הנדסת המרחב

תוכן העניינים

הנדסת המרחב

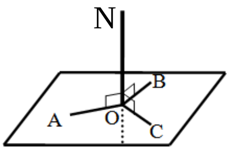
פרק 1 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

תוכן העניינים

הגדרות יסודיות:

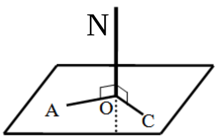
סיכום כללי:

הגדרה:



ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים CO , BO , AO שעל המישור.

משפט:

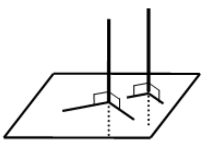


אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים CO , AO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

משפט:

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

משפט:

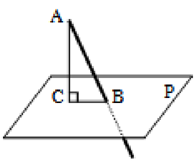


מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.

משפט:

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים.
באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

הגדרה:



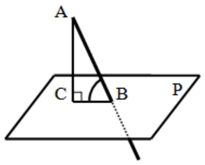
ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.
הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור.
באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P , AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

הגדרה:

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

הגדרה:

זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.
באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\sphericalangle ABC$.



הגדרה:

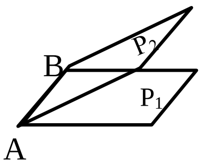
שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

הגדרה:

אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

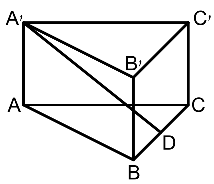
הגדרה:

שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.
ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.
באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים P_1 ו-P_2 הנקרא מקצוע.
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

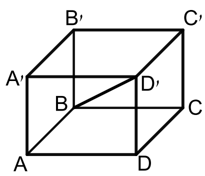


שאלות:

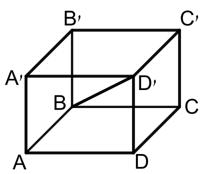
1) במנסרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$ הנקודה D היא אמצע המקצוע BC.
סמן את הזווית בין הישר A'D לבין הבסיס ABC.

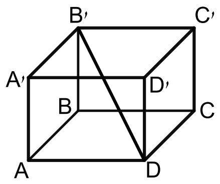


2) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
סמן את הזווית בין האלכסון BD' לבין הבסיס ABCD.

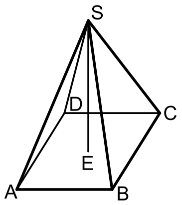


3) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה איור).
סמן את הזווית בין האלכסון AC' לבין הפאה D'C'CD.

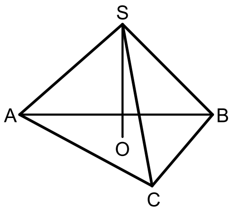




4) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'. סמן את הזוויות בין:
א. האלכסון B'D לבין הפאה B'C'CB.
ב. האלכסון B'D לבין הפאה D'C'CD.



5) SABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור).
סמן את הזווית בין המקצוע SB לבין הבסיס ABCD.



6) SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה
משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.
סמן את הזווית בין המקצוע SA לבין הבסיס ABC.

תשובות סופיות:

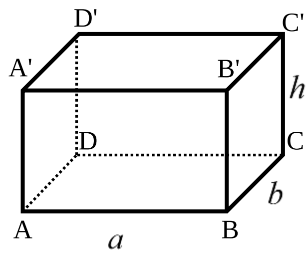
1) $\sphericalangle A'DA$
2) $\sphericalangle D'BD$
3) $\sphericalangle AC'D$
4) א. $\sphericalangle DB'C$ ב. $\sphericalangle B'DC'$
5) $\sphericalangle SBE$
6) $\sphericalangle SAO$

תיבה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב (ABCD ו-A'B'C'D') הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



נוסחאות:

תיאור מילולי	הנוסחה
שטח בסיס התיבה	$S=a\cdot b$
נפח התיבה	$V=a\cdot b\cdot h$
שטח מעטפת התיבה	$M=2h\left(a+b\right)$
שטח פנים	$P=2h\left(a+b\right)+2ab$

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסיה הם ריבועים. מתקיים: $a=b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a=b=h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

שאלות:

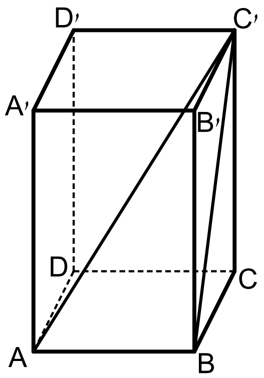
1) בתיבה 'ABCDA'B'C'D שבסיסה ריבוע,
אורך אלכסון הבסיס AC הוא 15.2 ס"מ.
אורך המקצוע הצדדי 'AA הוא 10 ס"מ.

א. חשב אורך מקצוע הבסיס.

ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.

ג. חשב את 'BC, אלכסון הפאה BB'C'C, ואת אלכסון התיבה 'AC.

ד. חשב את זווית $\sphericalangle AC'B$, שבין האלכסון 'BC בפאה BB'C'C לבין אלכסון התיבה 'AC.



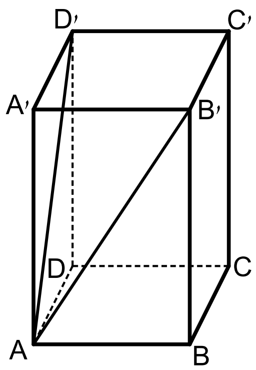
2) נתונה תיבה 'ABCDA'BC'D שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון 'AD של הפאה הצדדית ADD'A' הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים 'AD ו- 'AB היא בת $58°$.

א. חשב את אורך אלכסון הבסיס, 'B'D.

ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס AB.

ג. חשב את גובה התיבה 'AA.

ד. חשב את נפח התיבה.

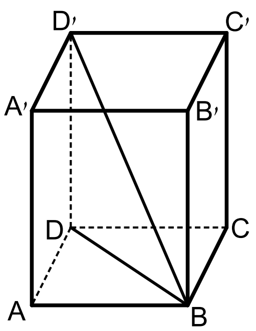


3) נתונה תיבה 'ABCDA'BC'D שבסיסה ריבוע.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 16 ס"מ ונפח התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:

א. גובה התיבה 'DD.

ב. הזווית שבין אלכסון התיבה 'BD לבסיס ABCD.

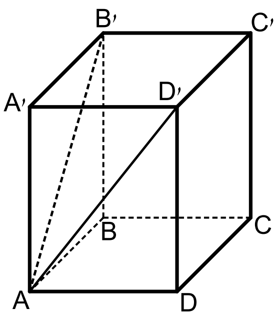
ג. אורך מקצוע הבסיס AB.



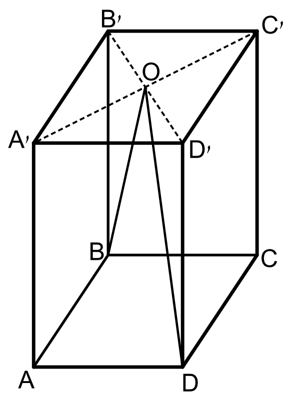
4) בתיבה 'ABCDA'B'C'D, שבסיסה ABCD הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא בת $48°$.

א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון 'B'D.

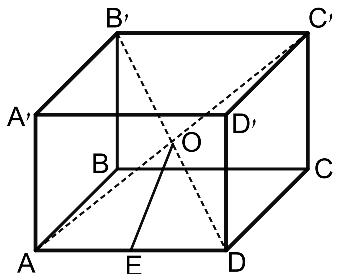
ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.



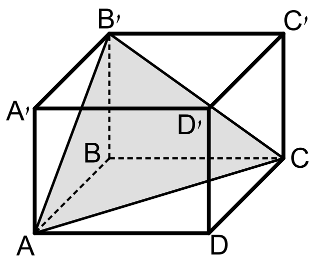
5) בתיבה ריבועית ABCDA'B'C'D' מעבירים את האלכסונים B'D' ו-A'C' במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD.
נתון כי: $\sphericalangle BOD = 23°$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.
א. חשב את היקף המשולש BOD.
ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה AA'D'D.



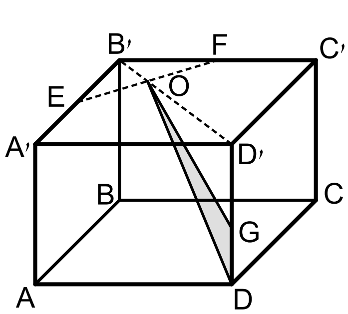
6) בתיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים AC' ו-B'D.
האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה.
מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש-E היא אמצע המקצוע AD.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
א. מצא את אורך גובה התיבה.
ב. מצא את אורך הקטע OE.



7) בתיבה ריבועית וישרה ABCDA'B'C'D' מסמנים את אורך הגובה ב- h.
מעבירים את הקטעים AB' , AC ו-B'C כך שנוצר המשולש AB'C כמתואר באיור.
הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש AB'C ומישור הבסיס ABCD היא α.
א. הבע באמצעות h ו- α את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
ב. הבע באמצעות h ו- α את נפח התיבה.



8) בתיבה הריבועית ABCDA'B'C'D' שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון B'D'.
הנקודות E ו-F נמצאות על אמצעי המקצועות A'B' ו-B'C' כך שהקטע EF חותך את האלכסון B'D' בנקודה O.
מקצים נקודה נוספת G - הנמצאת על הגובה DD' כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו-DO כך שנוצר המשולש DOG. אורך מקצוע הבסיס הוא k וגובה התיבה הוא h.
א. הבע באמצעות k ו- a את שטח המשולש DOG.
ב. מצא את היחס: $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{D'OG}$.



9) בתיבה 'ABCDA'B'C'D הבסיס ABCD הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h.
נתון : $\sphericalangle A'DC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא : $\dfrac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos\beta}}$.

ב. לאלו ערכים של β יש פתרון לבעיה?

תשובות סופיות:

1) א. 10.748 ס"מ. ב. $V=$ 1155.2 סמ"ק , $S=$ 660.959 סמ"ר.
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\sphericalangle AC'B = 36.21°$.

2) א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. $V=$ 1622.485 סמ"ק.

3) א. 11 ס"מ. ב. $34.51°$ ג. 11.313 ס"מ.

4) א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.

5) א. 51 ס"מ. ב $8.1°$.

6) א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.

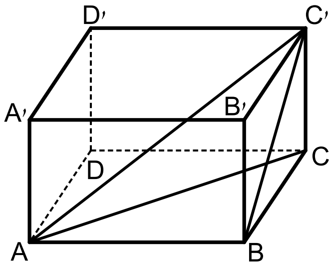
7) א. $\dfrac{h\sqrt{2}}{\tan\alpha}$ ב. $\dfrac{2h^3}{\tan^2\alpha}$.

8) א. $S_{DOG} = \dfrac{3ka}{4\sqrt{2}}$ ב. $\dfrac{a}{h} = \dfrac{1}{2}$.

9) ב. $0° < \beta < 90°$.

תיבה שבבסיסה מלבן:

שאלות:



10) בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:
12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC. הזווית בין 'BC
אלכסון הפאה, BB'C'C, לבסיס ABCD היא $40°$.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.

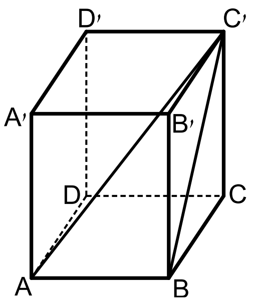
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC.

ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה 'AC לבסיס ABCD.

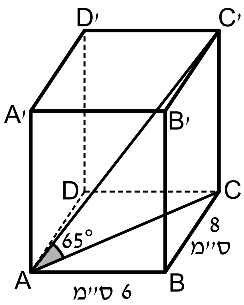
ד. חשב את אורך אלכסון התיבה 'AC.

ה. חשב את נפח התיבה.

ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



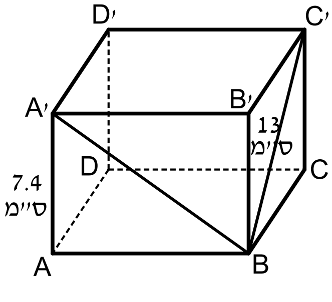
11) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
אורך צלע הבסיס: 9 ס"מ = AB.
אלכסון הפאה BB'C'C הוא: 15 ס"מ = 'BC.
חשב את הזווית בין 'BC, אלכסון הפאה BB'C'C,
לאלכסון התיבה 'AC.



12) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D', בה מתקיים:
8 ס"מ = AD , 6 ס"מ = AB. הזווית בין אלכסון
התיבה 'AC לבסיס ABCD היא בת $65°$.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.

ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



13) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבבסיסה
מלבן. גובה התיבה 'AA הוא 7.4 ס"מ.
אורך אלכסון הפאה 13 ס"מ = 'BC.
הזווית בין אלכסון הפאה A'B לבסיס ABCD
היא בת $37°$.

א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.

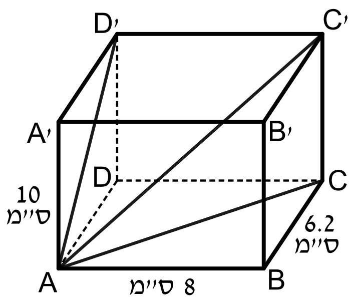
ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.

14) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:
BC = 6.2 ס"מ, AB = 8 ס"מ, AA' = 10 ס"מ.
חשב את:

א. אלכסון הבסיס, AC, אלכסון הפאה, AD' ואלכסון התיבה, AC'.

ב. הזווית בין AD', אלכסון הפאה ADD'A', לאלכסון התיבה AC': $\sphericalangle D'AC'$.

ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.

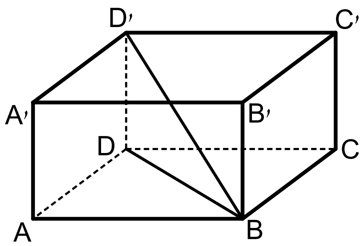


15) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'. AB = 12 ס"מ.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ.
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק.
חשב את:

א. רוחב הבסיס של התיבה, BC.

ב. גובה התיבה, AA'.

ג. הזווית בין אלכסון התיבה BD' לבסיסה ABCD.



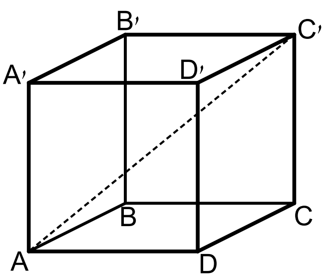
16) בתיבה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור), נתון:
AD = 12 ס"מ, DC = 8 ס"מ, CC' = 14 ס"מ.

א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס, AC.

ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה AC' לבין הבסיס ABCD.

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.

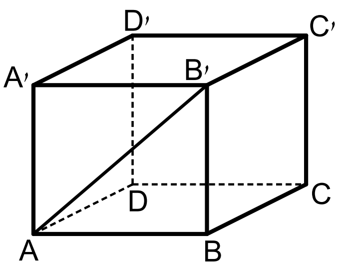


17) בתיבה ABCDA'B'C'D' (ראה ציור) נתון:
AB = 12 ס"מ, AD = 10 ס"מ.
הזווית שבין אלכסון הפאה AB' לבין הבסיס ABCD היא בת $35°$.

א. חשב את גובה התיבה BB'.

ב. חשב את AD', אלכסון הפאה ADD'A'.

ג. חשב את הזווית שבין AD' לבין הבסיס ABCD.



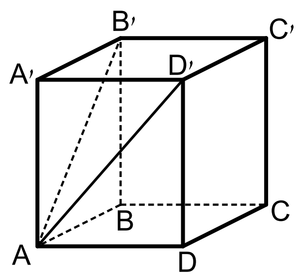
18) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור).
אורך גובה התיבה AA' הוא 10 ס"מ.
אורך AB', אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.

א. חשב את אורך המקצוע AB.

הזווית שבין AD', אלכסון הפאה $ADD'A'$,
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $40°$.

ב. חשב את נפח התיבה.

ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.

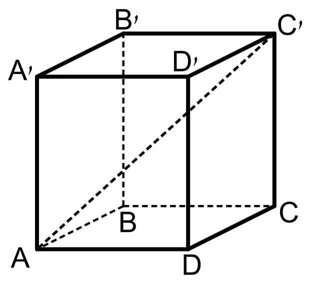


19) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה
$AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ (ראה ציור).
הזווית שבין אלכסון התיבה, AC'
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $38°$.

א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה התיבה.

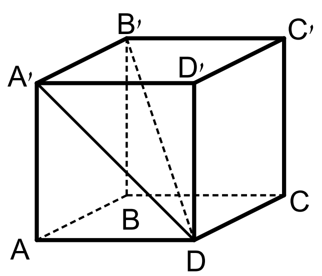
ג. חשב את שטח פני התיבה.



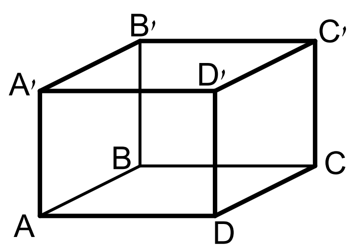
20) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו סרטוט)
שבה: $AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AA' = 8$ ס"מ.

א. חשב את אורך $A'D$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.

ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.



21) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$AA' = 7$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ.
חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית
בינו לבין בסיס התיבה.



22) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.
מעבירים את האלכסונים BD ו-BD' כך
שמתקיים: $\sphericalangle DBD' = \sphericalangle ABD = \alpha$.
אורך האלכסון BD יסומן ב-a.

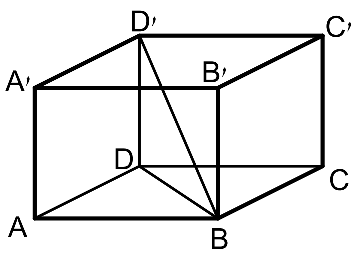
א. הבע באמצעות a ו-α את:

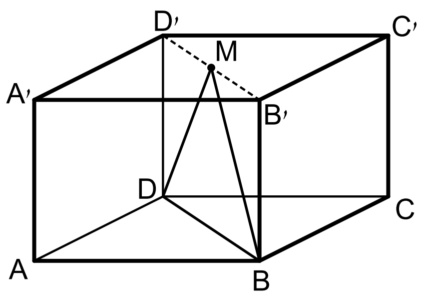
i. אורך התיבה – AB.

ii. רוחב התיבה – AD.

iii. גובה התיבה – AA'.

ב. מצא את α אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.





23) בתיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון B'D' בבסיס העליון.
מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו-BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD $\left(\sphericalangle BMD = 90^\circ\right)$.
אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$
ואורך הקטע DM הוא $4a$.

א. הבע באמצעות a את אורך המקצוע AD.

ב. מעבירים את הקטע AM. חשב את זווית MAD.

ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המשולש MAD הוא 125 סמ״ר (עגל למספר שלם).

24) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $BD' = m$. הזווית שבין האלכסון BD' לבסיס ABCD היא α והזווית שבין האלכסון BD' לפאה צדדית ABB'A' היא γ.
הבע באמצעות m, α ו-γ את נפח התיבה.

תשובות סופיות:

10) א. $CC'=$ 4.195 ס"מ ב. $AC=$ 13 ס"מ ג. $17.886°$
ד. $AC'=$ 13.66 ס"מ ה. $V=$ 251.7 סמ"ק ו. $M=$ 142.63 סמ"ר.

11) $\sphericalangle ACB=30.96°$.

12) א. $CC'=$ 21.44 ס"מ ב. $V=$ 1029.6 סמ"ק, $P=$ 696.96 סמ"ר.

13) א. $AB=$ 9.82 ס"מ, $BC=$ 10.688 ס"מ ב. $M=$ 303.5184 סמ"ר, $P=$ 513.43 סמ"ר.

14) א. $AC=$ 10.121 ס"מ, $AD'=$ 11.766 ס"מ, $AC'=$ 14.227 ס"מ
ב. $34.22°$. ג. $V=$ 496 סמ"ק, $M=$ 284 סמ"ר.

15) א. $BC=$ 9 ס"מ ב. $h=$ 8 ס"מ ג. $28.072°$.

16) א. $AC=$14.42 ס"מ ב. $44.15°$ ג. 560 סמ"ר ד. 752 סמ"ר.

17) א. $BB'=$ 8.4 ס"מ ב. $AD'=$ 13.06 ס"מ ג. $40.03°$

18) א. $AB=$ 9.8 ס"מ ב. $V=$ 1,167.9 סמ"ק ג. 434.4 סמ"ר.

19) א. 15.62 ס"מ ב. $h=$ 12.2 ס"מ ג. $P=$ 776.8 סמ"ר.

20) א. $A'D=$ 14.42 ס"מ ב. $B'D=$ 17.55 ס"מ.

21) $BD'=$ 16.031 ס"מ, $\sphericalangle D'BD=25.89°$.

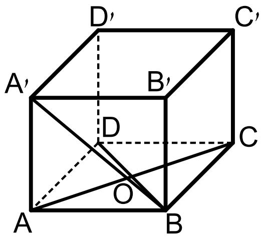
22) א. i. $a\cos\alpha$ ii. $a\sin\alpha$ iii. $a\tan\alpha$ ב. $53.13°$.

23) א. $a\sqrt{7}$ ב. $70.6°$ ג. $a=5$.

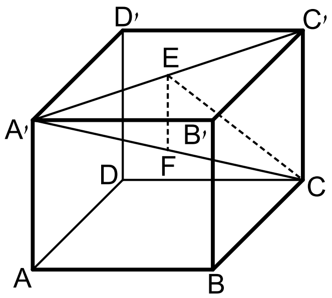
24) $V=m^3\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sqrt{\cos^2\gamma-\sin^2\alpha}$.

הקובייה:

שאלות:



25) בקובייה ABCDA'B'C'D' אורך המקצוע הוא 8 ס"מ.
הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.
מצא את הזווית שבין OA' לפאה ABB'A'.



26) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' מעבירים את האלכסון A'C' בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון A'C' מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע A'E. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון A'B'C'D'.
(EF מאונך ל-A'C').
הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי A'C.
נסמן: $\sphericalangle A'CE = \alpha$, $A'F = m$.
הבע באמצעות α ו-m את נפח הקובייה.

תשובות סופיות:

25) $24.095°$.

26) $(m \sin 2\alpha \cos\alpha)^3$.

הנדסת המרחב

פרק 2 - טריגונומטריה במרחב - המנסרה

תוכן העניינים

מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב.
המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה.
כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

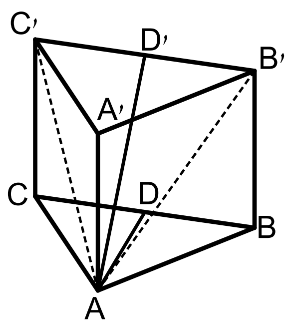
נעסוק במנסרות הבאות:
- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

הערה:
התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

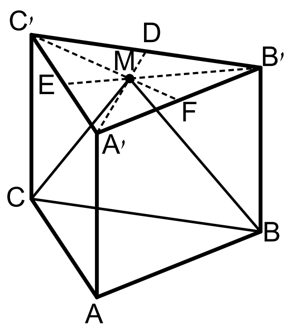
שאלות:

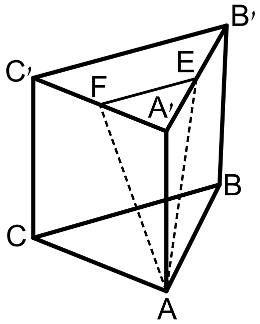
1) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים 'AB ו-'AC כך שנוצר המשולש 'AB'C.
הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע 'B'C במשולש 'AB'C היא $40°$.
אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.

א. חשב את שטח המשולש 'A'B'C.
ב. חשב את נפח המנסרה.



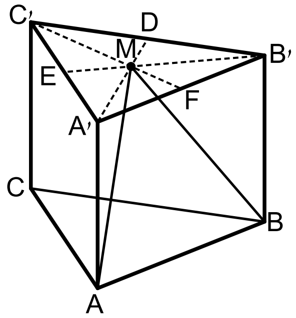
2) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון 'A'B'C את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים בנקודה M. מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו-MB כך שנוצר המשולש MCB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה.
חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC.





3) במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות A'B' ו-A'C'. מעבירים את הקטעים AE ו-AF, כך שנוצר המשולש AEF.
אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.

א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF.
ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF.



4) במנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון A'B'C' את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים ב-M.
מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו-MB כך שנוצר המשולש MAB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.

א. הבע באמצעות a את אורך הקטע MA.
ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC.
ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC.
ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה AA'B'B.
ה. הבע באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.

תשובות סופיות:

1) א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.

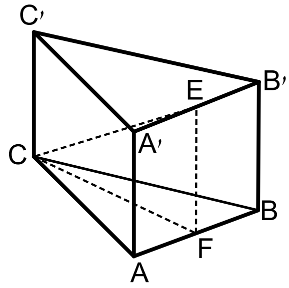
2) $73.89°$.

3) א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. $19.84°$.

4) א. $MA = 2.3a$ ב. $60°$ ג. $73.9°$ ד. $14.47°$ ה. $P = 15.46a^2$.

מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

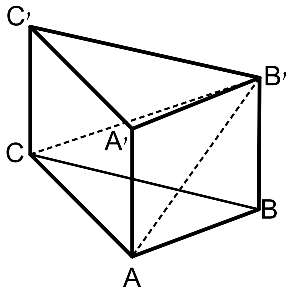
שאלות:



5) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$.
מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו-AB מעבירים את הקטע EF.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא k ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס AC. נסמן: $\sphericalangle FCE = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF = CE$, וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.



6) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$ מעבירים את האלכסונים AB' ו-CB' כך שנוצר המשולש $AB'C$.
ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC ואנך למקצוע AC במשולש $AB'C$ היא $45°$ (האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E).
זוויות הבסיס ABC הן $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = 75°$, $\sphericalangle ACB = 30°$
גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

א. מצא את אורך המקצוע AC.

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

7) נתונה מנסרה $ABCA'B'C'$ שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$, אורך השוק היא k וזווית הראש היא γ. הזווית שבין המישור ABC למישור ABC' היא β. הבע באמצעות k, γ ו- β את נפח המנסרה.

תשובות סופיות:

5) א. $V = \frac{15k^3 \tan\alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק.

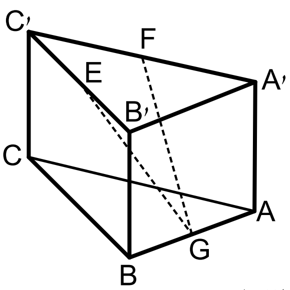
6) א. 10 ס"מ. ב. $26.56°$.

7) $V = \frac{1}{2}k^3 \sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \tan\beta$.

מנסרה שבבסיסה משולש ישר זווית:

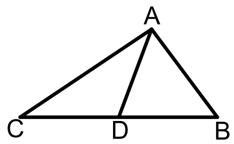
שאלות:

8) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$,
הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו-AB
כמתואר באיור.
מסמנים את מידות הבסיס ABC: $AB = 5t$, $BC = 12t$.
הזווית שבין הקטע GE למישור הבסיס ABC היא $36.86°$.

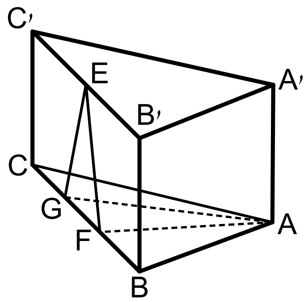


א. הבע באמצעות t את גובה המנסרה.
ב. חשב את הזווית שבין הקטע GF ולמישור הבסיס ABC.
ג. מצא את t אם ידוע כי אורך הקטע GF הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

9) ענה על הסעיפים הבאים:



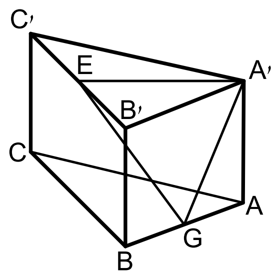
א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח. כלומר, הקטע AD הוא תיכון במשולש ABC. הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.



במנסרה $ABCA'B'C'$ שבבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$ הנקודות F ו- G מחלקות את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים.
הנקודה E היא אמצע המקצוע $B'C'$.
ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך המקצוע BC הוא 24 ס"מ.
שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.

ב. איזה משולש הוא המשולש EFG? מצא את זוויותיו.
ג. מצא את גובה המנסרה.
ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB.
(רמז: התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).
ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

10) לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית $\left(\measuredangle ABC = 90^\circ\right)$.
ידוע כי הפאה הצדדית AA'B'B היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB.
הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי המקצועות B'C' ו-AB בהתאמה.
מעבירים את הקטעים A'G, A'E ו-GE.



א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה AA'B'B.

ג. חשב את זווית EA'G.

תשובות סופיות:

8) א. $4.875t$ ב. 39.1° ג. $t = 8$.

9) ב. משולש שווה שוקיים. $66.42^\circ, 47.15^\circ$ ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.

ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.

10) א. $\measuredangle EGH = 32.31^\circ$ ב. $\measuredangle B'GE = 53.3^\circ$

ג. $\measuredangle GA'E = 71.93^\circ \sim 72^\circ$.

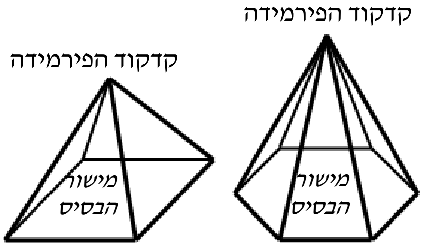
הנדסת המרחב

פרק 3 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

תוכן העניינים

פירמידה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:



הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה.
בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

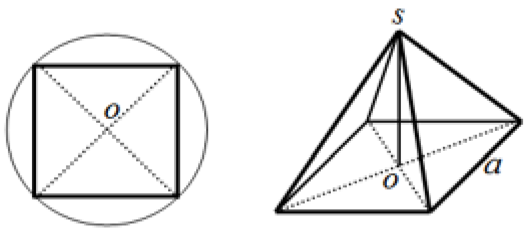
הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



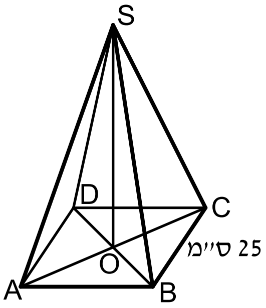
תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.

נפח פירמידה:

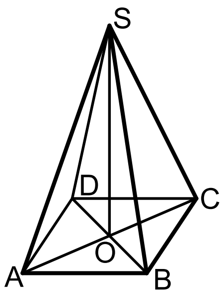
נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה h הוא: $V=\frac{S\cdot h}{3}$.

שאלות:

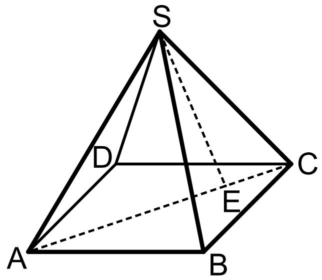
1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ.
הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת $35°$.
א. חשב את אלכסון הבסיס.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית
שבין SE לבסיס הפירמידה.



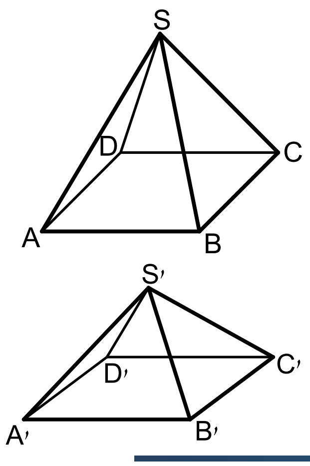
2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.
ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a.
אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E
המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE}=\frac{1}{3}\right)$.
מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.
א. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.
ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.
ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.



4) נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: SABCD ו-S'A'B'C'D'.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא a וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא a.
א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.
ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך
שנפחן יהיה זהה והוא: a^3.
מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה SABCD
למקצוע הצדדי של הפירמידה S'A'B'C'D'.
ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה,
הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת?
הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.



5) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ.
חשב את:
א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.
ב. גובה הפירמידה.
ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.
ד. נפח הפירמידה.
ה. שטח הפנים של הפירמידה.

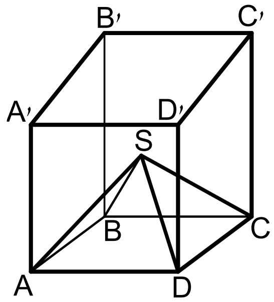
6) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא α.
הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

7) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא a והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β.
זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ. הבע באמצעות β את $\sin\gamma$.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β. הוכח: $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

9) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
גובה הפירמידה הוא h והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא β.
הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\sqrt{-2\cos\beta}\cdot\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

10) בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המקצועות שווים.
בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה.
מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.



תשובות סופיות:

1) א. 35.36 ס"מ ב. $h=$ 12.378 ס"מ ג. 44.72°.

2) א. 19.079 ס"מ ב. $P=$ 601.89 ס"מ ג. 64.896°.

3) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. 6.9° ג. $a=2$.

4) א. $V_{SABCD}=\frac{2}{3}a^3 > V_{S'A'B'C'D'}=\frac{4}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$

ג. דנה טועה - $P_{SABCD}\approx 7a^2 \neq P_{S'A'B'C'D'}=9a^2$.

5) א. 63.77° ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. 70.79° ד. 478.42 סמ"ק

ה. 403.97 סמ"ר.

6) $M=2b^2\sqrt{\frac{1}{2}\tan^2\alpha+\frac{1}{4}}$, $V=\frac{b^3\tan\alpha}{3\sqrt{2}}$.

7) $\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta}}$.

8) הוכחה.

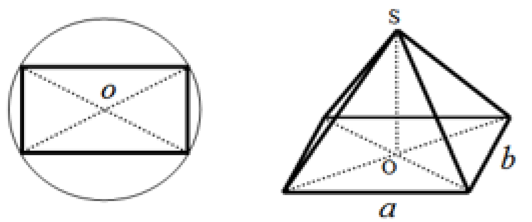
9) הוכחה.

10) 30°.

פירמידה שבסיסה מלבן:

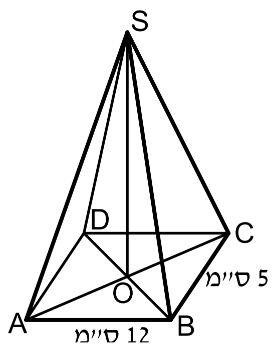
סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

שאלות:

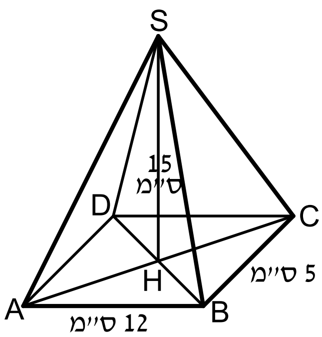


11) נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: 12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC.
אורך גובה הפירמידה הוא: 15 ס"מ = SO.

א. חשב את נפח הפירמידה.

ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



12) נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: 12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC.
אורך גובה הפירמידה הוא: 15 ס"מ = SH.

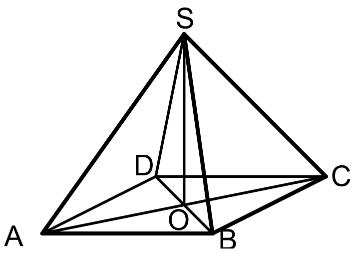
א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.

ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

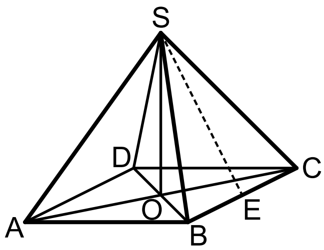
ד. הנקודה E היא אמצע BC.
חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.

13) נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן.
נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס״מ.
גובה הפירמידה SO הוא 12 ס״מ.



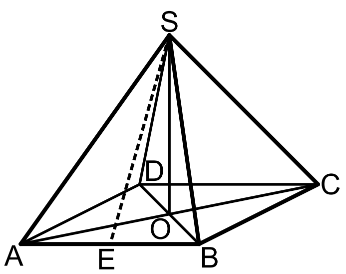
א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $40°$.
חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

14) נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
E אמצע BC. 16 ס״מ $= AB$. גובה הפירמידה: 10 ס״מ $= SO$.



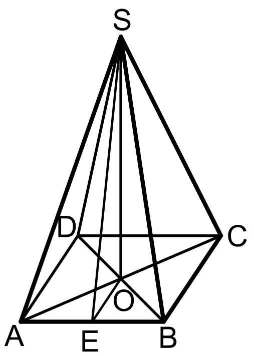
א. חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ״ק.
ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB.
חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.

15) נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן.
זווית הראש של פאה צדדית SAB היא $56°$.
אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס״מ.



א. חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
ג. נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס״מ.
חשב את גובה הפירמידה.
ד. חשב את נפח הפירמידה.
ה. חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
ו. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

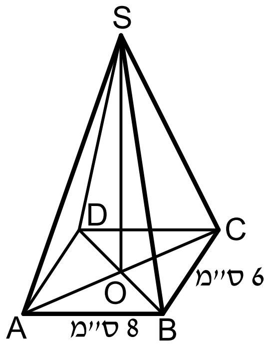
16) נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס״מ.
הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס״מ.
גובה הפירמידה SO הוא 18 ס״מ.



א. חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

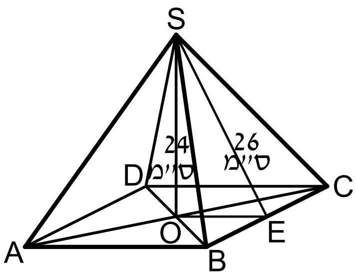
17) נתונה פירמידה ישרה SABCD.
הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: AB = 8 ס"מ, BC = 6 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.

א. חשב את הזווית $\sphericalangle CSA$.
ב. חשב את הזווית $\sphericalangle CSB$.
ג. חשב את נפח הפירמידה.



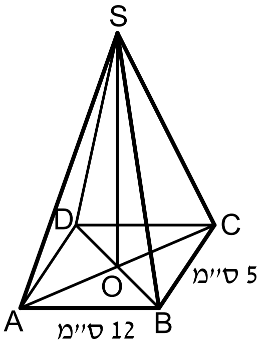
18) נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ.
הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ.
חשב את:

א. אורך המקצוע AB.
ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.
ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.
ד. חשב את אורך המקצוע BC.



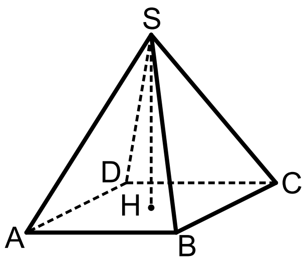
19) נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
בסיס הפירמידה הוא מלבן.
אורכי צלעות הבסיס הם: BC = 5 ס"מ, AB = 12 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 42°.

א. חשב אורך מקצוע צדדי.
ב. חשב את שטח הפאה SBC.
ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.

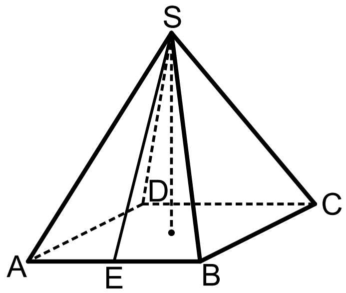


20) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: AD = 17 ס"מ, AB = 25 ס"מ, SH = 12 ס"מ.

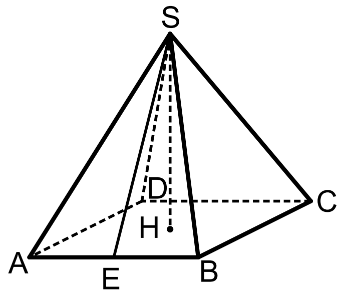
א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.
ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.



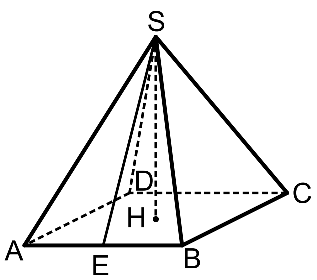
21) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $= SE$.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את נפח הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.



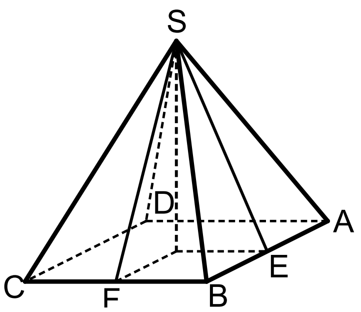
22) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 16$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 12 ס"מ $= SE$.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.



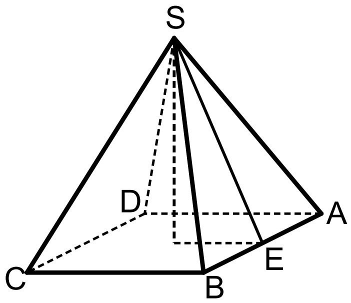
23) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 20$ ס"מ, $SH = 8$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 12 ס"מ $= SE$.
א. חשב את האורך AD.
ב. חשב את אורך DH.
ג. חשב את נפח הפירמידה.



24) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB.
הזווית שבין הישר SE לבסיס היא בת $55°$.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
ד. חשב את שטח הפאה SAB.

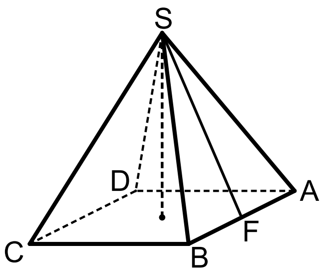


25) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $= SE$.



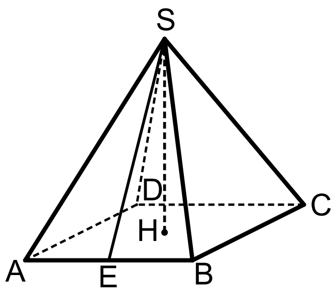
א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.
ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB, אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

26) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: 15 ס"מ $= AD$, 20 ס"מ $= AB$.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת $38°$.



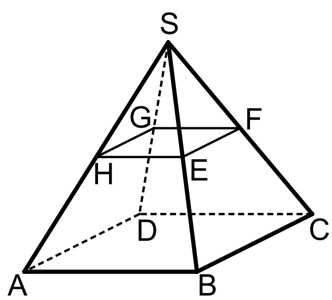
א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפירמידה.

27) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: 15 ס"מ $= AD$, 20 ס"מ $= AB$.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת $38°$.



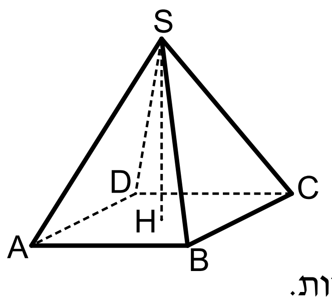
א. חשב את גובה הפאה SAB.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

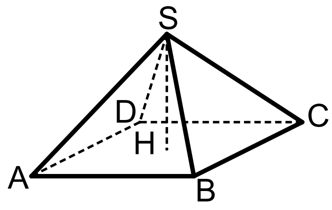
28) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH.
ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ.
הזווית HSF היא בת $50°$.



א. מצא את מידות הבסיס ABCD.
ב. מצא את גובה הפירמידה.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

29) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן:
האחת- SABCD והשנייה- S'A'B'C'D'.
הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.
ידוע כי: $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$
וכי: $A'B' = 3k$, $B'C' = k$, $H'S' = 2k$.

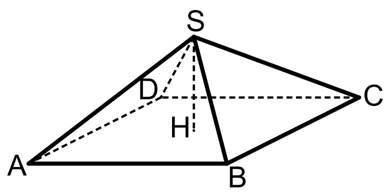




א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.
i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.

ב. מצא את הערך של k בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפח של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.

30) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- t .
כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.



א. הבע באמצעות t את אורך המקצוע AB.
ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.
ג. חשב את הזויות שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.
ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N.
מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N.
חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

תשובות סופיות:

11) א. $V =$ 300 סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. $66.57°$.

12) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. $M =$ 263.26 סמ"ר ד. $68.2°$.

13) א. 13 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC =$ 8.89 ס"מ
ד. $AB =$ 4.579 ס"מ , $V =$ 162.32 סמ"ק

14) א. $51.34°$ ב. $BC =$ 9 ס"מ ג. $65.77°$.

15) א. $SE =$ 11.284 ס"מ ב. $SA =$ 12.78 ס"מ ג. $h =$ 10.551 ס"מ
ד. $V =$ 337.632 סמ"ק ה. $69.24°$ ו. $55.65°$.

16) א. $AD =$ 17.435 ס"מ ב. $SF =$ 19.5 ס"מ ג. $M =$ 640 סמ"ר.

17) א. $34.21°$ ב. $20.328°$ ג. $V =$ 260 סמ"ק.

18) א. $AB =$ 20 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC =$ 15 ס"מ.

19) א. 6.796 ס"מ ב. $S_{\Delta SBC} =$ 16.282 סמ"ר ג. $h =$ 2.533 ס"מ.

20) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. $38.44°$.

21) א. $h =$ 20.68 ס"מ ב. $V =$ 2068.2 סמ"ק ג. $70.07°$.

22) א. $h =$ 8.94 ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. $37.45°$.

23) א. $AD =$ 17.89 ב. $DH =$ 13.42 ס"מ ג. $V =$ 954.1 סמ"ק.

24) א. $h =$ 14.28 ס"מ ב. $62.29°$ ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר.

25) א. $50.6°$ ב. $BC =$ 27.93 ס"מ ג. $AB =$ 6.32 ס"מ.

26) א. 29.04 ס"מ ב. $75.03°$ ג. $h =$ 28.05 ס"מ.

27) א. 29.04 ס"מ ב. $h =$ 28.05 ס"מ ג. $28.27°$.

28) א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.

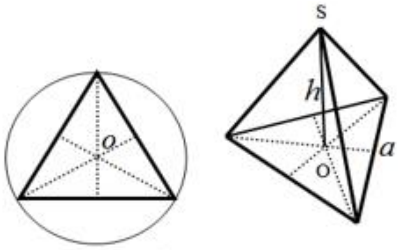
29) א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'A'B'C'D'} \approx 11.68k^2$, $P_{SABCD} \approx 11.245k^2$.
ii. נכון. הנפח הוא: $V = 2k^3$.
iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: $51.67°$, $69.56°$.
vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$. ב. $k = \sqrt[3]{16}$.

30) א. $AB = t\sqrt{15}$ ב. $\sphericalangle SHM = 27.31°$ ג. $\sphericalangle ASC = 126.86°$
ד. $\sphericalangle NMH = 14.47°$.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

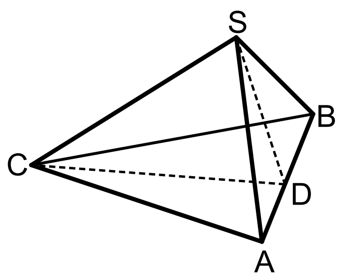
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

שאלות:

31) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC.
זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא $50°$ ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.



א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.
ב. מצא את גובה המנסרה.
ג. חשב את הזווית SDC.
ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

32) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.
א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.
ב. חשב את גובה פירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.
ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

33) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β. זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ.
הוכח: $\sin\gamma \cdot \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$.

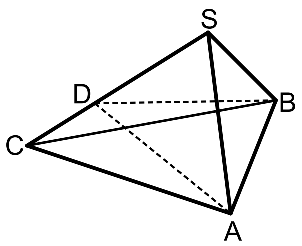
תשובות סופיות:

31) א. 10 ס"מ.	ב. 5.21 ס"מ.	ג. 61°	ד. 42° .
32) א. 60.339°	ב. $\sqrt{148}$ ס"מ.	ג. 74.106°	ד. 67.2° .

33) הוכחה.

פירמידה שבבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות:



34) נתונה פירמידה ישרה SABC שבבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$. מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\sphericalangle ADB=42^\circ$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.
הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD}=\frac{2}{3}$.

א. חשב את אורך הגובה AD.
ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.
ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

35) נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC.
הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC=BC)$, אורך שוקו k וזווית הראש שלו היא 2γ. אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k.
הבע באמצעות k ו-γ את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

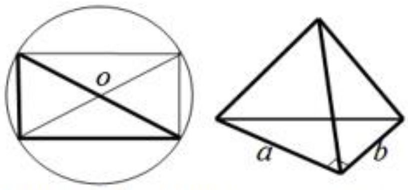
34) א. 11.16 ס"מ. ב. 53.13° ג. 47.27 סמ"ר.

35) $V=\frac{k^3\sin 2\gamma\cdot\sqrt{4\cos^2\gamma-1}}{12\cos\gamma}$.

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

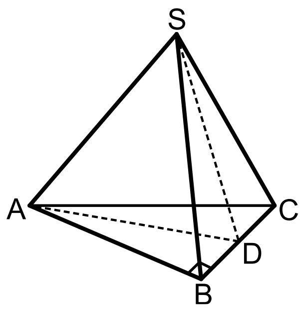
סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן
ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש
האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

שאלות:



36) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.
ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו נסמן: $SA = AD = 2m$.
הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\sphericalangle SDA = \alpha$.

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות α , m את גובה הפירמידה.

37) נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.
אחד מהניצבים במשולש הוא c והזווית שמולו היא α.
הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא β.
הבע באמצעות c, α ו-β את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

36) א. $SD = AB = 4m\cos\alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m\cos\alpha$.

37) $V = \dfrac{c^3 \tan\beta}{12\tan\alpha\sin\alpha}$.

הנדסת המרחב

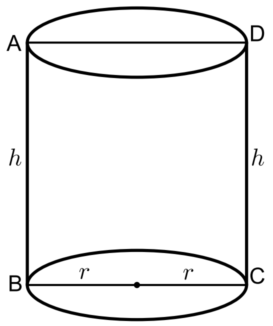
פרק 4 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

תוכן העניינים

הגליל:

סיכום כללי:

הגדרות:

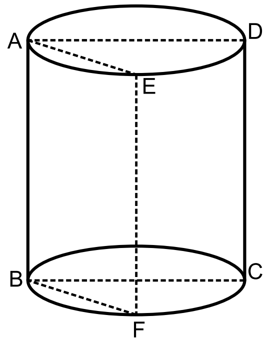


- נתון מעגל במישור α. אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור α ונחתוך אותם ע"י מישור נוסף β המקביל ל- α נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע"י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו $2\pi r$ וגובהו h.

נוסחאות:

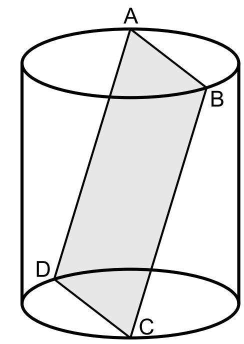
- נפח גליל: $V = \pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של גליל: $M = 2\pi rh$.
- שטח פנים של גליל: $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

שאלות:

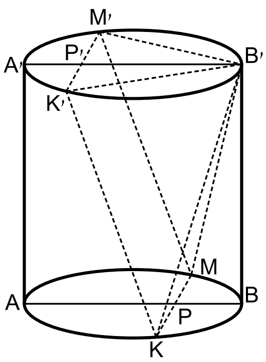


1) בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית α. האלכסון $AF = \ell$ של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית β.
הבע את נפח הגליל באמצעות α, β ו- ℓ.

2) האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית α עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא d.
הבע באמצעות d ו- α את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה: $\frac{\pi^2 d^2 \tan\alpha}{\pi^2+\tan^2\alpha}$.



3) ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר, שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא α.
הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD למישור בסיס הגליל היא β.
הצלע BC שווה ל- a.
הוכח שנפח הגליל הוא: $\frac{\pi a^3 \sin^3\alpha}{4\tan^2\beta}$.



4) נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ.
מעבירים את הקטרים AB ואת A'B' אשר מקבילים זה לזה בשני הבסיסים בהתאמה.
הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש: $A'P'=\frac{1}{4}A'B'$
ו- $BP=\frac{1}{4}AB$. דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB
ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'.
מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K' וקדקודה בנקודה B'.

תשובות סופיות:

1) $V=\frac{\pi\ell^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.

2) שאלת הוכחה.

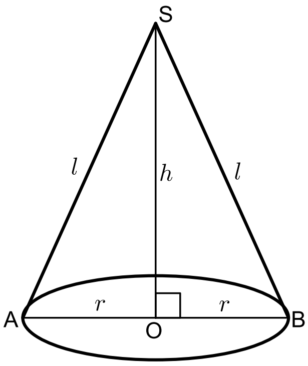
3) שאלת הוכחה.

4) צריך לחשב.

החרוט:

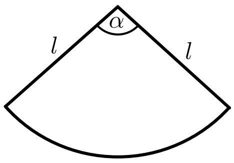
סיכום כללי:

הגדרות:



- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס r, עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב- l).

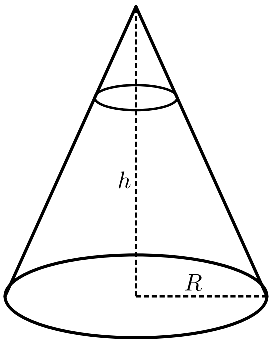
- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הצירי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת עיגול עם זווית מרכזית α המקיימת: $\frac{\alpha}{360}=\frac{r}{l}$.



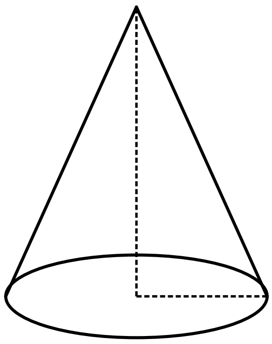
נוסחאות:

- נפח חרוט: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של חרוט: $M=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
- שטח פנים של חרוט: $P=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

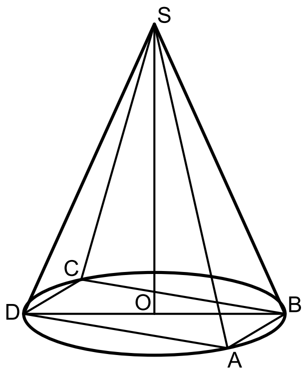
שאלות:



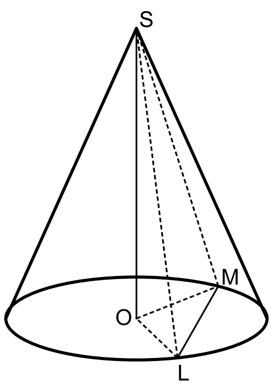
1) נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו R, וגובהו h.
מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.
החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של בסיס החרוט.
מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע"י החיתוך, לבין נפח החרוט המקורי.



2) שטח פני חרוט ישר שווה ל- 245π סמ"ר.
אם נפרוש את המעטפת הנ"ל במישור,
נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- $60°$.
מצא את נפח החרוט הנ"ל.

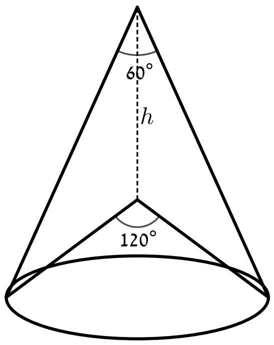


3) בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע ABCD שצלעו a.
מחברים את הקדקודים A ו-B של הריבוע עם ראש החרוט S, ומתקבל משולש שווה שוקיים SAB עם זווית הראש $\sphericalangle ASB = \alpha$.
הבע את נפח החרוט באמצעות a ו- α.



4) נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכז בסיסו הוא O.
מעבירים מיתר LM כך ש- $\sphericalangle LOM = \alpha$.
הזווית שבין המישור LSM לבין בסיס החרוט היא β.
מרחק המישור LSM ממרכז הבסיס הוא d.
הבע את נפח החרוט באמצעות α, β ו- d.

5) נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף.
בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא בת $60°$
ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא בת $120°$.
הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק h זה מזה.
הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא $\frac{\pi h^3}{4}$.



תשובות סופיות:

1) $\frac{1}{8}$.

2) $\frac{1225\pi}{3}$.

3) $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

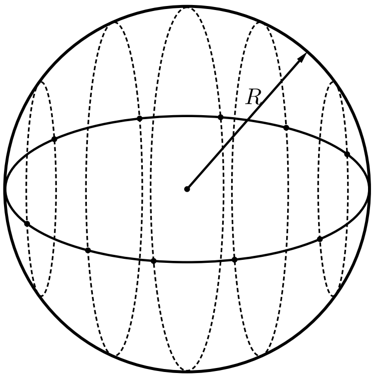
4) $\frac{\pi d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

5) הוכחה.

הכדור:

סיכום כללי:

הגדרות:

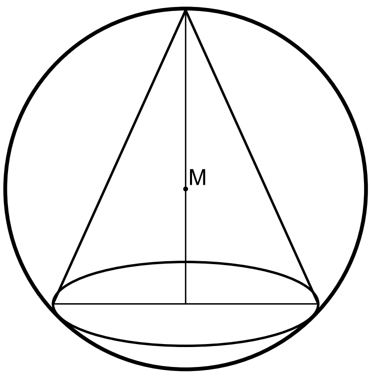


כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו.
קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור.
כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).

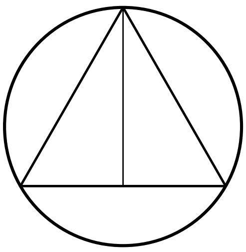
נוסחאות:

- נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- שטח פני הכדור: $P = 4\pi R^2$.

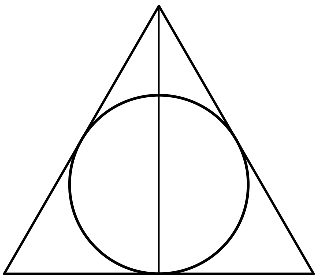
שאלות:



1) חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט.
קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור.
מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.



2) בכדור בעל רדיוס R חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- 2α.
הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות R ו- α.



3) בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא α,
והקו היוצר הוא ℓ, חסום כדור.
הבע את נפח הכדור באמצעות α ו- ℓ.

4) חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוס בסיסו חסום בתוך כדור.
שטח הפנים של הכדור הוא P. הבע את נפח החרוט באמצעות P.

5) בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו R.
כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית β.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות R ו- β.

תשובות סופיות:

1) $75°$.

2) $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos\alpha$.

3) $\frac{4}{3}\pi\ell^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\tan^3\left(45-\frac{\alpha}{4}\right)$.

4) $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$.

5) $\frac{4R^3}{3}\tan\beta\cot^3\frac{\beta}{2}$.