

הסקה סטטיסטית



תוכן העניינים

1.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	1
4.	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי	4
24.	אמידה נקודתית : esm אנמ אחה וכו	24
54.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע)	54
65.	רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים	65
67.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים	67
69.	רווח סמך לשונות וסטיית תקן	69
74.	בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)	74
81.	הלמה של ניימן פירסון	81
88.	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים	88
94.	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)	94
115.	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	115
123.	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים	123
127.	הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות	127
130.	בדיקת השערות על שונות	130
135.	שאלות מסכמות בבדיקת השערות	135
150.	מבחני חי בריבוע	150
160.	ניתוח שונות חד כיוונית	160

הסקה סטטיסטית

פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

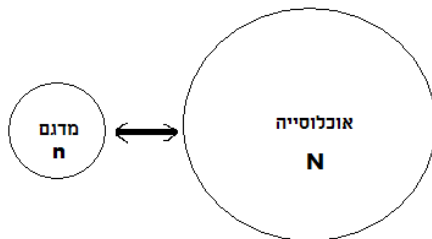
1. כללי 1

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	ממוצע
$\bar{X}$	μ	
$\hat{p}$	P	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"שוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מי היא האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"שוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

הסקה סטטיסטית

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי 12
3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית 15
4. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם 20

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

גדול ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?

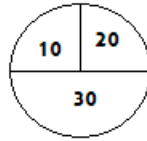
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ביישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?
- נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 - ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 - ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 - ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 - ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 - ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 - ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 - ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?
ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם $\bar{X}$. לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2 . החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
- ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
- ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
- ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17 משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

- א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
- ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

(18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

(19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים. מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

(20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 , ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות

$$\text{לגבי ממוצע המדגם: } E(\bar{x}) = \mu \text{ ו- } V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

תשובות סופיות:

(1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.

ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.

ה. 78.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	$P(X)$

ב. $\sigma = 0.973$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\mu = 2.05$

ג. $\sigma(\bar{X}) = 0.486$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\mu_{\bar{x}} = 2.05$

(3) $\sigma(\bar{X}) = 1.21$, $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

(4) א. 0.8413 ב. 0.0013

(5) א. 0 ב. 0

(6) א. 0.0465 ב. 27.71

(7) א. 0 ב. 0.1587

(8) א. 0.5468 ב. 0.6826

(9) א. להלן טבלה:

30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75

ד. 0.8997

(10) 0.0475

(11) 0.1814

(12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271

(13) 0.5

(14) ב'

(15) ד'

(16) ג'

(17) א. 2.429 ב. 0.25

(18) 0.6826

(19) 0.0071

(20) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T = \sum_{i=1}^n X_i$.
 כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1, \dots, X_n$ -
 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:
 התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T) = n\mu$, $V(T) = n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי: $Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \rightsquigarrow N(n\mu, n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.
- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
 - מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

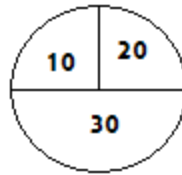
שאלות:

- (1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
- ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
- ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
- (2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
- ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
- ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?
- (3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
- ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
- (4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

- נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית ההסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).
- א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?
- ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

(5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

- א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?
- ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

(6) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda=1)$, כאשר: $i=1, 2, \dots, 100$.

$$\text{חשבו את הסיכוי: } P\left(\sum_i X_i \geq 115\right)$$

(7) אורך חיי סוללה (בשעות) הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $0 < x < 1$, $f(x) = 2x$. ברגע שסוללה מתרוקנת מחליפים אותה במיידית בסוללה אחרת. כמה סוללות יש להחזיק במלאי אם רוצים שבסיכוי של 90% לפחות המלאי יספיק עבור 35 שעות לפחות?

תשובות סופיות:

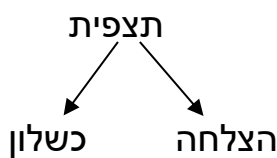
- (1) א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5
- (2) א. תוחלת: 3000 מ"ל, סטיית תקן: 40 מ"ל. ב. 0.0062
- ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.
- (3) א. 0.0571 ב. 2036.8
- (4) א. 0.883 ב. 0.7949
- (5) א. 0.8997 ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239
- (6) 0.0668
- (7) 56

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n : $Y \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

תוחלת: $E(y) = np$.

שונות: $V(y) = npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n, p)$, ומתקיים ש:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

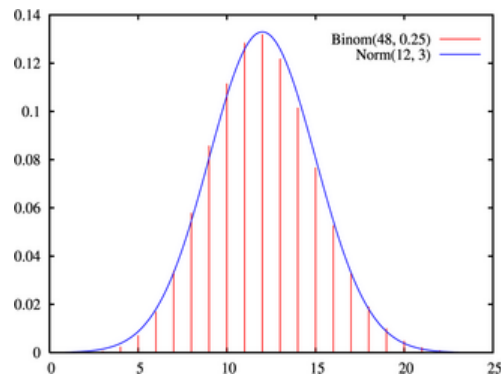
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
 - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.201 ב. 0.3758 ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
- (2) א. 0.9332 ב. 0.6915
- (3) 0.1611
- (4) א. 0.9406 ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
- (5) א. 0.015 ב. 0.398
- (6) 0.9996
- (7) 0.8643

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
 Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם.}$$

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n = 200$:

מספר המובטלים : $Y = 20$.

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ : פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
 נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

$$\text{אם: } np \geq 5 \text{ \& } nq \geq 5, \text{ אזי: } \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \quad Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
 התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n \geq 30)$.

- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- מה ההסתברות שהשכיחות היחסית ($\hat{p}$) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

שאלות:

- (1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
 - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
- (2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
- (3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
 - ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
- (4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
 - א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
 - ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?
 - ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
 - ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
- (5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

(6) נתון ש- $X \sim B(n, p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $E(\hat{P}) = p$, $V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

- (1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.
- (2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.
- (3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.
- (4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 0.481. ד. 0.77436.
- (5) 0.0154.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

הסקה סטטיסטית

פרק 3 - אמידה נקודתית: mse אנמ אחה וכו

תוכן העניינים

24	1. אומד חסר הטייה
31	2. אומד ניראות מקסימלית
39	3. MSE
42	4. שיטת המומנטים
45	5. אומד עקיב
47	6. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית
49	7. שאלות מסכמות

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ : $E(\hat{\theta}) = \theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	X
4θ	$1 - 60\theta$	2θ	הסתברות

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו- X_2 .

א. הראו שהאומד: $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל- θ .

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta}) - \theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1 ?

ג. תקנו את T_1 , כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל- θ , אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X = 3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X .

תזכורות חשובות:

אם : $Y = aX + b$, אזי : $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$, $\sigma_Y = |a| \sigma_X$.

אם : $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים, אזי :

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם : $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי :

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

שאלות:

- (1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ , נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1, \dots, X_5$. שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
- הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
- במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
- איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

- (2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i \quad \text{זה:}$$

- בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
- איזה אומד עדיף? נמקו.

- (3) $X \sim B(n, p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n .

- פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
- מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?
- מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
- מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

(4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2}, P(X=1) = \frac{\theta}{3}, P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום,

במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

(5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1 - 4\theta$,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ .

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

(6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז $5T$ אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר 5θ .

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז T^2 אומד בלתי מוטה

עבור הפרמטר θ^2 .

- (7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$. דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

- (8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .
 א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2 , המתבסס על T_1 ו- T_2 .
 ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2 .

- (9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2 . נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.
 א. הראו ש- $\sum_{i=1}^n p_i x_i$ אומד חסר הטיה ל- μ , כאשר: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
 ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$. הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

- (10) $X_i \sim N(\mu, 1)$, כאשר: $i = 1, 2, \dots, n$. נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו. מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

(11) נתונות n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל- β .
 ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

(12) $X_1, X_2, \dots, X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית

$$f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{הצפיפות הבאה :}$$

- א. בטאו את ערכו של A באמצעות θ , כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.
 ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך n התצפיות.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } T_1 \text{ ו- } T_2. \quad \text{ב. } \frac{2}{3}T_3. \quad \text{ג. } T_1 = 76.6, T_2 = 110. \quad \text{ד. } T_1.$$

$$(2) \quad \text{א. ראו בוידאו.} \quad \text{ב. } T_2.$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x}{n}. \quad \text{ב. } 1 - \frac{x}{n}. \quad \text{ג. } X. \quad \text{ד. } \theta.$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3x}{2}. \quad \text{ב. } \frac{3\bar{x}}{2}.$$

$$(5) \quad \text{א. } 1 - \frac{x}{2}. \quad \text{ב. } 1 - \frac{1}{2}\bar{x}. \quad \text{ג. } 0.125. \quad \text{ד. } 3\left(1 - \frac{1}{2}\bar{x}\right).$$

$$\text{ה. לשונות } 0.917.$$

$$(6) \quad \text{א. נכון.} \quad \text{ב. לא נכון.}$$

$$(7) \quad \text{ב'.$$

$$(8) \quad \text{א. } T_1 \cdot T_2. \quad \text{ב. } T_1 - T_1 \cdot T_2.$$

$$(9) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.}$$

$$(10) \quad \bar{X}^2 - \frac{1}{n}.$$

$$(11) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } V(3\bar{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}.$$

$$(12) \quad \text{א. } A = \frac{2}{\theta^2}. \quad \text{ב. } \theta = \frac{3 - \bar{X}}{2}.$$

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.
נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x, \theta)$,
כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, \dots, X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.
נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).
אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות
שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta)$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ),
כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית
הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ .

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא p (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל
עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של p .

אומד נראות מקסימלית עבור θ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$. כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף $\ln$ כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p .

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ , אזי $g(\hat{\theta})$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g(\hat{\theta})$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

שאלות:

- (1) הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע).
 השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
 נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
 א. חשבו את פונקציית הנראות של p , וציירו גרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור p .
 ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- p , אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.
- (2) מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.
 א. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- λ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- λ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסוימים.
- (3) הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .
 דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
 התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 5, 7 ו-3.
 א. פתחו אומדן נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.
 ב. מהו האומדן לפרמטר?
- (4) משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0, q)$.
 כדי לאמוד את θ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.
 א. אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך התצפית.
 ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1.5, 3, 1.
 ד. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך המדגם הזה.
 ד. מצאו באופן כללי אומדן נראות מקסימלית ל- θ , על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1, \dots, X_n$.

(5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1, \dots, X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

(6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר p בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל n , בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

$$(7) \quad X \text{ הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: } f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1, \dots, X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ^2 .

(8) בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

(9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

- 10) מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי X , בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ , באופן הבא:

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$1 - 4\theta + 4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 1, 0, 0 לקוחות ממתינים בתור.

- א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ , על-סמך המדגם הנתון.
 ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

- 11) אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

- א. מצא אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.
 ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

- 12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.
 א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.
 ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.
 ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

- 13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
 ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
 ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
 ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
 יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
 הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.
 א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.
 ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?
 ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

(14) $X_1, X_2, \dots, X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.

מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ .

(15) $X_1, X_2, \dots, X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1 - (1-P)^2} \quad K = 1, 2$$

הוכח שא.נ.מ ל- P , הינו: $2 - \frac{2}{X}$.

(16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P . כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

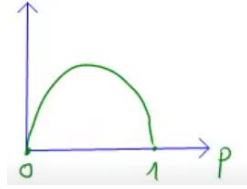
- מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P .
- רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.
- בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ עבור $t > 0$. מצא א.נ.מ. עבור θ , המבוסס על Y . מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

(17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

- רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P .
- מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 1, 5. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P , על סמך התוצאות שהתקבלו.

תשובות סופיות:

להלן גרף:



$$\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{ג. 3.}$$

ג. 3.

$$L(p) = (1-p) \cdot p \quad \text{א. 1.}$$

$$\frac{2}{9} \quad \text{ב. 0.5.}$$

$$\bar{X} \quad \text{א. 2.}$$

$$\frac{2}{9} \quad \text{ב. 1.}$$

$$1 \quad \text{א. 4.}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n} \quad \text{א. 5.}$$

$$40.2 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x}{n} \quad \text{ב. 6.}$$

$$\left(\frac{n}{\sum X_i^2} \right)^2 \quad \text{ב. 7.}$$

$$\text{א. ראה סרטון.} \quad \text{ב. כד א'.}$$

$$0.3916 \quad \text{א. 9.}$$

$$0.81 \quad \text{א. 10.}$$

$$\text{א. ראה סרטון.} \quad \text{ב. הוגן.}$$

$$0.08 \quad \text{א. 12.}$$

$$0.92 \quad \text{ב.}$$

$$11.5 \quad \text{ג.}$$

$$\hat{p} = \begin{cases} 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 & X = 0,1 \\ 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{ג. 1.}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 3 & X = 0,1 \\ 1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{א. 13.}$$

$$\max |X_i| \quad \text{14.}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad \text{15.}$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{y}{n}} \quad \text{ב. 0.49.}$$

$$0.6124 \quad \text{א. 16.}$$

$$P(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & 1 \leq x \leq 9 \\ (1-p)^9 & x = 10 \end{cases} \quad \text{א. 17.}$$

$$0.1818 \quad \text{ב.}$$

נספח:
התפלגויות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2		$\bar{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

התפלגויות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X = k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
בינומית $B(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{p} = \frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \leq 1$	$(1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$
אחידה $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K = a, \dots, b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	(3)	$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, \infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda} = \bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b .

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE : Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

כאשר : $V(\hat{\theta})$ - הינה שונות האומד.

$E(\hat{\theta}) - \theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ , האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר. כלומר, אם : $MSE(T_1) > MSE(T_2)$, אז T_2 עדיף על T_1 .

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא : $X \sim U(3, \theta)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת : $T_1 = 2X - 3$ ו- $T_2 = \frac{3X - 3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ ?

שאלות:

(1) מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

(2) בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X .
 א. הצע אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך X .
 ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$. האם האומד הנ"ל מוטה?
 ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

(3) חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1 = \frac{X}{5}$ ו- $T_2 = \frac{X+1}{7}$.
 א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?
 ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.5$?
 ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.1$?

(4) מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ . נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} \quad \text{ו-} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10}$$

כאשר: X_i = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה- i .
 איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ ?

(5) הוכח ש: $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

תשובות סופיות:

- (1) שלוש תצפיות.
- (2) א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.
- (3) א. T_1 . ב. T_2 . ג. T_1 .
- (4) $\hat{\lambda}_1$.
- (5) שאלת הוכחה.

שיטת המומנטים:

רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה X מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה X מוגדר להיות: $E(X^2)$.

באופן כללי, מומנט מסדר r מוגדר להיות: $E(X^r)$.

מומנט מסדר ראשון של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר r של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה- r של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר λ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את λ בשיטת המומנטים.

שאלות:

- (1) X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.
- (2) דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2 . מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.
- (3) אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X – מספר העצים שהוא קיבל.
א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך X בודד.
ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.
ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים:
פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.
- (4) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר λ על סמך מדגם של n תצפיות.
- (5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.
א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר θ .
ב. מצא אומד ל- θ על פי שיטת המומנטים.
- (6) הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10, \sigma^2)$.
במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 4, 6, 10, 5.
א. אמוד את σ^2 בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל n .
ב. מצא את האומדן ל- σ^2 . מה הבעייתיות בתשובה?

תשובות סופיות:

$$\hat{a} = 2\bar{X} - 20 \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2, \quad \bar{X} = \hat{\mu} \quad (2)$$

$$\hat{a} = 2X \quad \text{א.} \quad \hat{a} = 2\bar{X}_m \quad \text{ב.} \quad \hat{a} = 10\frac{2}{3} \quad \text{ג.} \quad (3)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} \quad (4)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} \quad \text{ב.} \quad \frac{\theta}{\theta + 1} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - 100 \quad \text{א.} \quad \hat{\sigma}^2 = -55.75 \quad \text{ב.} \quad (6)$$

אומד עקיב:

רקע:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר θ , המתבסס על n תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד חסר הטיה לפרמטר θ ומתקיים ש: $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$,

אזי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע $\bar{X}$ אומד עקיב ל- μ .

אם $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ , מתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$.

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית $\frac{1}{X}$, אומד עקיב לפרמטר P .

שאלות:

(1) נתון כי: $X_i \sim U(0, \theta)$, כאשר: $i = 1, 2, \dots, n$.

$2\bar{X}$ מוצע להיות האומד ל- θ .

א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.

ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.

(2) נתון ש- $X \sim B(n, p)$. כמו כן, נתון ש: $\hat{p} = \frac{X}{n}$ הינו אומד ל- p .

הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל- p .

(3) אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב λ לשנה.

נגדיר את: $W_1, W_2, \dots, W_n$ כסדרת זמנים (בשנים) של n נורות בלתי תלויות.

א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור λ ? האם האומד עקיב?

ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים.

(4) נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

מצא אומד עקיב לפרמטר σ^2 , המתבסס על n תצפיות בלתי תלויות.

תשובות סופיות:

(1) א. שאלת הוכחה. ב. ראה סרטון.

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\frac{1}{\bar{W}}$. ב. $1 - e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$.

(4) $\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$.

אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

רקע:

T יהיה MVUE, אם מתקיים ש- T אומד חסר הטיה ל- θ , ובנוסף מתקיים ש:
 $V(T) \leq V(\hat{\theta})$ לכל חסר הטיה אחר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של λ בסניף A וקצב של 2λ בסניף B. נדגמו n ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:

X_i - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום i .

Y_j - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום j .

על מנת לאמוד את λ , מוצע האומד: $\alpha \bar{X} + \beta \bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על α ו- β , כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות α ו- β כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

שאלות:

- (1) T_1 ו- T_2 הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .
 כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.
 א. מה צריך להיות התנאי על a ו- b , כדי ש- T יהיה אומד חסר הטיה?
 ב. σ_1^2 ו- σ_2^2 הם השונות של T_1 ו- T_2 , בהתאמה.
 מצאו a ו- b , כך ש- T יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , ובעל שונות מינימלית.
- (2) במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.
 תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.
 השונות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.
 הוחלט לדגום n חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.
 $\bar{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה i .
 יהי: $W = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.
 א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים a_i , כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?
 ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.
 מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

תשובות סופיות:

- (1) א. $a + b = 1$.
 ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
- (2) א. $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$.
 ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.

שאלות מסכמות:

שאלות:

- (1) במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$. דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה, ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
- א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P ?
- ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .
- ג. אם התקבל ש- $Y = 3$, $X = 6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?
- (2) מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש. הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש. נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- Y בקטע ב'.
- א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ , על סמך X ו- Y .
- ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.
- ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?
- (3) זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלי, עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
- א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
- ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

- (4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי. יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P . א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P .

- יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2. ב. מצאו אומדן ל- P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית. ג. מצאו אומדן חסר הטיה ל- P . מהו האומדן לפי התוצאות של יעל? ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

- (5) יהי: $X_1, X_2, \dots, X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0 < x < \lambda, \theta > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מצא אחי"ה ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).
ב. מצא אני"מ ל- θ (כאשר λ קבוע ידוע).
ג. מצא אני"מ ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).

- (6) X - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, \theta)$.
 Y - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, 2\theta)$.
א. מצא אומדן חסר הטיה ל- θ , המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.
ב. מוצע האומדן: $T_2 = X + 0.5Y$. האם האומדן הנ"ל הוא חסר הטיה?
ג. איזה אומדן יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב?
ד. מצא אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך X ו- Y .

- (7) נדגמו 2 תצפיות, X_1, X_2 , בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר θ .

ידוע כי: $X_1 \sim U(0, \theta)$, $X_2 \sim U(0, a\theta)$ (כאשר a קבוע ידוע וחיובי).

- א. מצא אני"מ ל- θ , על סמך 2 התצפיות הנ"ל.
ב. חשב את תוחלת ושונות האני"מ מסעיף א'. האם האני"מ מוטה?
ג. מצא אחי"ה ל- θ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 0 \leq P \leq 0.5 \quad \text{ב. } \hat{p} = \frac{x+z}{60} \quad \text{ג. } 0.345$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{x+y}{3} \quad \text{ב. } 1 - e^{-\frac{x+y}{3}} \quad \text{ג. כן.}$$

(3) א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומדן הזה לנוסחה הכללית (ראו נספח).
ב. כנ"ל. ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומדן נראות מקסמילי). ד. לא.

$$(4) \quad \text{א. } 0 \leq P \leq \frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } 0.389 \quad \text{ד. } -0.167$$

$$(5) \quad \text{א. אח"ה יהיה: } \hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta} \bar{x} \quad \text{ב. } \hat{\theta} = \frac{n}{n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\text{ג. } \hat{\lambda} = X_{\max}$$

$$(6) \quad \text{א. } T_1 = (x+y) \frac{2}{3} \quad \text{ב. כן.} \quad \text{ג. ב'.} \quad \text{ד. } \hat{\theta} = \max \left\{ x, \frac{1}{2} y \right\}$$

$$(7) \quad \text{א. } \hat{\theta} = \max \left(X_1, \frac{X_2}{a} \right) \quad \text{ב. } E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3} \theta, \quad V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18} \theta^2$$

$$\text{ג. } \tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a} \right) (X_1 + X_2)$$

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n, p)$.

א.נ.מ עבור p הוא: $\hat{p} = \frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1, N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא: $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא: $\hat{\lambda} = \bar{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\bar{X}$ והינו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \bar{X}$.

כאשר μ ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר μ לא-ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

מודל מעריכי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות. א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\bar{X}$. א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0, \theta)$ בלתי-תלויים בזוגות. א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \bar{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ ידוע:}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ לא-ידוע:}$$

הסקה סטטיסטית

פרק 4 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 54
- 2. קביעת גודל מדגם 60
- 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 62

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמיתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$.

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- (1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
 - מה רווח הסמך לפרמטר?
 - מהי רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רווח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- (2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- (3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- (4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- א. ממוצע המדגם.
 - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - ג. רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
 - ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
 - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
 - ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
 - ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
 - ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\bar{X} = 6$.

ג. $\bar{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

(11) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $63 < \mu < 83$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות.

א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10.

כמה תצפיות עליו היה לדגום?

ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%.

בנו את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

(12) נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד: $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$. נרצה לאמוד את μ . מצאו רווח סמך ל- μ ברמת-ביטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל: $\bar{x} = 74$.

(תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה: $Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$).

תשובות סופיות:

- (1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג. μ . ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.
- (2) $4920.6 < \mu < 4979.4$
- (3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.
- (4) א. $9284 < \mu < 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 שם בביטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.
- (5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.
- (6) א. $4.42 < \mu < 83.5$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.
- (7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.
- (8) ב'.
- (9) ג'.
- (10) ד'.
- (11) א. 160. ב. $61.13 < \mu < 84.87$.
- (12) 74 ± 0.084

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב

$$.n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad \text{בנוסחה הבאה:}$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
- א. כמה מתגייסים יש לדגום?
- ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ . מהו גודל המדגם הנדרש?

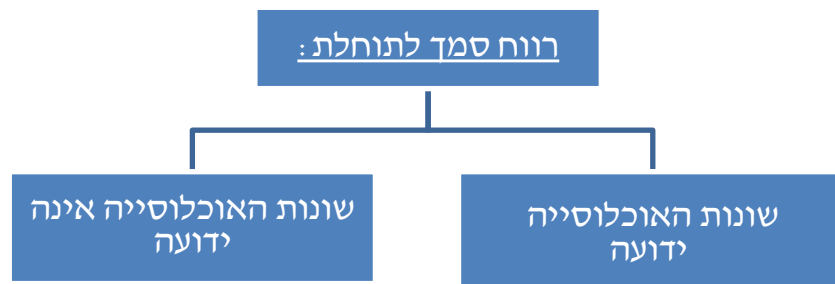
תשובות סופיות:

- (1) 780.
- (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.
- (3) $n = 62$.

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

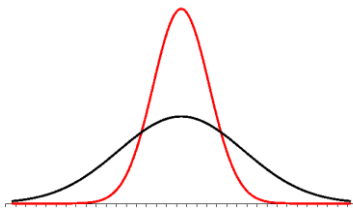


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



האומד לשונות: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
- ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
- ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S = 13$ ס"מ.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
- א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
- ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
- ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
- ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח $\sigma = 20$. סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל $S = 20$. למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
- א. סטטיסטיקאי א.
 ב. סטטיסטיקאי ב.
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

- (1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א. $96.63 < \mu < 107.37$ ב. $96.90 < \mu < 107.10$ ג. ראה בסרטון.
- (5) $3.149 < \mu < 3.351$
- (6) $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%.

הסקה סטטיסטית

פרק 5 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונניות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונניות..... 65

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

$$2. X_1, X_2 \sim N.$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללות: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{הנוסחה הבאה:}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{דרגות החופש:}$$

$$\text{רווח סמך: } (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{n_1+n_2-2}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1 - \alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

מספר האקדמאים	תל אביב	באר שבע
10	20	
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N(\mu_x, \sigma^2)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N(\mu_y, \sigma^2)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
- השונות שווה.
 - שהציונים מתפלגים נורמלית.
 - המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

הסקה סטטיסטית

פרק 6 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 67

רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y .

ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \quad x, y \sim N$$

2. המדגם מזווג.

$$\text{נוסחת רווח הסמך: } \bar{D} \pm t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש: $df = n - 1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.

מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב' :

82	75	90	68	74	סמסטר א'
100	76	87	84	80	סמסטר ב'

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
- ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2) $-0.013 < \mu < 0.185$.

הסקה סטטיסטית

פרק 7 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

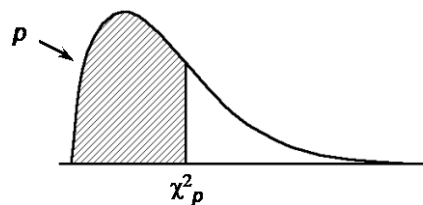
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן 69

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

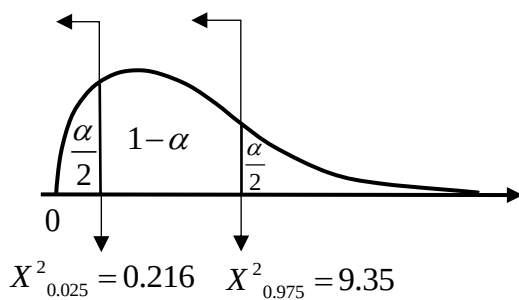
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1-\alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

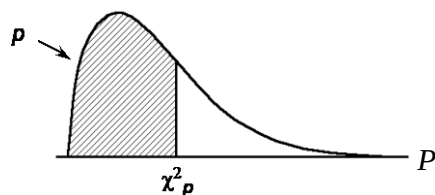
(1) $8.4 < \sigma^2 < 194.2$

(2) א. $30.285 < \mu < 31.315$ ב. $0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

(4) א. $68.75 < \mu < 82.15$ ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

הסקה סטטיסטית

פרק 8 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 74

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנות ב- H_0 .

2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- H_1 .

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0 : התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1 : התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה. המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו :

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון : להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני : להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות) :

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2 :

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון :

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה :

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס) או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית). כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל ההחלטה הבא : אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' H_1 .

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

שאלות:

- (1) אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?
- (2) ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון. ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון. הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?
- (3) יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k) = \frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,\dots,n$. נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X : $H_0: n=4$, $H_1: n=6$. כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X > 3$. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?
- (4) איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:
- | מפעל / איכות | מצוין | טוב | בינוני | ירוד |
|--------------|-------|-----|--------|------|
| "היוצר" | 0.6 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| "שמשון" | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
- בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).
- א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בינוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!
- (5) במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?
- ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

(6) להלן השערות:

$H_0: X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1: X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?

ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

(7)

במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?

ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?

i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.

ii. מצב חירום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.

iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

(8)

במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?

ב. מהי העוצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

- (9)** זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".
- א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?
- ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?
- ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

- (10)** ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120. מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.
- א. מהי רמת המובהקות של המחקר?
- ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?
- ג. כיצד התשובות לסעיף א' ו' ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

- (11)** קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.
- א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?
- ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

- (12)** מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

13 מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכוניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשמו את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה?

ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה, אם כיום קצב כניסת המכוניות לחניון גדל ל-4 מכוניות בדקה?

14 עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת הגעתו. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (בדקות), X , הוא משתנה אחיד $U(0, 60)$. עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות X היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות.

לבדיקת טענת המנהל (H_0) כנגד טענת עודד (H_1), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד. מוצאים שני ככלי הכרעה:

כלל 1: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.

חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?

תשובות סופיות:

- (1) ראה סרטון וידאו.
- (2) $\beta = \frac{2}{5}$, $\alpha = \frac{1}{3}$
- (3) $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$
- (4) א. $\beta = 0.8$, $\alpha = 0.2$ ב. $\beta = 0.3$, $\alpha = 0.2$ ג. כלל ב'.
- (5) א. השערות: H_0 - מטבע תקין. H_1 - מטבע לא תקין. ב. 0.00781250 ג. 0.1678
- (6) א. 0.05 ב. 0.022
- (7) א. 0.0228 ב. 0.0918 ג. 0.9082 ד. i. α, β יקטנו. ii. α לא משתנה, β קטנה.
- (8) א. 0.055 ב. 0.383
- (9) א. 0.0188 ב. טעות מסוג I ג. 0.8944 ד. העוצמה תגדל.
- (10) א. 0.2981 ב. 0.3974 ג. קטן.
- (11) א. 0.0113 ב. 0.0495
- (12) חוקר א'.
- (13) א. ראה סרטון וידאו. ב. 0.1428 ג. 0.566
- (14) להלן טבלת טעויות, ממנה ניתן להסיק שכלל 2 עדיף.

כלל	α	β
1	$\frac{1}{3}$	0.865
2	$\frac{1}{3}$	0.368

הסקה סטטיסטית

פרק 9 - הלמה של ניימן פירסון

תוכן העניינים

1. כללי 81

הלמה של ניימן פירסון:

רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור α נתונה. הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

נגדיר את יחס הנראות: $x_1, x_2, \dots, x_n$ - תוצאות הניסוי.

ההשערות: $H_0: x_i \sim p_0$, $H_1: x_i \sim p_1$.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה H_1 יותר סבירה מ- H_0 .

עבור משתנים שמתפלגים בדיד:

שלב א: עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את הסיכויים באופן הבא: $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

ומקבלים את יחס הנראות.

שלב ג: מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

שלב ד: מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת. צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על ה- α הרצויה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.15	0.25	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

עבור משתנים שמתפלגים רציף:

שלב א: בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)} : \text{שלב ב: מחלקים את שלב א באופן הבא}$$

ומקבלים את פונקציית יחס הנראות.

שלב ג: מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

שלב ד: לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה ה- α שנקבעה מראש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$X \sim \exp(\lambda) : \text{נתון}$$

$$H_0: \lambda = 1, H_1: \lambda = 2 : \text{ההשערות הן}$$

מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.

שאלות:

- (1) איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד	פסול
"היוצר"	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4	0

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

- א. חשבו את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.
 ב. צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.

ג. מהי עוצמת המבחן שיצרת בסעיף הקודם?

- (2) מטבע הוטל 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש. נסמן ב- p את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש.

ההשערות הן: $H_0: p = 0.5$, $H_1: p = 0.25$.

מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית. מהי העוצמה?

- (3) בכד א' 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב' 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים. אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבונן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל. יש לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א' (השערת האפס) או מכד ב' (השערה אלטרנטיבית).
 א. בנו כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.
 ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?
 ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

- (4) בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית) של המפתחות לצרור.
 מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.

(5) מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה. לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות ליממה: 3, 3, 0, 1.

- נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם: $\alpha \leq 0.1$.
- מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת? פתרו על סמך המבחן של סעיף א'.

(6) התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית. בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות.

- רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.
- מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס?
- מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.
- בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות?

(7) יהי X תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x + 1 - \theta & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ההשערות הן: $H_0: \theta = 0$, $H_1: \theta = 1$.

- הוכיחו שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות α יהיה: $C = \{X > 1 - \alpha\}$.

- הוכיחו שהעוצמה של המבחן שנמצאה היא: $2\alpha - \alpha^2$.
- מצאו את כלל ההכרעה והעוצמה עבור: $\alpha = 0.05$.

(8) מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב- X את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין, ההתפלגות היא מעריכית: $f_0(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$.

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא: $f_1(x) = \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x}$.
כאשר מדובר באותו פרמטר λ .

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו- $\lambda = 1$.

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של X .

(9) יהי $X_1, \dots, X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{1-\theta x} & x \geq \frac{1}{\theta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{פרמטר חיובי}$$

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית לבדיקת ההשערות: $H_0: \theta = 1$

כנגד: $H_1: \theta = 2$, על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל-3 במקום 2.

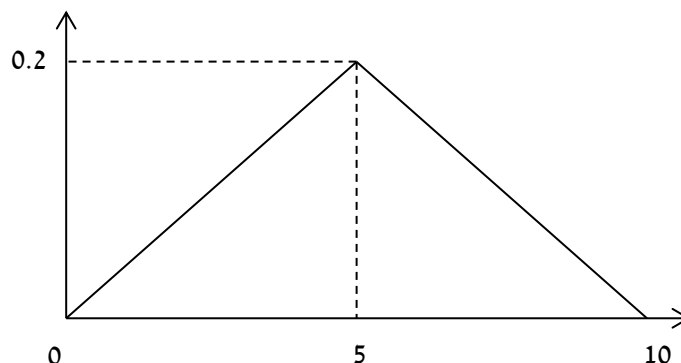
בחרו בתשובה הנכונה ונמקו:

i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ii. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

iii. יש לחשב כדי להחליט.

(10) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנשמנה ב- $f_1(x)$:



$$f_0(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כמו כן נתון ש:}$$

- א. עבור השערות: $H_0: f = f_0$ כנגד: $H_1: f = f_1$, מצאו את צורת אזור הדחיה של מבחן בעל עוצמה מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.
- ב. בהינתן: $\alpha = 0.05$, מצאו את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

(11) X הוא משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20.

$$\text{להלן השערות מחקר: } H_1: f(X) = \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{4(1-e^{-5})} \quad , \quad H_0: X \sim U(0,20)$$

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות.

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. ראה סרטון. ג. 0.7.

המפעל	ירוד	בינוני	טוב	מצוין	פסול
H_0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2
H_1	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\gamma(x)$	4	3	1	0.25	0

(2) $C = \{X = 0\}$, עוצמה $\frac{27}{64}$.

(3) א. $C = \{X = 4\}$. ב. 0.0256. ג. 0.9487.

(4) $C = \{X = 1 \text{ or } X \geq 6\}$.

(5) א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב-4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות. ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני). ג. 0.5471.

(6) א. H_0 : התוחלת של זמן ההמתנה 5 דקות.

H_1 : התוחלת של זמן המתנה 10 דקות.

פונקציית יחס הנראות: $0.5e^{0.1x}$.

ב. $c = \{x \geq k\}$. ג. $c = \{x \geq 14.98\}$. ד. 0.776.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $c = \{x > 0.95\}$, 0.0975.

(8) א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין. ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר, רושם אחד כן ואחד לא.

ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה מאינסוף ועד ערך k מסוים.

ג. נדחה את השערת האפס אם: $x > 2.996$. ד. $x_1 \cdot x_2 > k$.

(9) א. נדחה את H_0 עבור: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1.0513$. ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668.

ג. i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

(10) א. $c = \{|x - 5| \leq a\}$. ב. $c = \{4.75 \leq x \leq 5.25\}$.

(11) כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם: $\bar{D} \leq 9.26$.

הסקה סטטיסטית

פרק 10 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

88	1. הקדמה
92	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

	הכרעה		
		H_0	H_1
	מצאות	H_0	H_1
		אין טעות	טעות מסוג 1
		טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמצאות H_0 נכונה.
טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמצאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- רשמו את השערות המחקר.
 - מה מסקנת המחקר?
 - איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 - מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- מהי אוכלוסיית המחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר הנחקר?
 - מה השערות המחקר?
 - מה מסקנת המחקר?
 - מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.

הסקה סטטיסטית

פרק 11 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה) 94
2. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה) 100
3. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) 103
4. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה 108
5. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) 112

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות 1	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ נכונה})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לקבל את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ נכונה})$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לקבל את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ נכונה})$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ נכונה})$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β :	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

התקנון:

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07 \text{ שקלים}$$

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:
 $H_0: \mu_0 = 200$
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1} \left(\overset{\text{לקבל את}}{H_0} \right) = P_{H_1} (\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

(1) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$.

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$. מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50

מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

- א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- (5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$. מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
 - ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
 - i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
 - ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- (6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - ב. העוצמה של המבחן גדלה.
 - ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.
- (7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
 - ב. השערת האפס נדחתה.
 - ג. השערת האפס לא נדחתה.
 - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- (8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	α
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- (9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- א. הן α , והן $1 - \beta$, יקטנו.
 - ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1 - \beta$ יגדל.
 - ג. α יגדל ואילו $1 - \beta$ יקטן.
 - ד. הן α והן $1 - \beta$ יגדלו.

- (10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.
ג. דחינו את H_0 , תתכן טעות מסוג ראשון.
- (2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0 ג. 1.
- (3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.
- (4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- (5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.
ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- (6) ד'.
- (7) ג'.
- (8) ג'.
- (9) א'.
- (10) ב'.

קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$.

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β .

$$\text{הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: } n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

דוגמה:

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80. נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 17$. כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

האוכלוסייה: ילדי גן חובה.

המשתנה: $X =$ ציון במבחן אוצר מילים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 70$
 $H_1: \mu = 80$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 17^2)$$

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל-80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1 - \beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

$$n \geq \left(\frac{(1.645 + 1.282) \times 17}{70 - 80} \right)^2 = 24.76 \quad \text{נציב:}$$

$$\text{לכן, } n_{\min} = 25.$$

שאלות:

- (1) במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?
- (2) משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).
- (3) השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$. כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β . הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה:
- $$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

תשובות סופיות:

- (1) 41.
- (2) 78.
- (3) שאלת הוכחה.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$, דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

שערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
1. σ ידועה		תנאים:	
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		p-value	
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

כאשר בהנחת השערת האפס: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה: X = משקל בק"ג.

פרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 65$
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 12$.

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$. המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100$, $\bar{x} = 74$. מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
 - א. רשמו את השערות המחקר.
 - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
 - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
 - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
 - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

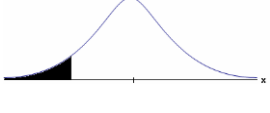
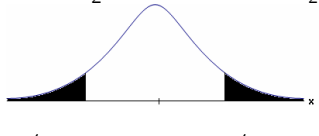
- (6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
 - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
 - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\text{ value} = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א. $H_0: \mu = 100$
 $H_1: \mu < 100$. ב. 0.1056 . ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 . ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

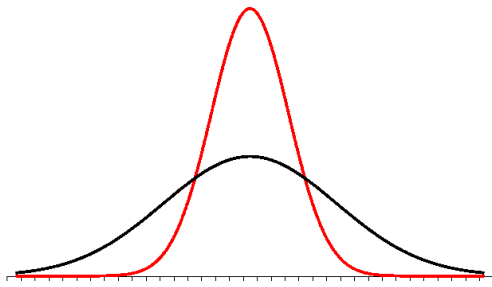
בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0
חלופה לכלל ההכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$. t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$. S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n - 1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$. $H_1: \mu < \mu_0$. חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) נקבל H_0 .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$			תנאים:
$P_{H_0} \left(\bar{X} \geq \bar{x} \right)$	$P_{H_0} \left(\bar{X} \leq \bar{x} \right)$	אם $2 \cdot P_{H_0} \left(\bar{X} \geq \bar{x} \right) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0} \left(\bar{X} \leq \bar{x} \right) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה: X = זמן נסיעה בדקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ .

א. השערות:
 $H_0: \mu = 40$
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = (\bar{X} \leq 32.6) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0 .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{א. } H_0: \mu = 1000 \\ H_1: \mu \neq 1000 \\ \text{ב. } 20\% \leq P_v \leq 50\% \end{array}$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את H_0 .

הסקה סטטיסטית

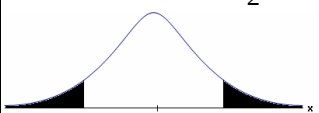
פרק 12 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות..... 115
2. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 119

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
מדגמים בלתי תלויים σ_1, σ_2 ידועות $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים			תנאים:
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

התקנון:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

שאלות

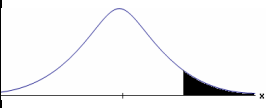
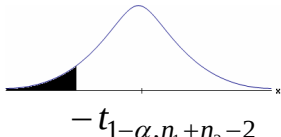
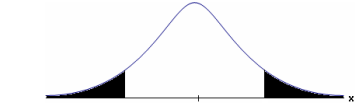
- (1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- (2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
- (3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
 - א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.
 - ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו-40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.
 - א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
 - ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

תשובות סופיות

- (1) נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה את H_0 .
- (3) א. 0 ב. נדחה את H_0 .
- (4) א. נדחה את H_0 , אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.
ב. 0.6331

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$
1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{השונות המשוקללת:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה

לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

100W	60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{X}$
72	80	S
15	13	n

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
 2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
- נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את H_0 .

הסקה סטטיסטית

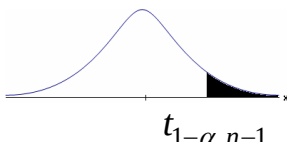
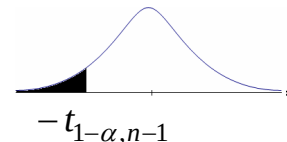
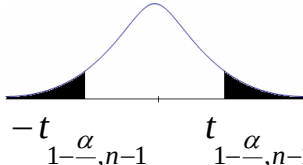
פרק 13 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים.....123

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. $0.25 \leq p \leq 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0 .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

הסקה סטטיסטית

פרק 14 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 127

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1 - \mu_2$:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1 - \alpha$ ל- $\mu_1 - \mu_2$:

אם C נופל ברווח $\leftarrow$ נקבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח $\leftarrow$ נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha = 5\%$, $H_0 : \mu_D = 80$, $H_1 : \mu_D \neq 80$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78 < \mu_D < 83$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

שאלות

(1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.

להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

סמסטר א'	סמסטר ב'
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

(2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה :

(3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
 - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
 - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

תשובות סופיות

- (1) א. $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א. $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג'.
- (4) א'.

הסקה סטטיסטית

פרק 15 - בדיקת השערות על שונויות

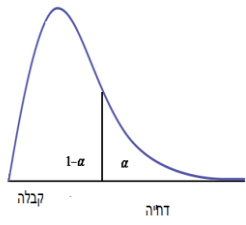
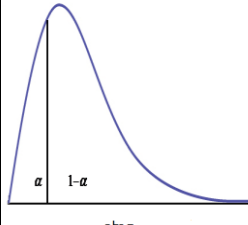
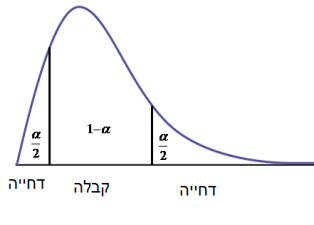
תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן 130

בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

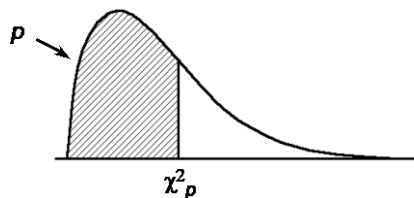
בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
תנאים:	$X \sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ או $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

התפלגות חי בריבוע:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)} \quad \text{אם } X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע, מתקיים ש:}$$



התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם μ אינו ידוע, אז: $d.f = n - 1$.

דוגמה:

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 15$. מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420 \quad \text{במדגם של 20 ישראלים התקבל:}$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן I.Q.

המשתנה: $X = \text{ציון I.Q.}$

פרמטר: σ^2

השערות: $H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$

$H_1: \sigma^2 \neq 225$

הנחה: $X \sim N$

כלל הכרעה: $d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19$

נדחה את H_0 אם $X^2 > 32.9$ או $X^2 < 8.91$

תוצאות המדגם: $n = 20$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

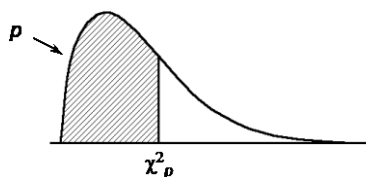
$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את H_0 , לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q.

שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha = 5\%$)

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p



df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות:

(1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלי. החברה החליפה את מכוונת האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארו. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):
1008, 1024, 1005, 996, 997.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלי עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 110, 90, 72, 50, 38.

- א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?
- ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?
- ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?
- ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

(3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלי עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

(4) השערות המחקר הן: $H_1: \sigma^2 > 100$ $H_0: \sigma^2 = 100$
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.
א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma_1^2 = 150$?
ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

(5) השערות המחקר הן: $H_1: \sigma < 2$, $H_0: \sigma = 2$.
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.
תנו הערכה למובהקות התוצאה.

תשובות סופיות:

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) א. נדחה את H_0 .
ב. לא תשתנה.
ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.
- (3) א. נדחה את H_0 .
ב. לא נדחה את H_0 .
- (4) א. בין 25% ל-50%.
ב. 405.3.
- (5) $0 < P_V < 0.005$.

הסקה סטטיסטית

פרק 16 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות.....135
2. שאלות רב ברירה (אמריקאיות).....137

שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

שאלות

- (1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 520$, $H_1: \mu > 520$. כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$. חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha = 0.05$. חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X} > 522$.

- למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?
- מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1 = 525$?
- הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1 = 525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'?
- חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X} = 523$. מהי מסקנתו?

- (2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5. דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב-49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.
- מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום)?
 - אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייקים" שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

מוצר / רשת	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

- (3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:
- הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
- אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.
- בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.
 - חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

(4) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

180	140	171	189	156	176	סטודנטים באוניברסיטאות
150	204	186	191	190	180	סטודנטים במכללות

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

(5) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_0: \mu = 40$, $H_1: \mu > 40$.

נדגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$.

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$.

תשובות סופיות

(1) א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה H_0 .

(2) א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.

(3) א. לא נדחה H_0 . ב. לא נדחה H_0 .

(4) א. לא נדחה H_0 . ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה H_0 .

(5) א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(3) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $X - Y$)

68	82	93	69	לפני הנישואין - X
71	84	88	80	לאחר הנישואין - Y

- $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$
- $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

(4) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(5) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(6) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(7) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

68	82	93	69	לפני הנישואין
71	84	88	80	לאחר הנישואין

באיזה התפלגות משתמשים לבדיקת ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- (8) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- (9) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- (10) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

- 11)** שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה. חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?
- אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
 - אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
 - אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
 - אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.
- 12)** ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?
- תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
 - ממוצע ציוני העולים במדגם.
 - תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
 - ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.
- 13)** חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?
- החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.
 - החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.
 - החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.
 - המדגם של החוקר שייד בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .
- 14)** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

15 שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:

- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
- עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

16 במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?

- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
- הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
- הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

17 חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס הייתה לא נדחית.
- לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

18 ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z. רוני השתמש בטבלה של התפלגות T. מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
- אם רוני ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
- שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
- לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

(19) נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(20) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א ו-ב נכונות.

(21) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(22) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	α
א. גדולה	גדולה
ב. גדולה	קטנה
ג. קטנה	גדולה
ד. קטנה	קטנה

(23) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

- א. הן α , והן $(1 - \beta)$, יקטנו.
- ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.
- ג. α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.
- ד. הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

(24) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

(25) בבדיקת השערות התקבל ש- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה:

- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
- ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

(26) מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(27) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p\text{ value} = 0.0254$, לכן:

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

(28) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

- (29) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$. חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

- (30) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:
- א. 9
 - ב. 19
 - ג. 18
 - ד. 8

- (31) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

- נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 - ב. מבחן T למדגם יחיד.
 - ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - ד. מבחן T למדגמים מזווגים.
- (32) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 - ב. מבחן T למדגם יחיד.
 - ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(33) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

(34) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$,

- ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
 - שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

(35) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפללים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$. רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

(36) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- לא נדחה את H_0 אף פעם.
- לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- כל התשובות לא נכונות.

37) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$.

לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_x = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

38) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- 0.005
- 0.03
- 0.0287
- 0.05

39) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי במצאות השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:

- יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).
- תגדל רמת הביטחון ($1 - \alpha$).
- אף תשובה לא נכונה.
- כל התשובות נכונות.

40) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- $POWER + \alpha + \beta = 1$
- $POWER = 0.5 - \beta$
- $POWER + \alpha = 1$
- $\beta + \alpha = 1$
- הכול לא נכון.

- 41) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?
- היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
 - בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
 - היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
 - אף תשובה אינה נכונה.
- 42) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?
- ההשערה תדחה.
 - ההשערה לא תדחה.
 - התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
 - לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.
- 43) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:
- א. אפס
 - ב. חיובי
 - ג. שלילי
 - ד. לא ניתן לדעת
- 44) עוצמה שווה ל-1 פרושה:
- א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
 - ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
 - ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- 45) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T למדגמים מזווגים?
- א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
 - ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
 - ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
 - ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

- 46** לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0: \mu \geq 10$, $H_1: \mu < 10$. נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$ אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:
- ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
 - מקבלים את השערת האפס.
 - דוחים את השערת האפס.
 - לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

- 47** לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$. נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:
- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
 - עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
 - עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.
- שלושת הטענות אינן נכונות.
 - טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
 - טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
 - טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א	25	א
2	ד	26	א
3	א	27	ג
4	ג	28	ד
5	ג	29	א
6	א	30	א
7	ב	31	ד
8	ג	32	ג
9	א	33	א
10	א	34	ג
11	א	35	א
12	א	36	ג
13	א	37	א
14	א	38	א
15	ג	39	א
16	א	40	ה
17	ג	41	ד
18	ב	42	ד
19	ג	43	א
20	ד	44	ד
21	ג	45	ג
22	ג	46	ב
23	א	47	ד
24	ב		

הסקה סטטיסטית

פרק 17 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

150	1. מבחן טיב התאמה
155	2. מבחן לאי תלות

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

מבנה המבחן:

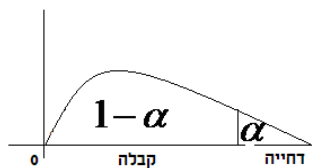
השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0 .

אחרת - H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K - 1$, כאשר K - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$, דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

O_i - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה i .

p_i - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה i בהנחת השערת האפס.

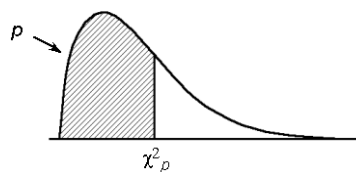
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C. לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים. בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C. האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (3) משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.
- א. על סמך תוצאות המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשדרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.
- (4) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
- 18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.
- א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.
- ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.
- ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2 ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?

- (5) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.

להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

מספר הטלות	סכום התוצאות
20	2-5
17	6-8
20	9-10
15	11-12

- (6) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

3 ומעלה	2	1	0	מספר הסוללות הפגומות
8	12	104	276	שכיחות

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

- (7) מטילים מטבע עד שלראשונה מתקבל "ראש". חוזרים על התהליך 120 פעמים. נסמן ב- X את מספר ההטלות עד קבלת הראש. להלן התוצאות שהתקבלו:

x	1	2	3	4	5	6
מספר החזרות על התהליך	54	20	16	22	6	2

- א. בהנחה והמטבע הוגן, מהי ההתפלגות של X ?
- ב. בדקו האם המטבע הוגן, על סמך תוצאות המדגם ברמת מובהקות של 5%.

- (8) להלן השערות מחקר: $H_1: \text{else}$, $H_0: X \sim N(40, 2^2)$.

X	מתחת 36	36-40	40-44	מעל 44
מספר הדגימות	3A	50A	45A	2A

תוצאות המדגם הן:

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. לא נדחה H_0 . ב. $(0.14, 0.25)$.
- (4) א. לא נדחה H_0 . ב. בין 0.95 ל-0.975.
- ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.
- (5) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.
- (6) 0.005.
- (7) א. $X \sim G(0.5)$. ב. נסיק שהמטבע לא הוגן.
- (8) 14.

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים H_0 .

יש תלות בין המשתנים H_1 .

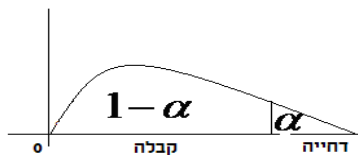
כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f = (r-1)(c-1)$. כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות. c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:



O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

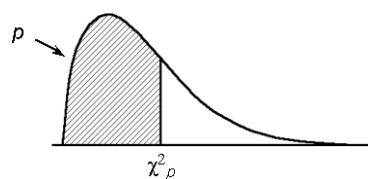
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p 

df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- (1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

- (2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

לילה	ערב	יום	
70	60	50	פגומים
800	700	600	תקינים

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

- (3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

- (4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע. להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינמלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

	מפלגה א	מפלגה ב	מפלגות אחרות	סה"כ
שבוע שעבר				
השבוע	143		253	550
סה"כ	243	314		1050

- (5) בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B:

מספר פריטים / צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
חנות A	15	20	15	50
חנות B	60	20	10	20

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 1:1:1:3 לטובת הכחול.
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

- (6) סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס. הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

- (7) להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200					X_1
200					X_2
	160	120	60	60	$f(y)$

- מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

- (1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.
 (2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.
 (3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.
 (4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223, 0.297)
 (5) א. נסיק שהתפלגות הצבעים בחנות היא כמו שמצוין.
 ב. נסיק שיש הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים.
 (6) נכון
 (7) להלן טבלה:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200	80	60	30	30	X_1
200	-8	60	30	30	X_2
400	160	120	60	60	$f(y)$

הסקה סטטיסטית

פרק 18 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 160

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ של k אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$\bar{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון, $\dots, \bar{X}_k$ - ממוצע המדגם ה- k .
 $\bar{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית $H_0 : 1-\alpha : F_{(k-1, n-k)}$

שאלות

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.

"הס"	"רביץ"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- מלאו את טבלת ANOVA.
- רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

- רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

(4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

(5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

(6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

ANOVA						Tukey HSD ^a			
pulse						pulse			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

 pulse
 Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000 [*]	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000 [*]	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000 [*]	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000 [*]	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- (8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :
- כמה בתי ספר יש בעיר?
 - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
 - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
 - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe^a

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$g. \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$$

ד. להלן טבלה :

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

(3) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 $H_1 : otherwise$
 ב. נדחה את H_0 .
 ג. כן.

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7) \quad \text{א.}$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\text{ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. } \mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} .$$

$$(8) \quad \text{א. 5 ב. 25}$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$\text{ד. } (\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) .$$