הסקה סטטיסטית 30204

תוכן העניינים

1. הסקה סטטיסטית - הקדמה 1
2. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי 4
3. אי שוויונים בהסתברות 24
4. מושגי יסוד באמידה 28
5. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) 33
6. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים 44
7. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) 50
8. רווח סמך לפרופורציה 77
9. בדיקת השערות על פרופורציה 83
10. רווח סמך להפרש פרופורציות 96
11. בדיקת השערות על הפרש פרופורציות 98
12. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים 102
13. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים 106
14. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 114
15. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים 116
16. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 120
17. רווח סמך לשונות וסטיית תקן 123
18. בדיקת השערות על שונויות 128
19. שאלות מסכמות על רווחי סמך 138
20. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 141
21. שאלות מסכמות בבדיקת השערות 147
22. מבחני חי בריבוע 151
23. מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד 157

תוכן העניינים

24. מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים. 167
25. מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים 193
26. מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו 206
27. רגרסיה. 225
28. ניתוח שונות חד כיוונית. 228
29. ניתוח שונות דו כיווני 237

הסקה סטטיסטית 30204

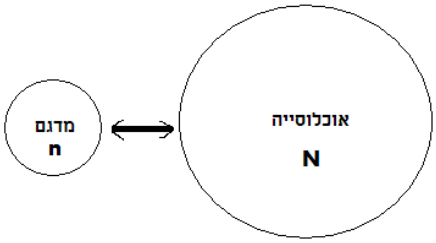
פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי 1

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:



אוכלוסייה:
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

	סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)
ממוצע	$\overline{X}$	μ
פרופורציה (שכיחות יחסית)	$\hat{p}$	P

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N=1000$	

3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי 12
3. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית 15
4. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם 20

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?
ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n \geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מיהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?

ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

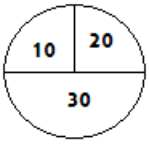
א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס׳ הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה״כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס״מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס״מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס״מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

14) נתון ש-$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X} > \mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת: μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש-$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

19) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "בציר" במשך היום מתפלג פואסונית עם קצב של מכונית אחת לדקה. שומר מסר נתונים על מספר המכוניות שנכנסות בכל שעה לגבי 40 שעות שאסף נתונים.
מה ההסתברות שממוצע מספר המכוניות שנכנסו לחניון לשעה בשעות אלה יהיה לפחות 63?

20) הוכיחו שאם משתנה מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2, ומבצעים מדגם בגודל n של תצפיות בלתי תלויות מהמשתנה, אזי מתקיימות התכונות הבאות לגבי ממוצע המדגם: $E(\bar{x})=\mu$ ו- $V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma^2_{\bar{x}} = 0.2369$, $\sigma(\overline{X}) = 0.486$

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma(\overline{X}) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

8) א. 0.5468. ב. 0.6826.

9) א. להלן טבלה:

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.

ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75. ד. 0.8997.

10) 0.0475.

11) 0.1814.

12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

13) 0.5.

14) ב'.

15) ד'.

16) ג'.

17) א. 2.429. ב. 0.25.

18) 0.6826.

19) 0.0071.

20) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: $X_1,\ldots,X_n$ -

משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי:

התוחלת והשונות של סכום התצפיות: $E(T)=n\mu$, $V(T)=n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי: $Z=\frac{T-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T\sim N(n\mu,n\sigma^2)$.

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $V(X)=\sigma^2$, $E(X)=\mu,$

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T\sim\succ N(n\mu,n\sigma^2)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪.
נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.

1. מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
2. מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.

א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?

ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?

ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?

2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.

א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?

ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?

3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.

א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?

ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

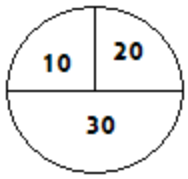
נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תלויות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).

א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?

ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?

ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

תשובות סופיות:

1) א. 0.6915. ב. 0.8413. ג. 0.5 .

2) א. תוחלת 3000 מ״ל, סטיית תקן 40 מ״ל. ב. 0.0062.

ג. סעיף א׳ - לא משתנה, סעיף ב׳ - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.

3) א. 0.0571. ב. 2036.8.

4) א. 0.883. ב. 0.7949.

5) א. 0.8997. ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).
את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y.
מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.

תצפית
הצלחה כשלון

כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).
הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר: $q=1-p$.
מבצעים מדגם אקראי בגודל n: $Y \sim B(n,p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y)=np$.

שונות: $V(y)=npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n,p)$, ומתקיים ש:

1. $n \cdot p \geq 5$.
2. $n \cdot (1-p) \geq 5$.

$$y \sim\succ N(np, npq)$$

אז: $Z_y = \frac{y-np}{\sqrt{npq}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות.
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים:

1. $p(Y=a) \cong p\left(a-\frac{1}{2} \le Y \le a+\frac{1}{2}\right)$.
2. $P(Y \le a) \cong P(Y \le a+0.5)$.
3. $P(Y \ge a) \cong P(Y \ge a-0.5)$.

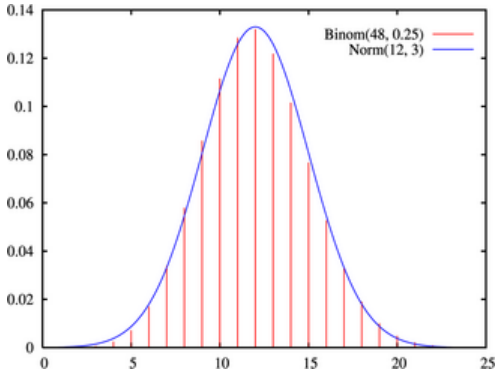
הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n \cdot p \ge 5$.
  2. $n \cdot (1-p) \ge 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n \cdot p \ge 10$.
  2. $n \cdot (1-p) \ge 10$.
- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \ge 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (הפתרון בהקלטה):
נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
   א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
   ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
   ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
   א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
   ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?

4) מטילים מטבע 50 פעמים.
   א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
   ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
   א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
   ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?

7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.201. ב. 0.3758. ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.

2) א. 0.9332. ב. 0.6915.

3) 0.1611.

4) א. 0.9406. ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.

5) א. 0.015. ב. 398.

6) 0.9996.

7) 0.8643.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ - פרופורציית ההצלחות במדגם.

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n=200$:
מספר המובטלים: $Y=20$.
פרופורציית המובטלים במדגם: $\hat{p}=\frac{20}{200}=0.1$.

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$E(\hat{p})=p \;,\; V(\hat{P})=\frac{pq}{n}$.

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

אם: $np\ge 5 \,\&\, nq\ge 5$, אזי: $\hat{p}\sim N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$. $Z_{\hat{p}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$.

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
  התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n\cdot p\ge 5$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 5$.
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n\cdot p\ge 10$.
  2. $n\cdot(1-p)\ge 10$.
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n\ge 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית $(\hat{p})$ של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים.
נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.

א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?

ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ב. לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.

א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?

ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמאטרפון?

ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.

א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?

ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?

ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?

ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100.
ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי.
מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נתון ש- $X \sim B(n,p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $V(\hat{P}) = \frac{P(1-P)}{n}$, $E(\hat{P}) = p$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.

2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.

3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.

4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 481. ד. 0.77436.

5) 0.0154.

6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 3 - אי שוויונים בהסתברות

תוכן העניינים

1. אי שוויון צ'בישב..... 24

אי-שוויון צ'בישב:

רקע:

אם X הוא משתנה מקרי שתוחלתו ושונותו הן סופיות, אז לכל ערך a חיובי מתקיים: $P\{|X-E(X)|\geq a\}\leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

מכאן גם נובע שמתקיים: $P\{|X-E(X)|< a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$.

אי-שוויון צ'בישב נותן חסמים להסתברות סימטרית סביב התוחלת ללא צורך בידיעת ההתפלגות של המשתנה המקרי X.

דוגמה:

נתון משתנה מקרי עם סטיית תקן של 3. האם יתכן שההסתברות שהסטייה של המשתנה המקרי מתוחלתו תהיה קטנה מ-5 היא 0.6?

$$\sigma(X)=3$$

$P\{|X-E(X)|< a\}\geq 1-\frac{Var(X)}{a^2}$, **נציב**:

$$P\{|X-E(X)|<5\}\geq 1-\frac{3^2}{5^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=0.64$$

$P\{|X-E(X)|<5\}\neq 0.6$, לכן לא יתכן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מצאו חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3:

א. $p(2<x<14)$.

ב. $p(|x-8|\geq 9)$.

2) האם קיים משתנה מקרי X בעל תוחלת μ וסטית תקן σ שעבורו מתקיים $P(\mu-3\sigma\leq X\leq \mu+3\sigma)=0.7$? הסבירו.

3) מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב-20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100. היעזרו באי-שוויון צ'בישב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

4) מטילים מטבע 120 פעמים. מה ניתן להגיד על הסיכוי שהתוצאה עץ תתקבל בין 50 ל-70 פעמים לפי אי-שוויון צ'בישב?

5) מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

6) אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40%. נלקח מדגם מקרי בגודל 200. תנו חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל-45%.

7) בוחרים קוד n ספרתי באופן מקרי.

א. עבור $n=10$, העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) בעיר מסוימת ל-5% מהמשפחות אין מכונית, ל-20% יש מכונית אחת, ל-35% יש שתי מכוניות, ל-30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות.
נניח שמספר המשפחות בעיר גדול מאד.
העריכו את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות אקראיות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27.

9) $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים גיאומטרית עם פרמטר p באופן בלתי תלוי זה בזה. $0 < p < 1$. הוכיחו שמתקיים: $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{2}{p}\right) \leq \frac{1-p}{n}$.

10) $X_1, X_2..., X_n$ הם משתנים מקיים המתפלגים פואסונית עם פרמטר $\lambda_i = i$, באופן בלתי תלוי זה בזה. נסמן את: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
הוכיחו שמתקיים: $P(|2T - n(n+1)| < 2n) \geq \frac{n-1}{2n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. בין $\frac{3}{4}$ ל-1. ב. בין 0 ל-$\frac{1}{9}$.

2) לא יתכן.

3) 0.75.

4) לפחות 0.7.

5) לפחות 30.

6) 0.52.

7) א. לכל היותר 0.825. ב. 294.

8) 0.7056.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 4 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 28

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ:

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x})=\mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- μ. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=SE$.

פרופורציה באוכלוסייה p:

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p}=\frac{y}{n}$.

$E(\hat{p})=p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- p. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P})=\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$.

שונות האוכלוסייה σ^2:

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2)=\sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו : 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו : $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר n קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2=64$. טעות התקן של האומד ל-μ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01.

2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100. ג. 2342 ד. 58.

3) א. 177.9 ב.64.1. ג.0.4.

4) א. 8.1 ב.3.16.

5) ד'.

6) ג'.

7) ד'.

8) ד'.

9) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 5 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 33
2. קביעת גודל מדגם 39
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 41

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \le \mu \le B)=1-\alpha$.
A - גבול התחתון של רווח הסמך.
B - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L=B-A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
   א. מי האוכלוסייה במחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
   ד. מה רווח הסמך לפרמטר?
   ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?
   ו. מה אורך רווח הסמך?
   ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
   א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
   ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
   ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
   א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
   ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
   ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
   ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

11) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $63 < \mu < 83$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות.

א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10.
כמה תצפיות עליו היה לדגום?

ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%.
בנו את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

12) נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד: $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$.
נרצה לאמוד את μ. מצאו רווח סמך ל- μ ברמת-בטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל: $\bar{x} = 74$.

(תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה: $Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. μ. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

2) $4920.6 < \mu < 4979.4$.

3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

4) א. $9284 < \mu > 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 ₪ בביטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

6) א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

8) ב'.

9) ג'.

10) ד'.

11) א. 160. ב. $61.13 < \mu < 84.87$.

12) 74 ± 0.084.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב בנוסחה הבאה: $n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$.

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12.
מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא.
מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.

א. כמה מתגייסים יש לדגום?

ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ.
מהו גודל המדגם הנדרש?

תשובות סופיות:

1) 780.

2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.

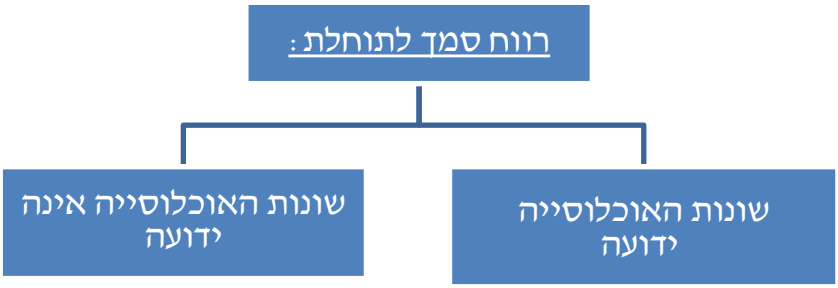
3) $n=62$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

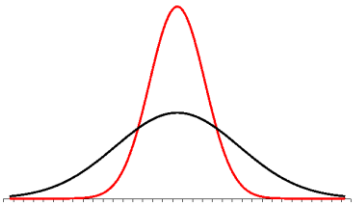


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



האומד לשונות: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$.

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.
התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.
ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.
כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמיתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x}=13.8$, $S=2$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.
ב. סטטיסטיקאי ב.
ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

תשובות סופיות:

1) א. $79.88 < \mu < 89.72$. ב. כן. ג. הוא היה גדל.

2) ראה בסרטון.

3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

4) א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90 < \mu < 107.10$. ג. ראה בסרטון.

5) $3.149 < \mu < 3.351$.

6) $13.42 < \mu < 14.18$.

7) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 6 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

1. הקדמה 44
2. סוגי טעויות 48

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנות ב- H_0.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**
קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α.

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:
$n=20$, $\overline{X}=3120$, $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $H_0: \mu = 72$
$H_1: \mu > 72$.

2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $H_0: \mu = 500$
$H_1: \mu < 500$.

3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $H_0: p = 0.25$
$H_1: p < 0.25$.

4) א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $H_0: p = 0.08$
$H_1: p \neq 0.08$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0: \mu = 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את H_0. ג. טעות מסוג שני.

2) א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

3) א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0: \mu = 2.3 \\ H_1: \mu < 2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את H_0. ו. טעות מסוג שני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

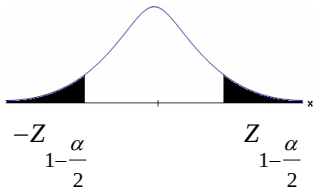
פרק 7 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה. 50
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה). 54
3. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה) 60
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) 63
5. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה. 68
6. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע). 72
7. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה). 74

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$ $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$ $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: X = יבול העגבניות בטון לעונה.

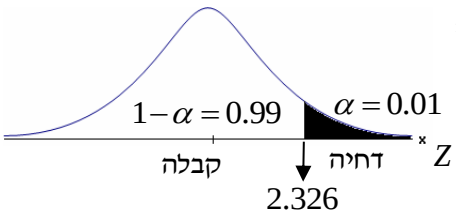
הפרמטר: μ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות: $H_0: \mu = 10$
$H_1: \mu > 10$.

תנאים:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

כלל הכרעה:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

נציב: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג.
יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

1) נקבל H_0, בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
2) א. נדחה H_0, בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.
3) נדחה H_0, בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
4) נדחה H_0, בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
5) נקבל H_0, בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
6) א'.
7) ג'.
8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$\alpha = P(\text{לדחות את } H_0 \mid \text{נכונה } H_0) = P_{H_0}(\text{לדחות } H_0)$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$\beta = P(\text{לקבל את } H_0 \mid \text{נכונה } H_1) = P_{H_1}(\text{לקבל } H_0)$.

רמת בטחון:

$(\alpha - 1) = P(\text{לקבל את } H_0 \mid \text{נכונה } H_0) = P_{H_0}(\text{לקבל } H_0)$.

עוצמה:

$(\beta - 1) = \pi = P(\text{לדחות את } H_0 \mid \text{נכונה } H_1) = P_{H_1}(\text{לדחות } H_0)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: **אזור הדחייה של H_0:**	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β:	$P_{H_1}\left(\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{H_1}\left(\bar{X}>\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{H_1}\left(\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

התקנון: $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ.

השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

תנאים:

1. $\mu = 200$.
2. $n = 36$.

$K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha = 0.05$$
$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

נציב: שקלים $K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$.

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$.

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\begin{matrix}\text{לקבל את} \\ H_0\end{matrix}\right) = P_{H_1}\left(\bar{X} > 178.07\right) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β.

שאלות:

1) נתון ש: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 1\right)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ: $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$.

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות.
במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$H_0: \mu = 200$, $H_1: \mu \neq 200$, $\sigma = 30$, $n = 225$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$.
מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?

i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.

ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

α	$1-\beta$
א. גדולה	גדולה
ב. גדולה	קטנה
ג. קטנה	גדולה
ד. קטנה	קטנה

9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן α, והן $1-\beta$, יקטנו.

ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1-\beta$ יגדל.

ג. α יגדל ואילו $1-\beta$ יקטן.

ד. הן α והן $1-\beta$ יגדלו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר.
מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.

ג. דחינו את H_0, תתכן טעות מסוג ראשון.

2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0. ג. 1.

3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.

4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.

5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.

ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.

6) ד'.

7) ג'.

8) ג'.

9) א'.

10) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_1:\mu=\mu_1$, $H_0:\mu=\mu_0$.

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

דוגמה:

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.
נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma=17$.
כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%.
כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

<u>האוכלוסייה</u>: ילדי גן חובה.

<u>המשתנה</u>: X = ציון במבחן אוצר מילים.

<u>הפרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix}H_0:\mu=70\\H_1:\mu=80\end{matrix}$.

$X\sim N\left(\mu,\sigma^2=17^2\right)$.

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$$n \geq \left(\frac{\left(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}\right) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1-\beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$
$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

נציב: $n \geq \left(\frac{(1.645+1.282) \times 17}{70-80} \right)^2 = 24.76$

לכן, $n_{\min} = 25$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95.
אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2) משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).

3) השערות המחקר הן: $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu=\mu_1$.
כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β. הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה: $n\geq\left(\frac{\left(Z_{1-\alpha}+Z_{1-\beta}\right)\times\sigma}{\mu_0-\mu_1}\right)^2$.

תשובות סופיות:

1) 41.
2) 78.
3) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v .

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את H_0 .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\ne\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: X = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 65 \\ H_1: \mu > 65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right) = P_{H_0}\left(\bar{X} \geq 71\right) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 74$, $n = 100$.
מהי מובהקות התוצאה?

2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.
ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 0.0228.

2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.

3) א. $\begin{matrix} H_0: \mu = 100 \\ H_1: \mu < 100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

4) א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

5) נכון.

6) א'.

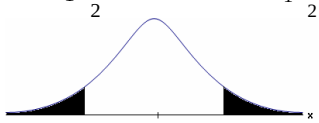
7) א'.

8) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

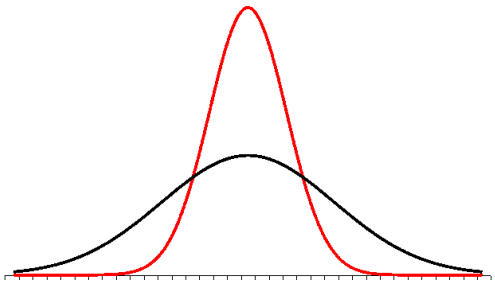
השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: **אזור הדחייה של H_0:**	$t_{\bar{x}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}}<-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}<-t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}>t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-t_{1-\alpha}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+t_{1-\alpha}^{n-1}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}{n-1}.$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ.
כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6) נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.

2) נדחה H_0.

3) נקבל H_0.

4) נקבל H_0.

5) ב'.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$.

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח ← נקבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח ← נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$H_0:\mu=80$, $H_1:\mu\neq 80$, $\alpha=5\%$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל : $79<\mu<84$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$.
החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו.
נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק.
האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.

3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

תשובות סופיות:

1) נקבל השערת.

2) א. $112.87 \le \mu \le 118.13$.

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

3) א. $191.8 \le \mu \le 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.
מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.
(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.
אם ההשערה היא דו צדדית:
(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \ne \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: X = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: μ.

א. <u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}$.

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n = 5 \ , \ \bar{X} \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \ldots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \ldots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = \left(\bar{X} \le 32.6\right) = P\left(t \le -3.39\right)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0.

<u>מסקנה</u>: בר״מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$, $\bar{x}=176.2$.
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

1) א. $H_0:\mu=1000$, $H_1:\mu\neq1000$. ב. $20\%\le P_v\le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

2) 10%.

3) 1.01, נקבל את H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 8 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

1. רווח הסמך לפרופורציה 77
2. קביעת גודל מדגם 80

רווח הסמך לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ (Y - מספר ההצלחות שבמדגם).

רווח הסמך ל- p : $\hat{p}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

האומד לטעות התקן: $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

מתקיים ש: $\hat{P}=\frac{A+B}{2}$, $L=2\varepsilon$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.

ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?

ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.

2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.

א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).

ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?

ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים: $0.08 < p < 0.18$.

א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?

5) במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.

א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.

ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?

6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $18.1\% < p < 29.9\%$.
ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
ג. $14,480 < \mu < 23,920$.

2) א. $0.545 \le p \le 0.655$. ב. האורך שלו היה קטן. ג. לא ניתן לדעת.

3) א. 52. ב. 0.997.

4) 0.925.

5) א. $30.9\% > p > 22.5\%$. ב. $60.72\% > p > 45.91\%$.

6) 200.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת:
החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$.
החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε
(או את אורך רווח הסמך).

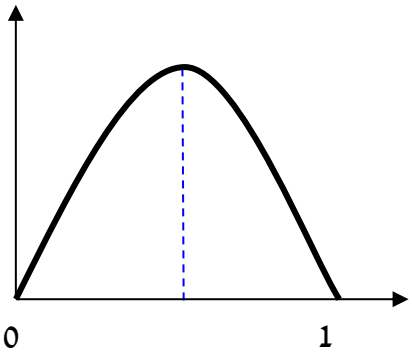
$L=2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.
ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד ($\hat{p}$).

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

נקבל ש: $n \geq \left(\frac{2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2$.

הבעיה שאין אנו יודעים את $\hat{p}$.
נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על $\hat{p}$ נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p}=0.5$.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right).$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?
ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה.
מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.

א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?

ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.

3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים.
המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.

א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?

ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?

ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.

ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?

5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.

א. כמה מחוסנים יש לדגום?

ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.

ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98%? מדוע הוא קטן מ-3%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 1068.

2) א. 423. ב. 271.

3) א. 601. ב. 108,000₪.

4) א. 335. ב. $0.367 < p < 0.473$.

ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.

5) א. 1509. ב. 0.15 ± 0.02 ג. ראה סרטון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

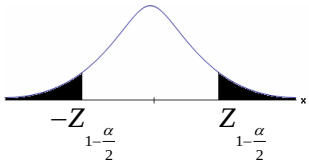
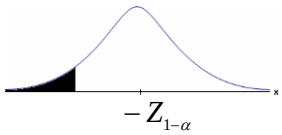
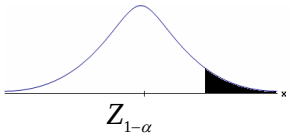
פרק 9 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

1. התהליך 83
2. סיכוי לטעויות ועוצמה 86
3. קביעת גודל מדגם 90
4. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית 92

התהליך:

רקע:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \,\&\, n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: **אזור הדחייה** **של** H_0:	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  -דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\hat{p}} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0:		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?

2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת.
לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק?
בדקו ברמת מובהקות של 10%.

3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ.
האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.

א. רשמו את ההשערות.

ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.

ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?

5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.

6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$.
חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0.
שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:

א. $\alpha_1 = \alpha_2$.

ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.

ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.

ד. המצב המתואר לא אפשרי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.

2) נדחה H_0.

3) נקבל H_0.

4) א. $\begin{matrix} H_0: p=0.2 \\ H_1: p\neq 0.2 \end{matrix}$. ב. נקבל H_0. ג. המסקנה לא תשתנה.

5) א. נדחה H_0. ב. המסקנה לא תשתנה.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$\alpha = P(\text{לדחות את } H_0 \mid \text{נכונה } H_0) = P_{H_0}(\text{לדחות } H_0)$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$\beta = P(\text{לקבל את } H_0 \mid \text{נכונה } H_1) = P_{H_1}(\text{לקבל } H_0)$.

רמת בטחון:

$(1-\alpha) = P(\text{לקבל את } H_0 \mid \text{נכונה } H_0) = P_{H_0}(\text{לקבל } H_0)$.

עוצמה:

$\pi = (1-\beta) = P(\text{לדחות את } H_0 \mid \text{נכונה } H_1) = P_{H_1}(\text{לדחות } H_0)$.

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \,\&\, n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: **אזור הדחייה** **של H_0:**	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חישוב β :
$P_{H_1}\left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$
$P_{H_1}\left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$
$P_{H_1}\left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$

כאשר: $\hat{P} \sim N\left(p\ ,\frac{p(1-p)}{n}\right)$.

והתקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.

א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.

ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?

ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?

ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?

2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?

3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.

א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים.
הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0: p=0.1 \\ H_1: p>0.1 \end{matrix}$. ב. 0.9015. ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.

2) 0.4404.

3) א. 0.1446 ב. תקטן.

4) חוקר א'.

5) ג'.

6) נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: p = p_0 \quad , \quad H_1: p = p_1$

מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: $n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש.
בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%.
לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%.
כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:

א. אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.

ב. אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.

2) מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42.
אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר.
כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

תשובות סופיות:

1) 891.

2) 224.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:
באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v.
את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.
המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:
לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \ne p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \ge 5 \,\&\, n(1-p_0) \ge 5$		
p-value	אם $\hat{p} > p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$ אם $\hat{p} < p_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$.

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?

ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?

ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?

ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?

3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.

4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-}value = 0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5% :
(בחרו בתשובה הנכונה)

א. יקבל את השערת האפס

ב. ידחה את השערת האפס.

ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה :
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p-value$ של 3%,
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
היינו מקבלים ערך $p-value$ של 6%".

6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה.
לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה.
מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.0455.

ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0.

ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0.

2) א. 0.0548. ב.0.0548. ג. מעל 0.0548.

ד. נכריע לטובת טענת המחקר.

3) $p_v = 0$, נדחה את H_0.

4) ב'.

5) הטענה נכונה.

6) 0.7486.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 10 - רווח סמך להפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. רווח סמך להפרש פרופורציות 96

רווח סמך להפרש פרופורציות:

רקע:

המטרה: לאמוד את $p_1 - p_2$: הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

התנאי לבניית רווח הסמך: כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

רווח סמך: $\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{n_2}}$.

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה X , מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה Y . מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת.
מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.

א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק .

2) במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר.
בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.

ב. האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?

3) נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית.
נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

תשובות סופיות:

1) א. $-4.9\% < P_F - P_M < 14.9\%$.

ב. $22.5\% < p < 31.8\%$.

2) א. $0.093 < P_A - P_B < 0.307$.

ב. כן.

3) $0.625 < p < 0.7754$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 11 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. כללי 98

בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

רקע

השערת האפס : **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$
תנאים:	1.מדגמים בלתי תלויים	2. מדגמים גדולים	
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של :	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ H_0 דוחים את -	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$ $-Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את -	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$ $Z_{1-\alpha}$ H_0 דוחים את -

סטטיסטי המבחן: $$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \underset{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

כאשר הפרופורציה המשוקללת : $$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	
$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$
$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n_2}}$	

התפלגות של $\hat{p}_1-\hat{p}_2$:

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2\sim N(p_1-p_2,\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2})$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\underset{H_0}{=}\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה.
נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה.
האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.
האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

2) אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה.
במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.

א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?

ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?

3) נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4) במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.

א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.

ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?

ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) לא נדחה את H_0.

2) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.

3) א. 0.0139 ב. נדחה H_0.

4) א. ראה סרטון. ב. נדחה H_0. ג. 0.8238
ד. תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 12 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה ידועות..... 102

2. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות..... 104

כששונויות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2{}_1$, $\sigma^2{}_2$ ידועות.
2. X_1 , $X_2 \sim N$ או $n_1, n_2 > 30$.
3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2{}_1}{n_1} + \frac{\sigma^2{}_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508.
בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?

2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.

ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?

3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25.
עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

1) (-20,90).

2) א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.

ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.

3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

השונות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S^2{}_p}{n_1} + \frac{S^2{}_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

	תל אביב	באר שבע
מספר האקדמאים	20	10
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

1) הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

2) $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

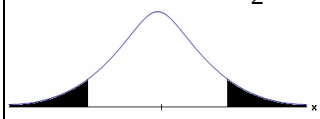
פרק 13 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות..... 106
2. כששוניויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 110

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות – רקע

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	מדגמים בלתי תלויים σ_1,σ_2 ידועות $X_1,X_2\sim N$ או מדגמים מספיק גדולים		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\alpha}$ $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\alpha}$ $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1-\bar{x}_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

התקנון: $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים.
מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע.
נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000₪ באוכלוסיית הגברים.
מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום.
בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.

2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות.
במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508.
במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.

א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?

ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה H_0.

2) לא נדחה את H_0.

3) א. 0 ב. נדחה את H_0.

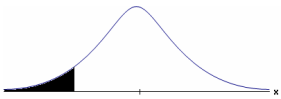
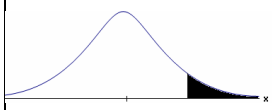
4) א. נדחה את H_0, אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותרמ-10.72 ס"מ.

ב. 0.6331

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית		
אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ $\quad t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{S_p^{\,2}}{n_1}+\frac{S_p^{\,2}}{n_2}}}$$

השונות המשוקללת: $$S_p^{\,2}=\frac{(n_1-1)S_1^{\,2}+(n_2-1)S_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

2012	120	112	95	130	90	94	120
2013	100	82	91	105	74	69	

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100.
אורך החיים נמדד בשעות.

הקבוצה	60W	100W
$\bar{x}$	1007	956
S	80	72
n	13	15

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה את H_0.

2) הנחות:

1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0.

3) א. נדחה את H_0. ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.

ג. לא נדחה את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 14 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 114

רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y.
ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $x, y \sim N$.
2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך: $\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n-1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מִצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

סמסטר א'	74	68	90	75	82
סמסטר ב'	80	84	87	76	100

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	**ארה"ב**	**קנדה**	**הולנד**	**פולין**	**מצרים**	**סין**	**יפן**
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה,
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

1) א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.

2) $-0.013 < \mu < 0.185$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

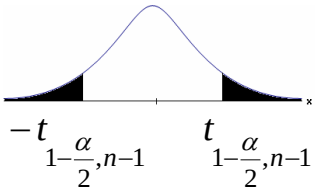
פרק 15 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים..... 116

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D \neq C$	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D < C$	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D > C$
תנאים:	1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$ $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$ $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ או $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$, $S_D{}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D^2{}_i - n\bar{D}^2}{n-1}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0.

4) ד'.

5) ד'.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 16 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 120

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1-\mu_2$:

$H_0:\mu_1-\mu_2=C, \qquad H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$.

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu_1-\mu_2$:

אם C נופל ברווח ← נקבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח ← נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha=5\%, \qquad H_1:\mu_D\neq 80, \qquad H_0:\mu_D=80$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78<\mu_D<83$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

סמסטר א	סמסטר ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה:

3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.
אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך למוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

תשובות סופיות

1) א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

2) א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.

3) ג'.

4) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 17 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

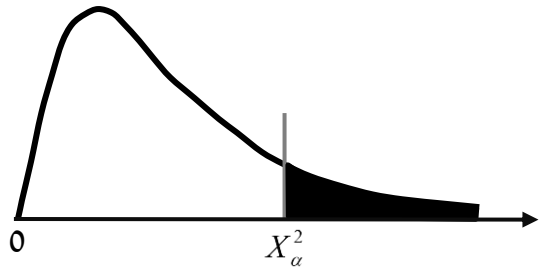
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 123

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה.
התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית,
למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול.
רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש.
דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



רווח הסמך לשונות: $\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$.

כאשר: $\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i - n\cdot\bar{X}^2}{n-1}$ אומד לשונות הלא-ידועה.

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות.
להלן התוצאות בשניות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2.

$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ = זמן תגובה (בשניות).

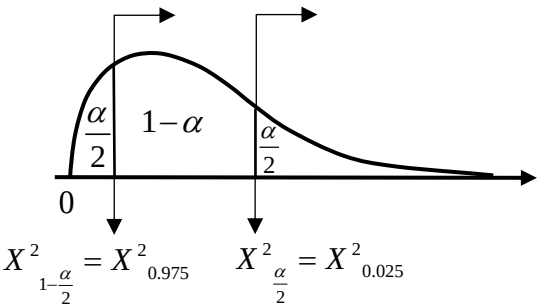
תוצאות מדגם: $n=4$.

$$\bar{X}=\frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4}=4.95$$

$$d.f=n-1=4-1=3$$

נציב: $$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\cdot\bar{X}^2}{n-1}$$

$$S^2=\frac{4.7^2+5.2^2...-4\cdot 4.95^2}{4-1}=0.123$$



$$1-\alpha=0.95$$
$$\alpha=0.05$$
$$\frac{\alpha}{2}=0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

נציב: $$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

$$\frac{(4-1)\cdot 0.123}{9.35}<\sigma^2<\frac{(4-1)\cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039<\sigma^2<1.708$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 28, 26, 21, 17, 18.
בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1.
בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5.

נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080$, $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$.

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.

ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.

ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.

ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$, $\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 900$.

נתון ש: $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) $8.4 < \sigma^2 < 194.2$.

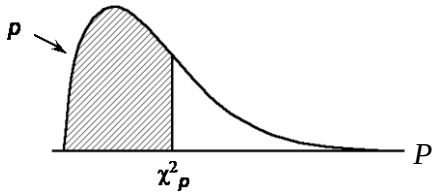
2) א. $30.285 < \mu < 31.315$. ב. $0.836 < \sigma < 1.606$.

3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \le \mu \le 108.68$. ג. $7.94 < \sigma < 13.7$.
ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.
בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.

4) א. $68.75 < \mu < 82.15$. ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$:



df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

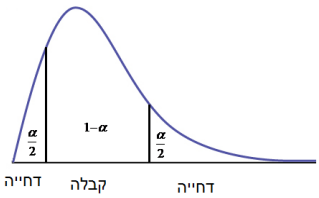
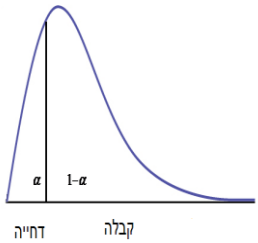
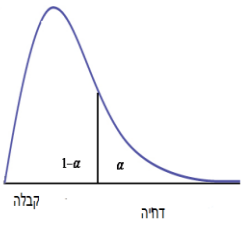
פרק 18 - בדיקת השערות על שונויות

תוכן העניינים

1. שונות וסטיית תקן 128
2. שתי שונויות 133

שונות וסטיית תקן:

רקע:

השערת האפס : **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
תנאים :	$X \sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $\chi^2 < \chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $\chi^2 > \chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$	 $\chi^2 < \chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$	 $\chi^2 > \chi^{2(n-1)}_{\alpha}$

סטטיסטי המבחן : $\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2}$

התפלגות חי בריבוע:

אם $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ והפרמטר μ אינו ידוע מתקיים ש : $\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)}$

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף. התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם μ אינו ידוע אז : $d.f = n-1$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 15$.
מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.
במדגם של 20 ישראלים התקבל:

$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 3420$. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>האוכלוסייה</u>: נבחנים ישראלים במבחן I.Q

<u>המשתנה</u>: X = ציון I.Q

<u>פרמטר</u>: σ^2

<u>השערות</u>:
$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 225$$

<u>הנחה</u>: $X \sim N$

<u>כלל הכרעה</u>: $d.f = n-1 = 20-1 = 19$

נדחה את H_0 אם $X^2 > 32.9$ או $X^2 < 8.91$

<u>תוצאות המדגם</u>: $n = 20$

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

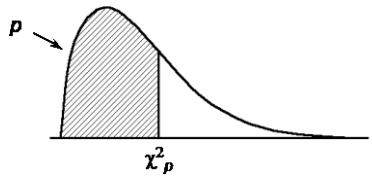
$$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

<u>מסקנה</u>: לא נדחה את H_0, לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha = 5\%$)

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$



df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
							p						
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):
997, 996, 1005, 1024, 1008.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 50, 72, 90, 110.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

4) השערות המחקר הן: $H_0:\sigma=2$, $H_1:\sigma<2$
במדגם של 21 תצפיות התקבלה סטיית תקן 1.143.
תן הערכה למובהקות התוצאה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) לא נדחה H_o.

2) א. נדחה את H_o. ב. לא תשתנה. ג. לא ניתן לדעת.
ד. לא תשתנה.

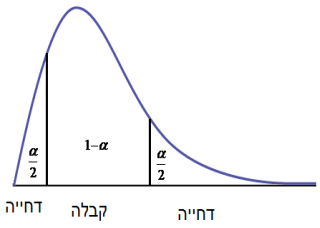
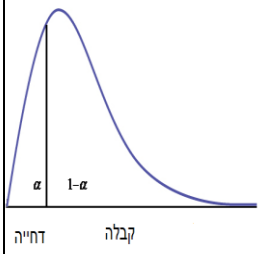
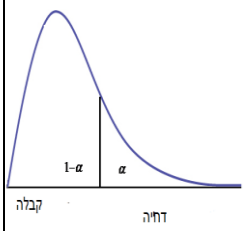
3) א. נדחה את H_o. ב. לא נדחה את H_o.

4) $0 \le P_V \le 0.005$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על שתי שונויות:

רקע:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$	$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1$	$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$
תנאים:	1.מדגמים בלתי תלויים 2. $X_1, X_2 \sim N$		
נדחה את השערת האפס אם:	 $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)}$ או $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1,n_1-1)}}$	 $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$	 $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1,n_2-1)}$

סטטיסטי המבחן: $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$

התפלגות F:

אם $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma^2)$ ו- $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma^2)$ אזי: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$.

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה: $F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{1-\alpha}^{(n_2-1,n_1-1)}}$.

$df_1 = n_1 - 1$
$df_2 = n_2 - 1$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה: $\sum(y_i-\bar{y})^2=204$.

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות: $\sum(x_i-\bar{x})^2=200$.

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

פתרון:

<u>האוכלוסיות:</u> נשים מול גברים.

<u>משתנה:</u> y = זמן ביצוע משימה של גבר , x = זמן ביצוע משימה של אישה

<u>פרמטר:</u> $\frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y}$

<u>השערות:</u>

$$H_0:\frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y}=1$$

$$H_1:\frac{\sigma^2_x}{\sigma^2_y}\neq 1$$

<u>הנחות:</u> 1. מדגימים ב"ת 2. $x,y\sim N$

<u>כלל הכרעה:</u>

$$\alpha=2\%$$
$$n_1=13, d.f_1=n_1-1=12$$
$$n_2=10, d.f_2=n_2-1=9$$

<u>נדחה את</u> H_0 אם $F>5.11$ או $F<0.23$

<u>תוצאות המדגם:</u>

$$S^2_y=\frac{204}{10-1}=22\frac{2}{3}$$
$$S^2_x=\frac{200}{13-1}=16\frac{2}{3}$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{16\frac{2}{3}}{22\frac{2}{3}}$$

<u>מסקנה:</u> ברמת מובהקות של 2% נקבל את H_0.

לא קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים מבחינת השונויות שלהם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

GOOL בשביל התירגול

טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F

α= 0.05

ד"ח מונה/ד"ח מכנה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	246.46	248.01	249.05	252.20	253.25	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.69	8.66	8.64	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.49	3.44	3.41	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.20	3.15	3.12	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	2.99	2.94	2.90	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.83	2.77	2.74	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.70	2.65	2.61	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.60	2.54	2.51	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.38	2.33	2.29	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.21	2.16	2.11	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.16	2.10	2.05	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.11	2.05	2.01	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.09	2.03	1.98	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.07	2.01	1.96	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.05	1.99	1.95	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.04	1.97	1.93	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.02	1.96	1.91	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.01	1.94	1.90	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	1.99	1.93	1.89	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.90	1.84	1.79	1.64	1.58	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.85	1.78	1.74	1.58	1.51	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.82	1.75	1.70	1.53	1.47	1.39
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.76	1.69	1.64	1.46	1.39	1.30
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.73	1.66	1.61	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.32	1.22	1.00

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F $\alpha = 0.01$ ראה איור מטה.

ד"ח מונה/ד"ח מכנה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	∞
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6170.10	6208.73	6234.63	6313.03	6339.39	6365.86
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.45	99.46	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.83	26.69	26.60	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.15	14.02	13.93	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.68	9.55	9.47	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.52	7.40	7.31	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.28	6.16	6.07	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.48	5.36	5.28	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.92	4.81	4.73	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	3.97	3.86	3.78	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.78	3.66	3.59	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.49	3.37	3.29	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.37	3.26	3.18	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.27	3.16	3.08	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.19	3.08	3.00	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	2.99	2.88	2.80	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.89	2.78	2.70	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.81	2.70	2.62	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.78	2.66	2.58	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.75	2.63	2.55	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.72	2.60	2.52	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.69	2.57	2.49	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.66	2.55	2.47	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.48	2.37	2.29	2.02	1.92	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.38	2.27	2.18	1.91	1.80	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.31	2.20	2.12	1.84	1.73	1.60
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.39	2.21	2.09	2.00	1.72	1.60	1.46
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.15	2.03	1.95	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.00	1.88	1.79	1.47	1.32	1.00

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

2012	120	112	95	130	90	94	120
2013	100	82	91	105	74	69	

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונויות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?

ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:
יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

סוג המתכת	A	B
n	8	10
$\sum X_i$	16	30
$\sum X_i^2$	60	198

א. האם קיים הבדל בין שונויות החוזק של מתכות?

ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות?
בכל סעיף רמת מובהקות של 10% .

3) מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500₪ וסטיית תקן של 300₪.
במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16.
במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000₪.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כלל המבוגרים.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

תשובות סופיות:

1) א. לא נדחה את H_0. ב. מסקנה לא תשתנה.

2) א. לא נדחה את H_0. ב. לא נדחה את H_0.

3) א. נדחה את H_0. ב. נדחה את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 19 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך..... 138

שאלות מסכמות על רווחי סמך:

שאלות:

1) מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps.
מהירות מתחת ל-10Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה.
התוצאות שהתקבלו במדגם: ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה.
בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים:

א. תוחלת מהירות הגלישה.

ב. סטיית תקן של מהירות הגלישה.

ג. הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.

2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה.
להלן התפלגות התשובות:

מספר פעמים	0	1	2	3	4	5
מספר אנשים	86	34	28	22	20	10

א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום. $\alpha = 0.05$.

ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה". $\alpha = 0.1$.

3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא: $81 < p < 91$. רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.

א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?

ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?

ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$.

א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?

ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?

ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

5) להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט:

אזור מגורים	גוש דן	שאר הארץ
גודל המדגם	200	240
מספר משפחות בעלי טאבלט	160	168

א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.

ב. בנו רווח סמך לפרופורציות משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

6) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים.

התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 176.2\text{cm}$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832\text{cm}^2$.

א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.

ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

7) בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?

ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) להלן מדגם של שכר הדירה ב-₪ של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב:

שנת 2012	8000	7500	7000	6500	7500
שנת 2013	8000	8200	7800	6800	7700

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

תשובות סופיות:

1) א. $80.65 \le \mu \le 93.35$. ב. $13.5 < \sigma < 22.9$. ג. $0.225 \le p \le 0.575$.

2) א. $1.21 \le \mu \le 1.65$. ב. $10.85\% \le p \le 19.15\%$.

3) א. 70. ב. 0.9988. ג. $83\% < p < 89\%$.

4) א. $97.4 \le \mu \le 106.6$. ב. לא. ג. יגדל.

5) א. $0.5\% \le p_1 - p_2 \le 19.5\%$. ב. $0.704 \le p \le 0.786$.

6) א. $170.8 \le \mu \le 181.6$. ב. $8.8 \le \sigma \le 14.3$.

7) א. $-372 \le \mu_A - \mu_B \le 772$, לא. ב. $6467 \le \mu_A \le 7133$.

8) $-21 \le \mu_D \le 821$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 20 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן) 141

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס: המסומנות ב- H_0.
2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר): המסומנת ב- H_1.

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה, אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0: התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1: התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחייה: דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה).
2. אזור קבלה: קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה.
המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם.
אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):
(לדחות H_0) $= P_{H_0}$ (H_0 נכונה | לדחות את H_0) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:
(לקבל H_0) $= P_{H_1}$ (H_0 נכונה | לקבל את H_0) $= \beta$.

רמת בטחון:
(לקבל H_0) $= P_{H_0}$ (H_0 נכונה | לקבל את H_0) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:
(לקבל H_0) $= P_{H_1}$ (H_1 נכונה | לדחות את H_0) $= (\beta - 1) = \pi$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס) או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערה אלטרנטיבית).
כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' H_1.

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.
ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?

2) ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון.
ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון.
הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

3) יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור: $k=1,2,.....,n$.
נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X: $H_0: n=4$, $H_1: n=6$.
כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $X>3$.
חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

4) איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.2	0.2	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בנוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמקו!

5) במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.

א. רשמו את השערות המחקר.
ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?
ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן השערות:

$H_0: X \sim t(5)$ - התפלגות T עם חמש דרגות חופש.

$H_1: X \sim Z$ - התפלגות נורמלית.

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?
ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

7) במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?
ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?
ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?
   i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
   ii. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7,500 יחידות.
   iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6,700.

8) במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?
ב. מהי העצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".

א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?

ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?

ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

10) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120.
מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.

א. מהי רמת המובהקות של המחקר?

ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?

ג. כיצד התשובות לסעיף א ו ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

11) קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.

א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?

ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

12) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון וידאו.

2) $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{5}$.

3) $\alpha=0.25$, $\beta=0.5$.

4) א. $\alpha=0.2$, $\beta=0.8$. ב. $\alpha=0.2$, $\beta=0.3$. ג. כלל ב'.

5) א. השערות: H_0 -מטבע תקין.
H_1 -מטבע לא תקין.
ב. 0.00781250. ג. 0.1678.

6) א. 0.05. ב.0.022.

7) א. 0.0228. ב. 0.0918. ג. 0.9082.
ד. i. α,β יקטנו.
ד. ii. α לא משתנה, β קטנה.
ד. iii. α קטנה, β גדלה.

8) א. 0.055. ב. 0.383.

9) א. 0.0188. ב. טעות מסוג I . ג. 0.8944.
ד. העוצמה תגדל.

10) א. 0.2981. ב. 0.3974. ג. קטן.

11) א. 0.0113. ב. 0.0495.

12) חוקר א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 21 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות 147

שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

שאלות

1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 520, \quad H_1: \mu > 520$.
כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$.
חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha = 0.05$.
חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X} > 522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1 = 525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1 = 525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X} = 523$. מהי מסקנתו?

2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.
דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב – 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

מוצר / רשת	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$n=10, \quad \sum X_i=1020, \quad \sum X_i^2=105120$.

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$n=14, \quad \sum X_i=1386, \quad \sum X_i^2=138644$.

נתון שציוני הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% האם קיים שוויון שונויות בין אוכלוסיית אמריקה לאוכלוסיית ישראל?

ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

5) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

סטודנטים באוניברסיטאות	176	156	189	171	140	180
סטודנטים במכללות	180	190	191	186	204	150

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

6) במדינת טרפפו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמאלית גם כן.

להלן משכורותיהם באלפי דולר:

גברים	2	0.9	0.7	1.2	1.1
נשים	1.4	1.1	1.9	1.8	1.2

א. בדקו את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפפו ברמת מובהקות של 5%. בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.

ב. חזרו על הסעיף הקודם ללא ההנחה הנ"ל.

ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפפו. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) במטרה להשוות בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות:

	צופים	לא צופים
נשים	320	42
גברים	72	120

א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?

ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שמבין הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאחוז הגברים.

8) בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם במדגם ל-102 משפחות היה מדיח כלים.

ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.
האם ניתן לדעת את הסתברותה?

9) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם.
ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

10) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

מספר הנסיעות	0	1	2	3	4
מספר המשפחות	84	102	26	20	12

א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_0: \mu = 40, \quad H_1: \mu > 40$.

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$

12) ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות מדגמית 118.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

תשובות סופיות

1) א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה H_0.

2) א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

4) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

5) א. לא נדחה H_0. ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה H_0.

6) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0. ג. נדחה H_0.

7) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.

8) א. $H_0: p = 0.6$, $H_1: p > 0.6$ ב. נדחה H_0. ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05.

9) א. לא נדחה H_0. ב. 0.8643 ג. 0.8749.

10) א. נדחה H_0. ב. נדחה H_0.

11) א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.

12) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 22 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה..... (ללא ספר)
2. מבחן טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת..... 151
3. מבחן לאי תלות..... (ללא ספר)
4. קשר בין מבחן אי תלות לבדיקת השערות להפרש פרופרוציות..... 153
5. מקדם המתאם של קרמר..... 155

הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיכוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדית על פרופורציה בודדת.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

הטילו מטבע 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".
בדקו האם המטבע הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.
ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדפת עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשוב ש40% מהאנשים מעדיפים כלבים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברה שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן על פרופורציה.

2) לסוכנות מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.

ב. בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך אחרת לבדוק את ההשערה?

3) בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה.
ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון.
התוצאות שהתקבלו מסוכמות בטבלה הבאה:

המסלול	1	2	3
מספר הניצחונות	20	15	15

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מספר 1 גבוה מ- $\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) א. נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הקשר בין מבחן לאי תלות ובדיקת השערות להפרש פרופורציות – רקע

מבחן לאי תלות שבו לכל משתנה יש שתי קטגוריות שקול לבדיקת השערות דו צדדית על הפרש פרופורציות כאשר השערת האפס היא שהפרופורציות שוות.
כל זאת, כמובן, אם התנאים למבחנים מתקיימים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? האם אפשר לבדוק זאת גם על ידי מבחן לאי תלות וגם על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות?

שאלות

1) בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר.
בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים?
בדוק ברמת מובהקות של 5%.

א. על ידי מבחן לאי תלות.

ב. על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות.

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם ניתן להגיד שהסיכוי להימצא במצב בריאותי תקין גבוה יותר כאשר עוסקים בפעילות גופנית סדירה לעומת המצב שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה? בדוק ברמת בטחון של 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) נדחה את השערת האפס לפירוט הדרך ראה וידאו.

2) א. להלן טבלה: ב. נדחה את השערת האפס.

פעילות/מצב בריאותי	תקין	לא תקין	
סדירה	50	10	60
לא סדירה	90	50	140
	140	60	200

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? -כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1.
ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

X/Y	בעד	נגד	נמנע	$f(x)$
גבר	50	40	10	100
אישה	30	60	10	100
$f(y)$	80	100	20	$n=200$

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלבים בחישוב r_c :

שלב א':

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל $E_i = \frac{f(x)\cdot f(y)}{n}$.

X/Y	בעד	נגד	נמנע	$f(x)$
גבר				100
אישה				100
$f(y)$	80	100	20	n=200

שלב ב':

נחשב $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

שלב ג':

נחשב: $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2}$.

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.
להלן התוצאות:

מין / השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה.
מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין.
מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?
חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות

1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.

2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

y/x	תקין	לא תקין	$f(x)$
כן	50	10	60
לא	90	50	140
$f(y)$	140	60	200

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 23 - מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

תוכן העניינים

1. מבחן הבינום 157
2. חישוב רמת מובהקות ועוצמת מבחן במבחן הבינום 162

מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

מבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר p . הפרמטר p מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצליח.
ההשערות האפשריות על הפרמטר הן :

השערת האפס:	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$
השערה אלטרנטיבית:	$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$

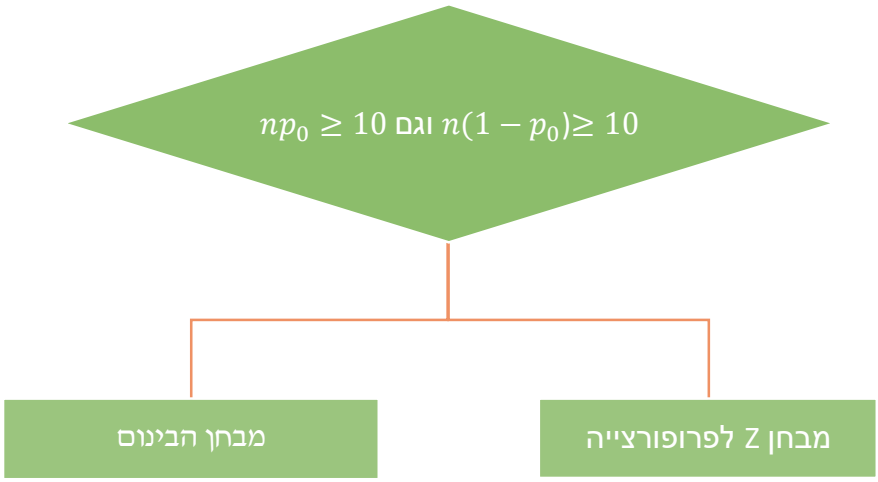
דוגמה:

במדינה אירופאית התנהל לפני 4 שנים משאל עם בדבר לגליזציה של הקנאביס.
במשאל העם 40% מהאזרחים היו בעד לגליזציה של הקנאביס ובשל כך חוק הלגליזציה לא עבר באותה המדינה. במדגם שנעשה כיום בו השתתפו 15 אזרחים מהמדינה 10 ענו שהם תומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה.
פרלמנטר מהמדינה חוקר האם כיום אחוז התומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה עלה יחסית לאחוז שהתקבל במשאל העם במדינה לפני 4 שנים.
רשמו את השערות המחקר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל n ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- Y. בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש: $Y \sim B(n, p)$.

מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטרים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



דוגמה:

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן הבינום היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$. מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס.

כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n.$$

כאשר התוחלת של ההתפלגות הבינומית היא: $E(Y)=np$.

בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת.

זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

דוגמה:

חשבו את מובהקות התוצאה. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות בינומית מצטברת

n	x	p = 0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) אחוז האנשים שאוכלים גלידות בחודשי החורף הינו 30%, קיים חשש בקרב מיצרי הגלידות כי השנה פחת אחוז אוכלי הגלידות בחודשי החורף. לשם כך נדגמו 12 אנשים אשר מתוכם 2 טענו שהם אוכלים גלידה בחודשי החורף.

א. רשמו את השערות המוצגות בשאלה זו וציינו מהו המבחן הסטטיסטי המתאים.

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

ג. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות גדולה יותר מ- 10%?

2) מטבע הוטל 15 פעמים במטרה לבדוק האם המטבע סימטרי.
בסך הכול התקבלו בהטלות 3 פעמים עץ.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם המטבע הוא סימטרי.

ב. עבור אילו רמות מובהקות נוכל להסיק שהמטבע אינו סימטרי?

3) אחוז המובטלים במשק לפני 5 שנים היה 10%. מעוניינים לבדוק האם כיום אחוז המובטלים קטן לעומת זה שהיה לפני 5 שנים. במדגם של 20 אנשים התקבל מובטל אחד ויחיד.

א. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוסק שכיום אחוז האבטלה נמוך מאשר לפני 5 שנים?

ב. מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

4) נניח ש 40% מהאוכלוסייה מכירה את המוצרים של חברת "רמקס". החברה מתכננת לצאת בקמפיין פרסום שמטרתו להעלות את המודעות לקיומם של המוצרים של החברה באוכלוסייה. בזמן הקמפיין נדגמו 20 אנשים אקראיים מתוכם 70% טענו שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס".

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. כיצד מובהקות התוצאה הייתה משתנה אם במדגם 80% היו טוענים שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס"?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) חברה לתוספי מזון דיווחה שנטילת מולטי ויטמין מקטינה את הסיכוי לחלות במחלות חורף במהלך החורף. לפי משרד הבריאות 70% מהאוכלוסייה חולים במחלות חורף במהלך החורף. במחקר השתתפו 20 אנשים אשר נטלו במהלך שנה מולטי ויטמין. במהלך החורף נמצא ש 12 מתוכם חלו במחלות חורף במהלך החורף. את המחקר יש לבצע ברמת מובהקות של 5%.
נסמן ב: PV את מובהקות התוצאה של המחקר.

א. האם המשפט הבא נכון?
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של 5% ניתן להגיד ש-70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".

ב. האם המשפט הבא נכון?
"אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של PV 70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".

ג. חשבו את PV.

תשובות סופיות

1) א. מבחן הבינום.
$H_0: p = 0.3$
$H_1: p < 0.3$
ב. לא נדחה את H_0 .
ג. לא ניתן לדעת.

2) א. נדחה את H_0 .
ב. לפחות 0.0352

3) א. 0.3917
ב. לא נדחה את H_0 .

4) א. 0.0065
ב. תקטן.

5) א. לא נכון.
ב. לא נכון.
ג. 0.2277.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חישוב הסתברויות לטעויות ועוצמת המבחן במבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר p .
הפרמטר p מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצליח. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן :

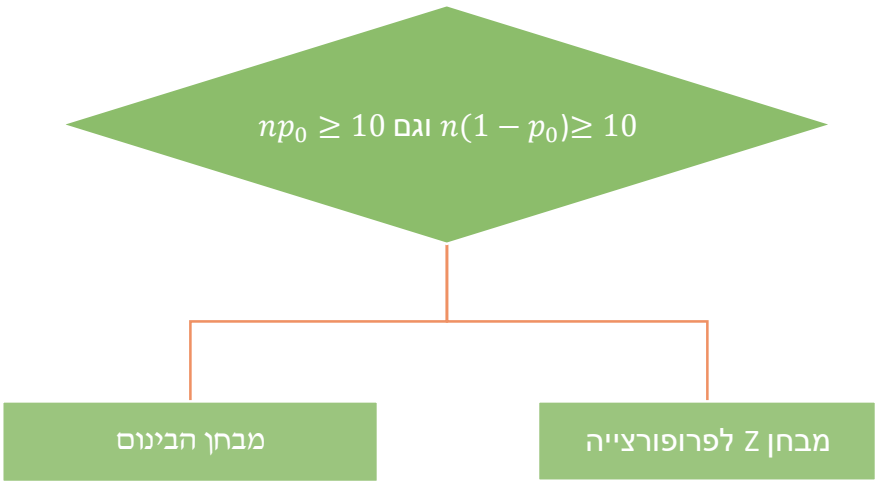
השערת האפס :	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$
השערה אלטרנטיבית :	$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$

דוגמה :

בחברת פז 40% מעובדי החברה מאחרים לעבודה. מנכ"ל החברה מעוניין לצמצם את אחוז העובדים המאחרים בחברה. לצורך כך, בוחר המנכ"ל מחלקה אקראית במטרה לבדוק עליה שיטת תמריצים שאמורה לצמצם את אחוז המאחרים.
במחלקה שנבחרה 10 עובדים והופעלה עליה שיטת התמריצים הנבדקת.
הוסכם שאם מספר המאחרים במחלקה יהיה לכל היותר עובד אחד לאחר הפעלת שיטת התמריצים, תופעל שיטת התמריצים על כלל החברה.

- מהן השערות המחקר?

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל n ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- Y . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש : $Y \sim B(n, p)$.
מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטריים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



דוגמה :

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$.

בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.
נזכיר את המצבים האפשריים בבדיקת השערות:

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

α=P(לדחות את H_0 | H_0 נכונה)= P_{H_0}(לדחות H_0)

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

β =P(לקבל את H_0 | H_1 נכונה)=P_{H_1}(לקבל H_0)

רמת בטחון:

$1-\alpha$=P(לקבל את H_0 | H_0 נכונה)= P_{H_0}(לקבלH_0)

עוצמה:

$\pi=1-\beta$ =P(לדחות את H_0 | H_1 נכונה) = P_{H_1}(לדחות H_0)

דוגמה:

- מהי רמת המובהקות של המחקר המוצע?
- אם בשיטת התמריצים, הסיכוי לאחר הוא 10%, מה ההסתברות שהמחקר יגלה זאת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור p -ים שונים

		p									
n	x	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה לבדוק האם במוסד לימוד מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 תלמידים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מהי רמת המובהקות במבחן המוצע?

ב. מהי העוצמה במבחן המוצע בהנחה ובמוסד 30% בנים?

ג. כיצד התשובות לסעיפים הקודמים ישתנו אם ישנו את המבחן כך שיוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 3 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות?
הסבירו ללא חישוב מחדש.

2) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 70%. מעוניינים לבדוק האם שיטת משחק מסוימת מעלה את סיכויי הזכייה לצורך כך מחליטים לשחק את המשחק 20 פעמים תוך שימוש בשיטה הנבדקת. מחליטים שאם מספר הזכיות במדגם יהיה לפחות 18 נקבל את הטענה שאכן השיטה עובדת והיא מעלה את סיכויי ההצלחה להיות 90%.
מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון ומה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני במבחן שהוצע?

3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא סימטרי הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל, יוחלט שהמטבע הוגן, אחרת נחליט שהמטבע לא הוגן.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות להחליט שהמטבע אינו סימטרי למרות שבפועל המטבע הינו סימטרי?

ג. מהי ההסתברות שאם במטבע הסיכוי לעץ הוא 20%, אכן נגלה זאת?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם הסיכוי לעץ במטבע אף נמוך מ-20%?

4) נתון ש- $X \sim B(15, p)$ ההשערות של המחקר הן: $H_0: p = 0.3 \quad H_1: p > 0.3$.
כלל ההכרעה הוא: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 8$.

א. מהי רמת המובהקות במחקר זה?

ב. מה יקרה לרמת המובהקות אם כלל ההכרעה יהיה: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 7$? הסבירו ללא חישוב.

ג. מה יקרה לרמת המובהקות אם השערות המחקר יהיו $H_0: p = 0.3 \quad H_1: p \neq 0.3$ אבל כלל ההכרעה לא ישתנה?
הסבירו ללא חישוב.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. 0.0547 ב. 0.3828 ג. תגדלנה.

2) $\beta = 0.3231$ $\alpha = 0.0355$.

3) א. $H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p \neq 0.5$ ב. 0.0078 ג. 0.1678

ד. העוצמה תגדל.

4) א. 0.05 ב. תגדל. ג. לא תשתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 24 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. מבחן הסימן 167
2. מבחן הסימן - על ידי שימוש בטבלה בינומית 170
3. מבחן הסימן - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי 174
4. מבחן ווילקוקוסון 178
5. מבחן ווילקוקסון - על ידי שימוש בטבלה לערכים קריטיים 181
6. מבחן ווילקוקסון - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי 185
7. מבחן מקנמר 188
8. תרגול בזיהוי מבחנים 190

מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

מבחן הסימן – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$H_0: P_+ = 0.5$
$H_1: P_+ \neq, <, > 0.5$

או

$H_0: P_- = 0.5$
$H_1: P_- \neq, <, > 0.5$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \backslash n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת:

בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב.
עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה.
נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר.
מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=n$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_o. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה את H_o.

3) נדחה את H_o.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן הסימן (שימוש בטבלה של התפלגות בינומית) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.
מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי - מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.
תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$H_0: P_+ = 0.5$
$H_1: P_+ \neq, <, > 0.5$

או

$H_0: P_- = 0.5$
$H_1: P_- \neq, <, > 0.5$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:
נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \backslash n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.
במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

במקום להציב בפונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומי.
נשתמש בטבלה של פונקציית הסתברות המצטברת של ההתפלגות הבינומית עבור סיכוי של 0.5 להצלחה.
באמצעות הטבלה הבאה נוכל לחשב את PV.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור p=0.5

n \ X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	†										
6	016	109	344	656	891	984	†									
7	008	062	227	500	773	938	992	†								
8	004	035	145	363	637	855	965	996	†							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	†						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	999	†					
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994	†	†				
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997	†	†			
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998	†	†		
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	991	999	†	†	
15			004	018	059	151	304	500	696	849	941	982	996	†	†	†
16			002	011	038	105	227	402	598	773	895	962	989	998	†	†
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	†
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20				001	006	021	058	132	252	412	588	748	868	942	979	994
21				001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22					002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974
23					001	005	017	047	105	202	339	500	661	798	895	953
24					001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25						002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=\mathrm{n}$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה H_0. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה H_0.

3) נדחה H_0.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן הסימן (שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$H_0: P_+ = 0.5$
$H_1: P_+ \neq, <, > 0.5$

או

$H_0: P_- = 0.5$
$H_1: P_- \neq, <, > 0.5$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \backslash n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.
אם התנאים לקירוב נורמלי מתקיימים ניתן להמיר את ההתפלגות הבינומית להתפלגות נורמלית:

אם: $n^* \cdot 0.5 \geq 5$

אז: $S_\pm \sim N\left(n^* \cdot \frac{1}{2}, n^* \cdot \frac{1}{4}\right)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.
ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?
ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$.
ב. $n(+)+n(-)=n$.
ג. $n(+)=n(-)$.
ד. $n(+)-n(-)=n^*$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה H_0. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה H_0.

3) נדחה H_0.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים לפי שיטת המנייה – רקע

מתי נשתמש במבחן זה?

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר והמדגם הוא מזווג.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים. להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק האם אופה א טוב יותר מאופה ב.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

חישוב סטטיסטי המבחן:

1. נחשב את ההפרשים D_i לכל תצפית.
2. נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3. נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4. מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים $(W+)$ ואת הדרגות של ההפרשים השליליים $(W-)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חשבו את W על סמך תוצאות המדגם.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

חישוב מובהקות התוצאה:

כדי לחשב את מובהקות התוצאה נצטרך לדון בהתפלגות של W בהנחת השערת האפס. אם השערת האפס נכונה, לכל D_i יש את אותו סיכוי לקבל ערך חיובי או ערך שלילי כלומר 2 אפשרויות. ל $n*$ דרגות יש $2n*$ אפשרויות שונות, שוות הסתברות. לפי רעיון זה ניתן יהיה לחשב את מובהקות התוצאה.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות.
הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר).
להלן התוצאות שהתקבלו:

X	הערכה על יעילות השירות	7	8	4	3	2	5	7	5
Y	הערכה על אדיבות השירות	8	7	7	6	8	10	7	4

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

2) רוצים לבדוק האם תרופה חדשה להקלת כאבי ראש יעילה יותר מתרופה מוכרת. לצורך כך נלקח מדגם בן 9 אנשים, שנתבקשו להשתמש בתרופה החדשה ובתרופה המוכרת, ולהשוות את יעילותה של התרופה החדשה ליעילות התרופה המוכרת. האנשים במחקר היו צריכים לתת הערכה של יעילות בסקלה של מ-1 עד 100.
התוצאות שקיבל היו:

הנבדק	1	2	3	4	5	6	7	8	9
תרופה חדשה	95	90	100	80	75	81	69	100	86
תרופה מוכרת	80	76	65	49	75	70	50	60	60

האם התרופה החדשה משפרת את היעילות ביותר מ 10 נקודות?
בדקו ברמת מובהקות של 1%.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בטבלה של ערכים קריטיים) – רקע

מתי נשתמש במבחן זה?

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר על מדגם מזווג.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים.
להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק שאופה א טוב יותר מאופה ב.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
ב. מהן השערות המחקר?

חישוב סטטיסטי המבחן:

1) נחשב את ההפרשים Di לכל תצפית.
2) נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3) נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4) מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים ($W+$) ואת הדרגות של ההפרשים השליליים ($W-$).
5) W יהיה $W+$ או $W-$, זה שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר או הקטן מבניהם אם ההשערה היא דו צדדית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חשבו את W על סמך תוצאות המדגם.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

כלל הכרעה:

במבחן ווילקוקסון זה כלל ההכרעה הוא: נדחה את H_0 אם $W \le W_c$.

כאשר, W_c - הערך הקריטי; W - הסטטיסטי.

את הערכים הקריטיים נחלץ מתוך טבלה מתאימה:

n_1	חד-צדדי $\alpha = 0.01$ דו-צדדי $\alpha = 0.02$	חד-צדדי $\alpha = 0.025$ דו-צדדי $\alpha = 0.05$	חד-צדדי $\alpha = 0.05$ דו-צדדי $\alpha = 0.10$
5			1
6		1	2
7	0	2	4
8	2	4	6
9	3	6	8
10	5	8	11
11	7	11	14
12	10	14	17
13	13	17	21
14	16	21	26
15	20	25	30
16	24	30	36
17	28	35	41
18	33	40	47
19	38	46	54
20	43	52	60
21	49	59	68
22	56	66	75
23	62	73	83
24	69	81	92
25	77	90	101
26	85	98	110
27	93	107	120
28	102	117	130
29	111	127	141
30	120	137	152

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

א. רשמו את כלל ההכרעה המתאים ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

X	הערכה על יעילות השירות	7	8	4	3	2	5	7	5
Y	הערכה על אדיבות השירות	8	7	7	6	8	10	7	4

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

2) סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

1-קושי קורס	4	3	2	4	3	2	1	5	4
2-קושי בחינה	4	4	4	3	5	5	5	3	2

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

3) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	80	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) רוצים לבדוק האם תרופה חדשה להקלת כאבי ראש יעילה יותר מתרופה מוכרת. לצורך כך נלקח מדגם בן 9 אנשים, שנתבקשו להשתמש בתרופה החדשה ובתרופה המוכרת, ולהשוות את יעילותה של התרופה החדשה ליעילות התרופה המוכרת.
האנשים במחקר היו צריכים לתת הערכה של יעילות בסקלה של מ-1 עד 100.
התוצאות שקיבל היו:

הנבדק	1	2	3	4	5	6	7	8	9
תרופה חדשה	95	90	100	80	75	81	69	100	86
תרופה מוכרת	80	76	65	49	75	70	50	60	60

האם התרופה החדשה משפרת את היעילות ביותר מ 10 נקודות? בדקות ברמת מובהקות של 1%.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.

4) לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מתי נשתמש במבחן זה?

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר במדגם מזווג.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים.
להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק את הטענה שאופה א טוב יותר מאופה ב.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
ב. מהן השערות המחקר?

חישוב סטטיסטי המבחן:

1. נחשב את ההפרשים D_i לכל תצפית.
2. נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3. נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4. מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים $(R+)$ ואת הדרגות של ההפרשים השליליים $(R-)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חשבו את W על סמך תוצאות המדגם.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

מתקיים תמיד ש : $R_+ + R_- = \frac{n^*(n^*+1)}{2}$.

כמו כן, ניתן להגיד שהתוחלת והשונות של הסטטיסטיים הללו הם :

$$\mu_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)}{4} \qquad \sigma^2_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}$$

אם המדגם מספיק גדול, ניתן לבצע קירוב נורמלי לסטטיסטיים אלה באופן הבא :

$$R_\pm \sim N\left(\frac{n^*(n^*+1)}{4}, \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}\right) \qquad Z_\pm = \frac{R_\pm - \mu_{R_\pm}}{\sqrt{\sigma^2_{R_\pm}}} \sim N(0,1)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

א. מהי מובהקות התוצאה של מבחן זה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

X	הערכה על יעילות השירות	7	8	4	3	2	5	7	5
Y	הערכה על אדיבות השירות	8	7	7	6	8	10	7	4

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

2) סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

1-קושי קורס	4	3	2	4	3	2	1	5	4
2-קושי בחינה	4	4	4	3	5	5	5	3	2

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

3) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	80	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן מקנמר – רקע

מבחן סטטיסטי זה נכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים.
המבחן רלבנטי כשהמדגם מזווג וכשהמשתנה התלוי (הנחקר) הוא דיכוטומי, כלומר מקבל שני ערכים בלבד.
מספר התצפיות שחל בהן שינוי צריך להיות לפחות 20; אם תנאי זה לא מתקיים אפשר לבצע את מבחן הסימן במקום.

דוגמה:

50 איש נשאלו האם הם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה. הם נשאלו בשני מצבים: פעם ראשונה לפני שצפו בסרטון ופעם שניה שבוע אחרי שצפו בסרטון.
התוצאות שהתקבלו היו:
13 אנשים טענו שהם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה גם לפני הצפייה בסרטון וגם אחרי הצפייה בסרטון.
9 אנשים טענו שלפני הצפייה בסרטון הם לא שלחו מסרונים אבל אחרי הצפייה בסרטון הם כן שלחו מסרונים בזמן הנהיגה.
20 איש טענו שהם נהגו לשלוח מסרונים לפני הסרטון אך אחרי צפייה בסרטון הם הפסיקו לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה.
ו-8 אנשים לא שלחו מסרונים בזמן הנהיגה לא לפני ולא אחרי צפייה בסרטון.
מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

מבנה המבחן:

סטטיסטי המבחן הוא: $Z=\frac{B-C}{\sqrt{B+C}}$ כאשר B,C – שכיחויות שבהן חל שינוי ומתעלמים מהשכיחויות שלא חל בהן שינוי. הסטטיסטי מתפלג $Z\sim N(0,1)$.

דוגמה:

בדקו ברמת מובהקות של 5%: האם לסרטון השפעה על שליחת המסרונים בזמן הנהיגה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) פוליטיקאי הופיע אמש בתכנית טלוויזיה והוא מעוניין לבדוק האם התוכנית שיפרה את אמון הציבור בו. לצורך כך בוצע סקר שבו נשאל הצופה האם בעניו הפוליטיקאי נתפס כאמין לפני התוכנית והאם הוא נתפס כאמין לאחר התוכנית. להלן התוצאות שהתקבלו (המספרים מייצגים מספר צופים):
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

		לפני	
		אמין	לא אמין
אחרי	אמין	12	21
	לא אמין	7	17

2) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר שבו השתתפו 50 נשאלים 30 טענו שלא שינו את הרגלי הצריכה. 15 טענו שהחלו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין ו-5 טענו שהפסיקו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

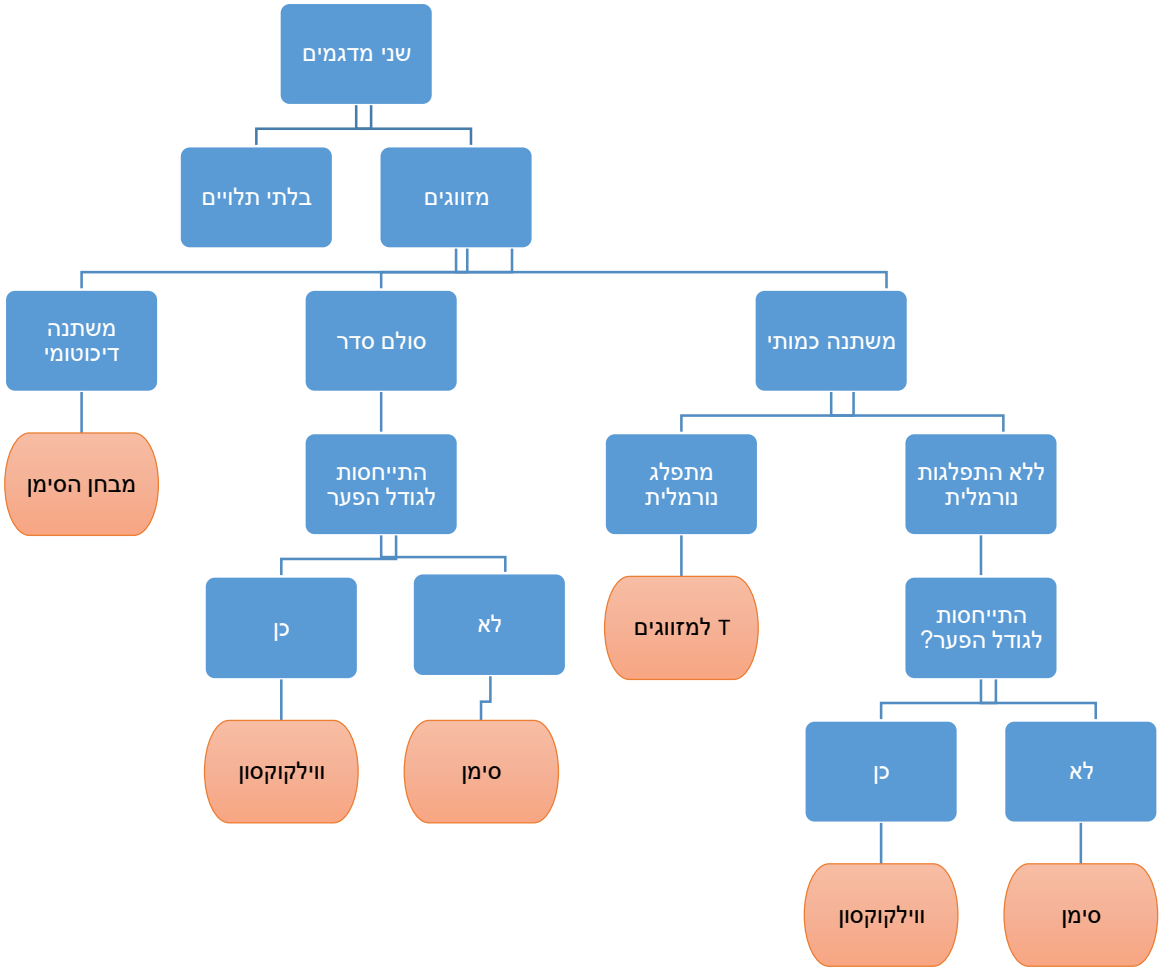
תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) א. 0.025 ב.נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

זיהוי מבחנים סטטיסטיים – רקע



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה להשוות את רמת האפייה של שני קונדיטורים בחרו 9 מאפים שונים (קרואסון, בראוני וכדומה) ונתנו לכל אחד משני הקונדיטורים לאפות את 9 המאפים השונים. 18 המאפים שנאפו ניתנו למומחה שנתן ציון למאפים השונים. הציון שניתן הוא בין 1 ל-5 לפי ניסיונו וטעמו האישי של המומחה.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

2) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ראליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי.
מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש הבדל בין המוסיקאים מבחינת הטעם.
בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

	1	2	3	4	5	6	7	8
מוסיקאי א'	6	5	7	4	3	1	1	4
מוסיקאי ב'	5	7	5	2	3	3	2	7

מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

3) במחקר בדקו לאנשים את רמת הסוכר בבוקר ואת רמת הסוכר בערב.
מתוך 26 אנשים ל-3 רמת הסוכר הייתה זהה.
ל-14 רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הערב.
וליתר רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הבוקר.
רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 6% האם קיים הבדל בין רמת הסוכר בבוקר לרמת הסוכר בערב אצל האנשים. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.

ב. מבחן הסימן.

ג. מבחן T למזווגים.

ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) חוקר מעוניין לבדוק את התפתחות היכולת לדחות סיפוקים מיידיים בקרב ילדים. לשם כך, הוא משתמש במבחן לבדיקה של דחיית סיפוקים, ומעביר אותו בו זמנית ל-2 קבוצות גיל. מבחן זה מודד כמה זמן (בשניות) מסוגל הילד לדחות קבלה של תגמול מיידי קטן על מנת לקבל תגמול גדול יותר בעתיד. התוצאות שמתקבלות הן הזמנים של הנחקרים בכל קבוצת גיל.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

5) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר השתתפו נשאלים האם הם נהגו לרכוש את המשקה לפני הקמפיין והאם הם רכשו אותו לאחר הקמפיין.
מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

6) מחקר התעניין בדפוסי שיחות הטלפון, שמנהל הפרט בעקבות פרידה מבן זוגו. במחקר השתתפו גברים ו-נשים (כולם נפרדו מבן זוגם). המשתתפים דיווחו על משך השיחות (בדקות; לפני ואחר הפרידה). שאלת המחקר בחנה האם פרידה מבן הזוג קשורה למשך השיחות (משך השיחות הוא משתנה שנהוג להתייחס אליו כמתפלג נורמלית). מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

א. מבחן ווילקוקוסון.
ב. מבחן הסימן.
ג. מבחן T למזווגים.
ד. מבחן למדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות

1) א'.
2) א'.
3) ב'.
4) ד'.
5) ב'.
6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 25 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים 193
2. מבחן פישר 200
3. מבחן פישר - קירוב נורמלי 204

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים. מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.
המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר.
מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

דוגמה:

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת חינוך B.
פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20.
מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

שיטה A	שיטה B
16	14
17	14
20	19
10	9
18	8

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:

1. נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
2. נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
3. נחשב את W_1 - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,
   ו-W_2- סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
4. נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \qquad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

5. הסטטיסטי U: במבחן דו צדדי $U = \min(U_1, U_2)$ במבחן חד צדדי U יהיה ה-U_i, שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.
טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את ה- U הסטטיסטי.
טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של U שנסמן ב Uc.

טבלה מהסוג הראשון	טבלה מהסוג השני
n_1 ו- $n_2 \le 8$	n_1 או $n_2 \ge 9$
עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את Pv אם $Pv \le \alpha$ דוחים את H_0.	נותנת את הערך הקריטי Uc כל הכרעה: נדחה את H_0 אם $U \le Uc$

דוגמה:

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים

$n_2 = 3$

u	n_1		
	1	2	3
0	0.250	0.100	0.050
12	0.500	0.200	0.100
3	0.750	0.400	0.200
4		0.600	0.350
5			0.500
			0.650

$n_2 = 4$

u	n_1			
	1	2	3	4
0	0.200	0.067	0.028	0.014
1	0.400	0.133	0.057	0.029
2	0.600	0.267	0.114	0.057
3		0.400	0.200	0.100
4		0.600	0.314	0.171
5			0.429	0.243
6			0.571	0.343
7				0.443
8				0.557

$n_2 = 5$

u	n_1				
	1	2	3	4	5
0	0.167	0.047	0.018	0.008	0.004
1	0.333	0.095	0.036	0.016	0.008
2	0.500	0.190	0.071	0.032	0.016
3	0.667	0.286	0.125	0.056	0.028
4		0.429	0.196	0.095	0.048
5		0.571	0.286	0.143	0.075
6			0.393	0.206	0.111
7			0.500	0.278	0.155
8			0.607	0.365	0.210
9				0.452	0.274
10				0.548	0.345
11					0.421
12					0.500
13					0.579

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 6$

u	n_1 = 1	2	3	4	5	6
0	0.143	0.036	0.012	0.005	0.002	0.001
1	0.286	0.071	0.024	0.010	0.004	0.002
2	0.428	0.143	0.048	0.019	0.009	0.004
3	0.571	0.214	0.083	0.033	0.015	0.008
4		0.321	0.131	0.057	0.026	0.013
5		0.429	0.190	0.086	0.041	0.021
6		0.571	0.274	0.129	0.063	0.032
7			0.357	0.176	0.089	0.047
8			0.452	0.238	0.123	0.066
9			0.548	0.305	0.165	0.090
10				0.381	0.214	0.120
11				0.457	0.268	0.155
12				0.545	0.331	0.197
13					0.396	0.242
14					0.465	0.294
15					0.535	0.350
16						0.409
17						0.469
18						0.531

$n_2 = 7$

u	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7
0	0.125	0.028	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
1	0.250	0.056	0.017	0.006	0.003	0.001	0.001
2	0.375	0.111	0.033	0.012	0.005	0.002	0.001
3	0.500	0.167	0.058	0.021	0.009	0.004	0.002
4	0.625	0.250	0.092	0.036	0.015	0.007	0.003
5		0.333	0.133	0.055	0.024	0.011	0.006
6		0.444	0.192	0.082	0.037	0.017	0.009
7		0.556	0.258	0.115	0.053	0.026	0.013
8			0.333	0.158	0.074	0.037	0.019
9			0.417	0.206	0.101	0.051	0.027
10			0.500	0.264	0.134	0.069	0.036
11			0.583	0.324	0.172	0.090	0.049
12				0.394	0.216	0.117	0.064
13				0.464	0.265	0.147	0.082
14				0.538	0.319	0.183	0.104
15					0.378	0.223	0.130
16					0.438	0.267	0.159
17					0.500	0.314	0.191
18					0.562	0.365	0.228
19						0.418	0.267
20						0.473	0.310
21						0.527	0.355
22							0.402
23							0.451
24							0.500
25							0.549

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 8$

u	n_1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.111	0.022	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.222	0.044	0.012	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
2	0.333	0.089	0.024	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
3	0.444	0.133	0.042	0.014	0.005	0.002	0.001	0.001
4	0.556	0.200	0.067	0.024	0.009	0.004	0.002	0.001
5		0.267	0.097	0.036	0.015	0.006	0.003	0.001
6		0.356	0.139	0.055	0.023	0.010	0.005	0.002
7		0.444	0.188	0.077	0.033	0.015	0.007	0.003
8		0.556	0.248	0.107	0.047	0.021	0.010	0.005
9			0.315	0.141	0.064	0.030	0.014	0.007
10			0.387	0.184	0.085	0.041	0.020	0.010
11			0.461	0.230	0.111	0.054	0.027	0.014
12			0.539	0.285	0.142	0.071	0.036	0.019
13				0.341	0.177	0.091	0.047	0.025
14				0.404	0.217	0.114	0.060	0.032
15				0.467	0.262	0.141	0.076	0.041
16				0.533	0.311	0.172	0.095	0.052
17					0.362	0.207	0.116	0.065
18					0.416	0.245	0.140	0.080
19					0.472	0.286	0.168	0.097
20					0.528	0.331	0.198	0.117
21						0.377	0.232	0.139
22						0.426	0.268	0.164
23						0.475	0.306	0.101
24						0.525	0.347	0.221
25							0.389	0.253
26							0.433	0.287
27							0.478	0.323
28							0.522	0.360
29								0.399
30								0.439
31								0.480
32								0.520

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלה למציאת U_c

ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים.

n_1	n_2											
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

קבוצה ב	קבוצה א
82	68
74	82
82	78
64	94
67	87
65	

2) מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

3) במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:
<u>קבוצת הטיפול</u>: 12,16, 8, 0, 4, 3, 9, 3, 1.
<u>קבוצת הביקורת</u>: 12, 23, 13, 19,7,28.
בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

תשובות סופיות

1) לא נדחה את H_0.

2) נדחה את H_0.

3) לא נדחה את H_0.

\\

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן פישר – רקע

מבחן זה הוא מבחן הנכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים.
משתמשים במבחן כאשר מתעניינים להשוות בין שתי אוכלוסיות והמשתנה התלוי הוא דיכוטומי, כלומר משתנה שיש לו שני ערכים אפשריים.
במבחן זה יוצרים מדגם אחד שמקבל טיפול כלשהו ומדגם אחר המהווה קבוצת ביקורת ואינו מקבל את הטיפול. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת שתי פרופורציות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.
במבחן הפרמטרי דורשים שבכל מדגם מספר ההצלחות וגם מספר הכישלונות יהיה לפחות 10 (הפחות מחמירים דורשים לפחות 5).
מבחן פישר, אותו נעשה בפרק זה, נקרא בספרות המקצועית:
"Fisher exact probability test".

דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים בקורס סטטיסטיקה.
נלקחו 2 כיתות הלומדות סטטיסטיקה בנות 15 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת ניתנו שיעורי עזר ובכיתה השנייה לא ניתנו שיעורי עזר. בכיתה בה ניתנו שיעורי עזר 1 נכשל בקורס ובכיתה שבה לא ניתנו שיעורי עזר 3 נכשלו בקורס.
מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן פישר היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$.
מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס.
כדי לחשב את מובהקות התוצאה נבנה טבלת שכיחות משותפת במבנה הבא:

	"כישלון"	"הצלחה"	סה"כ
קבוצת טיפול	A	B	A+B
קבוצת ביקורת	C	D	C+D
סה"כ	A+C	B+D	N

בנו את טבלת השכיחות המשותפת המתאימה לדוגמה:

			סה"כ
קבוצת טיפול	A	B	A+B
קבוצת ביקורת	C	D	C+D
סה"כ	$A+C$	$B+D$	N

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

בהנחת השערת האפס התפלגות של A הינו משתנה מקרי היפר גיאומטרי שבו יש אוכלוסייה בגודל N , מתוכם $C+A$ "מיוחדים" ואנו דוגמים מתוכם מדגם בגודל $B+A$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפר גיאומטרית במקרה זה,

כאשר X מייצג את השכיחות A תהיה: $\frac{\binom{A+C}{x}\binom{B+D}{A+B-x}}{\binom{N}{A+B}}$.

חשבו את מובהקות התוצאה בדוגמה ומה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) פסיכיאטרים נשאלו האם תרופה אנטי דיכאונית מסוימת אכן משפיעה על מצב הרוח. נלקחו 28 אנשים שהתלוננו על דיכאון ברמה דומה והם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 16 נטלו את התרופה האנטי דיכאונית הנחקרת והיתר היוו קבוצת ביקורת ונטלו פלסיבו. כעבור 3 חודשים נבדק מצבם הנפשי של כל משתתפי המחקר. בקרב אלו שנטלו את התרופה רק 2 התלוננו על דיכאון ובקרב אלו שנטלו הפלסבו 6 התלוננו על דכאון.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

2) חנות פרחים מעוניינת לבדוק את הטענה שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים. נדגמו 20 פרחים מאותו סוג. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות: 10 פרחים יהיו בקבוצת הניסוי, כלומר בתאורה אולטרה סגולה והפרחים הנותרים יהיו בקבוצת הביקורת – באותם התנאים בדיוק אך ללא תאורה אולטרה סגולה.
כעבור 5 ימים נבדקו כלל הפרחים.

תאורה / מצב הפרח לאחר 5 ימים	נבול	תקין
אולטרה סגולה	1	9
רגילה	7	3

א. מה היא רמת המובהקות המינימלית עבורה יוסק שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים?

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם בקבוצת הביקורת היו נמצאים פחות פרחים נבולים?

3) משרד החינוך הזמין מחקר שמטרתו היה לבדוק האם שנת צהריים קבועה בזמן לימודי התיכון משפיעה על הזכאות לבגרות.
נדגמו בוגרי תיכון אקראיים שנשאלו שתי שאלות:
$Q1$ - האם בזמן התיכון נהגת לישון צהריים באופן קבוע?
$Q2$ - האם את/ה זכאי/ת לתעודת בגרות?
להלן התוצאות שהתקבלו.

א. רשמו את השערות המבחן. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

ב. מהי מובהקות התוצאה?

ג. בדקו את השערות המחקר ברמת מובהקות של 6%.

שאלון/ מספר נשאל	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Q1	כן	לא	לא	לא	כן	כן	לא	לא	לא	לא	לא	כן	לא	לא
Q2	כן	כן	כן	לא	לא	כן	לא	לא	כן	כן	לא	כן	כן	לא

תשובות סופיות

1) נדחה את H_0 .

2) א. 0.0099 ב. תקטן.

3) א. מבחן פישר. ב. 0.8112 ג. לא נדחה H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קירוב נורמלי למבחן פישר – רקע

כאשר המדגמים גדולים דיו ניתן לבצע קירוב נורמלי למבחן פישר.
אחד מכללי האצבע לקרוב הנורמלי אם כל ארבעת הביטויים הבאים גדולים מ-7.5:

$$\frac{(A+C)^2}{N} \quad \frac{(B+D)^2}{N} \quad \frac{(A+B)^2}{N} \quad \frac{(D+C)^2}{N}$$

אך יתכן שחוקרים שונים ישתמשו בכללי אצבע אחרים.
נתייחס ל- A בתור משתנה מקרי המתפלג נורמלית עם התוחלת והשונות הבאות:

$$E(A)=\frac{(A+B)(A+C)}{N} \quad V(A)$$
$$=\frac{(A+B)(A+C)(B+D)(C+D)}{N^2(N-1)}$$

דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים. נלקחו 2 כיתות בנות 40 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת נתנו שיעורי עזר ובכיתה שנייה לא נתנו שיעורי עזר. בכיתה שנתנו שיעורי עזר 10 נכשלו ובכיתה ללא שיעורי עזר 16 נכשלו.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) כדי לבדוק אם חיסון חדש לכלבים מסייע בהפחתת ההדבקות במחלה מסוימת, נערך ניסוי שבו 50 כלבים קיבלו חיסון ו- 50לא קיבלו חיסון. מבין הכלבים שחוסנו 10 כלבים נדבקו במחלה, ומבין הכלבים שלא חוסנו 18 נדבקו במחלה. מהי המסקנה ברמת מובהקות 0.05?

2) מחקר מעוניין לבדוק האם אכילת שוקולד משפיעה על רמת הסרטונין בדם. נלקחו 102 אנשים ברמת בריאות דומה. הם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 52 קיבלו שוקולד ו-50 לא. בדקו את רמת הסרוטונין בדם בשתי הקבוצות: בקבוצות השוקולד ל-18 אנשים הייתה רמת סרטונין הנחשבת לגבוהה. בקבוצה שלא קבלה שוקולד ל-11 הייתה רמת סרטונין הנחשבת לגבוהה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית לדחיית השערת האפס?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

1) נדחה H_0.

2) א. 1 ב. לא נדחה H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 26 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 206
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 217
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלנארי באמצעות טבלה של ערכים קריטיים..... 222

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.

בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חדרים בדירה	2	2	3	2	3	3	4	4
מספר הנפשות בדירה	0	1	2	2	3	4	4	5

1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

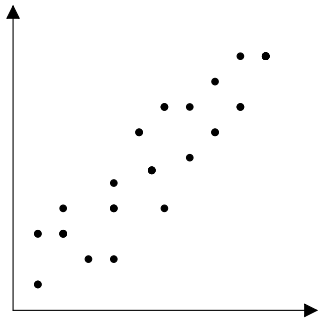
3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

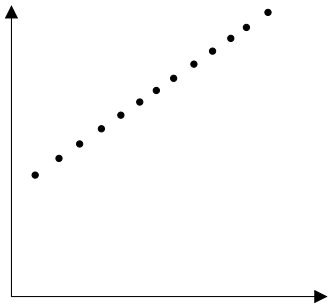
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

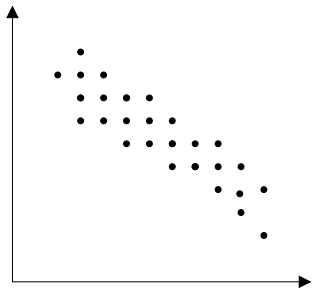
קשר לנארי חיובי חלקי



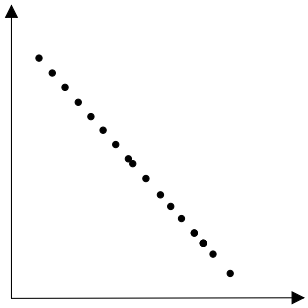
קשר לנארי חיובי מלא



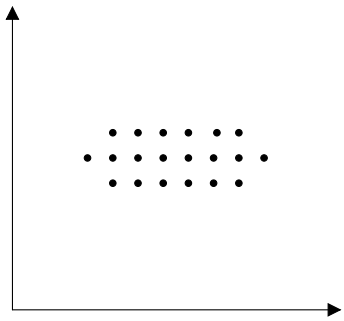
קשר לינארי שלילי חלקי



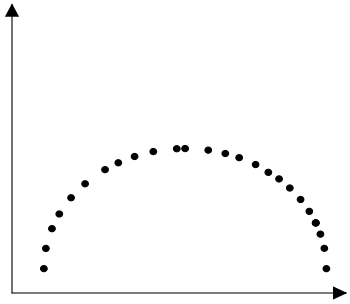
קשר לינארי שלילי מלא



אין קשר



אין קשר לינארי



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1 0 1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

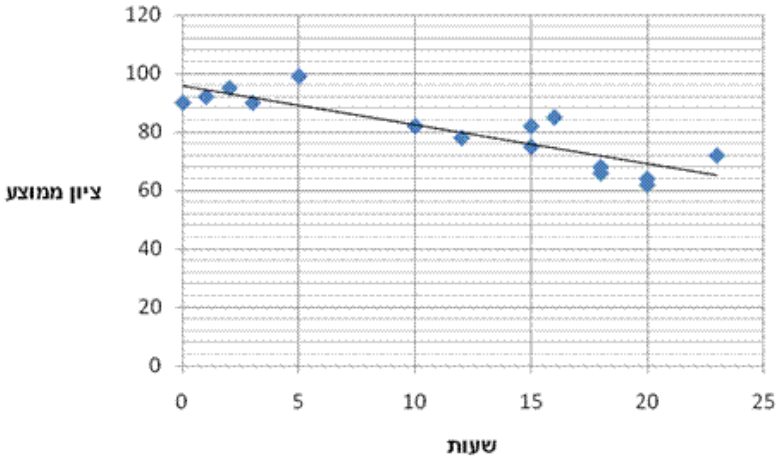
דוגמה (פתרון בהקלטה) :

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	?	-0.7	?
לשון	?	?	0.6
מתמטיקה	-0.1	?	?

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

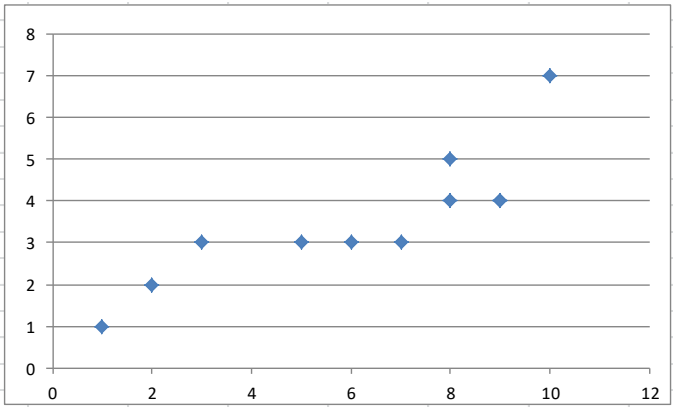
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

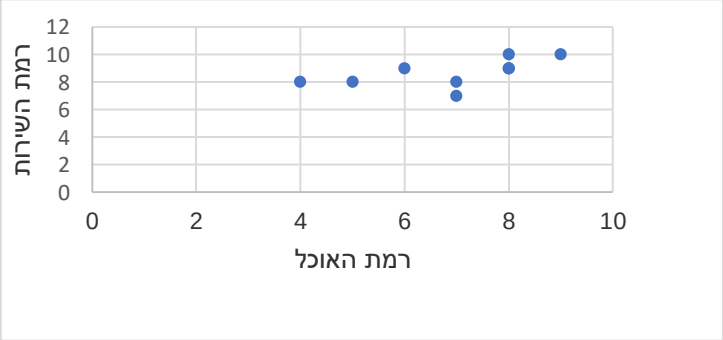
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

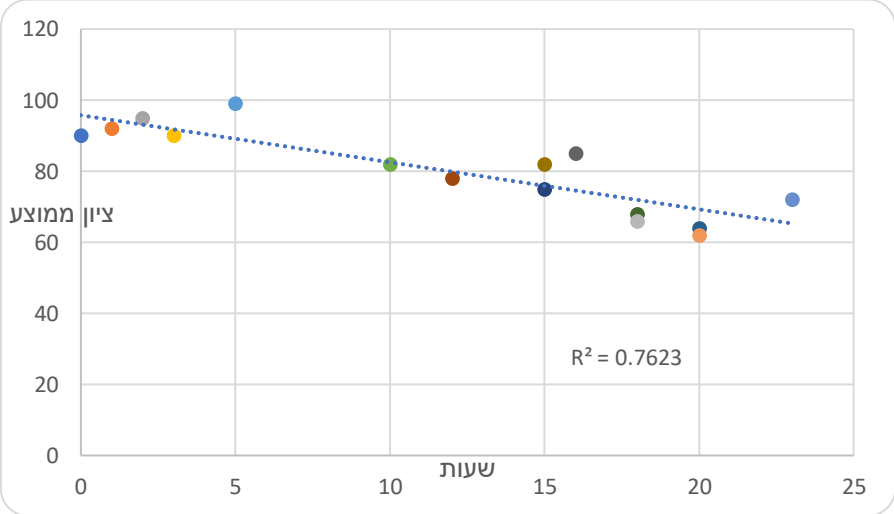
7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

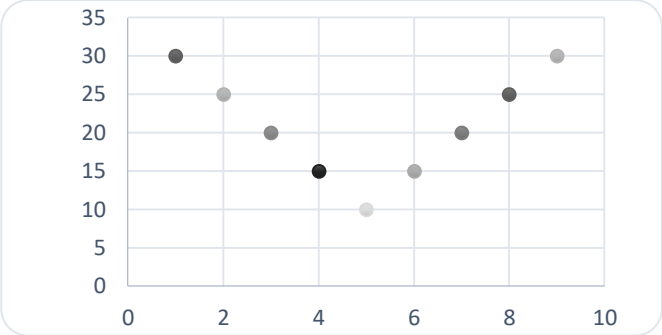


מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



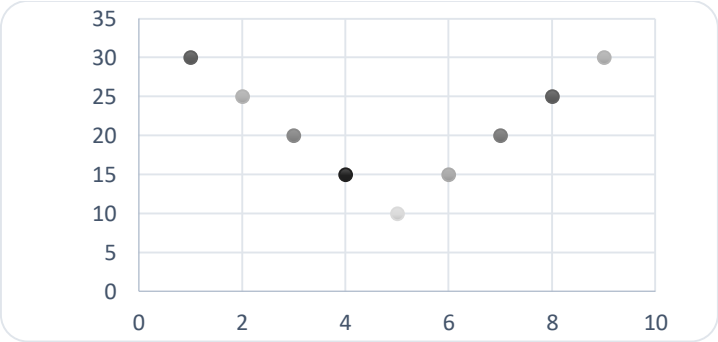
א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

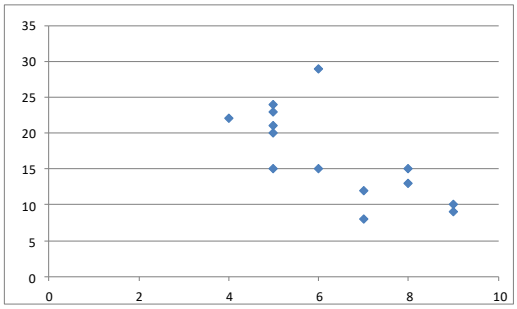
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:

X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

ו- Y (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.



11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r?

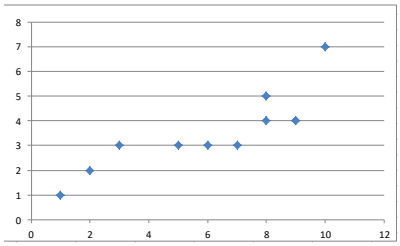
א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:

מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ___ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

		159
		170
		180
		185
		204
		224
		236
		212
		168
		189
		195
		163
		187
		206
		201
		223
		242
		203
		205
197.47	AVERAGE	
536.25	VARPA	

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. שעות בילוי. ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

2) א. להלן טבלה : ב. ספורט ולשון.

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	1	-0.7	0.1
לשון	-0.7	1	0.6
מתמטיקה	-0.1	0.6	1

3) א. ב״ת- מס׳ שעות התרגול, תלוי- ציון. ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי. ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

4) א. לעלות. ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

5) א. חלקי, חיובי. ב. קטן.

6) ד׳. 7) ד׳. 8) א׳. 9) ג׳. 10) א׳.

11) ג׳. 12) ד׳. 13) ב׳. 14) א׳. 15) א׳.

16) א׳. 17) ד׳. 18) א׳. 19) ד׳. 20) ד׳.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
X -מס' חדרים בדירה. Y-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

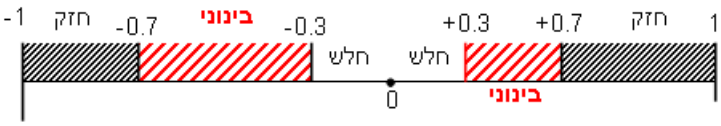
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה X: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה Y: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

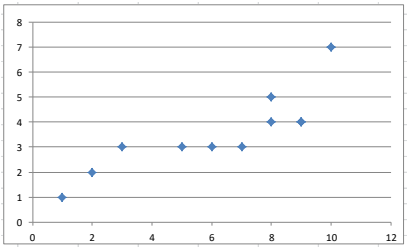
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש״ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש״ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

תשובות סופיות

1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב״ת: מס׳ חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. -0.9325. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

3) א. 0.8.

4) 0.8.

5) 1.

6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

7) ג׳.

8) א׳.

9) ב׳.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי (באמצעות טבלה של ערכים קריטיים) – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר:
r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים: $H_0:\rho=0$.

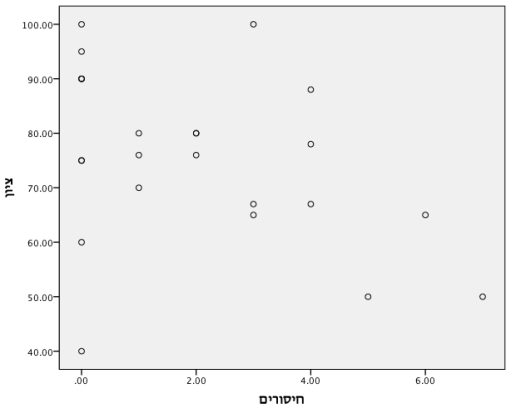
ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו-נורמלית.

את מקדם המדגם הקריטי, שנסמן ב- r_c, נוציא מתוך טבלה של ערכים קריטיים שמצורפת בהמשך.

השערת האפס:	$H_0:\rho=0$	$H_0:\rho=0$	$H_0:\rho=0$
השערת המחקר:	$H_1:\rho\neq 0$	$H_1:\rho<0$	$H_1:\rho>0$
כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס	$r\geq r_c$ א ו $r\leq -r_c$	$r\leq -r_c$	$r\geq r_c$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הדיקן ביקש לדגום סטודנטים כדי לבדוק את הקשר בין ציון הסטודנט בקורס למספר הפעמים שהוא החסיר שיעור בקורס.
דיאגרמת הפיזור שהתקבלה במדגם שבוצע:



מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?

מה ניתן לראות לגבי הקשר הלינארי בין המשתנים שהתקבל במדגם?

חושב האומד למקדם המתאם הלינארי על סמך 24 הסטודנטים שנדגמו והתקבל: -0.389.

מה משמעות של מקדם המתאם שהתקבל במדגם?

האם ניתן להגיד ברמת מובהקות של 5% שקיים מתאם לינארי שלילי בין מספר החיסורים של הסטודנטים מהקורס לבין הציון של הסטודנטים בקורס?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת ערכים קריטיים של מקדם המתאם הלינארי

0.0005	0.005	0.025	0.05	α / n
0.999	0.990	0.950	0.900	4
0.991	0.959	0.878	0.805	5
0.974	0.917	0.811	0.729	6
0.951	0.875	0.754	0.669	7
0.925	0.834	0.707	0.621	8
0.898	0.798	0.666	0.582	9
0.872	0.765	0.632	0.549	10
0.847	0.735	0.602	0.521	11
0.823	0.708	0.576	0.497	12
0.801	0.684	0.553	0.476	13
0.780	0.661	0.532	0.458	14
0.760	0.641	0.514	0.441	15
0.742	0.623	0.497	0.426	16
0.725	0.606	0.482	0.412	17
0.708	0.590	0.468	0.400	18
0.693	0.575	0.456	0.389	19
0.679	0.561	0.444	0.378	20
0.665	0.549	0.433	0.369	21
0.652	0.537	0.423	0.360	22
0.640	0.526	0.413	0.352	23
0.629	0.515	0.404	0.344	24
0.618	0.505	0.396	0.337	25
0.607	0.496	0.388	0.330	26
0.597	0.487	0.381	0.323	27
0.588	0.479	0.374	0.317	28
0.579	0.471	0.367	0.311	29
0.570	0.463	0.361	0.306	30
0.532	0.430	0.334	0.283	35

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

נחקר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X -ווותק	13	18	2	8	16	9	5	28	17	24
Y -השכלה	12	14	17	8	11	12	13	8	12	15

מקדם המתאם חושב והתקבל: 0.31-.

א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7.

א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי היא בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?

ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שהמתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם הוא חיובי?

3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8-.

א. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במ"מ?

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_0. ב.לא תשתנה.

2) א. לא. ב. נדחה את H_0.

3) א. נדחה את H_0. ב. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 27 - רגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 225

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X.
השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$, $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(Y_i - \overline{Y}\right) = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.

ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:
$\overline{X} = 14 \ , \ \overline{Y} = 8 \ , \ \mathrm{COV}\left(X,Y\right) = 7.5 \ , \ S_Y = 5 \ , \ S_X = 2$.

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.

ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?

ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?

ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?

ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y. כמו כן נתון: $\overline{X} = 1.5$, $S_x = S_y = 4$,
וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.8. ב. $Y = 0.8X + 0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

2) א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

3) א. 1.2. ב. 29. ג. $Y = 1.2X + 29$.

4) -0.2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 28 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 228

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $\left(\mu_{1\ldots},\mu_k\right)$ של k אוכלוסיות שונות.
לכן, בניתוח שונות, <u>השערות</u> המחקר הן:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1:$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

1) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

2) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.

3) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).
כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:
נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,....., $\overline{X}_k$ -ממוצע המדגם ה- k -י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות: $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\overline{X}_i - \overline{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות: $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[n_i - 1\right] \bullet \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \overline{X}]^2$

$SST = SSB + SSW$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F=\frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}}\sim F\left(k-1,n-k\right)$$

אזור דחיית H_0 : $1-\alpha$: $F>F_{(k-1,n-k)}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.

א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?

ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.

ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו:

"המתמיד"	"רבין"	"הס"
78	98	85
65	62	83
70	55	74
90	80	85
56		75

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.

ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?

ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.

ד. מלאו את טבלת ANOVA.

ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.

ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.
האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים.
השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם : 10 מ״ג, 20 מ״ג ו-30 מ״ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000
Within Groups	126.000	12	10.500		
Total	540.400	14			

pulse

Tukey HSD[a]

dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
30.00	5	71.0000	
20.00	5		80.2000
10.00	5		83.4000
Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!

ד. לטבלת הANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת ״טוקי״. ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה בתי ספר יש בעיר?

ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?

ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%

ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe[a]

school	N	Subset for alpha = 0.05: 1	Subset for alpha = 0.05: 2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי: סוג התרופה.
משתנה תלוי: הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ב. ניתוח שונות חד כיווני
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$
הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$, $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$, $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$.

ד. להלן טבלה:

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

ב. נדחה את H_0 .

ג. כן.

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

5) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

7) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$.

8) א. 5 ב. 25

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד. $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 29 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

1. הקדמה..... 237
2. תהליך ניתוח שונות דו כיווני 247

ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

<u>דוגמה :(פתרון בהקלטה)</u>

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי.
לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחר מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו.
ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב-a ואת מספר הרמות שלו ב-A. באותו האופן הגורם האחר יסומן ב-b, ואת מספר הרמות שלו נסמן ב-B. מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא $A\cdot B$.

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות a וגורם אחר להיות b. מהו A ומהו B?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- m את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם a עם רמה מסוימת של גורם b.

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של m?
- מהו הקשר המתמטי בין m לבין n, גודל המדגם?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

נסמן ב- a_1 את הרמה הראשונה של a, ב- a_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.

נסמן ב- b_1 את הרמה הראשונה של b, ב- b_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.

נסמן ב- $\mu_{i.}$ את התוחלת ברמה a_i. נסמן ב- $\mu_{.j}$ את התוחלת ברמה b_j. נסמן ב- μ_{ij} את התוחלת של תא ij.

<u>המשך הדוגמה:</u>

- מה המשמעות של $\mu_{1.}$ ושל $\mu_{.2}$?
- מה המשמעות של μ_{12} ושל μ_{21} ?

<u>השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני</u>

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי : H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי : H_0

אחרת : H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים : H_0

אחרת : H_1

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{A.}$

$H_1:$ אחרת

$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \cdots = \mu_{.B}$

$H_1:$ אחרת

$H_0:$ אין אינטראקציה בין שני הגורמים

$H_1:$ אחרת

<u>המשך הדוגמה:</u>

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם.
דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.

א. מהו המשתנה התלוי במחקר?

ב. כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?

ג. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.

א. מהו גודל המדגם?

ב. מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?

ג. כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?

ד. כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?

ה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

סוג בקבוק / גובה המדף	זכוכית	פלסטיק
נמוך	23 32	59 63
בינוני	47 55	88 90
גבוה	40 48	51 56

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

ב. מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?

ג. מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיווני?

ד. מהו ערכו של m ומהו ערכו של n?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד משש הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלות צלזיוס	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	6
6	C	40	6
7	C	40	7
8	C	40	6
9	C	60	9
10	C	60	8
11	C	60	7
12	C	60	10
13	w	30	9
14	w	30	9
15	w	30	9
16	w	30	10
17	w	40	12
18	w	40	13
19	w	40	11
20	w	40	11
21	w	60	14
22	w	60	14
23	w	60	15
24	w	60	13

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

א. כמה משתנים יש במחקר?
ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
ג. כמה רמות יש לכל גורם?
ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה יהיו השערות המחקר?
ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאלי:
א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
ג. סוג הדם של חולה.
ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
א. מבחן T להשוואת תוחלות.
ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
ד. מבחן T לתוחלת אחת.

7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
א. מבחן T להשוואת תוחלות.
ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

א. מבחן T להשוואת תוחלות

ב. ניתוח שונות חד-כיווני

ג. ניתוח שונות דו-כיווני

ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

9) בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

א. מבחן T להשוואת תוחלות.

ב. ניתוח שונות חד-כיווני.

ג. ניתוח שונות דו-כיווני.

ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

10) במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות/ יותר מ-2 כוסות.
2. מין הנחקר: גבר/אישה.
3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים.
מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

א. מבחן T להשוואת תוחלות.

ב. ניתוח שונות חד-כיווני.

ג. ניתוח שונות דו-כיווני.

ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות.
אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?

א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.

ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.

ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.

ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

תשובות סופיות

1) א. חוזק הקריעה. ב. אחד. סוג הבד.
ג. ניתוח שונות חד גורמי.

2) א. 18
ב. המשתנה התלוי: ציון במצב הנפש. המשתנם הב"ת: סוג חרדה, סוג הטיפול.
ג. 3,3 ד. 9
ה. ניתוח שונות דו גורמי.

3) א. ניתוח שונות דו גורמי. ב. 3,2
ג. H_0: אין אינטראקציה, H_1: יש אינטראקציה. ד. $m=2,\ n=12$

4) א. 3
ב. משתנים ב"ת: סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי: ציון הסרת כתמים.
ג. 3,2
ד. H_0: אין אינטראקציה בין הגורמים, H_1: אחרת.
ה. עיין בסרטון הוידאו.

5) א. כן. ב. לא.
ג. כן. ד. לא.
ה. תלוי. ו. כן.

6) ג.
7) ד
8) ב
9) ג
10) ג
11) ד

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקריים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג $A\times B$, כאשר A מייצג את מספר הרמות של גורם a, ו-B מייצג את מספר הרמות של גורם b.

במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך $A\times B\times C$, וכך הלאה.

<u>דוגמה</u>

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה / מין	b_1	b_2	b_3	סה"כ
נשים	8 4 0	6 8 10	4 6 8	54
גברים	6 10 14	0 2 4	9 12 15	72
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות.
ההנחות הן:

1. $A\times B$ הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל $A\times B$ האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל $A\times B$ האוכלוסיות אותה שונות, σ^2.

<u>הערה</u>: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות.
התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

<u>בהמשך לדוגמה</u>

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא:

$\bar{X}_{i.}$ – ממוצע המדגם ברמה i של גורם a

$\bar{X}_{.j}$ – ממוצע המדגם ברמה j של גורם b

$\bar{X}_{ij}$ – ממוצע המדגם בתא ij

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה:

סוג הדיאטה / מין	b_1	b_2	b_3	$\bar{X}_{i.}$
נשים				
גברים				
$\bar{X}_{.j}$				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

<u>בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים</u>

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא ij נחשב: $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

<u>בהמשך לדוגמה</u>

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

סוג הדיאטה / מין	b_1	b_2	b_3	$(\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$				

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים:

הסימון SS הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם a: $SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^{A} (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם b: $SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^{B} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה: $SS_{ab} = m \sum_{i=1}^{A} \sum_{j=1}^{B} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא):

$$SS_W = \sum_{i=1}^{A} \sum_{j=1}^{B} \sum_{k=1}^{m} (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^{A} \sum_{j=1}^{B} S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{A} \sum_{j=1}^{B} \sum_{k=1}^{m} (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

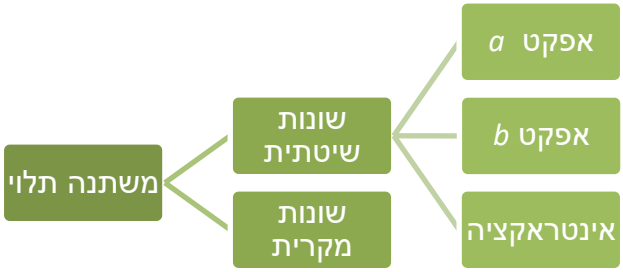
הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא:

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית: $SS_a + SS_b + SS_{ab}$. השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמם.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית: SS_W. השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות W מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות **בתוך** התאים.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

<u>בהמשך לדוגמה</u>

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים:

$SS_a =$

$SS_b =$

$SS_{ab} =$

$SS_T =$

$SS_W =$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a	$A-1$	SS_a	MS_a	$F_a = MS_a / MS_W$
b	$B-1$	SS_b	MS_b	$F_b = MS_b / MS_W$
ab	$(A-1)(B-1)$	SS_{ab}	MS_{ab}	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_W$
Within	$AB(m-1)$	SS_W	MS_W	
Total	$n\text{-}1=ABm-1$	SS_T		

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בהמשך לדוגמה: מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי F_a מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם a ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם a יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי. F_a יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן.
הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם a:

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_a > F_{1-\alpha}\left(df_a, df_W\right)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו:

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם b:

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_b > F_{1-\alpha}\left(df_b, df_W\right)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה:

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}\left(df_{ab}, df_W\right)$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

סוג בקבוק / גובה המדף	זכוכית	פלסטיק
נמוך	23 32	59 63
בינוני	47 55	88 90
גבוה	40 48	51 56

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה: 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יבול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.

ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי.
להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

הקבוצה	ממוצע	שונות
צבע רגיל על שיער בהיר	62	40
צבע רגיל על שיער כהה	51	44
צבע רגיל על שיער שיבה	45	42
צבע חדש על שיער בהיר	60	46
צבע חדש על שיער כהה	54	40
צבע חדש על שיער שיבה	44	42

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם a יש 4 רמות ולגורם b יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	*df*	SS	MS	F
a	?	318	?	?
b	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.

ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:

i. האם האינטראקציה מובהקת?

ii. האם גורם a משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?

iii. האם לגורם b יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?

ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?

ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.

ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

	b_1	b_2	b_3
a_1	8	14	11
a_2	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.
הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

מקור השונות	df	SS	MS	F
a				
b		281.7		
ab		71.7		
W		190.1		
T				

א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

תשובות סופיות

1) עיין בסרטון הוידאו.
2) א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.
ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו
3) עיין בסרטון הוידאו.
4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
5) א. 4 ב. 20 ג. עיין בסרטון הוידאו.
ד. עיין בסרטון הוידאו.
6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל