2} \quad K = 1, 2$$

הוכח שא.נ.מ. ל- P , הינו: $2 - \frac{2}{X}$.

(16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P . כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

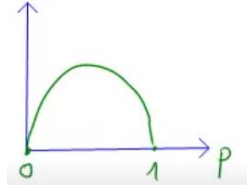
- א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P .
- ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.
- ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ עבור $t > 0$.
- מצא א.נ.מ. עבור θ , המבוסס על Y .
- מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

(17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

- א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P .
- ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 1, 5.
- מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P , על סמך התוצאות שהתקבלו.

תשובות סופיות:

להלן גרף:



$$(1) \quad L(p) = (1-p) \cdot p \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } 0.5 \quad \text{ג. } \frac{2}{9}$$

$$(2) \quad X \quad \text{א.} \quad \bar{X} \quad \text{ב.}$$

$$(3) \quad \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{א.} \quad \frac{2}{9} \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad \text{א. } 1 \quad \text{ב. } 1 \quad \text{ג. } 3 \quad \text{ד. } \hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$(5) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } 40.2$$

$$(6) \quad \frac{x}{n}$$

$$(7) \quad \frac{n}{\sum X_i^2} \quad \text{א.} \quad \left(\frac{n}{\sum X_i^2} \right)^2 \quad \text{ב.}$$

$$(8) \quad \text{א. ראה סרטון.} \quad \text{ב. כד א'.$$

$$(9) \quad \text{א. } 32 \quad \text{ב. } 0.3916$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.45 \quad \text{ב. } 0.81$$

$$(11) \quad \text{א. ראה סרטון.} \quad \text{ב. הוגן.$$

$$(12) \quad \text{א. } 0.08 \quad \text{ב. } 0.92 \quad \text{ג. } 11.5$$

$$(13) \quad \hat{\theta} = \begin{cases} 3 & X = 0,1 \\ 1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \hat{p} = \begin{cases} 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 & X = 0,1 \\ 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. } 1$$

$$(14) \quad \max |X_i|$$

$$(15) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(16) \quad \text{א. } 0.6124 \quad \text{ב. } \hat{p} = \sqrt{\frac{y}{n}} \quad \text{ג. } 0.49$$

$$(17) \quad \text{א.} \quad P(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & 1 \leq x \leq 9 \\ (1-p)^9 & x = 10 \end{cases} \quad \text{ב. } 0.1818$$

נספח:
התפלגויות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2		$\bar{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

התפלגויות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X = k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
בינומית $B(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{p} = \frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \leq 1$	$(1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$
אחידה $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K = a, \dots, b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	(3)	$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, \infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda} = \bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b .

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE :
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

כאשר: $V(\hat{\theta})$ – הינה שונות האומד.

$E(\hat{\theta}) - \theta$ – הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ , האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.

כלומר, אם: $MSE(T_1) > MSE(T_2)$, אז T_2 עדיף על T_1 .

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X \sim U(3, \theta)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת: $T_1 = 2X - 3$ ו- $T_2 = \frac{3X - 3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ ?

שאלות:

(1) מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

(2) בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X .
 א. הצע אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך X .
 ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$. האם האומד הנ"ל מוטה?
 ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

(3) חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1 = \frac{X}{5}$ ו- $T_2 = \frac{X+1}{7}$.
 א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?
 ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.5$?
 ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.1$?

(4) מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ . נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} \text{ ו- } \hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10}$$

כאשר: X_i = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה- i .
 איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ ?

(5) הוכח ש: $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$.

תשובות סופיות:

- (1) שלוש תצפיות.
- (2) א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.
- (3) א. T_1 . ב. T_2 . ג. T_1 .
- (4) $\hat{\lambda}_1$.
- (5) שאלת הוכחה.

אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

רקע:

T יהיה MVUE, אם מתקיים ש- T אומד חסר הטיה ל- θ , ובנוסף מתקיים ש:
 $V(T) \leq V(\hat{\theta})$, לכל חסר הטיה אחר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של λ בסניף A וקצב של 2λ בסניף B. נדגמו n ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:

X_i - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום i .

Y_j - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום j .

על מנת לאמוד את λ , מוצע האומד: $\alpha \bar{X} + \beta \bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על α ו- β , כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות α ו- β כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

שאלות:

- (1) T_1 ו- T_2 הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .
 כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.
 א. מה צריך להיות התנאי על a ו- b , כדי ש- T יהיה אומד חסר הטיה?
 ב. σ_1^2 ו- σ_2^2 הם השונות של T_1 ו- T_2 , בהתאמה.
 מצאו a ו- b , כך ש- T יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , ובעל שונות מינימלית.
- (2) במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.
 תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.
 השונות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.
 הוחלט לדגום n חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.
 $\bar{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה i .
 יהי: $W = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.
 א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים a_i , כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?
 ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.
 מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

תשובות סופיות:

- (1) א. $a + b = 1$.
 ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
- (2) א. $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$.
 ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.

אומד נראות מקסימלית דו-ממדי (לשני פרמטרים):

רקע:

בהינתן פונקציית הסתברות למשתנה בדיד או פונקציית צפיפות למשתנה רציף, אשר תלויות בשני פרמטרים שאינם ידועים, נרצה למצוא אומד נראות מקסימלית דו-ממדי. כלומר, אומד נראות מקסימלית לשני הפרמטרים שאינם ידועים.

דוגמה:

בעוגייה המיוצרת על ידי חברת "עוגית" יש סוכריות כחולות וצהובות. מספר הסוכריות הכחולות בעוגייה של החברה מתפלג פואסונית עם תוחלת α ומספר הסוכריות הצהובות מתפלג פואסונית עם תוחלת $\alpha + \beta$. אין תלות בין מספר הסוכריות הכחולות למספר הסוכריות הצהובות בכל עוגייה, וכמו כן אין תלות בין מספר הסוכריות בעוגייה אחת למספרן בעוגייה אחרת. דגמו באקראי 4 עוגיות וספרו את מספר הסוכריות הכחולות ומספר הסוכריות הצהובות בכל אחת מהן. להלן התוצאות שהתקבלו:

# עוגייה	מספר הסוכריות הכחולות	מספר הסוכריות הצהובות
1	15	20
2	17	24
3	15	26
4	17	22

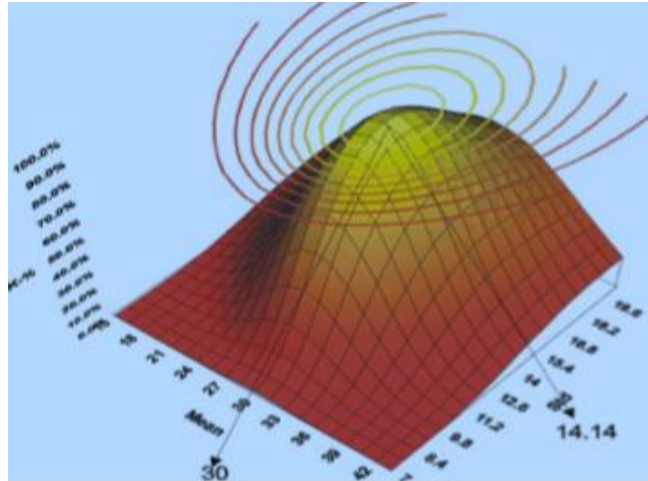
- מה הם הפרמטרים שאינם ידועים?

בדומה למציאת אומד נראות מקסימלית לפרמטר אחד, גם במקרה זה נרצה לבנות פונקציית הסתברות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי בדיד, או פונקציית צפיפות משותפת, כשמדובר במשתנה מקרי רציף. אחרי שנציב את תוצאות המדגם בפונקציה, נקבל את פונקציית הנראות.

בהמשך לדוגמה:

- בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
- הציבו את תוצאות המדגם ומצאו את פונקציית הנראות.

אומד הנראות המקסימלית (אני"מ) יהיה שני הערכים של הפרמטרים הלא ידועים המביאים את פונקציית הנראות לקבל ערך מקסימלי. בשרטוט שלפניכם דוגמה לפונקציית נראות לשני פרמטרים לא ידועים שהתקבלה בבעיה כלשהי:



כדי למצוא את נקודת המקסימום, יש להיזכר כיצד מוצאים נקודת מקסימום מקומית לפונקציה בשני משתנים:

שלב א - נתונה $f(x, y)$ שיש לה קיצון מקומי. נפתור את מערכת המשוואה הבאה: $f_x = 0, f_y = 0$. נקבל נקודה (x_0, y_0) החשודה כקיצון מקומי.

שלב ב - $f(x, y)$ היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני סביב הנקודה החשודה (x_0, y_0) .

$$\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) \text{ נסמן:}$$

(א) אם: $\Delta > 0$ ו- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ או: $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$, אז ל- f יש מינימום מקומי ב- (x_0, y_0) .

(ב) אם: $\Delta > 0$ ו- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ או $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$, אז ל- f יש מקסימום מקומי ב- (x_0, y_0) .

(ג) אם: $\Delta < 0$, אז ל- f יש נקודת אוכף ב- (x_0, y_0) .

(ד) אם: $\Delta = 0$, מבחן זה אינו מספק מידע על (x_0, y_0) .

הערה: אם לפונקציה בשני משתנים יש מקסימום מקומי יחיד בתחום מסוים, אז בתחום זה המקסימום המקומי יהיה המקסימום המוחלט. אם לפונקציה בשני משתנים אין מקסימום מקומי בתחום מסוים, המקסימום המוחלט יהיה בקצוות של הפונקציה.

בהמשך לדוגמה:

- מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים α ו- β על סמך תוצאות המדגם.

שאלות:

- (1) זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .
 זמן ההמתנה לקו אוטובוס 44 מתפלג מעריכית עם פרמטר $\beta - \lambda$.
 זמן ההמתנה לקו אוטובוס 33 אינו תלוי בזמן ההמתנה לקו אוטובוס 44.
 יוסי המתין 8 דקות לקו אוטובוס 33. לקו אוטובוס 44 הוא המתין 3 דקות.
 מצאו אומדן נראות מקסימלית לפרמטרים β ו- λ .

- (2) בהגרלה אפשר לזכות ב-20, 50 או 100 ש, לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

100	50	20	X
$1 - p - q$	Q	p	$P(X)$

כדי לאמוד את הפרמטרים p ו- q , השתתפו בהגרלה 6 פעמים וקיבלו את התוצאות הבאות:

6	5	4	3	2	1	i
50	100	20	20	50	20	X_i

מצאו אנ"מ דו-ממדי לפרמטרים p ו- q .

- (3) נתון ש- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, כאשר: $i = 1, 2, \dots, n$. שני הפרמטרים μ ו- σ^2 , אינם ידועים.
 מצאו אומדן נראות מקסימלית לשני הפרמטרים הלא ידועים, על סמך מדגם מקרי בגודל n .

- (4) נתונה אוכלוסייה בעלת התפלגות אחידה עם הפרמטרים α ו- β .
 שאינם ידועים. מצאו אנ"מ דו-ממדי לשני הפרמטרים על סמך מדגם מקרי של n תצפיות מהאוכלוסייה.

(5) במודל רגרסיה ליניארית פשוטה מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \alpha + \varepsilon_i$,

כאשר X_i הוא משתנה בלתי תלוי ו- Y_i הוא משתנה שתלוי בו.

כמו כן, נתון ש- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

הרעיון במודל הוא שלכל X_i ידוע, אפשר לקבל התפלגות של Y_i .

א. בטאו את התוחלת של Y_1 עבור X_1 ידוע באמצעות הפרמטרים: α, β ו- σ^2 .

ב. מהי ההתפלגות של Y_1 עבור X_1 ידוע?

ג. מבצעים מדגם בגודל n , שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים (X_i, Y_i)

לכל: $i = 1, 2, \dots, n$. בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים α ו- β , בהנחה שהפרמטר σ^2 ידוע.

(6) במודל רגרסיה ליניארית פשוטה, ללא חותך, מגדירים את הקשר: $Y_i = \beta \cdot X_i + \varepsilon_i$,

כאשר X_i הוא משתנה בלתי תלוי ו- Y_i הוא משתנה שתלוי בו.

כמו כן, נתון ש- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

הרעיון במודל הוא, שלכל X_i ידוע אפשר לקבל התפלגות של Y_i .

א. בטאו את התוחלת של Y_1 עבור X_1 ידוע באמצעות X_1 והפרמטרים β ו- σ^2 .

ב. מהי ההתפלגות של Y_1 עבור X_1 ידוע?

ג. מבצעים מדגם מקרי בגודל n , שבו מקבלים זוגות בלתי תלויים (X_i, Y_i)

לכל: $i = 1, 2, \dots, n$.

בנו את פונקציית הנראות.

ד. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטרים β ו- σ^2 .

תשובות סופיות:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{8}, \hat{\beta} = \frac{11}{24} \quad (1)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{2}, \hat{q} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}, \hat{\mu} = \bar{X} \quad (3)$$

$$\hat{\alpha} = X_{\min}, \hat{\beta} = X_{\max} \quad (4)$$

$$Y_1 | X = X_1 \sim N(\beta X_1 + \alpha, \sigma^2) \quad \text{ב.} \quad E(Y_1) = \beta \cdot X_1 + \alpha \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot e^{-\frac{(Y_1\beta X_1 - \alpha)^2 + (Y_2\beta X_2 - \alpha)^2 + \dots}{2\sigma^2}} \quad \text{ג.}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \cdot \bar{X}, \hat{\beta} = \frac{\text{cov}(x, y)}{S_x^2} \quad \text{ד.}$$

$$Y_1 \sim N(\beta X_1, \sigma^2) \quad \text{ב.} \quad E(Y_1) = \beta \cdot X_1 \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$L(\beta, \sigma^2) = \left(2\pi\sigma^2 \right)^{-\frac{1}{2}n} \cdot e^{-\frac{(Y_1 - \beta X_1)^2 + (Y_2 - \beta X_2)^2 + \dots}{2\sigma^2}} \quad \text{ג.}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{\beta} X_i)^2}{n}, \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad \text{ד.}$$

שאלות מסכמות:

שאלות:

- (1) במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$. דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה, ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
- א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P ?
- ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .
- ג. אם התקבל ש- $Y = 3$, $X = 6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?
- (2) מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש. הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש. נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- Y בקטע ב'.
- א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ , על סמך X ו- Y .
- ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א' תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.
- ג. האם האומד שמצאת בסעיף א' הוא חסר הטיה ל- λ ?
- (3) זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלי, עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
- א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
- ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

- (4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי. יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P . א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P . יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2. ב. מצאו אומדן ל- P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית. ג. מצאו אומדן חסר הטיה ל- P . מהו האומדן לפי התוצאות של יעל? ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

- (5) יהי: $X_1, X_2, \dots, X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0 < x < \lambda, \theta > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מצא אח"ה ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).
 ב. מצא אנ"מ ל- θ (כאשר λ קבוע ידוע).
 ג. מצא אנ"מ ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).
- (6) X - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, \theta)$.
 Y - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, 2\theta)$.
 א. מצא אומדן חסר הטיה ל- θ , המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.
 ב. מוצע האומדן: $T_2 = X + 0.5Y$. האם האומדן הנ"ל הוא חסר הטיה?
 ג. איזה אומדן יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב?
 ד. מצא אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך X ו- Y .

- (7) נדגמו 2 תצפיות, X_1, X_2 , בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר θ . ידוע כי: $X_1 \sim U(0, \theta)$, $X_2 \sim U(0, a\theta)$ (כאשר a קבוע ידוע וחיובי).
 א. מצא אנ"מ ל- θ , על סמך 2 התצפיות הנ"ל.
 ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?
 ג. מצא אח"ה ל- θ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 0 \leq P \leq 0.5 \quad \text{ב. } \hat{p} = \frac{x+z}{60} \quad \text{ג. } 0.345$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{x+y}{3} \quad \text{ב. } 1 - e^{-\frac{x+y}{3}} \quad \text{ג. כן.}$$

$$(3) \quad \text{א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומדן הזה לנוסחה הכללית (ראו נספח).} \\ \text{ב. כנ"ל.} \quad \text{ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומדן נראות מקסמילי).} \quad \text{ד. לא.}$$

$$(4) \quad \text{א. } 0 \leq P \leq \frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } 0.389 \quad \text{ד. } -0.167$$

$$(5) \quad \text{א. אח"ה יהיה: } \hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta} \bar{x} \quad \text{ב. } \hat{\theta} = \frac{n}{n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\text{ג. } \hat{\lambda} = X_{\max}$$

$$(6) \quad \text{א. } T_1 = (x+y) \frac{2}{3} \quad \text{ב. כן.} \quad \text{ג. ב'.} \quad \text{ד. } \hat{\theta} = \max \left\{ x, \frac{1}{2} y \right\}$$

$$(7) \quad \text{א. } \hat{\theta} = \max \left(X_1, \frac{X_2}{a} \right) \quad \text{ב. } E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3} \theta, \quad V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18} \theta^2$$

$$\text{ג. } \tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a} \right) (X_1 + X_2)$$

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n, p)$.

א.נ.מ עבור p הוא: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1, N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא: $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא: $\hat{\lambda} = \bar{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\bar{X}$ והינו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \bar{X}$.

כאשר μ ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר μ לא-ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

מודל מעריכי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\bar{X}$.
א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0, \theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \bar{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ ידוע:}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ לא-ידוע:}$$

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 51 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) (פרק 9
ממ"ן 15)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 261

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנות ב- H_0 .

2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- H_1 .

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0 : התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1 : התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה. המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו :

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון : להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני : להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות) :

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2 :

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון :

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה :

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס) או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית). כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל ההחלטה הבא : אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' H_1 .

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

שאלות:

- (1) אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?
- (2) ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון. ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון. הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?
- (3) יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k) = \frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,\dots,n$. נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X : $H_0: n=4$, $H_1: n=6$. כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X > 3$. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?
- (4) איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:
- | מפעל / איכות | מצוין | טוב | בינוני | ירוד |
|--------------|-------|-----|--------|------|
| "היוצר" | 0.6 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| "שמשון" | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
- בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).
- א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בינוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!
- (5) במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?
- ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

(6) להלן השערות:

$H_0: X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1: X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?

ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

(7)

במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?

ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?

i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.

ii. מצב חירום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.

iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

(8)

במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?

ב. מהי העוצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

(9) זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".

- א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?
- ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?
- ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

(10) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120. מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.

- א. מהי רמת המובהקות של המחקר?
- ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?
- ג. כיצד התשובות לסעיף א' ו' ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

(11) קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.

- א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?
- ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

(12) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

13 מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכוניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשמו את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה?

ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה, אם כיום קצב כניסת המכוניות לחניון גדל ל-4 מכוניות בדקה?

14 עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת הגעתו. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (בדקות), X , הוא משתנה אחיד $U(0, 60)$. עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות X היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות.

לבדיקת טענת המנהל (H_0) כנגד טענת עודד (H_1), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד. מוצאים שני ככלי הכרעה:

כלל 1: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.

חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?

תשובות סופיות:

- (1) ראה סרטון וידאו.
- (2) $\beta = \frac{2}{5}$, $\alpha = \frac{1}{3}$
- (3) $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$
- (4) א. $\beta = 0.8$, $\alpha = 0.2$ ב. $\beta = 0.3$, $\alpha = 0.2$ ג. כלל ב'.
- (5) א. השערות: H_0 - מטבע תקין. H_1 - מטבע לא תקין. ב. 0.00781250 ג. 0.1678
- (6) א. 0.05 ב. 0.022
- (7) א. 0.0228 ב. 0.0918 ג. 0.9082 ד. i. α, β יקטנו. ii. α לא משתנה, β קטנה.
- ד. iii. α קטנה, β גדלה.
- (8) א. 0.055 ב. 0.383
- (9) א. 0.0188 ב. טעות מסוג I ג. 0.8944 ד. העוצמה תגדל.
- (10) א. 0.2981 ב. 0.3974 ג. קטן.
- (11) א. 0.0113 ב. 0.0495
- (12) חוקר א'.
- (13) א. ראה סרטון וידאו. ב. 0.1428 ג. 0.566
- (14) להלן טבלת טעויות, ממנה ניתן להסיק שכלל 2 עדיף.

β	α	כלל
0.865	$\frac{1}{3}$	1
0.368	$\frac{1}{3}$	2

הסתברות ומבוא לסטטיסטיקה למדעי המחשב 20425

פרק 52 - הלמה של ניימן פירסון (פרק 9 ממ"ן 15)

תוכן העניינים

1. כללי..... 268

הלמה של ניימן פירסון:

רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור α נתונה. הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

נגדיר את יחס הנראות: $x_1, x_2, \dots, x_n$ - תוצאות הניסוי.

ההשערות: $H_0: x_i \sim p_0$, $H_1: x_i \sim p_1$.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה H_1 יותר סבירה מ- H_0 .

עבור משתנים שמתפלגים בדיד:

שלב א: עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את הסיכויים באופן הבא:
$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

ומקבלים את יחס הנראות.

שלב ג: מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

שלב ד: מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת. צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על ה- α הרצויה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.15	0.25	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

עבור משתנים שמתפלגים רציף:

שלב א: בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)} : \text{שלב ב: מחלקים את שלב א באופן הבא}$$

ומקבלים את פונקציית יחס הנראות.

שלב ג: מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

שלב ד: לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה ה- α שנקבעה מראש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$X \sim \exp(\lambda) : \text{נתון}$$

$$H_0: \lambda = 1, H_1: \lambda = 2 : \text{ההשערות הן}$$

מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.

שאלות:

- (1) איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד	פסול
"היוצר"	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4	0

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. חשבו את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.
 ב. צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.

ג. מהי עוצמת המבחן שיצרת בסעיף הקודם?

- (2) מטבע הוטל 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש. נסמן ב- p את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש.

ההשערות הן: $H_0: p = 0.5$, $H_1: p = 0.25$.

מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית. מהי העוצמה?

- (3) בכד א' 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב' 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים. אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבונן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל. יש לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א' (השערת האפס) או מכד ב' (השערה אלטרנטיבית).
 א. בנו כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.
 ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?
 ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

- (4) בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית) של המפתחות לצרור.
 מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.

(5) מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה. לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות ליממה: 3, 3, 0, 1.

- א. נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם: $\alpha \leq 0.1$.
- ב. מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת? פתרו על סמך המבחן של סעיף א'.

(6) התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית. בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות.

- א. רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.
- ב. מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס?
- ג. מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות?

(7) יהי X תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x + 1 - \theta & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ההשערות הן: $H_0: \theta = 0$, $H_1: \theta = 1$.

- א. הוכיחו שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות α יהיה: $C = \{X > 1 - \alpha\}$.

- ב. הוכיחו שהעוצמה של המבחן שנמצאה היא: $2\alpha - \alpha^2$.
- ג. מצאו את כלל ההכרעה והעוצמה עבור: $\alpha = 0.05$.

(8) מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב- X את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין, ההתפלגות היא מעריכית: $f_0(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$.

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא: $f_1(x) = \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x}$.
 כאשר מדובר באותו פרמטר λ .

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו- $\lambda = 1$.

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של X .

(9) יהי $X_1, \dots, X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{1-\theta x} & x \geq \frac{1}{\theta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{פרמטר חיובי}$$

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית לבדיקת ההשערות: $H_0: \theta = 1$

כנגד: $H_1: \theta = 2$, על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל-3 במקום 2.

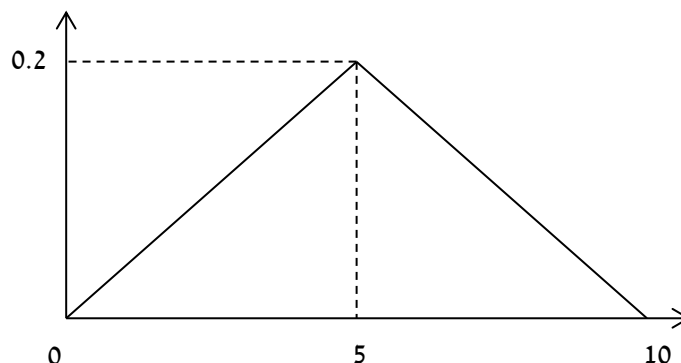
בחרו בתשובה הנכונה ונמקו:

i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ii. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

iii. יש לחשב כדי להחליט.

(10) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנסמנה ב- $f_1(x)$:



$$f_0(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כמו כן נתון ש:}$$

- א. עבור השערות: $H_0: f = f_0$ כנגד: $H_1: f = f_1$, מצאו את צורת אזור הדחיה של מבחן בעל עצמה מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.
- ב. בהינתן: $\alpha = 0.05$, מצאו את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

(11) X הוא משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20.

$$\text{להלן השערות מחקר: } H_1: f(X) = \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{4(1-e^{-5})} \quad , \quad H_0: X \sim U(0,20)$$

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות.

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. ראה סרטון. ג. 0.7.

המפעל	ירוד	בינוני	טוב	מצוין	פסול
H_0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2
H_1	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\gamma(x)$	4	3	1	0.25	0

(2) $C = \{X = 0\}$, עוצמה $\frac{27}{64}$.

(3) א. $C = \{X = 4\}$. ב. 0.0256. ג. 0.9487.

(4) $C = \{X = 1 \text{ or } X \geq 6\}$.

(5) א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב-4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות. ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני). ג. 0.5471.

(6) א. H_0 : התוחלת של זמן ההמתנה 5 דקות.

H_1 : התוחלת של זמן המתנה 10 דקות.

פונקציית יחס הנראות: $0.5e^{0.1x}$.

ב. $c = \{x \geq k\}$. ג. $c = \{x \geq 14.98\}$. ד. 0.776.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $c = \{x > 0.95\}$, 0.0975.

(8) א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין.

ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר,

רושם אחד כן ואחד לא.

ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה

מאינסוף ועד ערך k מסוים.

ג. נדחה את השערת האפס אם: $x > 2.996$. ד. $x_1 \cdot x_2 > k$.

(9) א. נדחה את H_0 עבור: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1.0513$. ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668.

ג. i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

(10) א. $c = \{|x - 5| \leq a\}$. ב. $c = \{4.75 \leq x \leq 5.25\}$.

(11) כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם: $\bar{D} \leq 9.26$.