הסתברות ב

תוכן העניינים

הסתברות ב

פרק 1 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

תוכן העניינים

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב-$f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף X בעל פונקציית צפיפות $f(x)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא: $F(t)=p(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

כמו כן מתקיים: $p(X>t)=1-F(t)$ ו-$p(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X\cdot f(x)dx=\mu$.

שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X^2\cdot f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$.

תוחלת של פונקציה של X:

תוחלת של פונקציית משתנה רציף X, המסומנת: $g(x)$, תחושב באופן הבא: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

אחוזונים:

האחוזון ה- p הוא ערך (נסמן אותו: x_p), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא p.
כלומר: $p(X\le x_p)=p$.

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2: $S_{\text{triangle}}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{\text{rectangle}}=a\cdot b$.

משוואת קו ישר:

משוואת ישר מפורשת תסומן: $y=mx+n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- n היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (x_1,y_1) ושיפועו הוא m, תחושב באופן הבא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

אינטגרלים מידיים:

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2}f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

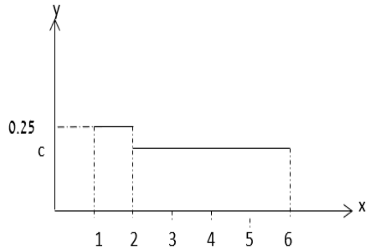
$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוטו:



א. מצאו את ערכו של c.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

v. מצאו את החציון של המשתנה.

2) נתון משתנה מקרי רציף A שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & else \end{cases}$,

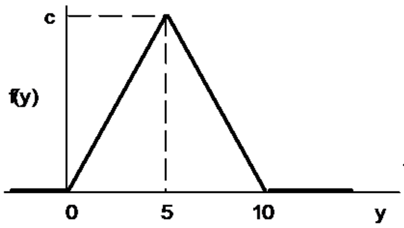
וידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

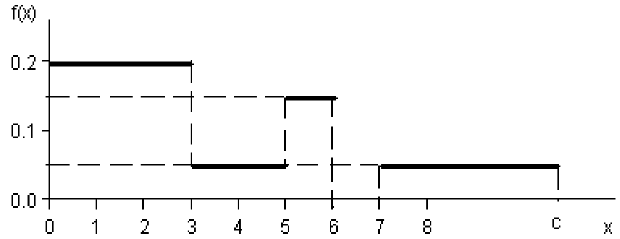
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(Y>4)$, $P(7.5\le Y\le 15.5)$, $P(Y\le 3.0)$, $P(Y=7.0)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y.
הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X:

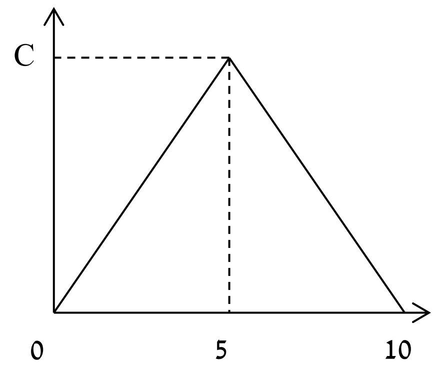


א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:
$P(X \geq 4)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(1.0 < X \leq 5.0)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



א. מה ערכו של c?

ב. מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

6) נתונה פונקציית צפיפות: $f(X) = \frac{2}{x}$, המוגדרת מ-1 עד K.

א. מצאו את ערכו של K.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את הסיכוי ש-X לפחות 1.5.

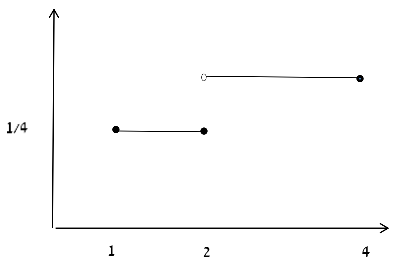
ד. מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X)=AX^2(10-X)$, $0<X<10$.
A הינו קבוע חיובי.
א. מצאו את A.
ב. חשב את: $P(x>5|x>2)$.
ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X:
$f(x)=0.5\cdot e^{2x}$, $-\infty\le X\le\ln(c)$.
א. מצאו את ערכו של c.
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
ג. חשב: $P(X>0)$.
ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X:
א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.
ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.
ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.
ה. חשבו את: $E(X^3)$.



10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0\le x\le1$, $f(x)=6x(1-x)$.
א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?
ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t)=1-e^{-0.2t}$.
א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<4 \\ bx-4b & 4\le x\le 5 \\ b & 5<x\le 6 \\ 0 & x>6 \end{cases}.$$

א. מצאו את b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5.
מהי השונות של y?

13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1\le x\le 2 \\ kx & 2<x\le 3 \end{cases}$.

א. מצאו את ערכו של k.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $P(x>2.5)$.

14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה: $a\le x\le b$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.

ג. מצאו את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$. ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $b=2$, $c=0.5$. ב. 1.41. ג. 0.0625.

3) א. 0.2. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32.

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76.

4) א. 10. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$. ג. 0.5.

5) א. $c=0.2$. ב. 5 ± 1.46.

6) א. $e^{\frac{1}{2}}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2\cdot\ln t & 1\le t\le e^{\frac{1}{2}}\\ 1 & t>e^{\frac{1}{2}}\end{cases}$. ג. 0.189.

ד. 1.051. ה. 1.297.

7) א. 0.0012. ב. 0.7067. ג. תוחלת: 6, שונות: 4.

8) א. 2. ב. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{2t} & t\le \ln(2)\\ 1 & t>\ln(2)\end{cases}$. ג. 0.75. ד. 0.549.

9) א. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\le x\le 2\\ \frac{3}{8} & 2<x\le 4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{8} & 2<t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$.

ג. $2\frac{2}{3}$. ד. תוחלת: 2.625, שונות: 0.6927. ה. 23.4375.

10) א. $\frac{7}{27}$. ב. 0. ג. 3.704.

11) א. עיין סרטוט בוידאו ב. 0.0498 ג. 0.6321 ד. 11.51.

12) א. $\frac{2}{3}$. ב. 5.22. ג. $\frac{2}{9}$.

13) א. $\frac{1}{6}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ \frac{t^3-1}{12} & 1\le t\le 2\\ \frac{7}{12}+\frac{t^2-4}{12} & 2<t\le 3\\ 1 & t>3\end{cases}$. ג. 0.229.

14) א. $F(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{(t-b)}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$. ב. תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$, שונות: $V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

ג. $\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$.

הסתברות ב

פרק 2 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות מעריכית:

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.
λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית): $X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$.
התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ לכל $x \geq 0$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: $F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

התוחלת: $E(x) = \dfrac{1}{\lambda}$.

השונות: $V(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון: $P(X > a+b \setminus X > a) = P(X > b)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ-9 שעות?

ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים, מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכול?

שאלות:

1) הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.

א. מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?

ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?

ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2) הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.

א. מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?

ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?

ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3) משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.

א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?

ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?

ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?

ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

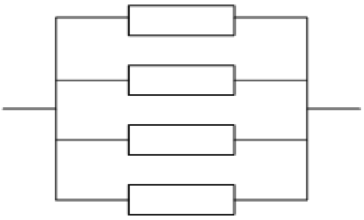
4) בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.

א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ-20 דקות?

ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?

ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה שני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5) מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמתואר בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100 שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת.
עלות הוספת רכיב היא K ₪.
כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

תשובות סופיות:

1)	א. 0.368.	ב. 0.865.	ג. 0.347.	
2)	א. 24 שעות.	ב. 0.632.	ג. 0.135.	
3)	א. 0.393.	ב. 0.239.	ג. 0.513.	ד. 69.08
4)	א. 0.264.	ב. 0.368.	ג. 0.233.	
5)	א. 0.8403.	ב. $K < 0.0588A$.		

הסתברות ב

פרק 3 - התפלגויות רציפות מיוחדות -התפלגות ארלנג(גמא)

תוכן העניינים

התפלגות ארלנג:

רקע:

התפלגות זו הינה התפלגות רציפה התלויה בשני פרמטרים : k ו-λ.

$X \sim Erlang(k,\lambda)$.

הפרמטר k הוא מספר שלם וחיובי פרמטר זה גם נקרא פרמטר הצורה.

הפרמטר λ הוא פרמטר ממשי וחיובי שנקרא פרמטר הקצב.

תחום ההגדרה של ההתפלגות הוא $X \geq 0$.

בהנחה ולפנינו תהליך עם זרם פואסוני הזמן הדרוש עד הופעת האירוע ה- k מרגע מסוים מתפלג התפלגות ארלנג כאשר הפרמטר λ מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.

דוגמה:

מספר הפניות למוקד מתפלג פואסונית עם קצב של 3 פניות לדקה.
מהי ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפניה הרביעית?

$W_i \sim P(\lambda=3)$ - מספר הפניות למוקד בדקה.

$k=4$

$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

פונקציית הצפיפות של X בהתפלגות ארלנג: $f(x)=\dfrac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות: $F(t)=P(X\le t)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i\cdot e^{-\lambda t}$.

בהמשך לדוגמה:

מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-2 דקות עד שהפניה הרביעית תתקבל במוקד?

$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$P(X \le 2) = F(2) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} \cdot (3 \cdot 2)^i \cdot e^{-3 \cdot 2} = 1 - e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!}\right) = 0.8488$$

התוחלת של ההתפלגות: $E(X) = \frac{k}{\lambda}$.

השונות של התפלגות: $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$.

בהמשך לדוגמה:

מהי התוחלת וסטיית התקן של הזמן שיחלוף מרגע פתיחת המוקד ועד שתתקבל הפניה הרביעית למוקד?

$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

דקות $E(X) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

דקות $V(X) = \sqrt{\frac{4}{3^2}} = \frac{2}{3}$.

אם: $X_1, X_2, ..., X_k$ משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$

עבור כל: $1 \le i \le k$, אזי: $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim Erlang(k, \lambda)$.

בהמשך לדוגמה:

הראו את הקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית בדוגמה המוצגת.

$X_i \sim \exp(\lambda)$ - הזמן בדקות בין פניה לפניה.

X_i - ב"ת.

$k=4$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

X_1 - הזמן עד הפניה הראשונה.

X_2 - הזמן בין הפניה הראשונה לשנייה וכו'...

$\sum_{i=1}^{4} X_i = X_1+X_2+X_3+X_4 \sim Erlang(k=4,\lambda=3)$ - הזמן הכולל עד הפניה הרביעית בדקות.

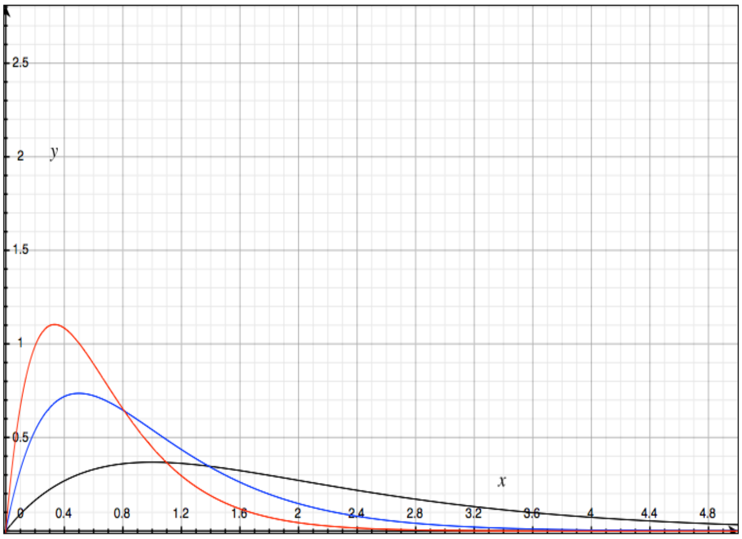
גרפים של פונקציית הצפיפות בהתפלגות ארלנג:

מקרא: $k=2$

$\lambda=1$ ——— (שחור)

$\lambda=2$ ——— (כחול)

$\lambda=3$ ——— (אדום)

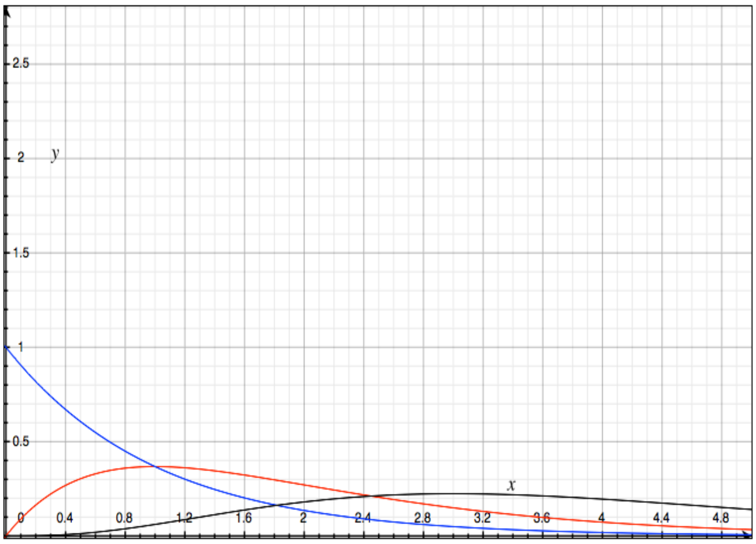


מקרא: $\lambda=1$

$k=1$ ——— (כחול)

$k=2$ ——— (אדום)

$k=4$ ——— (שחור)



שאלות:

1) נתון: $X \sim Erlang(2,5)$.

א. מצאו את: $P(X>3)$.

ב. מצאו את: $P(X>3|X>5)$.

ג. מצאו את: $E(X)$.

2) צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.

א. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 4?

ב. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 2 אך לא תהיה יותר מ-5?

ג. החברה עובדת 5 ימים בשבוע, מה תוחלת מספר הימים בשבוע בה צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?

3) אורך החיים של סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 שעות באופן בלתי תלוי בסוללה אחרת. במכשיר מתקינים 4 סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת במיידית בסוללה אחרת עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.

א. מה התוחלת והשונות של אורך חיי מערכת הסוללות במכשיר?

ב. מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה נמוך מיממה?

ג. מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה גדול מיומיים אם ידוע שהיה גדול מיממה?

4) מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית על קצב של 3 תקלות בשעה.

א. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה קטן משעה?

ב. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה קטן משעה?

ג. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה קטן משעה?

ד. הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.

5) הוכיחו שאם: $X \sim Erlang(k,\lambda)$, אזי מתקיים ש- $E(X)=\frac{k}{\lambda}$, $V(X)=\frac{k}{\lambda^2}$.

רמז: היעזרו בקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית.

6) פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג הנה : $1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^{i}\cdot e^{-\lambda t}$.

הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא : $f(x)=\frac{\lambda^{k}x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.000005. ב. 1. ג. 0.4.

2) א. 0.0915. ב. 0.36558 ג. 4.5425.

3) א. תוחלת : 16 שעות, שונות : 64 ^{2}(שעות). ב. 0.8488. ג. 0.0023.

4) א. 0.9502. ב. 0.8009 ג. 0.5768.
ד. ראה סרטון.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

הסתברות ב

פרק 4 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות ביתא

תוכן העניינים

התפלגות ביתא:

רקע:

משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}.$$

משתנה זה תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו a ו- b, כאשר: $b>0$, $a>0$.

$B(a,b)$ היא פונקציה שמכונה "פונקציית ביתא" ומוגדרת באופן הבא:

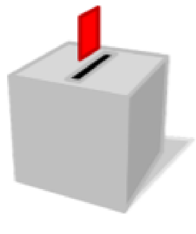
$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx .$$

אם המשתנה X מתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים a ו- b, נכתוב זאת:
$X\sim Beta(a,b)$.

המשתנה המקרי המתפלג התפלגות ביתא מייצג הסתברות.
כלומר, אנחנו מתייחסים להסתברות עצמה כאל משתנה מקרי.

דוגמה:

נסמן ב-X את שיעור האזרחים שיצביעו למועמד מסוים בבחירות שבהן מתמודדים שני מועמדים.
נניח ש- $X\sim Beta(2,1)$.



א. בנו את פונקציית הצפיפות של X.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. חשבו את הסיכוי שרוב האזרחים יצביעו למועמד מסוים זה בבחירות.

תוחלת ושונות של משתנה מקרי בעל התפלגות ביתא:

התוחלת של X תהיה: $E[X]=\frac{a}{a+b}$.

השונות של X תהיה: $\text{Var}(X)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

דוגמה:

נתון ש- $X\sim Beta(2,1)$. מה תהיה התוחלת ומה תהיה השונות של X?

תכונות של פונקציית ביתא והתפלגות ביתא:

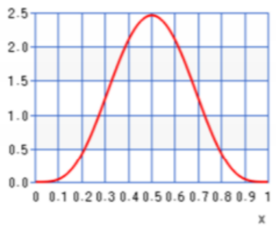
1. $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
2. $B(a,b)=B(b,a)$.
3. $Beta(1,1)=U(0,1)$.

דוגמה:

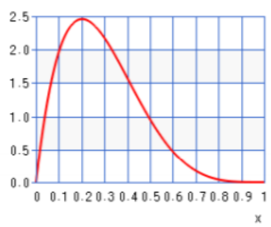
הראו ש- $B(1,2)$ מקיימת את שתי התכונות הראשונות שהוצגו לעיל.

הפרמטרים a ו- b נקראים "פרמטרי הצורה", כיוון שהם משפיעים על הצורה של פונקציית הצפיפות. בגרפים הבאים נראה כיצד הם משפיעים עליה.

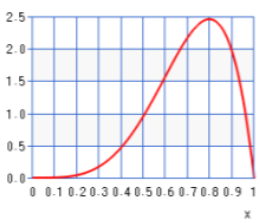
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a=b$



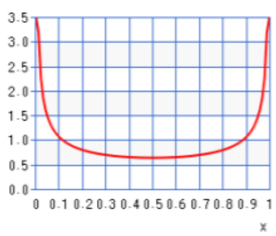
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a>b$



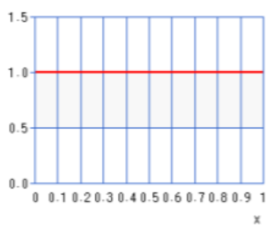
$a>1\ ,\ b>1\ ,\ a<b$



$a<1\ ,\ b<1\ ,\ a=b$



$a=b=1$



שאלות:

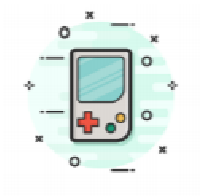
1) מתוכנן תהליך שמטרתו לשנות את שיעור המוצרים הפגומים בקו ייצור מסוים. שיעור המוצרים הפגומים אחרי הטמעת התהליך יהיה משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(3,1)$.

א. מצאו את התוחלת והשונות של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך המתוכנן.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך.

ג. חשבו את הסיכוי ששיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך יהיה קטן מ-10%.

2) משחק מחשב מתוכנת כך שהסיכוי לנצח בסבב אחד הוא משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(2,2)$.



א. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ב. מה ההסתברות שהסיכוי לנצח בסבב כלשהו יהיה יותר מ-0.7?

3) הראו שפונקציית ביתא מקיימת את התכונה: $B(a,b)=B(b,a)$.

4) נתון ש- $X \sim Beta(a,b)$.

א. הוכיחו: $E[X]=\dfrac{a}{a+b}$.

ב. הוכיחו: $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5) הוכיחו את הטענה ש- $Beta(1,1)=U(0,1)$.

6) השכיח של משתנה רציף הוא הערך שעבורו פונקציית הצפיפות של המשתנה היא מקסימלית.
מצאו את השכיח של X, אם: $X \sim Beta(2,3)$.

7) X הוא משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים: $a=5$ ו-$b=6$.
חשבו את: $E\left[\frac{1}{X}\right]$.

8) $X \sim Beta(a,b)$.
נגדיר: $Y=1-X$.
הוכיחו ש- $Y \sim Beta(b,a)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{80}$, $\frac{3}{4}$. ב. $F_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{3x^3}{3}\Big|_0^t=t^3 & 0\le t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$. ג. 0.001.

2) א. 0.5. ב. 0.216.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) $\frac{1}{3}$.

7) 2.5.

8) הוכחה.

הסתברות ב

פרק 5 - התפלגויות רציפות מיוחדות-התפלגות אחידה

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות אחידה:

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b.

$X \sim U(a,b)$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad a \le x \le b.$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=\frac{t-a}{b-a}.$$

התוחלת :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}.$$

השונות:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

X - משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל-40.

מה הסיכוי ש-X קטן מ-25?

מה התוחלת והשונות של X?

$a=20\ ,\ b=40$

$X \sim U(20,40)$.

א. $P(x<25)=f(25)=\frac{25-20}{40-20}=0.25$.

ב. $E(x)=\frac{20+40}{2}=30$

$V(x)=\frac{(40-20)^2}{12}=33\frac{1}{3}$.

שאלות:

1) משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X, מתפלג: $U(13,16)$.

א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?

ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?

ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2) רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.

א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?

ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3) מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).

א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?

ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?

ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

ד. עלות גביע גלידה היא 0.5 שקל. כל גרם של גלידה עולה 0.22 אגורות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של עלות הגביע ביחד עם הגלידה?

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 14.5, שונות: 0.866. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{2}{3}$.

2) א. $X \sim U(0,10)$. ב. 0.6. ג. 10.

3) א. 0.2. ב. $\frac{2}{7}$. ג. 109.

ד. תוחלת: 73.1 אגורות, סטיית תקן: 0.635 אגורות.

הסתברות ב

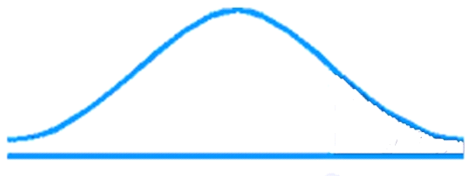
פרק 6 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z: $Z \sim N\left(0,1^2\right)$.

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:

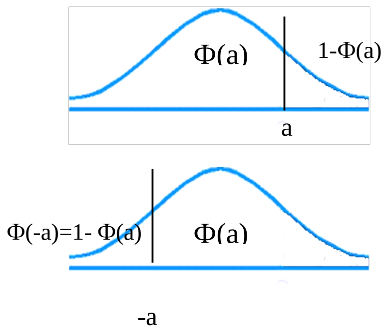
$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

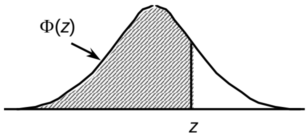
$$Z \sim N\left(0,1^2\right)$$

בטבלה

P



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?

2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?

3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?

4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?

ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?

ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?

ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?

ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?

ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?

ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?

ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?

ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?

ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?

ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?

ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.

א. מצאו את העשירון העליון.

ב. מצאו את האחוזון ה-95.

ג. מצאו את העשירון התחתון.

5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.

א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?

ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?

ד. מהו האחוזון ה-20?

ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ״ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ״ל.

א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?

ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?

ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.

א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?

ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?

ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?

ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?

ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.

א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?

i. בעשירון העליון.

ii. בממוצע.

iii. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

i. 1.

ii. 2.

iii. 3.

iv. אין לדעת.

9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10) ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11) אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1)	א. 89.25%.	ב. 2.28%.	ג. 0.	ד. 50%.	ה. 50%.
2)	א. 0%.	ב. 3.76%.	ג. 0%.	ד. 68.26%.	
3)	א. 26.43%.	ב. 89.44%.	ג. 39.44%.	ד. 0.383.	
	ה. 100%.				
4)	א. 3812.8.	ב. 3958.	ג. 2787.2.		
5)	א. 119.2.	ב. 80.8.	ג. 112.6.	ד. 87.4.	
6)	א. 500.	ב. 532.9.	ג. 453.48.		
7)	א. 500.	ב. 100.	ג. 0.3446.	ד. 733.	
	ה. 267.				
8)	א. 3.	ב. בממוצע.	ג. 1.		
9)	א. 0.1587.	ב. 0.0228.	ג. 0.8563.	ד. 0.3975.	
10)	א. 1925.	ב. 0.2266.	ג. 0.1587.		
11)	א. 0.1359.	ב. 0.675.	ג. 100.	ד. 0.25.	

הסתברות ב

פרק 7 - קומבינציות ליניאריות על התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

קומבינציות לינאריות על התפלגות נורמלית:

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית – מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, וגובהן של הנשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.
מה הסיכוי שגבר אקראי במדינה יהיה גבוה מאישה אקראית?

שאלות:

1) המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק״ג וסטיית תקן של 10 ק״ג, והמשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק״ג וסטיית תקן של 8 ק״ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?

2) ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?

3) צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק״ג וסטיית תקן של 4 ק״ג. נתון שמחיר ק״ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?

4) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ״ל וסטיית תקן של 20 מ״ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר.
מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

5) לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועיזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמאלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמאלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נמכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נמכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?
מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

תשובות סופיות:

1) 0.2177.

2) א. תוחלת: 7000, סטיית תקן: 2247. ב. 0.3264. ג. 9881.

3) א. תוחלת: 300, שונות: 576. ב. 0.3372. ג. 294.

4) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.

5) א. 0.7549. ב. 0.1875. ג. 0.0314.

הסתברות ב

פרק 8 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף

תוכן העניינים

טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף:

רקע:

מצב שבו ידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון משתנה מקרי רציף X המתפלג אחיד בין 0 ל-1 .
מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה Y,
כאשר הקשר בין X ל-Y נתון על ידי הנוסחה: $Y = e^x$.

שאלות:

1) יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל-1.
הגדירו משתנה חדש: $Y=e^{-W}$.
א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהו את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים.

2) נתון: $X\sim U(0,1)$, ויוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R=X^2$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R.

3) ידוע ש-$X\sim \exp(\lambda)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y=\ln(X)$.
הוכיחו שפונקציית הצפיפות של Y נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $f(Y)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot e^{Y}+1}$.

4) ידוע ש-$X\sim \exp(\lambda=1)$. כמו כן, נתון הקשר הבא: $Y=1-2\cdot e^{-X}$.
א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהו את ההתפלגות של Y.

5) אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2.
מצאו את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.

6) נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t)=\theta^t-1$,
עבור התחום: $0\le t\le 1$.
א. מצאו את ערכו של הפרמטר θ.
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה X.
ג. יהי $Y=2^X-1$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של Y וזהו את התפלגותו.

תשובות סופיות:

1) ב. $Y \sim U(0,1)$.

2) $f(R)=\frac{1}{2\sqrt{R}}$ כאשר $1>R>0$.

3) שאלת הוכחה.

4) ב. $Y \sim U(-1,1)$.

5) $f(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ כאשר $1<y<8$.

6) א. 2. ב. $Y \sim U(0,1)$.

הסתברות ב

פרק 9 - פונקציה יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות: $M_X(t)=E\left(e^{tx}\right)$.

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד, הפונקציה יוצרת המומנטים תהיה:

$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_k e^{tk}\cdot P(X=k)$.

אם מדובר במשתנה מקרי רציף, פונקציית יוצרת המומנטים תהיה:

$M_X(t)=E\left(e^{tx}\right)=\int_x e^{tx}\cdot f(x)\,dx$.

המומנט מסדר n מוגדר להיות: $E\left(X^n\right)$.

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת ה-n-ית לפי t של פונקציית יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה $t=0$. כלומר: $M_x^{(n)}(t)|_{t=0}=E\left(X^n\right)$.

משפט:

קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

$$\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(\log_a{}^x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(k)' = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

כלל שרשרת - $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הראו שהפונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות המעריכית: $X \sim \exp(\lambda)$,

היא: $\frac{\lambda}{\lambda - t}$. מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

שאלות:

1) נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.
   א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.
   ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א'.

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית: $X \sim B(n,p)$, ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

3) מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית: $X \sim G(P)$, וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

4) מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית: $x \sim p(\lambda)$. מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות.

5) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x} & 0 \le x \le 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

   א. מצאו את ערכו של A.
   ב. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

6) יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16, ותהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X. Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$, ונתון: $m_y(t)=t\cdot m_x(t)$.
חשבו את התוחלת והשונות של Y.

תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}$. ב. $1\frac{2}{3}$.

2) פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(e^{t}\cdot p+1-p\right)^{n}$.

3) פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{t}p}{1-e^{t}\cdot(1-p)}$.

4) פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{\lambda\left(e^{t}-1\right)}$.

5) א. $\frac{1}{1-e^{-7}}$. ב. פונקציה יוצרת מומנטים: $\frac{e^{7(t-1)}-1}{t-1}\cdot\frac{e^{7}}{e^{7}-1}$.

6) תוחלת: 1, שונות: 9.

נספחים:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f(X)t$	פונקציית התפלגות מצטברת $f(X)t$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b \\ 0 & else\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b \\ 1 & t<b\end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0 \\ 0 & else\end{cases}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה. $1-P=q$ ההסתברות לכישלון X - מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,\ldots,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(P)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. X - מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה.	pq^{x-1} $x=1,2,\ldots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	X - מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,\ldots,\infty$.	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

הסתברות ב

פרק 10 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:
  $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$.
- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:
  $M_{X+Y}(t)=E\left(e^{tx}\right)\cdot E\left(e^{ty}\right)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$.

תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_X(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$	$f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t)=\left\{\lambda e^{-\lambda t} \quad t\ge 0\right.$	$f_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & else\end{cases}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה $1-P=q$ ההסתברות לכישלון x: מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,\dots,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x: מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x=1,2,\dots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x: מספר ההופעות ביחידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,\dots,\infty$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim P(\lambda=4)$ $Y\sim P(\lambda=2)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X-3$?

ב. נגדיר את: $T=X+Y$. מה ההתפלגות של T?

שאלות:

1) נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n \cdot \lambda)$.

2) נתון: $X \sim P(\lambda = 10)$, $Y \sim P(\lambda = 2)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X + Y$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda = 12)$.

ג. הוכיחו ש- $X / T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של X,

בהינתן ש- $T = 8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n = 8$ ו- $p = \frac{5}{6}$.

3) יהי: $X_i \sim \exp(1)$, $i = 1, 2 \ldots n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.

נגדיר את $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T.

ג. יהי: $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T.

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z.

4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

הנוסחה הבאה: $M_X(T) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ לכל t, כאשר: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

א. הוכיחו שאם $Y = 2X$ אזי $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$.

ב. הוכיחו שאם $T = X_1 + X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$.

תשובות סופיות:

1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)\cdot(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: n, שונות: n.

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-\left(n^{-\frac{1}{2}}t\right)}\right)^n \cdot e^{-n^{\frac{1}{2}}\cdot t}$.

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

הסתברות ב

פרק 11 - נוסחת התוחלת השלמה

תוכן העניינים

נוסחת התוחלת השלמה:

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y, מתקיים: $E(X)=E\left[E(X/Y)\right]$.

עבור משתנה Y בדיד כלשהו: $E(X)=\sum_{y}E(X|Y=y)\cdot P(Y=y)$.

עבור משתנה Y רציף כלשהו: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}E(X|Y=y)\cdot f(y)dy$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.
בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.
בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.
המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.
יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.
יש לחשב את $E(X)$.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי.
אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1.
אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5.
אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית.
חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

2) מטילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש.
כעת מטילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.

3) בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 2. אם הוגרל המספר 0 זוכים ב15₪. אחרת זוכים ב-50₪.
חשבו את תוחלת סכום הזכיה.

4) נתון ש- $Y/X \sim U(0,X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X
הינה: $f(x)=\begin{cases} 0.1 & 2\le x\le 6 \\ 0.2 & 6<x\le 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$.
חשבו את $E(Y)$.

5) בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים: נקודה A - שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא. נקודה B - שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא ונקודה C - המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום. המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב- X את זמן ההגעה לנקודת הסיום.
חשבו את $E(Y)$.

תשובות סופיות:

1) 4.4.

2) $\frac{n}{4}$.

3) 46.4.

4) 3.05.

5) 5.

הסתברות ב

פרק 12 - נוסחת השונות השלמה (שונות של משתנה מותנה)

תוכן העניינים

נוסחת השונות השלמה (המותנית):

רקע:

כאשר התפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y, מתקיים: $E(X)=E\left[E(X\mid Y)\right]$.

כמו כן, מתקיים לגבי השונות: $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(E[X\mid Y]\right)+E\left[\mathrm{Var}(X\mid Y)\right]$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה.
בכיתה מספר 1: 10 בנים ו-20 בנות.
בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות.
המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי.
יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו.
יש לחשב את $V(X)$.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי.
אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1.
אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5.
אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית.
חשבו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

2) נטיל קובייה: $Y+4$ פעמים. נתון ש- $Y\sim P(4)$.
נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 2.
א. מצאו את התוחלת של X.
ב. מצאו את השונות של X.

3) נתון ש- $Y|X\sim U(0,X)$, כאשר פונקציית הצפיפות של X הינה: $f(x)=\begin{cases}0.1 & 2\le x\le 6\\ 0.2 & 6<x\le 9\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.
חשבו את $V(Y)$.

תשובות סופיות:

1) תוחלת: 4.4, שונות: 22.64.

2) תוחלת: $\frac{4}{3}$ 'שונות: $\frac{11}{9}$.

3) 4.4.

הסתברות ב

פרק 13 - התפלגות מינימום ומקסימום

תוכן העניינים

התפלגות מינימום ומקסימום:

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $U=\max(x_1,x_2,...x_n)$. מתקיים ש: $F_U(t)=(F_X(t))^n$,

ולכן: $f(u)=n\cdot(F_x(u))^{n-1}\cdot f_x(u)$.

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה.

נגדיר את: $Z=\min(X_1,X_2...,X_n)$. מתקיים ש: $F_Z(t)=1-(1-F_X(t))^n$,

ולכן: $f(z)=n\cdot[1-F_x(z)]^{n-1}\cdot f_x(z)$.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

$X_i\sim\exp(\lambda)$.

הוכיחו כי: $\min(x_i)\sim\exp(n\lambda)$, $i=1,2,...n$.

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $Z=\min(X_1,X_2...X_n)$, מתקיים ש: $f(z)=n\left[1-F_X(z)\right]^{n-1}\cdot f_x(z)$.

ב. הוכיחו שאם X_i מתפלג רציף עבור כל: $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקציית צפיפות $f(x)$ ו- $U=\max(x_1,x_2,...x_n)$, מתקיים ש: $f(u)=n\cdot(F_x(u))^{n-1}\cdot f_x(u)$.

2) אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.

א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.

ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.

ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב'?

3) בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.

א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?

ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?

4) 3 אנשים משתתפים בתחרות ריצה ל-100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.

א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?

ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?

ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצאו את התוחלת והשונות שלו?

5) X_1,X_2 מתפלגים נורמאלית סטנדרטית.

נגדיר את: $Z=\min(X_1,X_2)$ ואת: $Y=\max(X_1,X_2)$.

א. חשבו $P(z>1)$.

ב. חשבו $P(Y>1)$.

ג. חשבו $P(Y>1/Y>0)$.

6) רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית.
משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.

א. מצאו את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.

ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

7) נתון ש: $X \sim \exp(\lambda)$ ו- $Y \sim \exp(\mu)$. $U = \min(x,y)$ כמו x,y בלתי תלויים.
הוכיחו כי: $U \sim \exp(\mu+\lambda)$.

8) X_1 ו- X_2 שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל-1.
נגדיר: $Y = \max(x_1, x_2)$.
חשבו את: $P(Y > 0.5)$.

9) נתון ש- $X_i \sim U(0,2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר: $i = 1,2,...,5$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T = \max(X_i)$.

10) נתון משתנה מקרי X בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & o \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחר} \end{cases}.$$

נגדיר את: $W = \max(X_i)$ כאשר: $i = 1,2,...,10$.
חשבו את $E(W)$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $F_u(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{30}t}\right)^3$. ב. $Z\sim\exp\left(\lambda=\frac{1}{10}\right)$.

ג. תוחלת: 10, שונות: 100.

3) א. 0.9817. ב. 0.

4) א. 0.421875. ב. 0.216. ג. תוחלת: 11.5, שונות: 0.15.

5) א. 0.02518. ב. 0.2922. ג. 0.3896.

6) א. 0.9328. ב. 0.2898.

7) הוכחה.

8) 0.75.

9) $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^4$.

10) $\frac{30}{31}$.

הסתברות ב

פרק 14 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \sim\succ N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5) הגובה של המתגייסים לצה״ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס״מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס״מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס״מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ״ק וסטיית תקן של 10 סמ״ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ״ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ״ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ״ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

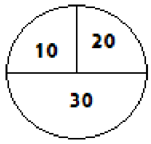
8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המסי הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכיה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X} > \mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההתפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2, ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$
ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma^2_{\bar{x}} = 0.2369$, $\sigma(\overline{X}) = 0.486$

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma(\overline{X}) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.
5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.
6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.
7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.
8) א. 0.5468. ב. 0.6826.
9) א. להלן טבלה: ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75. ד. 0.8997.

10) 0.0475.
11) 0.1814.
12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.
13) 0.5.
14) ב'.
15) ד'.
16) ג'.
17) א. 2.429. ב. 0.25.
18) 0.6826.
19) 0.0071.
20) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,...,X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu\ ,\ V(T)=n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\ ,\ T\sim N(n\mu,n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X)=\mu\ ,V(X)=\sigma^2$,

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \stackrel{\sim}{\succ} N(n\mu,n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

שאלות:

1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק״ג וסטיית תקן של 10 ק״ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק״ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק״ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק״ג?

2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ״ל וסטיית תקן של 20 מ״ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א׳ הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב׳ הייתה משתנה?

3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

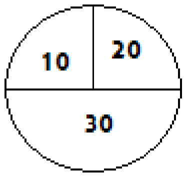
x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

6) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda = 1)$, כאשר: $i = 1, 2...100$.

חשבו את הסיכוי: $P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$.

7) אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0 < x < 1$, $f(x) = 2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

תשובות סופיות:

1) א. 0.6915. ב. 0.8413. ג. 0.5.

2) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062.
ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

3) א. 0.0571. ב. 2036.8.

4) א. 0.883. ב. 0.7949.

5) א. 0.8997. ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

6) 0.0668.

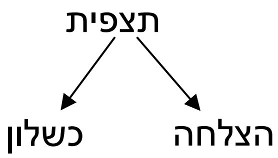
7) 56.

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).
את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y.
מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).
הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע״י הפרמטר: $q=1-p$.
מבצעים מדגם אקראי בגודל n: $Y \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y)=np$.

שונות: $V(y)=npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n,p)$, ומתקיים ש:

1. $n \cdot p \geq 5$.
2. $n \cdot (1-p) \geq 5$.

$$y \stackrel{\sim}{\succ} N(np, npq)$$

אז: $Z_y=\dfrac{y-np}{\sqrt{npq}}$.

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות.
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים:

1. $p(Y=a)\cong p\left(a-\frac{1}{2}\le Y\le a+\frac{1}{2}\right)$.
2. $P(Y\le a)\cong P(Y\le a+0.5)$.
3. $P(Y\ge a)\cong P(Y\ge a-0.5)$.

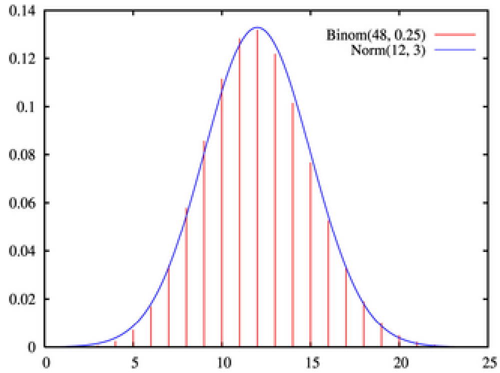
הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\ge 5$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\ge 10$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 10$.
- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n\ge 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.

א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?

ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.

א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?

ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?

4) מטילים מטבע 50 פעמים.

א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?

ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.

א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?

ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?

7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

1) א. 0.201. ב. 0.3758. ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
2) א. 0.9332. ב. 0.6915.
3) 0.1611.
4) א. 0.9406. ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
5) א. 0.015. ב. 398.
6) 0.9996.
7) 0.8643.

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.

Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$\widehat{p}=\frac{y}{n}$ - פרופורציית ההצלחות במדגם.

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n=200$:

מספר המובטלים: $Y=20$.

פרופורציית המובטלים במדגם: $\widehat{p}=\frac{20}{200}=0.1$.

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$E(\hat{p})=p \;\;,\;\; V(\hat{P})=\frac{pq}{n}$.

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

אם: $np\geq 5 \,\&\, nq\geq 5$, אזי: $\widehat{p}\,\tilde{\to}\,N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$. $Z_{\widehat{p}}=\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$.

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\geq 5$.
  2. $n\cdot(1-p)\geq 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\geq 10$.
  2. $n\cdot(1-p)\geq 10$.
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n\geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית $\left(\hat{p}\right)$ של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

שאלות:

1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים.
נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.

א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?

ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ב. לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמאטרפון?

ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.

א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?

ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?

ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100.
ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי.
מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6) נתון ש- $X \sim B(n,p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P}=\frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $V(\hat{P})=\frac{P(1-P)}{n}$, $E(\hat{P})=p$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.

2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.

3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.

4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 481. ד. 0.77436.

5) 0.0154.

6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

חוק המספרים הגדולים:

רקע:

חוק המספרים הגדולים מתייחס להשפעת הגדלת גודל המדגם על הסיכוי של פרופורציית המדגם (או ממוצע המדגם) להיות קרובה מהפרופורציה האמיתית (או מהממוצע האימתי).

החוק לגבי פרופורציה:

נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה אינסופית בה פרופורציית ההצלחות היא p, ככל שהמדגם גדול יותר: כך הסיכוי שפרופורציית המדגם ($\hat{p}$) תהיה בקרבת הפרופורציה באוכלוסייה (P) גבוה יותר.
ולכן הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהפרופורציה של האוכלוסייה קטן יותר.
בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הפרופורציה באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n = P$.
בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\hat{P}-P|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

הערה: ככל שהמדגם גדל הסיכוי שפרופורציית המדגם תהיה בדיוק הפרופורציה האמיתית הולך וקטן.

החוק לגבי ממוצע: נניח שמבצעים מדגם מקרי מתוך התפלגות שבה התוחלת μ והשונות סופית. ככל שהמדגם גדול יותר, כך הסיכוי שממוצע המדגם ($\bar{X}$) יהיה בקרבת הממוצע באוכלוסייה (μ) גבוה יותר. לכן, הסיכוי לקבל ערך חריג הרחוק מהממוצע של האוכלוסייה קטן יותר. בכתיבה מתמטית רושמים את חוק המספרים הגדולים לגבי הממוצע באופן הבא: $\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$.

בספרות המקצועית קוראים לחוק הזה החוק החזק של המספרים הגדולים.
את החוק החלש של המספרים הגדולים רושמים באופן הבא: $P\left(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה? במדגם בגודל 100 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. במדגם בגודל 200 פרופורציית המובטלים תסטה מהפרופורציה האמיתית בלא יותר מ-4%. הסבירו.

שאלות:

1) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
   א. אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.
   ב. שניים מתוך עשרה יהיו מובטלים. הסבירו וחשבו.

2) באוכלוסייה מסוימת 20% מהאוכלוסייה מובטלת. איזה סיכוי יותר גבוה?
   א. לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים
   ב. לפחות 30 מתוך 100 יהיו מובטלים. הסבירו.

3) גובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע 170 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. דוגמים 4 אנשים באקראי.
   א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה מעל 176 ס"מ.
   ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם? נמקו.

4) ידוע שבהצעת חוק מסוימת תומכים 60% מהציבור. נדגמו באקראי 10 אנשים.
   א. מה ההסתברות שבדיוק 60% מהמדגם תומכים בהצעת החוק?
   ב. כיצד התשובה הייתה משתנה אם היו דוגמים 20 אנשים?

5) שני חוקרים ביצעו מדגם מאותה אוכלוסייה. חוקר א דגם 20 תצפיות והשני דגם 40 תצפיות וכל אחד מהם חישב את ממוצע המדגם: $\bar{X}_{20}$ ו- $\bar{X}_{40}$.
ידוע שהתפלגות היא נורמלית ושהתוחלת באוכלוסייה הינה 500.
בסעיפים הבאים נמקו אילו הסתברויות מהזוגות המוצגים גדולה יותר או שהן שוות ונמקו.
   א. $P\left(\bar{X}_{20}>500\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}>500\right)$.
   ב. $P\left(480<\bar{X}_{20}<520\right)$ או $P\left(480<\bar{X}_{40}<520\right)$.
   ג. $P\left(\bar{X}_{20}<490\right)$ או $P\left(\bar{X}_{40}<490\right)$.

6) נתון ש: $X\sim G\left(P=0.1\right)$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n מההתפלגות הזו ומחשבים את ממוצע המדגם: $\bar{X}_n$.
הוכיחו: $\lim_{n\to\infty}\bar{X}_n=10$.

תשובות סופיות:

1) אחד מתוך מדגם של חמישה יהיה מובטל.

2) לפחות 3 מתוך 10 יהיו מובטלים.

3) א. 0.1151. ב. קטנה.

4) א. 0.2508. ב. קטן.

5) א. $P\left(\bar{X}_{40} > 500\right) = P\left(\bar{X}_{20} > 500\right)$.

ב. $P\left(480 < \bar{X}_{40} < 520\right) > P\left(480 < \bar{X}_{20} < 520\right)$.

ג. $P\left(\bar{X}_{40} < 490\right) < P\left(\bar{X}_{20} < 490\right)$.

6) שאלת הוכחה.

הסתברות ב

פרק 15 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

אי-שוויון מרקוב:

רקע:

אי-שוויון מרקוב רלבנטי לשימוש עבור כל משתנה מקרי אי-שלילי.

הפרמטר a הינו ממשי וחיובי ואז חייב להתקיים ש: $P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E[X]}{a}$,

לכן מתקיים גם ש: $P\left(X < a\right) \geq 1-\frac{E[X]}{a}$.

דוגמה:

אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשבו לפי אי-שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.

$X =$ אורך חיים של מכשיר (רציף).

$X \geq 0 \;,\; E[X]=500$

$$P\left(X \geq 1500\right) \leq \frac{E[X]}{a}=\frac{500}{1500}=\frac{1}{3}$$

לכן, $0 \leq P\left(X \geq 1500\right) \leq \frac{1}{3}$.

שאלות:

1) ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 65.
מצאו חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 75.

2) התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות.
העריכו את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 ילדים.

3) X משתנה מקרי רציף אי-שלילי, שתוחלתו 15.
האם ייתכן ש: $P(X > 65) = 0.3$?

4) X משתנה מקרי בדיד, המקיים: $X > -2$, ותוחלתו 6.
מצאו חסם תחתון ל- $P(X < 10)$.

5) X משתנה מקרי המקיים: $P(X \geq 0) = 1$ ו- $s > 0$ קבוע ממשי.
הוכיחו כי: $P(X < sE(X)) \geq \frac{s-1}{s}$.

6) נתון ש- $X_i \sim P(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ הם משתנים בלתי תלויים.
מצאו חסמים להסתברות ש- $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda$.

7) הוכיחו את אי-שוויון מרקוב.
רמז: היעזרו במשתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר $X \geq a$.

8) בשכונה חדשה בונים n בתים חדשים הנבנים בחלקת אדמה עגולה. כל בית נצבע בלבן בסיכוי p ללא תלות בבתים האחרים. בניין שלא נצבע בלבן נצבע באפור. בית לבן הוא בית בודד אם הוא נמצא בין שני בתים אפורים.
נגדיר את X להיות מספר הבתים הלבנים הבודדים.

א. מצאו את התוחלת של X.

ב. כעת נניח ש- $p=\frac{1}{4}$. הראו שהסיכוי שמספר הבתים הלבנים הבודדים יהיה קטן מ- $\frac{n}{4}$ הוא לפחות $\frac{7}{16}$.

9) הוכיחו את אי-שוויון צ׳בישב: אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך k חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq k\}\leq\frac{Var(X)}{k^2}$.

רמז: היעזרו באי-שוויון מרקוב.

תשובות סופיות:

1) $P(X \geq 75) \leq \frac{65}{75} = \frac{13}{15}$.

2) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

3) לא יתכן.

4) $\frac{1}{3}$.

5) שאלת הוכחה.

6) $0 \leq P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3n\lambda\right) \leq \frac{1}{3}$.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $n \cdot p(1-p)^2$. ב. שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ׳בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X)=3$$

$P\{|X-E(X)|<a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$, נציב:

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.

שאלות:

1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3:

א. $p\left(2<x<14\right)$.

ב. $p\left(\left|x-8\right|\geq 9\right)$.

2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P\left(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma\right)=0.7$? הסבירו.

3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

9) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n}$.

10) $X_1, X_2 ..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$.

תשובות סופיות:

1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל-$\frac{1}{9}$.

2) לא יתכן.

3) 0.75.

4) לפחות 0.7.

5) לפחות 30.

6) 0.52.

7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

8) 0.7056.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

אי שוויון צ'בישב החד צדדי (אי שוויון קנטיל):

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 0 ושונותו σ^2 סופית, אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$, זהו אי-שוויון צ'בישב החד צדדי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון משתנה מקרי עם תוחלת 0 ושונות 4.
מה התחום האפשרי להסתברות שהמשתנה יקבל ערך שהוא לפחות 5?

תשובה:

$$E(X) = 0,\ V(X) = \sigma^2 = 4$$
$$P(X \geq 5) \leq \frac{4}{4+5^2} = \frac{4}{29}$$
$$0 \leq P(X \geq 5) \leq \frac{4}{29}$$

דרך אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי אפשר לפתח את אי-שוויון קנטיל:
אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית, אז לכל ערך חיובי a
מתקיים:

$$P(X \geq \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$
$$P(X \leq \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מספר הנרשמים למחלקת התקשורת במכללה מסוימת הוא משתנה מקרי עם תוחלת 100 וסטיית תקן 20. מצאו חסם להסתברות שמספר הנרשמים למחלקת התקשורת במכללה יהיה לפחות 120.

א. לפי אי-שוויון מרקוב.

ב. לפי אי-שוויון קנטיל.

ג. השוו בין התוצאות. איזה אי-שוויון מדויק יותר?

תשובה:

X = מספר הנרשמים

$E(X)=100$

$V(X)=\sigma^2=20^2=400$

א. אי שוויון מרקוב: X = לא שלילי, $a>0$.

$$P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$$

$$P(X\ge 120)\le\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$$

ב.

$$P(X\ge \mu+a)\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}\Rightarrow P(X\ge 120)=P(X\ge 100+20)\le\frac{400}{400+20^2}=\frac{1}{2}$$

ג. אי שוויון קנטיל מדויק יותר מאשר אי שוויון מרקוב.

שאלות:

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. אם X הוא משתנה מקרי בדיד שמקבל ערכים שלמים אי-שליליים ותוחלתו 25, האם ייתכן ש- $P(X>75)=0.2$?

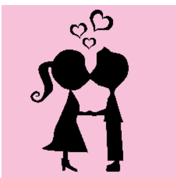
ב. מלבד הנתון בסעיף א', נניח גם שהשונות של X היא 25. האם ייתכן ש- $P(X>75)=0.2$?

2) משתנה מקרי X כלשהו מתפלג עם תוחלת 10 ושונות 4.
מצאו חסמים להסתברויות הבאות:

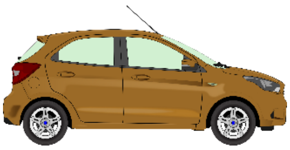
א. $X \geq 15$.

ב. $X \leq 6$.

ג. $X > 17$.



3) מספר הנשיקות שדני נותן לדנה ביום מתפלג פואסונית עם תוחלת של 20 נשיקות ביום. מצאו, בעזרת אי-שוויון צ'בישב החד-צדדי, חסם להסתברות שדני ייתן לדנה מחר לפחות 26 נשיקות.



4) מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות במגרש מסוים מתפלג עם תוחלת 40 בחודש ושונות 10.
מספר המכוניות האירופיות הנמכרות באותו המגרש מתפלג עם תוחלת 40 בחודש ושונות 12.
השונות המשותפת של מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות בחודש ומספר המכוניות האירופיות הנמכרות בחודש באותו המגרש היא 3-.
מצאו חסמים להסתברויות הבאות:

א. מספר המכוניות האמריקאיות הנמכרות בחודש במגרש יהיה שונה ממספר המכוניות האירופיות הנמכרות בחודש במגרש ביותר מ-14.

ב. מספר המכוניות האמריקאיות שנמכרות בחודש במגרש גבוה ממספר המכוניות האירופיות שנמכרות בחודש במגרש ביותר מ-14.

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו 0 ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \ge a) \le \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
רמז: הגדירו משתנה מקרי: $Y = X + b$ (כאשר $b > 0$), היעזרו באי-שוויון מרקוב ובחרו את ערכו של b שייתן אי-שוויון מדויק ביותר.

ב. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \ge \mu + a) \le \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

ג. הוכיחו שאם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונותו σ^2 סופית,
אז לכל ערך חיובי a מתקיים: $P(X \le \mu - a) \le \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

תשובות סופיות:

1) א. יתכן. ב. לא יתכן.

2) א. 0.13793. ב. 0.2. ג. 0.01365.

3) 0.3571.

4) א. 0.1244. ב. 0.1107.

5) שאלת הוכחה.

הסתברות ב

פרק 16 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

משתנה מקרי דו ממדי רציף:

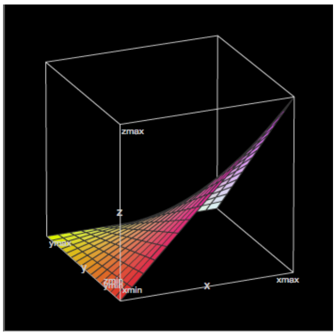
רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1) $f(x,y)\ge 0$ לכל $(x,y)\in R$.

2) $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy=1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):



נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא: $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$.

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא: $f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו לפונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$

את פונקציית הצפיפות השולית של X, וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y, המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases},$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X ו- Y יהיו בתחום הזה: $P\left[(x,y)\in A\right]=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}f(x,y)dxdy.$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש- $Y=y$ לכל ערכי y המקיימים: $f(y)>0$ על ידי: $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$.

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש- $X=x$ לכל ערכי x המקיימים: $f(x)>0$ על ידי: $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $f(x|y)$.

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של X בהינתן ש- $Y=y$ תהיה: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{-\infty} x\cdot f(x|y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X=x$ תהיה:

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{-\infty} y\cdot f(y|x)dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $E(X|Y)$.

שאלות:

1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.

2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 2$ וגם: $-x\le y\le x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A.

3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\dfrac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$.

א. מצאו את ערכו של C.

ב. מצאו את $f(y)$.

ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\dfrac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60\le x\le y$ וגם: $60\le y\le 100$.

א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

ג. חשבו את $V(X)$, $E(X)$.

ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X+10)$.

5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:
$f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y?

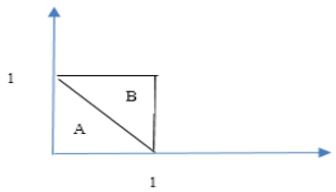
ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X)$.

6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2,4]$.
בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0\le x\le y$, $f\left(x|y\right)=\frac{2x}{y^2}$.
מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y.

7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y. פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא: $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x & 0<y<1 \quad 1-y\le x\le 1+y \\ 0 & else \end{cases}$.
א. מצאו את $f\left(x\right)$.
ב. מצאו את $f\left(y|x\right)$.
ג. מצאו את $E\left(Y|X\right)$.

8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.
א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y.
ג. חשבו את התוחלת של X ו- Y.
ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?
ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:
הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?
א. מצאו את $f\left(x\right)$.
ב. מצאו את $f\left(x|y\right)$.



10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f\left(x,y\right)=cx$. פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וכן: $0\le y\le x^2$.
א. מצאו את הקבוע C.
ב. חשבו את ההסתברות ש- $6Y<1-X$.

11) נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y\sim U(0,1)$
ו- $X\,|\,Y=y\sim U\left(0,\sqrt{y}\right)$. חשבו את: $E(Y\,|\,X=0.5)$.

12) נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=2e^{-x}\cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x,y\geq 0$.
חשבו את הסיכוי: $P(X<Y)$.

13) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y)=\dfrac{e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את: $P(X>1\,|\,Y=2)$.

14) יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.
נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

15) נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X\sim N(Y,1)$ ו- $Y\sim U(0,2)$.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y.
ב. מצאו את $E\left(X^2\,|\,Y\right)$.
ג. מצאו את $E(X)$.

16) פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x,y)=1$.
פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0\leq x,y\leq 1$.
הוכיחו ש: $E\left(|X-Y|^n\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

17) $X\sim\exp(1)$ וכן: $Y\sim\exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.
נגדיר את: $Z=\dfrac{X}{X+Y}$.
הוכיחו: $Z\sim U(0,1)$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) $A=\frac{1}{8}$.

3) א. $\frac{5}{16}$.
ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$.
ג. תלויים.

4) א. שאלת הוכחה.
ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$.
ג. $V(X)=88\frac{8}{9}$, $E(X)=73\frac{1}{3}$.
ד. לא.
ה. 0.5.
ו. 0.5625.

5) א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $f(y)=\mu e^{-\mu y}$.
ב. לא.
ג. 0.
ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

6) $\frac{2}{9}$.

7) א. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1 \\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1 \\ 0 & else \end{cases}$.

ג. $E(y|x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

8) א. $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 1+x<y<1-x \quad -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$, $f(y)=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ 2-y & 1\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ג. $E(Y)=1$, $E(X)=-\frac{2}{3}$.
ד. כן.
ה. לא.

9) א. כן.
ב. $f(x)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $f(x|y)=\begin{cases}\frac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

10) א. 4.
ב. 0.0947.

11) $\frac{7}{12}$.

12) $\frac{1}{3}$.

13) $e^{-\frac{1}{2}}$.

14) $\frac{25}{72}$.

15) א. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$.
ב. y^2+1.
ג. 1.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

הסתברות ב

פרק 17 - קונבולוציה - התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים

תוכן העניינים

קונבולוציה – התפלגות סכום משתנים בלתי תלויים:

רקע:

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם:
$T=X+Y$ - שגם הוא משתנה מקרי.
אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y, פונקציית הצפיפות של $T=X+Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\cdot f_Y(y)dy .$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim\exp(1)$ וכן: $Y\sim\exp(2)$. מצאו את פונקציית הצפיפות של: $T=X+Y$.

שאלות:

1) נתון ש- $X,Y \sim \exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

2) נתון ש- X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית.
הוכיחו ש- $T=X+Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3) סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל-3 שעות.
כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.
א. מצאו את פונקציית הצפיפות של Z.
ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ-4 שעות?

4) X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות: $-2\le x\le 2 \quad f_X(x)=\frac{1}{4}$, $f_Y(y)=\begin{cases} y+1 & -1\le y\le 0 \\ 1-y & 0\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$.
מצאו את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

5) יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X\sim U(2,3)$ $Y\sim U(1,5)$.
א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?
ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6) יהיו X, Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל- 1.
מצאו את פונקציית הצפיפות של: $X+Y+Z$.

7) הוכיחו את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף.
(רמז: היעזרו בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

תשובות סופיות:

1) $t \ge 0 \qquad f_T(t) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot t$.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-e^{1-z}\right) & 1 \le z \le 3 \\ \frac{1}{2}\left(e^{3-z}-e^{1-z}\right) & z > 3 \\ 0 & else \end{cases}$. ב. 0.841.

4) $f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(t+3)^2 & -3 \le t \le -2 \\ \frac{1}{8}\left(2-(t+1)^2\right) & -2 < t < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \le t \le 1 \\ \frac{1}{8}\left(2-(t-1)^2\right) & 1 < t < 2 \\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & else \end{cases}$.

5) א. $f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{4} & 3 \le t \le 4 \\ \frac{1}{4} & 4 < t > 7 \\ \frac{8-t}{4} & 7 \le t \le 8 \end{cases}$ ב. 4.5.

6) $f_W(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{2} & 0 \le w \le 1 \\ -w^2+3w-1.5 & 1 < w < 2 \\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2 \le w \le 3 \end{cases}$.

7) שאלת הוכחה.