

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני



תוכן העניינים

1	גבול של פונקציה
16	רציפות
23	חישוב נגזרת של פונקציה
36	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
47	כלל לופיטל
54	חקירת פונקציה
83	חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות
87	מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
92	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)
112	משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב
118	משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו
135	טורי טיילור - מקלורן
150	אינטגרלים מיידיים
155	אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
157	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
161	אינטגרלים בשיטת ההצבה
164	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
169	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
180	האינטגרל המסוים, אינטגרליות לפי רימן ולפי דארבו
204	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
226	משוואות מסדר ראשון
240	מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות
257	פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

270	מטריצות	24
298	דטרמיננטות	25
317	מרחבים וקטורים	26

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 1 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 1
3. צמצום 2
4. הכפלה בצמוד 3
5. גבולות טריגונומטריים 4
6. פונקציה שואפת לאינסוף 7
7. איקס שואף לאינסוף 8
8. הגבול של אוילר 10
9. כלל הסנדויץ' 11
10. גבול של פונקציה מפוצלת 13

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax + 1}{bx + 2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4)	4 (3)	$-\frac{\pi}{2}$ (2)	0 (1)
-1 (8)	1 (7)	-5 (6)	0 (5)
$\frac{1}{4}$ (12)	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11)	1.5 (10)	-3 (9)
2 (16)	$\frac{1}{9}$ (15)	4 (14)	0 (13)
	0 (19)	$e^{\frac{1}{3}}$ (18)	$\ln 3$ (17)
$-\infty: b=0, a < 0$: א . $\infty: b=0, a > 0$ א . $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$: $b \neq 0$ א (20)			
$-\frac{1}{2}$ (24)	$\frac{1}{2}$ (23)	$\frac{k}{2}$ (22)	2.5 (21)
$\frac{5}{4}$ (28)	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)	$\frac{a-b}{2}$ (26)	$\frac{1}{2}$ (25)
			$\ln(6e)$ (29)

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$,

ונתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$?

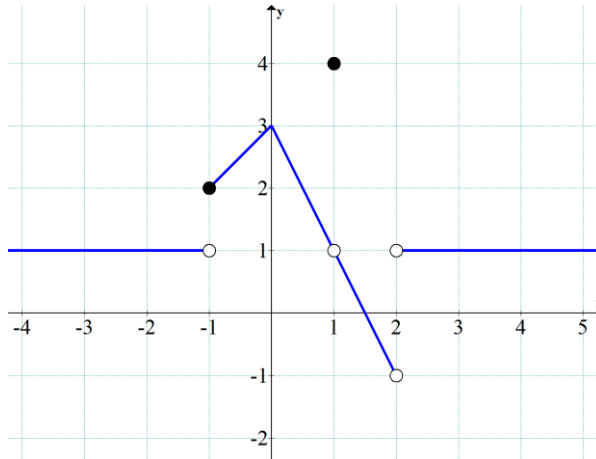
תשובות סופיות

- 0 (5) 3 (4) $\frac{3}{4}$ (3) 0 (2) 0 (1)
- 0 (10) 1 (9) 4 (8) $\frac{3}{4}$ (7) 0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$ (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$.

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} : f(x) \text{ נגדיר פונקציה } \quad (3)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$.

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ x - 1 & \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$. א. (1)
1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$. ב.
1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$. ג.
- א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. ג. 6. (2)
- א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. ג. -1. (3)
4. (4)
- ϕ . (5)
- ϕ . (6)
1. (7)
- 1. (8)
- א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$. (9)

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 2 - רציפות

תוכן העניינים

16 1. רציפות של פונקציה

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15 : מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה : שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו :

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17 ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$\text{18 תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
 ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
 ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .
 האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

19 תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי

- א. האם יתכן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.
 ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
 נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
 הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

21 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
 נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
 הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$\text{22 נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

- הוכיחו או הפריכו:
 א. הפונקציה f חסומה לכל x .
 ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
 ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
 ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

(25) הפונקציות $f(x) + 2g(x) - 3g(x) + 2f(x)$ ו- $f(x) - 2g(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

(26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אזי f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|] \quad .1$$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|] \quad .2$$

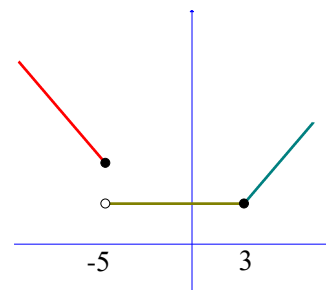
ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- \mathbb{R} אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- \mathbb{R} :

$$z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad .1$$

$$z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad .2$$

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
 (2) רציפה.
 (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
 (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
 (5) לא רציפה.
 (6) לא רציפה.
 (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
 (8) $k=1$
 (9) $k=4$
 (10) $k=\frac{2}{3}$
 (11) $k=-1$
 (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
 (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
 (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
 (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
 (16) שאלת הוכחה.
 (17) שאלת הוכחה.
 (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
 (19) א. לא. ב. כן.
 (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 3 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	23
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	27
4. גזירה סתומה	30
5. כלל השרשרת	32
6. גזירה לוגריתמית	35

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x^1$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ה.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \end{array}$$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א. (5)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א. (6)}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א. (7)}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א. (8)}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א. (9)}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

גזירה סתומה

שאלות

- (1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- (2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- (3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- (4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$ חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.
- (5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$ חשבו את y' בנקודה בה $y = 0$.
- (6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - xy = 10$.
- (7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - y^x = 1$.
- (8) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ מצאו את ערך y'' בנקודה בה $y = 1$.
- (9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2 + e^y = x$.
 א. הראו שעבור $x = 1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
 ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x = 1$.
- (10) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$, מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x . נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
 נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
 חשבו את $g'(2)$.

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת $z'(x)$.

- ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את $z'(e)$.

$$(3) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו $g'(100)$.

$$(4) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

$$(5) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(0) = 2, \quad f'(0) = 1 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו $g'(1)$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(4) = 1, \quad f'(4) = 2 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו $g'(1)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

$$\cdot f(1) = 1, \quad f'(1) = 4 \quad \text{ידוע כי}$$

חשבו $g'(1)$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f'''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x) = (f(x))^4$. קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית. האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

(1) 40

$$z'(e) = 3\frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) $\frac{17}{80}$

(4) 36

(5) $\frac{8}{9}$

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 4 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

36	1. המשיק
38	2. בעיות משיקים
40	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
44	4. הנורמל
45	5. זווית שבין שתי עקומות
46	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשיק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.
 מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21 \ln 3$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
 לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 3$ ו- $x = 1$.
 ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$$

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$$

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

$$(10) \quad \text{פונקציה } f(x) \text{ גזירה ברציפות ב-} 0 \text{ ומקיימת } f(0) = 0$$

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

$$\text{חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(11) \quad \text{מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה } f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 17 \quad \text{ב. } 4$$

$$(2) \quad a = 2$$

$$(3) \quad (1, 3)$$

$$(4) \quad a = 2, b = -1$$

$$(5) \quad a = 2, b = -2$$

$$(6) \quad \text{לערך } k = 6, \text{ בנקודה } x = 1; \text{ לערך } k = \frac{158}{27}, \text{ בנקודה } x = \frac{1}{3}$$

$$(7) \quad \text{א. ראו באתר. ב. } \alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$$

$$(8) \quad x = 5, x = -1$$

$$(9) \quad x = 1, x = \frac{1}{3}$$

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(11) \quad \alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$$

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$.

מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3)$, $y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1)$, $y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.

מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

(10) נתון כי f גזירה לכל x .

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x .

ב. הישר $2y = 10x + 11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

(1) נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(2) נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.

(3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$

(7) המשיק $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(8) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(9) נקודת ההשקה $(1, 1), k = 1.5$.

(10) א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$, ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x_1 = 2$.

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

(11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

(12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

(13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

(14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

(15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.

(17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.

(18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו- $(2,4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2,1)$

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

- (1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (3) הוכיחו שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

- (1) 71.57°
- (2) 71.56°
- (3) שאלת הוכחה.

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 5 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

- 1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 47
- 2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 50
- 3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 51
- 4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 52
- 5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 53

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x} - 2 - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	∞ (34)	0 (33)	∞ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	∞ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, (a > 0)$ (2)	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)
$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ (15)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)

תשובות סופיות

e^2 (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	e (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	e^3 (7)	1 (6)
0 (15)	e (14)	1 (13)	e (12)	1 (11)

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.
 הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
 לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 6 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

54	1. מושגי יסוד
55	2. חקירת פולינום
56	3. חקירת פונקציה רציונלית
60	4. חקירת פונקציה מעריכית
63	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
67	6. חקירת פונקציה עם שורשים
68	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
71	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
75	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות
77	10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
82	11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

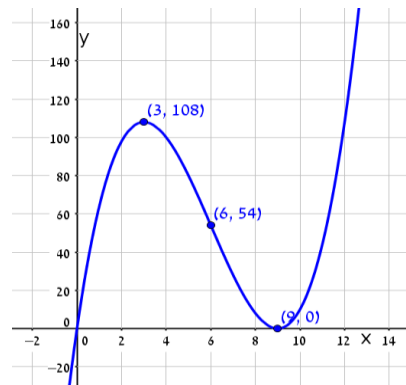
$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

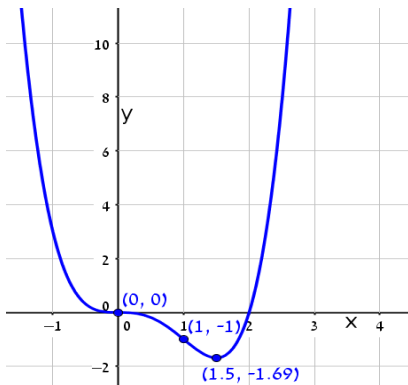
- (1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .
 נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.
 תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.
 תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.
 נקודת פיתול: $(6, 54)$.
- (2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 1 .
 נקודות קיצון: מינימום: $(1.5, \frac{-27}{16})$.
 תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.
 תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)



(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

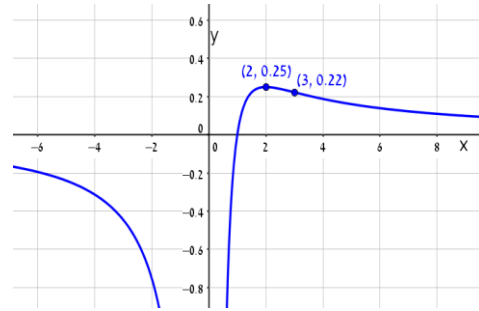
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ and $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x > -1$ or $x < -3$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

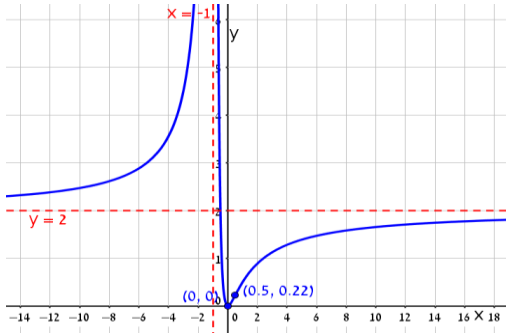
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
- (8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x < -2$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $-2 < x < -1$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

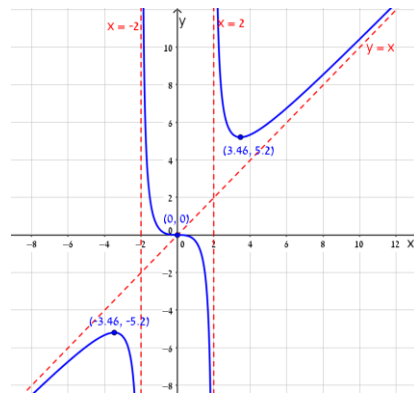
(1)



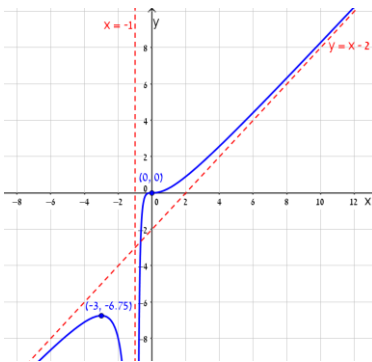
(2)



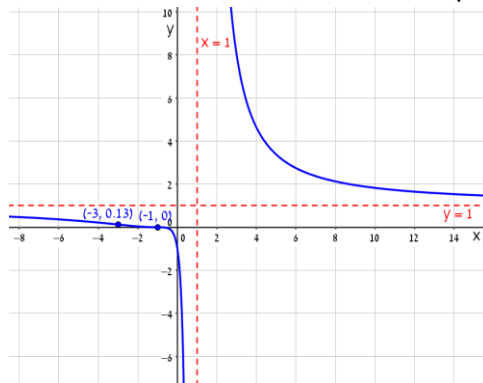
(3)



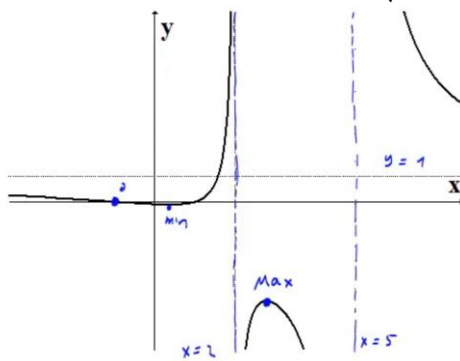
(4)



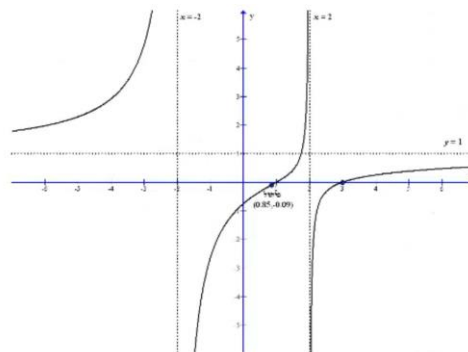
(5)



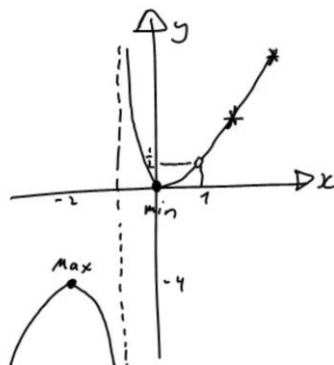
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

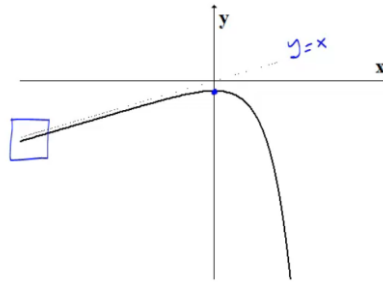
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

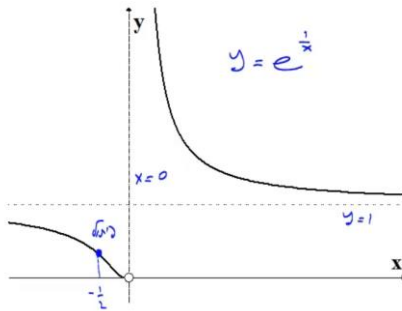
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $0 < x < 2$.
נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

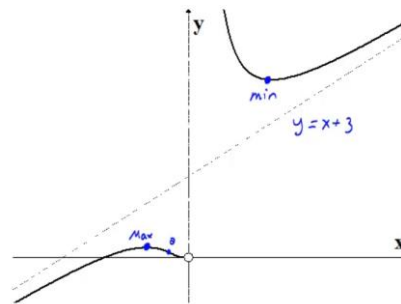
(1)



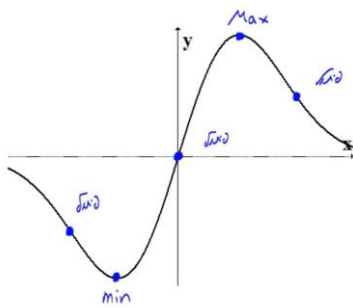
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

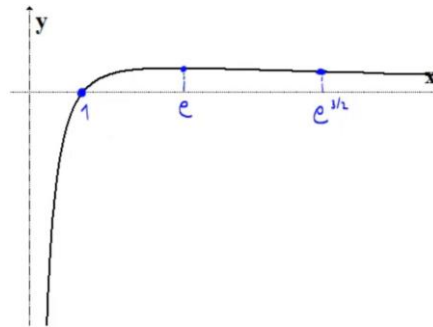
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$.
תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

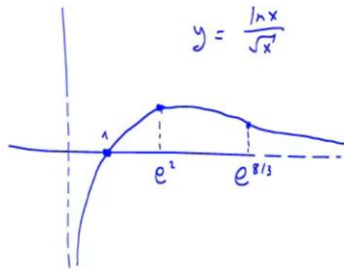
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

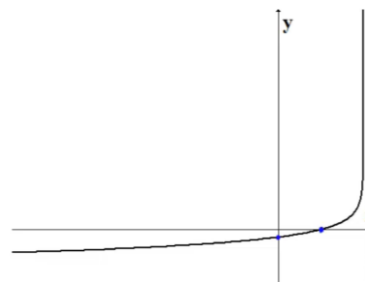
(1)



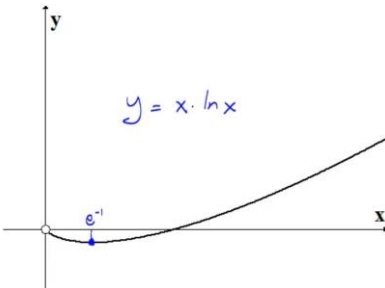
(2)



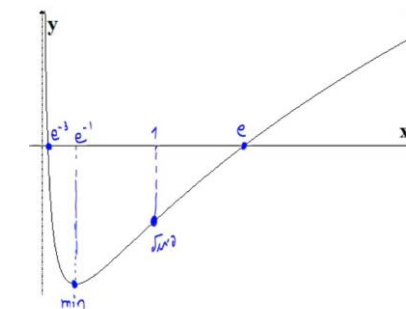
(3)



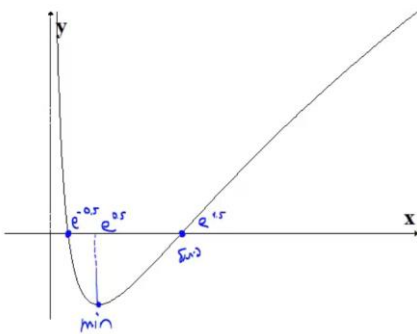
(4)



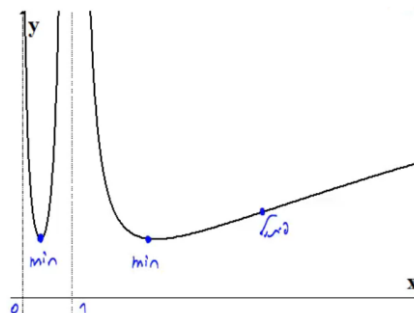
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

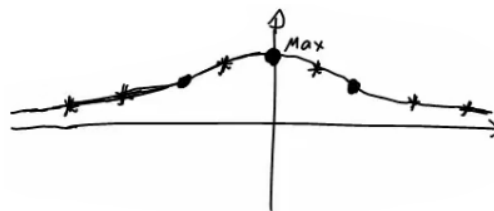
תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

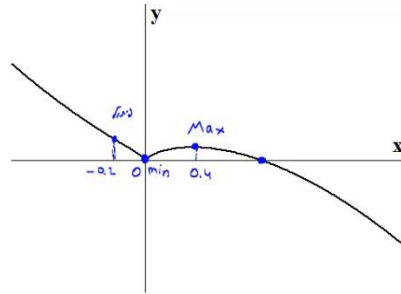
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

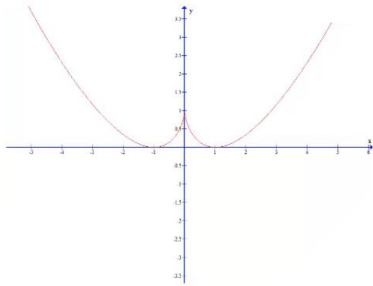
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $0 < x < 1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

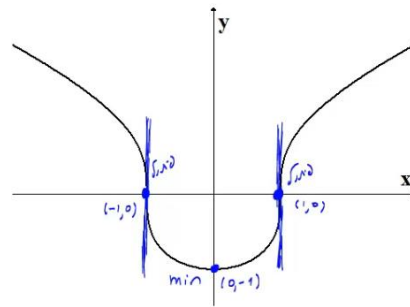
(1)



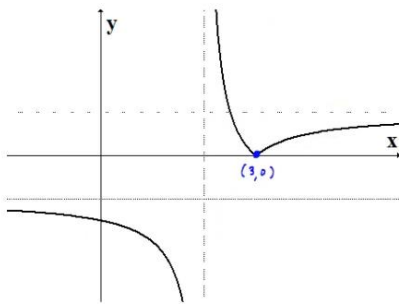
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - מציאת נקודות פיתול.
 - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0, \pi]$.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

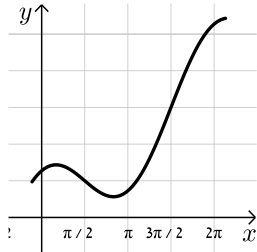
$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

תשובות סופיות

1 א. $0 < x < 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.



ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

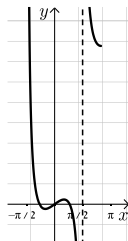
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$,

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

2 א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$.



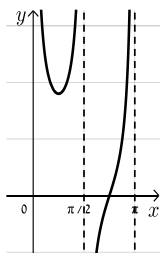
ד. $(0, 0)$. ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$. ו. $(0, 0)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$,

קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3 א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

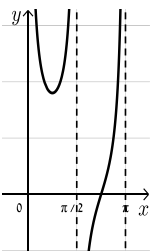


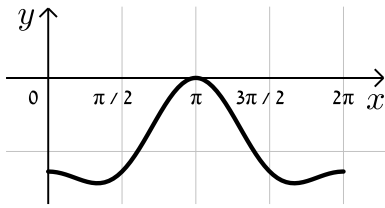
ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = 0$.

4 א. $(\pi, 0), (0, -2)$.

ב. $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2), \max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(\pi, 0)$.

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, גרף: $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

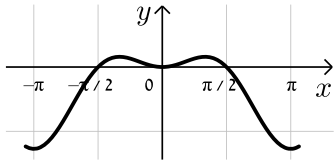




5 א. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (0, 1)$

ב. $(0, 1), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), \left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right), (1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

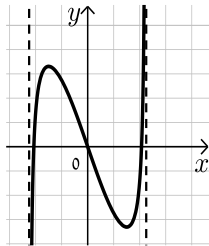


6 א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה,

$\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ קצה.

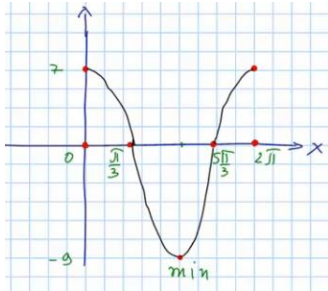
7 א. $(0, 0), (\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$

ג. $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = 7$

נקודות קיצון: מינימום: $(\pi, -9)$, מקסימום: $(0, 7), (2\pi, 7)$



נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

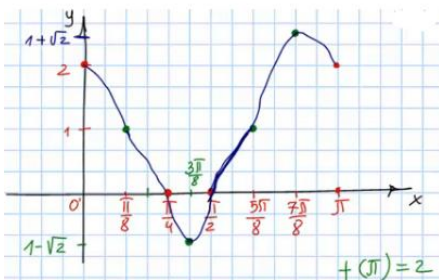
קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 2$ or $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2}\right)$

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$, ירידה: $0 < x < \frac{3\pi}{8}$ or $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול: $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{8}, 1\right)$

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות: $0 < x < \frac{\pi}{8}$ or $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

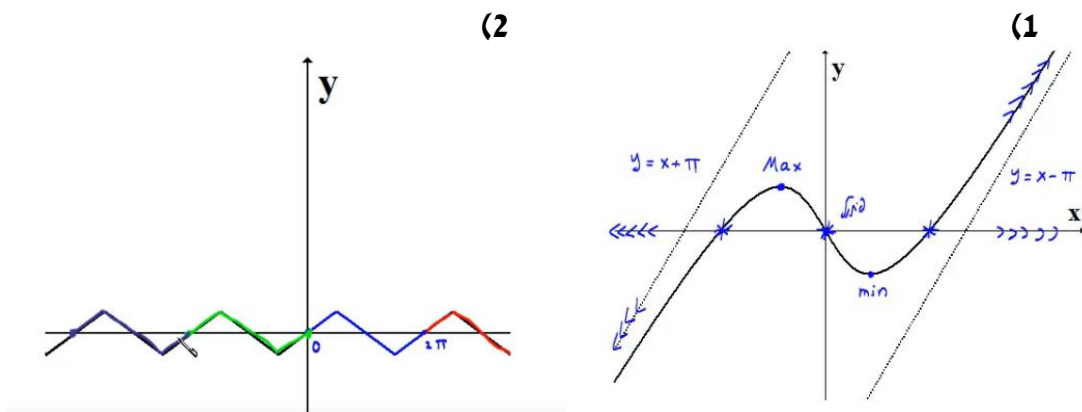
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, 0.575)$, מינימום: $(1, -0.575)$.
 תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 1$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$.
 תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית.
 מחזוריות: כן, ממחזור 2π .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : $x = 0, \pi, 2\pi$.
 אסימפטוטה אנכית: אין,
 משופעת: הישר $y = x + \pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, מינימום: $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.
 תחום עלייה: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.
 נקודות פיתול: אין.

גרפים



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

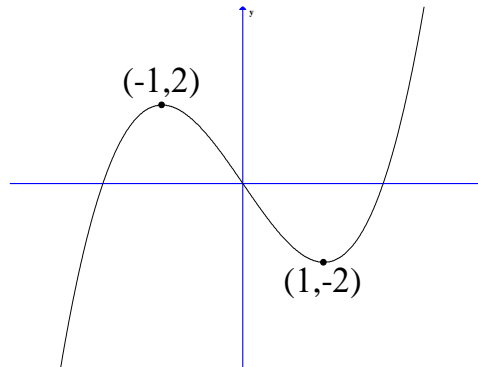
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

9 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



10 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

11 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

12 מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

13 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

14 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

15 עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

16 האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

17 מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18 נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

19 נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2, f'(1) = e$.

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

- א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x = e$?
 ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.
 מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

20 נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

- א. z עולה לכל x .
 ב. z יורדת לכל x .
 ג. z עולה לכל $x > 0$.
 ד. z יורדת לכל $x > 0$.

21 נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

- א. חשבו את $g'(e)$.
 ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

22 הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x = 0$.
 נגדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:
 א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

(23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x) = a \cdot f(x)$, כאשר $a < 0$.

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n, 0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$\text{א. } z'(0.5) = -16 \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$\text{א. } 2e+1 \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x \quad (2)$$

$$(x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$(x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4)$$

(5) נתון כי f רציפה לכל $x \geq 0$, $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, וכן $f(0) = 0$.

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 7 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

83	1. נגזרת הפונקציה ההפוכה
84	2. נגזרת מסדר גבוה
85	3. נוסחת לייבניץ
86	4. גזירה פרמטרית

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

נגזרת מסדר גבוה

שאלות

חשבו את הנגזרת ה- n , $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \cdot \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), (n > 2)$$

נוסחת לייבניץ

שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

גזירה פרמטרית

שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית}$$

תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 8 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה. 87
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי. 90
3. הוכחת אי שוויונים. 91

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות 7-1 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0. \quad (8)$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע (0, 0.5). הוכיחו שדני טועה.

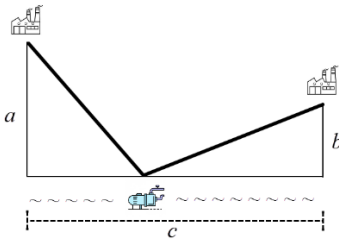
$$\text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x| \quad (9)$$

(10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, ב- \mathbb{R} . הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

11 מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$,

ב- \mathbb{R} וב- $[1, 3]$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



12 לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק a ק"מ מהמעיין.

השני מרוחק b ק"מ מהמעיין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעיין שוות.

13 גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

תשובות סופיות

- (1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.
- (2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.
- (3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.
- (4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.
- (5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.
- (6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1 + \ln 2)$.
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.
- (11) ב- \mathbb{R} : $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב- $[1, 3]$: $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 1)$ מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.
- (13) שאלת הוכחה.

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

- (1) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) .
 נניח שקיימת נקודה $c \in (a, b)$, כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.
 הוכיחו כי קיימת נקודה $d \in (a, b)$, כך ש- $f'(d) = 0$.
- (2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.
 וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x) - f'(x) = f''(x)$ לכל x , וכן $f(a) = f(b) = 0$.
 הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל x בקטע.
- (3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$ עבור פונקציה g מסוימת.
 הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a, b) , כך ש-
 $f''(x) < 0$ בקטע זה.
 נתון כי $f(a) = f(b) = 0$.
 א. הוכיחו כי $f(x) > 0$ בקטע (a, b) .
 ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
 (2) שאלת הוכחה.
 (3) שאלת הוכחה.
 (4) שאלת הוכחה.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (x \text{ לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (x \leq 1)$$

(4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

הערת סימון: $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 9 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

92	1. הסבר כללי על בעיות קיצון
93	2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים
94	3. בעיות קיצון בהנדסת המישור
98	4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
102	5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב
104	6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה
105	7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון
110	8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
 א. הביעו את y באמצעות x .
 ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

- (1) 8, 8, 8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

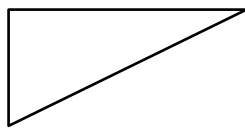
שאלות

(1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

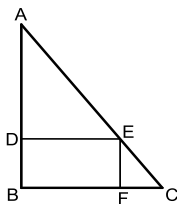
(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a , מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

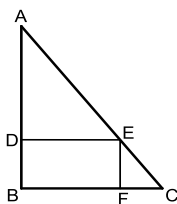
ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



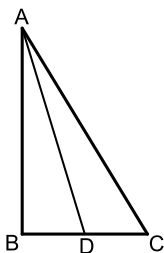
(3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



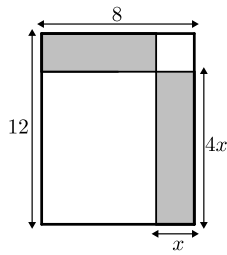
(4) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC , כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



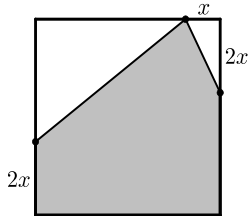
(5) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), הנקודה E נמצאת על היתר AC , כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן. נתון: $AB = a$, $BC = b$. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



(6) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC . ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

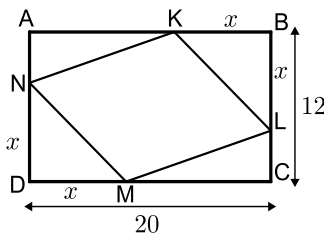


- 7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקוים. מצאו את x , עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

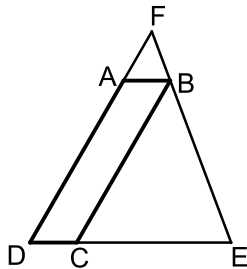


- 8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה, ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות, כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו. מצאו מה צריך להיות ערכו של x , עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

- 9) הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן $ABCD$, כך ש:



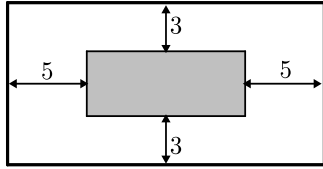
- א. הביעו באמצעות x את סכום שטחי המשולשים $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$.
ב. מצאו מה צריך להיות x , כדי ששטח המרובע $LKNM$ יהיה מקסימלי.
ג. מהו השטח של המרובע $LKNM$, במקרה זה?



- 10) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF , הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו- AD . ידוע כי מידות המקבילית הן: $AD = 8$ ס"מ, $AB = m$ ס"מ. נסמן את אורך הצלע DE ב- x .
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF .
ב. מצאו את x , עבורו סכום הצלעות DE ו- DF הוא מינימלי.
ג. מה הוא הסכום המינימלי?

11 חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.

תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי, כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי, ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות, אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

12 אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:

יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ, ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,

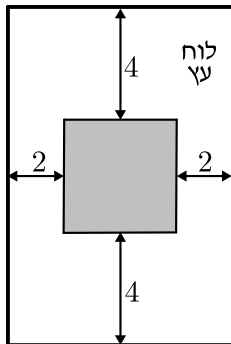
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,

ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ,

אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי

שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

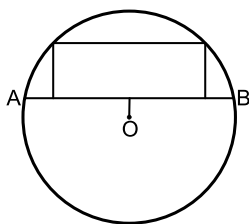
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

13 במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



14 במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

15 שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:

האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.

המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

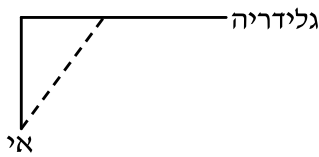
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש

ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצאו גם את המרחק המינימלי.





16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות, כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



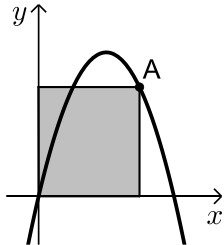
17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות

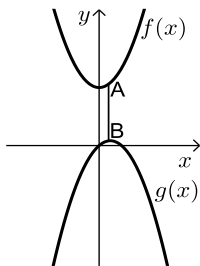
- 1) $4\sqrt{3}$ ס"מ.
- 2) א. 2.5 ס"מ.
- 3) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר. ג. $6\sqrt{2} \approx 8.48$ ס"מ.
- 4) 80 סמ"ר $S =$.
- 5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.
- 6) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- 7) $x = 2.75$
- 8) $x = 6$
- 9) א. $2x^2 - 32x + 240$ ב. $x = 8$ ג. 128 סמ"ר $S =$.
- 10) א. $DF = \frac{8x}{x-2}$ ב. $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$ ג. $L = 18$
- 11) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
- 12) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב. $S = 98$
- 13) 92 ס"מ.
- 14) $2\sqrt{5}R - 2a$ יחידות אורך.
- 15) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ.
- 16) $2\frac{1}{3}$ ק"מ.
- 17) 4.6

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

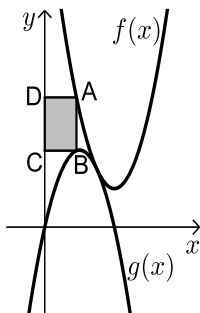
שאלות



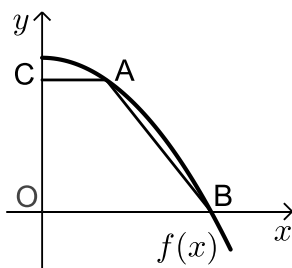
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



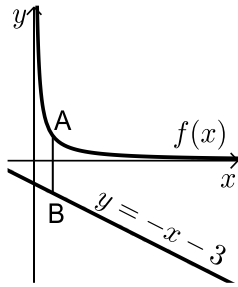
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$, כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצאו את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

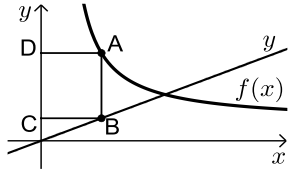


- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$, ונתון הישר: $y = -x - 3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB
מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,
כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות,
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

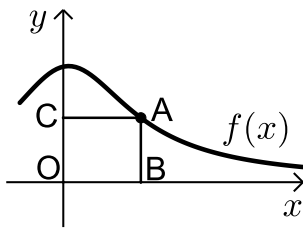
א. הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצאו את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.
מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

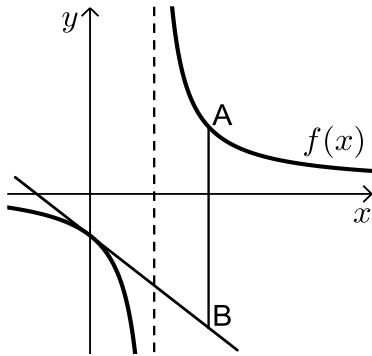


(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים
אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO,
כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,
עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

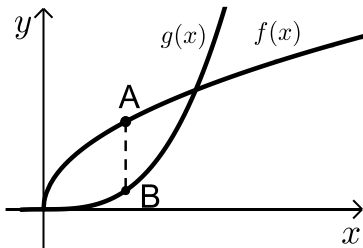
ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם
שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?



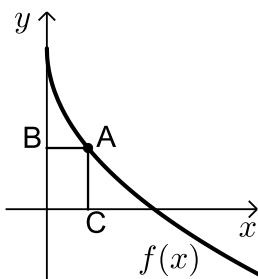
- 9** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- א. מצאו את משוואת המשיק.
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



- 11** נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.
- את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



- 12** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.
- נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
- א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים $AB + AC$.

ב. מצאו את ערכו של t , עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

13 נתונות הפונקציות $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצאו את ערכו של b , שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות

(1) $A(4,8)$

(2) $A(0.5,12.25)$

ג. $S = 8$ ב. $t = 1$ א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ (3)

ב. $S = 128$ א. $A(2,32)$ (4)

(5) $A(2,2)$

ג. $P = 12.88$ ס"מ ב. $t = 4\frac{3}{4}$ א. $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$ (6)

(7) 1.2

ב. $A(0,4)$ א. $A(2,2)$ (8)

ג. $AB = 24$ ב. $A(4,7)$ א. $y = -3x - 5$ (9)

(10) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

(11) $A(1,2)$

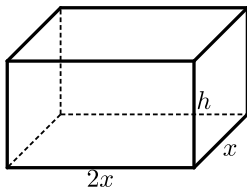
ב. $t = 2.25$ א. $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ (12)

(13) $b = 1$

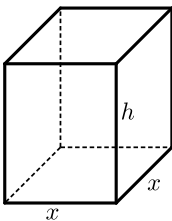
בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

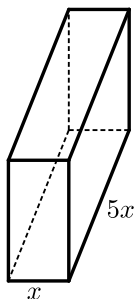
- (1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן, שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה, כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x+h=9$. מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



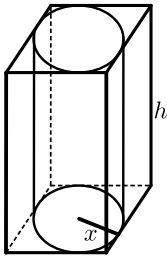
- (3) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים $4x+h=63$.
- הביעו את h באמצעות x .
 - הביעו את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 - מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

- (6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k , מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



(7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h .

ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות x

1. את נפח הגליל.

2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את x , עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

(8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.

אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S .

הוכיחו כי $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

(1) 4·4·4 ס"מ.

(2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

(3) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

(4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

(5) 8·6·3 ס"מ.

(6) יחידות נפח = $\frac{k^3}{216\pi}$. V

(7) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

(8) שאלת הוכחה.

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

(1) נתונים שני מספרים חיוביים, p ו- q , שסכומם a .
 הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

(2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
 (שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט)

בעיית קיצון עם תנועה

(3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.
 לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ש"ח לכל ק"מ נסיעה ו- $48 + \frac{v^2}{200}$ ש"ח לכל שעת נסיעה.
 הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ש"ח לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ש"ח, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
 ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$.
 איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
 ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$, ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 הוכיחו:

- א. שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
 הסבירו את המשמעות הגרפית.
 ב. שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה
 השולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

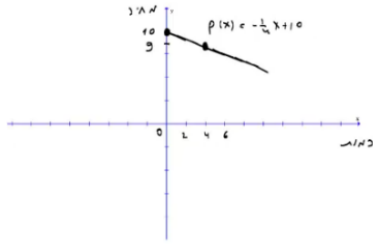
- א. האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם יתכן להפך?
 ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם
 ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
 א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

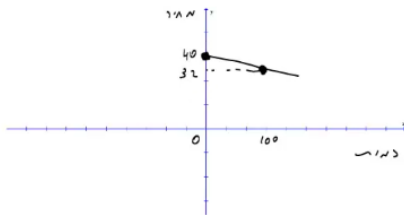
- ב. חשבו את x ו- y עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 3,000$ ₪, $p_2 = 100$ ₪, $A = 372,000$ ₪.

תשובות סופיות

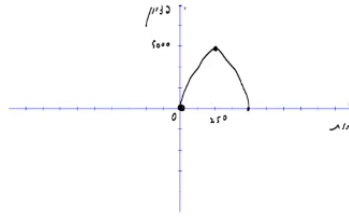


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$ ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

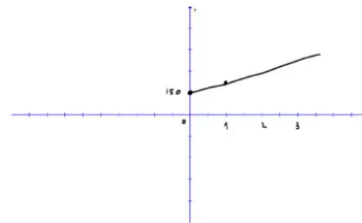
הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא. ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000.

(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25

(13) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$.

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות. לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות)?
- (3) אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר. מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

- 6) קולנוע יחן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.
- 7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- 8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- 9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- 1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- 2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- 3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪
- 4) 40
- 5) 75 אג'.
6) מחיר הכרטיס: 30 ₪, ההכנסה המקסימלית: 3,600 ₪.
- 7) 4,500 ₪.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) 350

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 10 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

- 112 1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה
- 115 2. פתרון משוואות פולינומיאליות
- 117 3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4)$$

(5) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 6-9, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (6)$$

$$\arctan x - x = 0 \quad (7)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (8)$$

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (9)$$

(10) תהי f פונקציה גזירה לכל x , המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 11-13 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (13) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (12) \quad e^x - 5x = 0 \quad (11)$$

בכל אחת מהמשוואות 14-17, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (14)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (15)$$

$$x + a \cos(bx) = 1 \quad (16)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (17)$$

(18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x + e^x = a$ כאשר a קבוע ממשי.

(19) הוכיחו שלמשוואה $2ax^3 + a^2 + x^2 = 0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר a קבוע ממשי.

(20) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.
הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

(21) נתון הפולינום $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + cx - 1$.

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c| < 1$.

מה מספר השורשים של הפולינום?

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) פתרון יחיד.
- (6) $x = 1$
- (7) $x = 0$
- (8) $x = -4$
- (9) $x = 0$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) $b^2 - 4ac = 0$
- (15) $4b^2 - 12ac < 0$
- (16) $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$
- (17) $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
- (18) אם $a = 0$, למשוואה אין פתרון. אם $a \neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות 1-3:

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

פתרו את המשוואות הבאות:

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (4)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (5)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (7)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (9)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (10)$$

$$7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x-2} \quad (3)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (4)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (6)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (7)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (8)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (9)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (10)$$

$$(11) \text{ פתרון מקורב: } x = 0.8459.$$

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה 2 בשיטת ניוטון-רפסון):

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (1)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{פתרון מדויק } x = -1$$

$$(2) \quad \text{פתרונות מקורבים: } x = 0.5576, \quad x = 1.9672$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 11 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

118	1. משפט רול
122	2. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$
124	3. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים בקטע $[0,x]$
125	4. משפט לגראנז' - הוכחת אי שוויונים עם מספרים
126	5. משפט לגראנז' - שאלות כלליות
130	6. משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי
132	7. משפט דרבו

משפט רול

שאלות

(1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

הראו ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.
האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

(3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- \mathbb{R} ,
ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0, x_1, x_2 , עבורן $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$.
הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c) = 0$.

(4) תהי $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
הוכיחו שקיימת $x_0 \in (0, 1)$, כך ש- $f'''(x_0) = 0$.

(5) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.
נניח שמתקיים $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.
הראו שלמשוואה $f'''(x) = 0$ יש פתרון.

(6) נתון כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0 = 2$.
הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

- (7) נתונה פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} .
 תהי g מוגדרת על ידי $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$.
 הראו כי g גזירה ב- \mathbb{R} , והוכיחו כי הנגזרת, g' , מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1, 1)$.
- (8) הוכיחו:
 אם f גזירה ב- \mathbb{R} ו- $f(1) = 0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי $g(x) = xf(x)$, גזירה ב- \mathbb{R} , וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x) = 0$.
- (9) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $0 < x \leq 1$.
 הוכיחו שקיים $c \in (0, 1)$, כך ש- $\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} = 2 \frac{f'(c)}{f(c)}$.
- (10) אם $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0$, $(c_i \in \mathbb{R})$,
 הוכיחו שלמשוואה $c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0, 1)$.
- (11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
 הראו שלמשוואה $f'(x) = 2x$ קיים פתרון בקטע $(0, 1)$.
- (12) תהיינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
 נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$.
 הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g .
- (13) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
 כך ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$.
 א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
 ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
 ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0, 1)$.

14 ענו על הסעיפים הבאים :א. תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשבו את $f''(0)$.ב. תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0) > 0$.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq 1 \text{ טבעי, } n$$

15 תהי $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ טבעי } n$$

חשבו את $f''(1)$.**16** נתון כי f, g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$ ב- \mathbb{R} .הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x) = A$ יש לכל היותר פתרון אחד. A קבוע כלשהו.**17** נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- \mathbb{R} .תהי x_0 נקודה כלשהי.הוכיחו כי לגרף של $y = f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפתאחת ויחידה - x_0 .במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y = f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או

מתחתיו.

18 נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a, b) , ולכל $x \in (a, b)$ מתקיים

$$(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$$

נתון שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש שלושה פתרונות בקטע.הוכיחו שלמשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.תנו דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2 \neq f(x) \cdot f''(x)$.**19** נתון כי $f(x), g(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) .נתון בנוסף כי $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$.הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = g'(c)$.

- (20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) .
 ידוע כי $f(a) \geq g(a)$ ו- $f'(x) > g'(x)$ ב- (a, b) .
 הוכיחו כי $f(x) > g(x)$ ב- (a, b) .

תשובות סופיות

- (1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. כן, $2 - \sqrt{3}$.
 (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.
 (14) א. 0 ב. שאלת הוכחה.
 (15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a, b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \quad (1)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}} \quad (2)$$

$$(a < b) \quad (a-b)e^{-a} < e^{-b} - e^{-a} < (a-b)e^{-b} \quad (3)$$

$$\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (4)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (5)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}} \quad (6)$$

$$(0 < a < b) \quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{\operatorname{arcsinh}(b) - \operatorname{arcsinh}(a)}{b-a} < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (7)$$

$$(0 < a < b < 1) \quad \frac{b-a}{1-a^2} < \operatorname{arctanh}(b) - \operatorname{arctanh}(a) < \frac{b-a}{1-b^2} \quad (8)$$

$$(0 < a < b) \quad \sqrt[n]{b} \cdot \frac{b-a}{n \cdot b} < \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} \cdot \frac{b-a}{n \cdot a} \quad (9)$$

$$(1 < a < b) \quad \frac{2b(b-a)}{b^2+1} < \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) < \frac{2a(b-a)}{a^2+1} \quad (10)$$

$$(1 < a < b < 3) \quad \ln b - \ln a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{4}(b-a) \quad (11)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (12)$$

$$(x_1 < x_2) \quad |\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (13)$$

$$(x < y) \quad |\arctan y - \arctan x| \leq |y - x| \quad (14)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[0, x]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) x < \tan x < \frac{x}{\cos^2 x} \quad (1)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (2)$$

$$(0 < x < 1) x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3)$$

$$(x > 0) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \operatorname{arcsinh}(x) < x \quad (4)$$

$$(0 < x < 1) x < \operatorname{arctanh}(x) < \frac{x}{1-x^2} \quad (5)$$

$$(x > 0) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (6)$$

$$(x > 0) 1+x < e^x < 1+xe^x \quad (7)$$

$$(x > 0) \sin x \leq x \quad (8)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) \tan x < 4x \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי-שוויונים עם מספרים

שאלות

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{1}{3} < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2} < 1.5 \quad (2)$$

$$\frac{3}{25} + \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{15} + \frac{\pi}{6} < \arcsin(0.6) < \frac{1}{8} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – שאלות כלליות

שאלות

- (1) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 5$.
 ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.
 הוכיחו כי $f(2) = 8$.
- (2) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x , המקיימת $|f'(x)| \leq 7$.
 ידוע כי $f(1) = 3$, $f(4) = 18$.
 הוכיחו כי $4 \leq f(2) \leq 10$.
- (3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$, ונניח ש- $f(a) = f(b) = 0$.
 וכן שקיימת נקודה c , כאשר $c \in (a, b)$, כך ש- $f(c) > 0$.
 הוכיחו שקיימת נקודה m בקטע (a, b) , כך ש- $f''(m) < 0$.
- (4) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , כך ש- f' חסומה בקטע (a, b) .
 א. הוכיחו שקיים $M > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) מתקיים:
 $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$
 ב. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- (a, b) .
 כלומר, הוכיחו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל x ו- y ב- (a, b) ,
 המקיימים $|x - y| < \delta$, מתקיים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- (5) נניח כי f רציפה ב- $[0, \infty)$ וגזירה ב- $(0, \infty)$.
 כמו כן, $f(0) = 0$, ו- f' מונוטונית עולה.
 א. הוכיחו כי $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ ב- $(0, \infty)$.
 ב. הוכיחו כי $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0, \infty)$.

(6) תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, \infty)$ וגזירות ב- (a, ∞) . נתון כי $f(a) = g(a)$ ו- $f'(x) \leq g'(x)$ לכל $x > a$. הוכיחו כי $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \geq a$.

(7) נניח כי f גזירה ב- $(0, \infty)$.
 א. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.
 הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

ב. נתון כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(8) תהי f פונקציה גזירה לכל x . הוכח:

א. אם הגבולות $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיימים, אז הם שווים זה לזה.

ב. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = L$ אז $L = 0$ (ללא שימוש בכלל לופיטל).

ג. ייתכן שהגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים אבל הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ לא קיים.

ד. אם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ קיים אז גם הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ קיים ושני הגבולות שווים זה לזה.

ה. אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$ (או $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < 0$) אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (או $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$).
 הערה: סעיף ג' הוא למעשה הכללה של סעיף א'.

(9) נניח כי f גזירה ב- \mathbb{R} .

האם נכון לומר כי מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$?

הוכיחו או הפריכו.

הערה: למרות שתרגיל זה אפתור ללא שימוש במשפט לגראנז', הכנסתי אותו כאן בזכות הקשר שלו לשאלה הקודמת.

(10) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \leq x \leq 1$. הוכיחו שקיים לכל היותר c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c$.

(11) תהי $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ פונקציה גזירה, כך ש- $f'(x) < 0$ לכל $0 \leq x \leq 1$. הוכיחו שקיים בדיוק c אחד ב- $[0, 1]$, כך ש- $f(c) = c^2$.

(12) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a, b]$.

$$\frac{f'(c_2) + f'(c_3)}{2} = f'(c_1) \text{ ו- } c_2 \neq c_3 \text{ , כד ש- } c_1, c_2, c_3 \in (a, b) \text{ הוכיחו שקיימים}$$

(13) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.

נניח שהישר, המחבר את הנקודות $(0, f(0))$ ו- $(1, f(1))$, חותך את הגרף של f בנקודה $(a, f(a))$, כאשר $0 < a < 1$. הוכיחו שקיים $x_0 \in [0, 1]$, כך ש- $f''(x_0) = 0$.

(14) תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח ש- f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$ כאשר $L \in \mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f'_+(a) = L$ קיים וש- $f'_+(a) = L$.

(15) תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה שמקיימת $f(0) = 0$.

נניח שלכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $|f'(x)| \leq |f(x)|$. הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0, 1]$.

(16) נתון כי f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) .

א. ידוע כי $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו כי f קבועה ב- $[a, b]$.

ב. ידוע כי $f'(x) = m$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו כי f לינארית ב- $[a, b]$.

(17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון כי f, g רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע (a, b) .

ידוע כי $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו כי $f(x) = g(x) + c$ ב- $[a, b]$.

ב. הוכיחו כי $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

(18) נתון כי f גזירה בקטע (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

א. הוכח כי f' לא חסומה בקטע.

ב. האם בהכרח f' שואפת ל- ∞ או $-\infty$?

תשובות סופיות

8 ב. 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט הערך הממוצע המוכלל של קושי

שאלות

(1) הוכיחו שלכל $1 \leq a < b$ מתקיים $n(\ln b - \ln a) < b^n - a^n$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

(2) הוכיחו כי עבור כל a, b המקיימים $0 < a < b < 1$,

$$\frac{a}{1+a^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\ln b - \ln a} < \frac{b}{1+b^2} \quad \text{מתקיים}$$

(3) הוכיחו כי עבור כל a, b המקיימים $1 < a < b$,

$$\frac{2\sqrt{b}}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} < \frac{2\sqrt{a}}{1+a^2} \quad \text{מתקיים}$$

(4) הוכיחו כי $|\tan y - \tan x| \leq 8|\sin x - \sin y|$ לכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

(5) הוכיחו כי $\arctan x > \ln(1+x)$ לכל $x \in (0, 1)$.

(6) הוכיחו שלכל $x \neq 0$ מתקיים $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

(7) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $(0, 1)$.

הוכיחו שבקטע $(0, 1)$ קיים פתרון למשוואה $f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$.

(8) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $(0, 1)$, ויהי n מספר טבעי כלשהו.

הוכיחו שקיים $0 < c < 1$, המקיים $f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{nc^{n-1}}$.

(9) יהיו a ו- b מספרים חיוביים כלשהם.

הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(a^3 - b^3)\cos x = 3x^2(\sin a - \sin b)$.

(10) תהי f פונקציה גזירה ב- $[a, b]$, כאשר $a \geq 0$.

הוכיחו שקיימים $c_1, c_2 \in [a, b]$, כך ש- $\frac{f'(c_1)}{a+b} = \frac{f'(c_2)}{2c_2}$.

(11) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[a, b]$, כאשר $ab > 0$.

הוכיחו שלמשוואה $f'(x) \cdot x - f(x) = \frac{1}{b-a} \left| \begin{matrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{matrix} \right|$ קיים פתרון בקטע $[a, b]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט דרבו

שאלות

(1) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$?

(2) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$?

(3) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$?

(4) האם קיימת פונקציה גזירה f , שמקיימת $f'(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a, b)$. הוכיחו :

אם f' לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות סליקה. ב. האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x) = \begin{cases} 4 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$?

(6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a, b)$. הוכיחו :

אם f' לא רציפה ב- x_0 , אז x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג I. ב. האם קיימת פונקציה f גזירה ב- \mathbb{R} ,

שהנגזרת שלה נתונה על ידי $f'(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$?

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0 \in (a, b)$.

הוכיחו :

אם f' לא רציפה ב- x_0 , אז $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \neq \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \neq \pm\infty$.

כלומר, x_0 היא לא נקודת אי-רציפות מסוג שני, שבה אחד הגבולות החד-צדדיים אינסופי.

ב. האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- \mathbb{R} ,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה נתונה על ידי}$$

(8) האם קיימת פונקציה f , גזירה ב- $[0, 1]$,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{שהנגזרת שלה ב-} [0, 1] \text{ נתונה על ידי}$$

(9) תהי f פונקציה גזירה ב- \mathbb{R} , ונניח כי $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$.

$$\text{הוכיחו שקיים } x \in (0, 2) \text{, שעבורו } f'(x) = \frac{1}{4}.$$

(10) תהי f פונקציה גזירה בקטע (a, b) , ומקיימת $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, b)$.

הוכיחו כי f מונוטונית בקטע (a, b) .

(11) ממשפט דרבו נובע, שהנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת את תכונת ערך הביניים (למרות שהנגזרת לא בהכרח רציפה).

האם הנגזרת של פונקציה גזירה מקיימת גם את משפטי וירשטראס?

הוכיחו או הפריכו זאת.

(12) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0, 1]$, המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 2$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x ב- $[0, 1]$, כך ש- $f'(x) = x^2 + x$.

(13) תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0, 1]$, המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x ב- $[0, 1]$, כך ש- $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$.

(14) תהי f פונקציה גזירה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, המקיימת $0 \leq f'(x) \leq 1$, לכל x בקטע.

הוכיחו כי קיימת נקודה x בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, כך ש- $f'(x) = \sin x$.

(15) תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה, לא קבועה שמקיימת $f(0) = f(1) = 0$.

הוכיחו שקיים x ב- $(0,1)$, שעבורו $f'(x)$ רציונלי השונה מ-0.

תשובות סופיות

- (1) לא.
- (2) לא.
- (3) לא.
- (4) לא.
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (7) א. שאלת הוכחה. ב. לא.
- (8) לא.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 12 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 135 1. טור טיילור וטור מקלורן
- 137 2. טור טיילור סביב $X=X_0$
- 138 3. חישוב סכום של טור
- 139 4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
- 140 5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
- 142 6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
- 143 7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
- 149 8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
 אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\pi/4 \quad (5) \qquad 2e \quad (4) \qquad \sqrt{e} \quad (3) \qquad e^{-2} \quad (2) \qquad e \quad (1)$$

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \qquad \ln 2 \quad (8) \qquad \cos 1 \quad (7) \qquad \sin 1 \quad (6)$$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס. מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$.

(6) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x^4 - x^4}{(x - \sin x)^4}$.

(7) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)^3 - (\sin x^3)^2}{\ln(1 + x^{10})}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

$$216 \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (7)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \qquad \sin 3^\circ \quad (2) \qquad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שוניים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \qquad (n=1) \cos 4^\circ \quad (5) \qquad (n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (4)$$

$$1, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (5)$$

$$\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{160} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[3]{9/100} \quad (11)$$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4} \cong 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$, עבור $|x| < 0.1$?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

(6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

(7) נתונה $f(x) = \sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0 \leq x \leq 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x \geq 0$ מתקיים $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

(8) נתונה $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, $\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1 < x$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$.

(9) נתונה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

עבור $|x| \leq 0.5$, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את \sqrt{e} ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

עבור $0 \leq x \leq 1$, $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שעבורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.
- ה. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

12 תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,ונניח ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.**13** תהי $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1) = f(1) = 0$.כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.**14** תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי $|f'(x)| \leq M$ לכל $0 < x$.הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.**15** תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$,ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.**16** תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים : $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$ הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

(17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

(18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

1. א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$ (1)
 חישוב: $\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.
 ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$.
2. א. נוסחה: $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$ (2)
 ב. שאלת הוכחה.
3. א. נוסחה: $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \cdot \sqrt{(c+4)^8}}x^3$ (3)
 חישוב: $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.
 ב. שאלת הוכחה.
4. נוסחה: $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$ (4)
 חישוב: $\sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.
5. $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$ (5)
6. א. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!}$ (6)
 ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$
7. א. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ ב. שגיאה הקטנה מ-0.25. (7)
 א. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$ (8)
 ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.
9. א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$ (9)
 ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.
10. א. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e} = 1.6487$ (10)
 ג. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$ ד. $\frac{3}{(n+1)!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \quad \text{ד. } \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.} \quad p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$. בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 13 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

- 150 1. אינטגרלים מידיים
- 153 2. מציאת פונקציה קדומה

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

$$\int 4dx \quad (1) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

- (8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$, ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$.
- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

- (1) $f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (2) $f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20}$
- (3) $f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6}$
- (4) $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (5) $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$
- (6) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
- (7) $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2$
- (8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.
 ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 155

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\frac{1}{3} \ln x^3+1 +c$ (3) | $\ln \sin x +c$ (2) | $\ln x^2+1 +c$ (1) |
| $e^2 \ln e^x+1 +c$ (6) | $\ln \ln x +c$ (5) | $-\ln \cos x +c$ (4) |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ (9) | $e^{\tan x}+c$ (8) | $e^{x^2}+c$ (7) |
| $\sin(\ln x)+c$ (12) | $\sin(\sin x)+c$ (11) | $\sin(2x^2+1)+c$ (10) |
| $-2\cos(\sqrt{x})+c$ (15) | $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$ (14) | $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$ (13) |
| $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$ (18) | $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$ (17) | $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (16) |
| $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$ (21) | $\sqrt{2\sin x}+c$ (20) | $2\sqrt{x^2+1}+c$ (19) |
| $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (24) | $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$ (23) | $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$ (22) |

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 15 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....157

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23:

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 16 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 161

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 17 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 164 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 166 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 167 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left((\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 18 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 169
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 171
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 172
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 173
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 176

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$ $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$ $\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$ $\int \tan^2 x dx \quad (8)$ $\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$ $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$ $\int \sin^2 4x dx \quad (14)$ $\int \sin^3 4x dx \quad (16)$ $\int \sin^4 4x dx \quad (18)$ $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$ $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$ $\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$ | $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$ $\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$ $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$ $\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$ $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$ $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$ $\int \cos^2 x dx \quad (13)$ $\int \cos^3 x dx \quad (15)$ $\int \cos^4 x dx \quad (17)$ $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$ $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$ $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכרו כי :

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

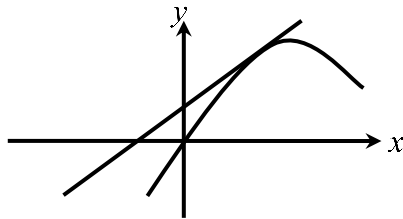
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

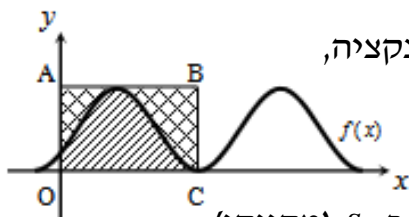


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב- C , כך שנוצר המלבן $ABCO$.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

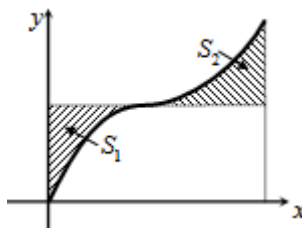
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

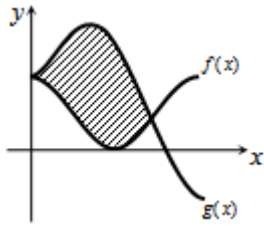
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 2\pi$,

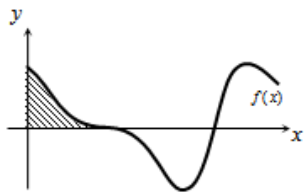
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.

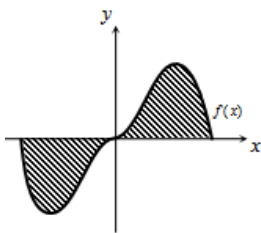




- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמשו בזהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- 5 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$, בתחום $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y' = x^2 \sin x$.
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש. (1)

א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$ (1)

א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול. (2)

ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

א. $(0, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$ ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ (3)

א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש. (4)

א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ (5)

$b = -2, a = 2$ (6)

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 19 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

180	1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א
186	2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים
189	3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות
192	4. משפטי האינטגרביליות
193	5. אינטגרביליות לפי דארבו
195	6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר, } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

12) תהי $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$.

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\text{14) חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{15) חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

16) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x , ונתון כי $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, בעזרת ההצבה $t = \frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת ההצבה $t = \tan x$ חשבו את האינטגרל $\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$.

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון

החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$, ואם $\int_a^b f(t) dt = 0$ וגם

$$\int_a^b g(t) dt = 0, \text{ אז } \int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\arctan 6 - \arctan 3$

(6) $\frac{\pi}{2}$

(7) $\frac{17}{12}$

(8) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9) $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $x = e^2$

(13) 0

(14) $\frac{\pi}{4}$

(15) $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17) 0

(18) $2 \arctan 4$

(19) 0

(20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

(21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25) $1 - \sqrt{3}$

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

- (1) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $m \leq f(x) \leq M$ לכל x בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$ לכל $x \in [0, 1]$. הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0, 1]$.

(13) תהי $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0, a]$.

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$$

תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)| dt = 0$.

הוכיחו כי לכל x בקטע (a, b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$.

הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a, b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1, n]$.

הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$.

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$.

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b)

$$\text{וגם } f'(x) \leq M \text{ לכל } x \text{ בקטע זה, וכן } f(a) = 0, \text{ אז } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

(19) יהיו $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b], \text{ כך ש-} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$:

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a, b]$.
 ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
 ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1, 1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a, b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
 ב. קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{4) נתונה הפונקציה}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אינטגרביליות לפי דארבו

שאלות

- (1) נתונה $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, המוגדרת על ידי $f(x) = x$.
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$.
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$(3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ בקטע $[0,1]$.
- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה f , כך ש- $|f| - 1$ אינטגרביליות, אך f לא אינטגרבילית.

- (5) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה P של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P, f) = U(P, f)$. הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

- (6) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה P_n של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$.
- א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x) = x$, בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x) = x^2$, בקטע $[0,2]$.

(8) הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 f = \int_0^1 f = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.} \quad \int_0^2 f = \int_0^2 f = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

שאלות

(1) תהי $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- n תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n = 6, 8, 10, 20$.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה והיו P ו- Q שתי חלוקות של הקטע, כך ש- Q עידון של P , אז $L(Q, f) \geq L(P, f)$ ו- $U(Q, f) \leq U(P, f)$.
 ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:

$$\text{תהי } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציה חסומה, אז } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.

כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:

פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של הקטע $[a, b]$, כך ש- $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a, b]$, ונניח כי (P_n) היא סדרה של

$$\text{חלוקות של הקטע } [a, b], \text{ כך ש-} U(P_n, f) - L(P_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכיחו ש- f אינטגרבילית.

$$\text{ג. נתון } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } f \text{ אינטגרבילית ומצאו את } \int_0^1 f(x) dx$$

(4) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

$$(5) \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad \text{סדרת פונקציות } f_n(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי:}$$

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

$$(6) \quad \text{תהי פונקציה } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ כך ש-} f(x) = x \text{ לכל } x \text{ רציונלי,}$$

$$\text{ו-} f(x) = 0 \text{ לכל } x \text{ אי-רציונלי.}$$

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של f , והראו כי f אינה אינטגרבילית.

$$(7) \quad \text{תהי } f: [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ מוגדרת באופן הבא:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{אם } x = \frac{p}{q} \neq 1, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N} \text{ ול-} p, q \text{ אין גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 0 \text{ או } x = 1 \end{cases}$$

$$A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \right\} : N \in \mathbb{N} \text{ לכל } N \text{ מוגדרת באופן הבא, לכל } N \in \mathbb{N}$$

כאשר $p, q \in \mathbb{N}, q \leq N$ ול- p, q אין גורמים משותפים. הראו שהקבוצה A_N סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$ ו- $\varepsilon > 0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$: \text{כך ש-} [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

$$, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$, A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$\text{ו-} |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{2m-1} - x_{2m}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ג. הראו ש- f אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, g ו- h ב- $[0,1]$,

כך שהרכבה $g \circ h$ אינה אינטגרבילית.

$$(8) \quad \text{תהי } f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ אינטגרבילית וכן } [c,d] \subseteq [a,b]$$

הראו ש- f אינטגרבילית ב- $[c,d]$.

9 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f חסומה ב- $[c, d]$, ונתון :

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in [c, d]\}, \quad M' = \sup \{|f(x)| \mid x \in [c, d]\}$$

$$m = \inf \{f(x) \mid x \in [c, d]\}, \quad m' = \inf \{|f(x)| \mid x \in [c, d]\}$$

הוכיחו כי $M' - m' \leq M - m$.

ב. תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו- f^2 אינטגרביליות.

10 תהינה f ו- g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

ב. הוכיחו כי $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$,

אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-

11 תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (כלומר, $f(x) \geq 0$).

א. הוכיחו כי אם f רציפה וכן $\int_a^b f(x) dx = 0$, אז $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה f אינטגרבילית ב- $[a, b]$, כאשר $\int_a^b f(x) dx = 0$,

אבל קיים $x_0 \in [a, b]$, עבורו $f(x_0) > 0$.

הערה: f לא תהיה רציפה.

12 תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c \in (0, 1)$, הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[c, 1]$.

א. הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי

אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

13 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה fg אינטגרבילית ב- $[a, b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית

$$\int_a^b (fg)(x) dx = 0, \text{ כלשהי } g, \text{ מתקיים}$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ (כלומר, $f(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$).

14 ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x, y \geq 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\} \text{ הוכיחו כי}$$

ב. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ הוכיחו כי}$$

15 [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ הוכיחו כי}$$

$$\text{רמז: } \sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}$$

ב. תהינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ הוכיחו כי}$$

$$\text{רמז: } \int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}$$

16 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של f במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

(17) סעיף א'

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + b^{n-2} + a^{n-1}),$$

כאשר $n \in \mathbb{Z}^+$ וכן $a, b \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ הוכיחו כי } k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n \text{ כאשר } k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

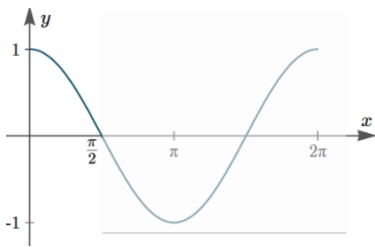
$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n$$

סעיף ב'

תהי $f(x) = x^n$ מוגדרת בתחום $[0, 1]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי f אינטגרבילית ב- $[0, 1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x) dx$.
 רמז: חלקו את הקטע $[0, 1]$ ל- m קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



(18) תהי $f(x) = \cos x$ מוגדרת ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- f אינטגרבילית

$$\text{ב-} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{, וחשבו את } \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

רמז 1: חלקו את $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ל- n קטעים שווים, והניחו כי $n \rightarrow \infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k \in \mathbb{Z}^+$ ו- $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

כדי להעריך את הסכום:

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

(19) חשבו את $\int_1^2 f(x) dx$, בעזרת החלוקה $P_n = \left\{ x_0, x_1, \dots, x_n \right\}$

כאשר $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$ ($0 \leq i \leq n$) וגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad \text{א. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

(20) תהיינה f, g שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$. הוכיחו:
 א. אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
 ב. אם $m \leq f(x) \leq M$ לכל $x \in [a, b]$, אז $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

(21) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית. הוכיחו כי \sqrt{f} אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

(22) נתונה הפונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:
 א. אם f אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.
 ב. אם f רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.
 ג. אם f אינטגרבילית, אז כך גם f^2 .
 ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם f .

(23) חשבו את $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$, כאשר $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ (פונקציית הערך השלם).

(24) הוכיחו כי אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$, אז αf אינטגרבילית ב- $[a, b]$, וכן $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$. רמז: הניחו תחילה כי $\alpha \geq 0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל- $\alpha < 0$.

(25) הוכיחו כי אם f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$, אז כך גם $f + g$, ובנוסף מתקיים $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. רמז: הוכיחו כי $\int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$ וכן $\int_a^b (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$.

(26) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c > 0$, כך ש- $|f(x)| \geq c$ לכל $x \in [a, b]$. [לחלופין: f אינטגרבילית ואינה אפס; $\frac{1}{f}$ חסומה] הוכיחו כי גם $g = \frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

(27) נניח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

- א. הוכיחו כי גם $f \cdot g$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.
 ב. הוכיחו כי אם $|g(x)| \geq c > 0$ לכל $x \in [a, b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

(28) הניחו כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ וכן ש- $a < c < b$, והוכיחו כי:

- א. אם f אינטגרבילית ב- $[a, b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, c]$ ו- $[c, b]$.
 ב. אם f אינטגרבילית ב- $[a, c]$ ו- $[c, b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, b]$.
 ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(29) נניח כי f, g אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

נגדיר $\varphi = \max\{f, g\}$ וכן $\psi = \min\{f, g\}$.

הוכיחו כי גם φ, ψ אינטגרביליות ב- $[a, b]$.

רמז: $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$, $\min\{a, b\} = ?$

(30) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ של $[a, b]$ וכן $\varepsilon > 0$, נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו- $B_\varepsilon(P)$ של $\{1, \dots, n\}$, באופן הבא:

$i \in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i - m_i < \varepsilon$ ו- $i \in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i - m_i \geq \varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $\tau > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל P כנ"ל $s_\varepsilon(P) < \tau$ $\Rightarrow \|P\| < \delta$.

(31) נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהי $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$.

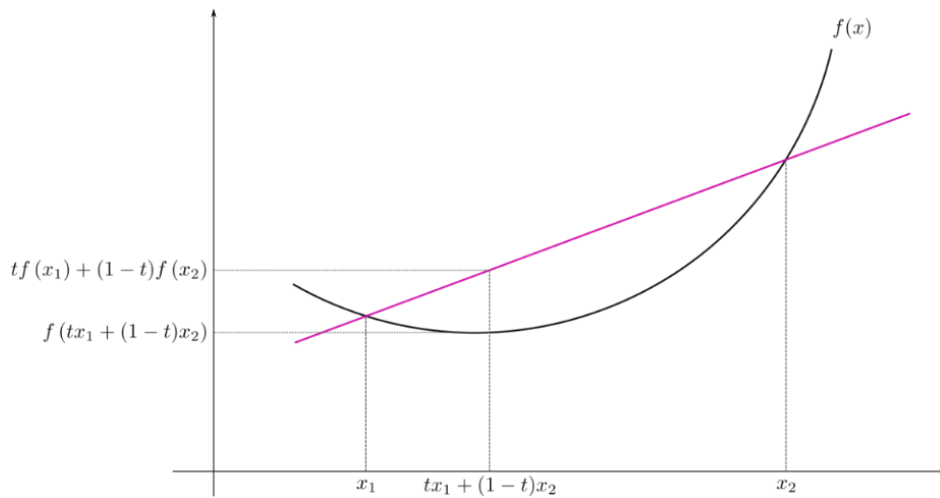
א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ל- P ,

כך ש- $S(f; P, C) = L(f, P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי f רציפה?

(32) זכרו כי פונקציה f על קטע I תיקרא קמורה, אם לכל $a, b \in I$, ולכל $t \in [0, 1]$, מתקיים

$$f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$


א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, מתקיים אי-השוויון

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$$

[רמז: אינדוקציה על n]

ב. (אי-שוויון יַנְסֶן)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

$$f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

הוכיחו כי

(33) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכיחו כי f אי-זוגית אם ורק אם F זוגית.

ב. הוכיחו כי f זוגית אם ורק אם F אי-זוגית.

(34) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ותהי $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכיחו כי אם F מחזורית, אז גם f מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה f מחזורית אבל F לא-מחזורית.

(35) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

$$\int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

הוכיחו שקיים $c \in [a, b]$ ש-

(36) תהי A קבוצת כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, שהן אינטגרביליות בכל $[a, b]$,

$$\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1 : x \in \mathbb{R}$$

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x \in \mathbb{R}$.

- א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- A .
- ב. הוכיחו כי אם $f \in A$, אז f גזירה ב- \mathbb{R} .
(רמז: תחילה הראו ש- f רציפה).
- ג. מצאו את כל הפונקציות ב- A .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 20 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

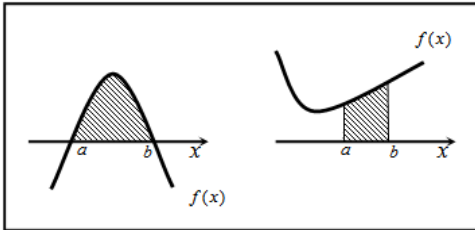
תוכן העניינים

204	1. חישוב שטחים
224	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
225	3. אורך קשת

חישוב שטחים

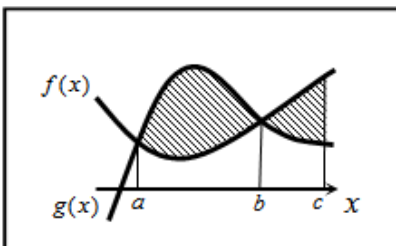
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

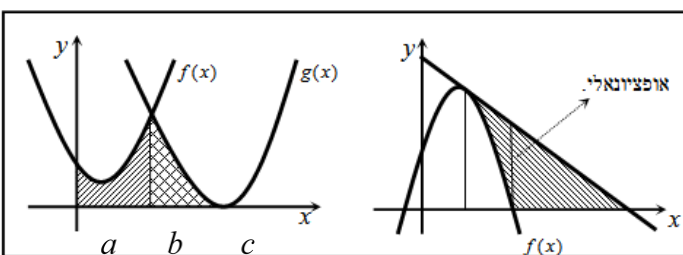


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

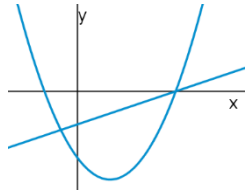
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

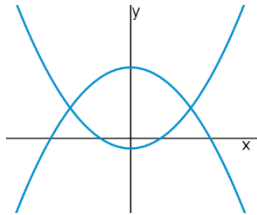


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

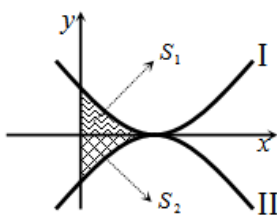
שאלות



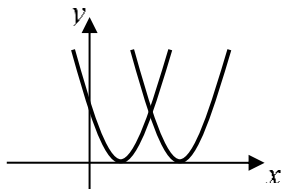
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



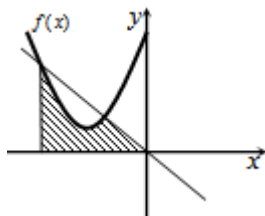
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g .



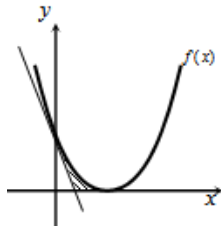
- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$,
 כמתואר באיור.
 א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
 ב- S_1 ו- S_2 , כמתואר באיור.
 הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



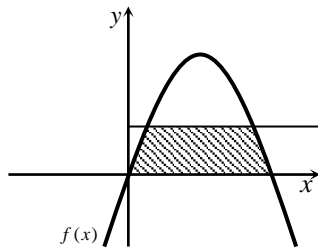
- (4) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



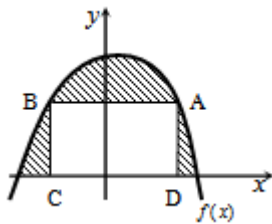
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
 בנקודה שבה $x = -4$, כמתואר באיור.
 א. מצאו את משוואת הישר.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



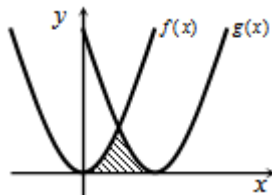
- 6) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.
 א. מצאו את משוואת המשיק.
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



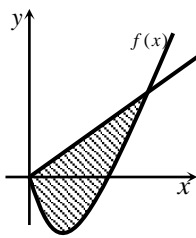
- 7) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
 הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x = 9$.
 א. מצאו את ערך הפרמטר k .
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



- 8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן, היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB , שמשוואתו $y = 6$, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו- B . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x , כך שנוצר מלבן $ABCD$. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x = 4$.
 א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



- 9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

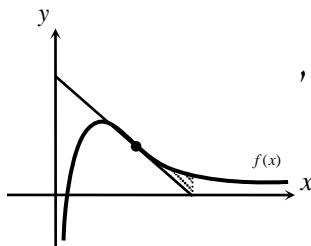
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y = 16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$,

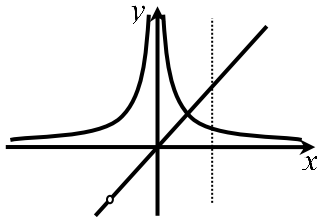
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

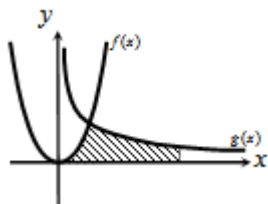


12 נתונות שתי פונקציות $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



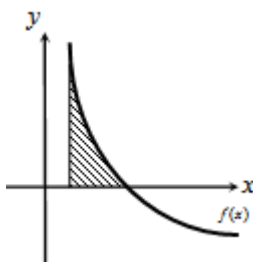
$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ (קבוע, $a > 0$), בתחום $x > 0$.

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר $y = 4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 4$.



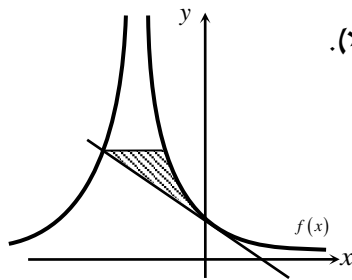
14 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ (קבוע a)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

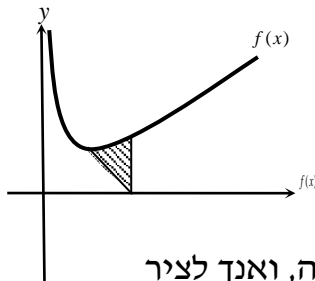
ציר ה- x והישר $x = 2$.



15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (פרמטר חיובי).

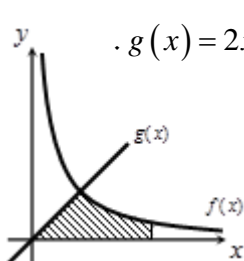
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y , הוא $-\frac{1}{9}$.

- א. מצאו את ערך הפרמטר A .
- ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4.5$.
- ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

- א. מצאו את נקודת המינימום שלה.
- ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x .
- מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x , היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

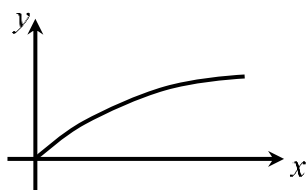


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

- א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x = 9$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .



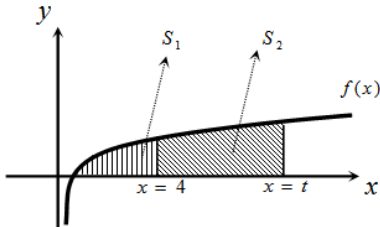
19 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.

(20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = t$ (כאשר $t > 4$).
 נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1 ,
 ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2 .

ידוע כי $8S_1 = S_2$.
 מצאו את t .



(21) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

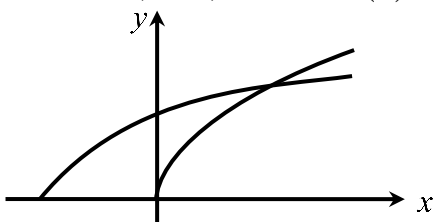
1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m = \frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(22) נתונות שתי פונקציות $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, כאשר $(b > 0)$.



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b .

(23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

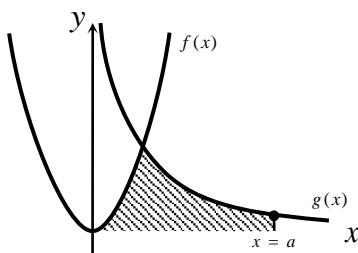
נעביר ישר $x = a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

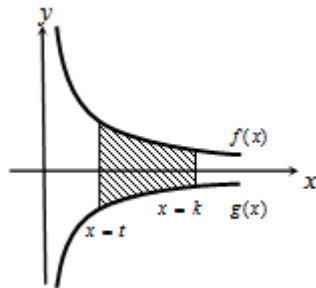
ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $\frac{1}{3} \cdot 85$.

מצאו את a .



(24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.



נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

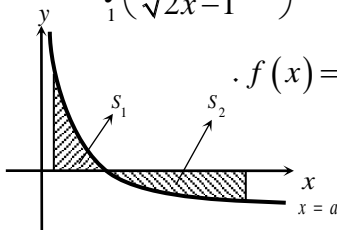
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S = 12$.

מצאו את t .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a , $(a > 1)$ יתקיים $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

נעביר שני אנכים לציר ה- x , $x=1$ ו- $x=13$,

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

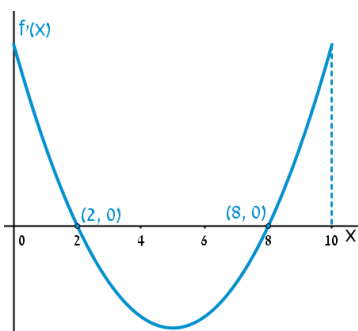
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x=1$, כלומר את S_1 .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו ל כמה שווה השטח S_2 .

נמקו.



(26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

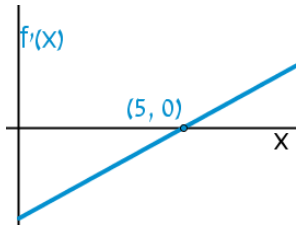
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם $f(2) = 6$, $f(0) = -4$, $f(5) = 0$,

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.



(27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את

ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא $y = -2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

(28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

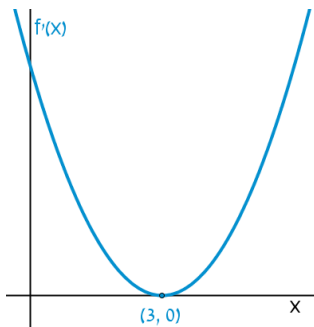
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

אם ידוע כי $f(3) = 4$, וכי היא חותכת את

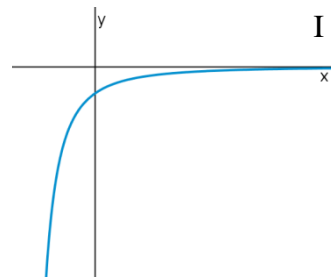
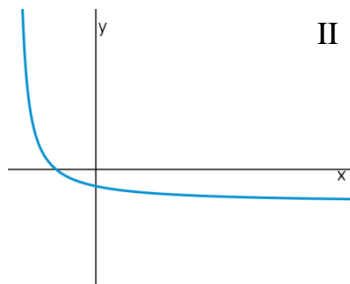
ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



(29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

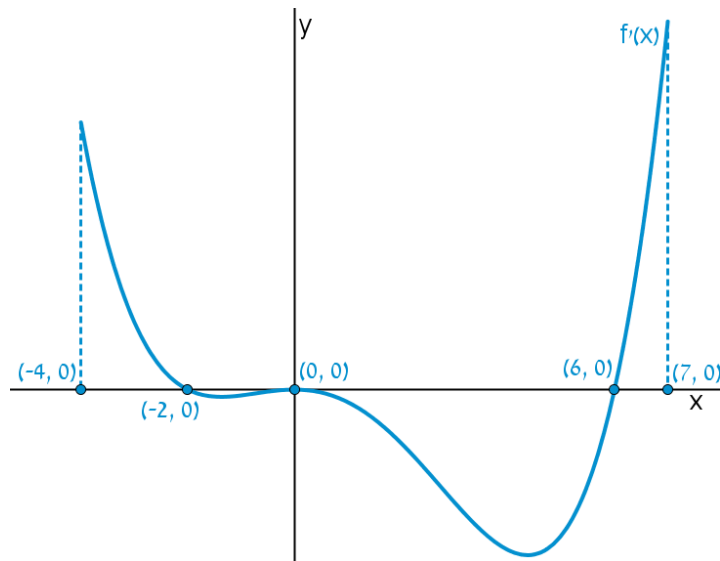


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10) = -3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

30 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:

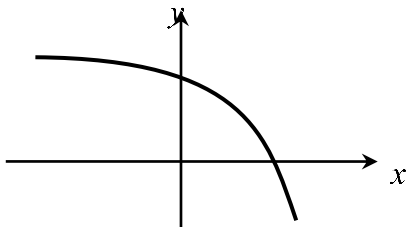


- א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$, לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

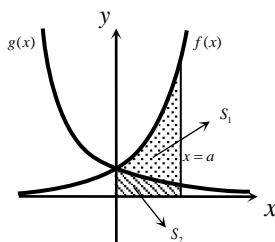
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



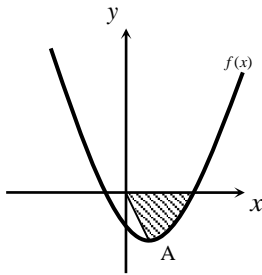
- (31)** נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
 וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצאו את ערכו של הפרמטר b .

- (33)** נתונות הפונקציות $f(x) = e^{-x}$ ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
 ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x , כך שנוצר מלבן.
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

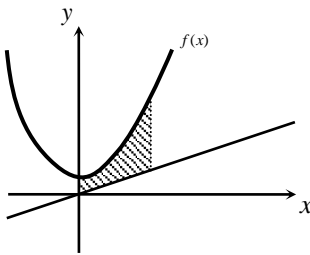


- (34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
 נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x = a$,
 כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
 אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
 ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
 מצאו את a .



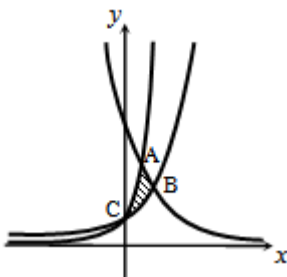
35 נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
 ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



36 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

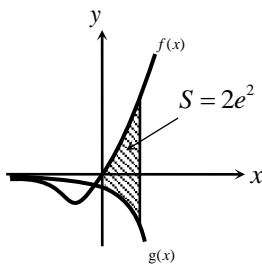
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.
 א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
 ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y = 0.1x$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x = 2$.



37 באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
 ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



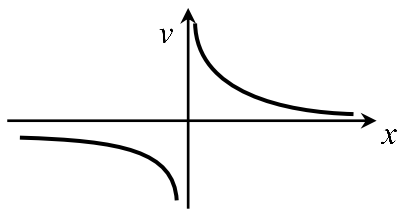
38 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.
 ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x) = xe^x - 1$ ו- $g(x) = -e^x$.
 נעביר ישר $x = a$, כאשר $a > 0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).
 ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.
 מצאו את a .

פונקציות לוגריתמיות

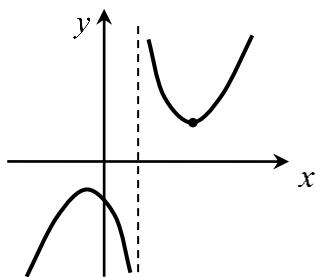
אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$



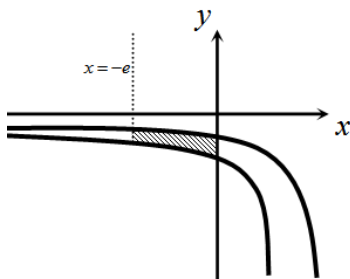
(39) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



(40) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$, ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.

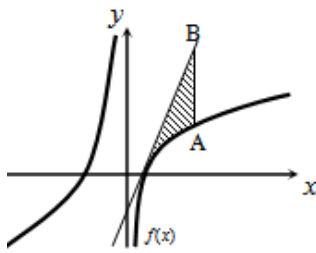


(41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

$$\text{ו-} g(x) = \frac{a-1}{x-2}, \text{ בתחום } x < 0.$$

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

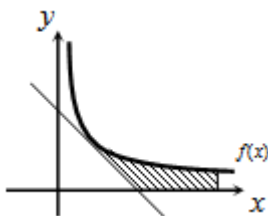


(42) נתונה הפונקציה $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y = 18x - 9$.
 א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- y , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

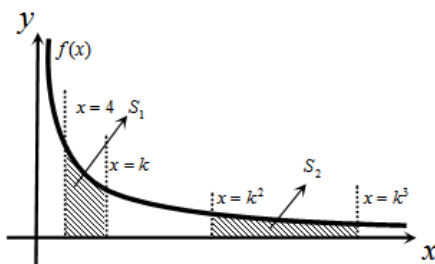
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא $y = 4 - x$.
 א. מצאו את $f(x)$.

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x > 0$.
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



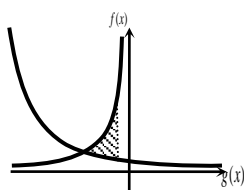
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ ו- $x = 4$ ($x > 4$).

א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .

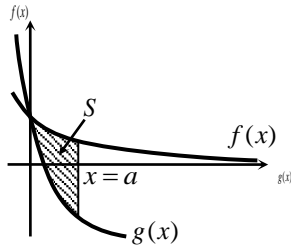
- ב. הראו כי ההפרש $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k , וחשבו את ערכו.
 ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצאו את k .



(45) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.
 א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
 ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



46 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$
 בתחום $x \geq 0$.

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. נעביר ישר $x = a$ ($a > 1$), המאונך

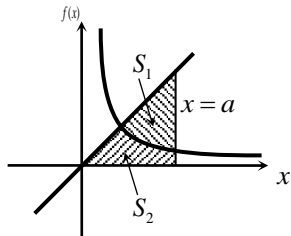
לציר ה- x , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצאו את ערכו של a , עבורו מתקיים $S = 4$.

47 באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר $y = x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$, הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

S_1 ו- S_2 , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a , עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

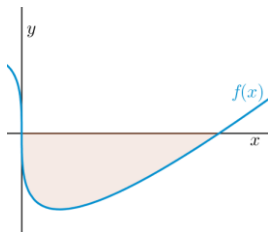
ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

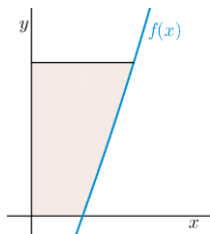
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n} \neq -1$.



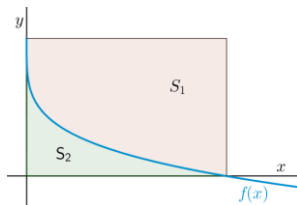
(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

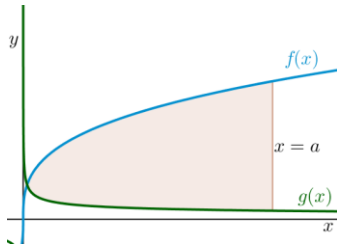
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
 חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

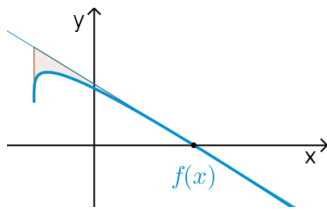
בתחום $x > 0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x , $x = a$ (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.

מצאו את a .



52) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, פרמטר a .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = 2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

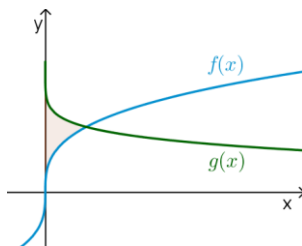
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- y .

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x

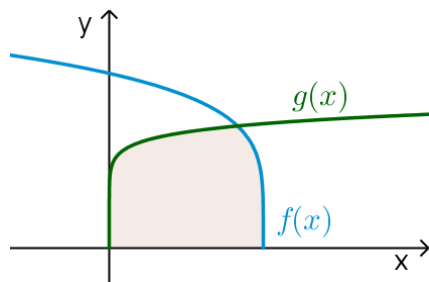
בנקודה שבה $x = 1.2$.

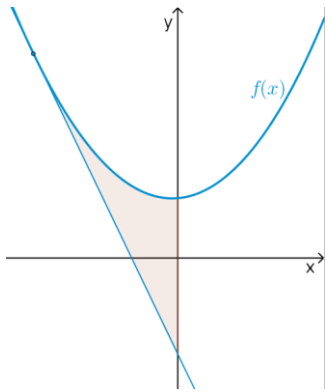
א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה

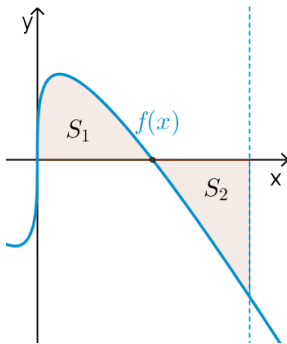
$g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .





55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

- א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
- ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



56) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
 נעביר ישר $x = k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור.
 מצאו את k , אם ידוע כי $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (3) א. $f(x) = I$, $g(x) = II$ ב. שאלת הוכחה.
- (4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $y = -x$ ב. $(-3, 3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (6) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (7) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) א. $g(x) = (x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (10) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $y = -x + 2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (14) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (15) א. $A = 6$ ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.
- (16) א. $\min(0.5, 1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א. $(4, 8)$ ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20) $t = 16$
- (21) א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. 88 יח"ש.
- (22) $b = 2$
- (23) $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$.
- (25) א. $a=13$. ב. $(5,0)$. ג. i. $S_1=2$. ii. $S_2=|-S_1|=2$.
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$. ג. $\min(5,-2)$. ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש. ב. 1 יח"ש.
- (29) א. $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31) $S=0.192$ יח"ש.
- (32) $b=2$.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) $a=\ln 2$.
- (35) א. $A(1,-e-2)$. ב. $y=-(e+2)x$. ג. $S=4.744$ יח"ש.
- (36) א. $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$. ב. 1.52.
- (37) א. $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$. ב. $S=1.03$ יח"ש.
- (38) א. $y'=xe^x$. ב. $a=2$.
- (39) $S=\ln 4$ יח"ש.
- (40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.
- (41) א. $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$. ב. $S=1.76$ יח"ש.
- (42) א. $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$. ב. $x=2$. ג. $S=6+\ln 256 \approx 11.54$ יח"ש.
- (43) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.
- (44) א. $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (45) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (46) ב. $a=2$.
- (47) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (48) א. $(0,0), (8,0)$. ב. $S=16$ יח"ש.
- (49) א. $x>0$. ב. $(2,0)$. ג. $S=18.149$ יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

חישוב שטחים ביחס לציר ה- y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad \text{(2)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad \text{(1)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad \text{(4)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad \text{(3)}$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{(6)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad \text{(5)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad \text{(8)}$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad \text{(7)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad \text{(9)}$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1097}{480} \quad \text{(3)}$$

$$21 \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad \text{(5)}$$

$$9 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad \text{(7)}$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad \text{(8)}$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad \text{(9)}$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 21 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 226
3. משוואה הומוגנית 228
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 230
5. משוואה מדויקת 231
6. גורם אינטגרציה 233
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 236
8. משוואת ברנולי 238
9. משוואת ריקטי 239

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4}\ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4}\left[-(2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y + 2}{x - 1}\right| + (-2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y + 2}{x - 1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y + 1}{x - 2} + \left(\frac{y + 1}{x - 2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

(1) הראו שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

(4) $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$

(5) $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$

(6) $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$

(7) $(y^2 - y) dx + x dy = 0$

(8) $(y - xy^2) dx + (x + x^2y^2) dy = 0$

(9) $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

(10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

(11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

(12) נתונה המשוואה $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$.

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x + y)$.

(13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

(14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$.

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$. כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

(15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

(16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x + y$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[-5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[-\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואות ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואות ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 22 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

240	1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות
242	2. הצמוד המרוכב
245	3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית
247	4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב
249	5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים
252	6. חילוק פולינומים
253	7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה
254	8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את המשוואות ומצאו את z :

$$(1) \quad z^2 + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$$

בשאלות 4-7 חשבו :

$$(4) \quad (i\sqrt{2})^6 \quad (5) \quad (i^5 - i^{13})^2$$

$$(6) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (7) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

ידוע כי $z_1 + z_2$ ממשי וכי $z_1 - z_2$ מדומה.

א. מצאו קשר בין a_1 ל- a_2 ובין b_1 ל- b_2 .

ב. הראו כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

(9) יהיו z_1, z_2, \dots, z_n מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ב. הוכיחו כי $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$

ג. הוכיחו כי $|z_1^n| = |z_1|^n$

(10) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $z^{11} = 1$ אז $z + \frac{1}{z}$ מספר ממשי.

(11) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו: אם $|z+1| = |z-1|$ אז iz מספר ממשי.

תשובות סופיות

- (1) $\pm 3i$
- (2) $2 \pm i$
- (3) $3 \pm 2i$
- (4) -8
- (5) 0
- (6) $2 - 9i$
- (7) $-11 + 10i$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z = x + yi$):

$$(1) \quad \frac{5}{2+i} \quad (2) \quad \frac{1+i}{1-3i} \quad (3) \quad \frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2}$$

פתרו את המשוואות בשאלות 4-6 ומצאו את המספר המרוכב z :

$$(4) \quad 2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (5) \quad z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \quad (6) \quad (1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0$$

7 פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

8 חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } \sqrt{5-12i} \quad \text{ב. } \sqrt{8+6i}$$

9 פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } (1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0 \quad \text{ב. } (-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$$

בשאלות 10-11 פתרו את המשוואות:

$$(10) \quad iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0$$

$$(11) \quad z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$$

12 הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{z}{\bar{z}^2}$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

13) נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z-i|=1$.
 הוכח:

א. $|z|^2 = 2 \operatorname{Im}(z)$

ב. $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.
 מצאו את a .

15) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

תשובות סופיות

(1) $2 - i$

(2) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

(3) $-\frac{1}{2} + i$

(4) $z = -1 + 2i$

(5) $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$

(6) $z = i, z = -1$

(7) $z = 2 - 3i, w = 5 + i$

(8) א. $z = \pm(3 - 2i)$ ב. $z = \pm(3 + i)$

(9) א. $z_{1,2} = i, 1$ ב. $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$

(10) $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$

(11) $z_1 - 3i, z_2 = 2i$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) $a = -\frac{3}{4}$

(15) שאלת הוכחה.

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות 1-8 בצורה קוטבית:

- (1) $1 + \sqrt{3}i$ (2) $-1 - i$ (3) $-3 - \sqrt{3}i$ (4) $1 - i$
- (5) $1 + i$ (6) $\sqrt{3} - i$ (7) $\sqrt{3}i$ (8) -8

(9) נתון המספר המרוכב $z = Rcis\theta$.

הביעו באמצעות R ו- θ את המספרים:

- א. \bar{z}
 ב. $\frac{1}{z}$
 ג. $-z$
 ד. $-\frac{1}{z}$
 ה. iz
 ו. $z \cdot \bar{z}$

(10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- א. $z + \bar{z}$
 ב. $z \cdot \bar{z}$
 ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- א. $z^2 - \bar{z}^2$
 ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(12) הוכיחו:

- א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$
 ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

תשובות סופיות

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad (2)$$

$$\sqrt{12} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (5)$$

$$2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \quad (6)$$

$$\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad (7)$$

$$8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (8)$$

$$R \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{ב.} \quad R \operatorname{cis}(-\theta) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$R^2 \quad \text{ו.} \quad R \operatorname{cis}(90^\circ + \theta) \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{R} \operatorname{cis}(180^\circ + \theta) \quad \text{ד.}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (3) \qquad (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad (2) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \qquad \sqrt[5]{1} \quad (5) \qquad \sqrt[6]{-8} \quad (4)$$

(7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי: $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{32}i \quad (1)$$

$$-2^9 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$8^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
 ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6 = 1$.

(2) נתונה המשוואה $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.
 ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.
 ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .
 ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. פתרו את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$.
 ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.
 הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

(6) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

- א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.
 ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(7) נתונה המשוואה $(z-1)^3 = 1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

(8) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

א. מצאו את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3 .

ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.

ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(9) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
 s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .

ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצאו את הפרמטרים s ו- t .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.

הפרש סדרה זו הוא $1 + \frac{1}{16}i$.

האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$,

כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^\circ, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ$. ב. שאלת הוכחה.

2) א. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$. ב. שאלת הוכחה.

3) $z = 0, z = 1, z = -1$

4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$.

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

5) א. $z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ]$ $n = 1, 2, 3, 4, 5$. ב. $q = cis72^\circ$.

6) א. $z_1 = cis45^\circ, z_2 = cis165^\circ, z_3 = cis285^\circ$. ב. שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$. ב. 6. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $z_1 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$. ב. $t = 9, s = \pm 1$.

10) א. $z_1 = 0, z_2 = -0.5 + 0.5i, z_3 = -8.5$. ב.

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים :

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

שאלות

בשאלות 1-4 נתון $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$, $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$
מצאו:

(1) א. $4u + v$ ב. $2i \cdot u - v$ (2) $u \cdot v$

(3) א. $u \cdot u$ ב. $|u|$

(4) $|v|$

בשאלות 5-6 פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i$$

מעל השדה \mathbf{F} : $iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i$, כאשר:

$$(-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i$$

(5) $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

(6) $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

בשאלות 7-8 בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

(7) מעל השדה הממשי \mathbb{R} .

(8) מעל שדה המרוכבים \mathbb{C} .

בשאלות 9-10 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$
תלויים ליניארית ב- C^3 :

(9) מעל \mathbb{C} .

(10) מעל \mathbb{R} .

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.

כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

פתרו פעם מעל \mathbb{C} ופעם מעל \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(12)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(11)}$$

$$\text{(13) נתונה מטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \text{ב. } (-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$$

$$(2) \quad \text{א. } 20 + 35i \quad \text{ב. } 66$$

$$(3) \quad \sqrt{66}$$

$$(4) \quad \sqrt{92}$$

$$(5) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(6) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t)$$

$$(7) \quad \text{כן}$$

$$(8) \quad \text{לא}$$

$$(9) \quad \text{תלויים.}$$

$$(10) \quad \text{בלתי תלויים.}$$

$$(11) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C} : x = 1 \pm 2i, \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \text{ערכים עצמיים : } x = 3, \text{ וקטורים עצמיים : } \mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(13) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = \langle 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i, -2 \rangle, \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = \langle 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -2 \rangle$$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 23 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

- 257 1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות.
- 262 2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר).
- 265 3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות.
- 268 4. שימושים של מערכת משוואות לינאריות.

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,

כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l} \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה \mathbb{C} ופעם מעל השדה \mathbb{R} .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה F :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א. $F = \mathbb{R}$

ב. $F = \mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א. $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$ $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \quad \text{ב} \quad (28) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad \text{א} \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$ $F=\mathbb{R}$

חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array} \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array} \quad (11)$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור a, b, c, d , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.
 ב. מצאו תנאי עבור b, c, d , כך שלכל a , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
 ח. מצאו לאיזה ערך של k , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של m שלוש המישורים:
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).
 ב. לא נפגשים באף נקודה.
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).
 ד. האם קיים ערך של m עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

תשובות סופיות

(1) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = 1$.3 $k = -2$

(2) 1. $k \neq 1, k \neq -2$.2 $k = -2$.3 $k = 1$

(3) 1. $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$.2 $k = \frac{4}{7}$.3 $k = -1$

(4) 1. $k \neq 1, k \neq -0.4$.2 $k = 1, k = -0.4$

(5) 1. $k \neq \pm 1, k \neq -2$.2 $k = \pm 1, k = -2$

(6) 1. $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$.3 $k = -1, k = -3, k = 2$

(7) 1. $k = -1$.2 $k \neq \pm 1$.3 $k = 1$

(8) 1. $k = 3$.2 $k \neq 3$.3

(9) 1. $k \neq 1$.2 $k = 1$

(10) 1. $a \neq 2$.2 $a = 2, b \neq -3$.3 $a = 2, b = -3$

(11) 1. $a \neq -6$ או $b \neq 2.5$.2 $a = -6, b = 2.5$.3

(12) 1. $a = 2, b \neq 2$.2 $a \neq 2$ או $a = 2, b = 2$.3

(13) א. $ab + 2c \neq d$.ב. $b = 0, c = 1.5, d = 3$

(14) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$.ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$

ג. 1. $k \neq 2, k \neq -1$.2. $k = -1$.3. $k = 2$.ד. $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$.ו. $k = -2$.ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

(15) א. $m \neq 0, -2, 3$.ב. $m = -2, 3$.ג. $m = 0$.ד. לא.

פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי m , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
 ב. עבור ערך m שנמצא ב-א, מצאו את ערכי k , עבורם למערכת פתרון.
 ג. עבור ערכי m, k שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$ מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
 ב. החמישייה $(4, 0, 2, 0, 0)$, היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
 ג. החמישייה $(4, 0, 2, 1, 1)$, היא פתרון של המערכת הנתונה.
 ד. לכל a ממשי, החמישייה $(4a, 0, 2a, 0, 0)$ אינה פתרון של המערכת הנתונה.
 ה. החמישייה $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$, היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ו. החמישייה $(0, 1, 0, 1, 2)$, היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

יהי W אוסף הפתרונות של המערכת.
 עבור אילו ערכים של הקבוע m (אם בכלל) W הוא:
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).
 ב. ישר (מצאו ישר זה).
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- A' את הצורה המדורגת של A .
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.
 מצאו את A .

תשובות סופיות

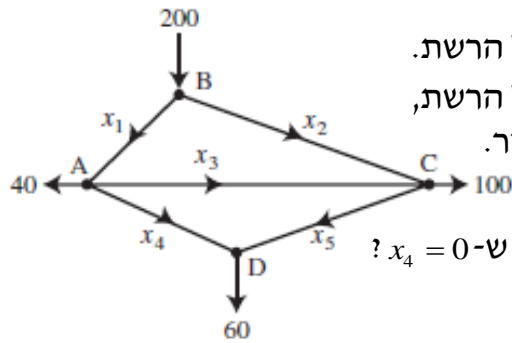
- (1) פתרון כללי של המערכת $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$.
- (2) למערכת פתרון יחיד $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד $(0, 0, 0)$.
- (3) א. $m = -3$ ב. $k = -2$ ג. פתרון כללי של המערכת $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$.
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא (t, t, t) .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה.
ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה.
ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א. $m \neq 0, -2, 3$. הנקודה היא $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- ב. אם $m = 0$ נקבל ישר $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ אם $m = 2$ נקבל ישר $\underline{x} = t(2, -1, 1)$,
- אם $m = 3$ נקבל ישר $\underline{x} = t(3, -3, 1)$.
- ג. אין ערכים של m עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

שימושים של מערכת משוואות לינאריות

שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



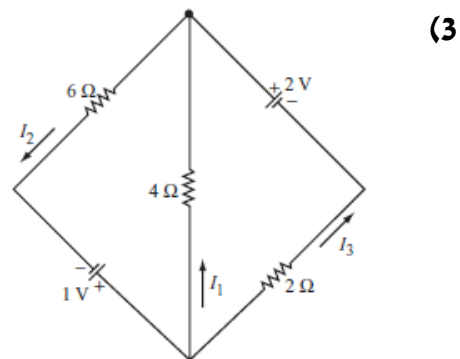
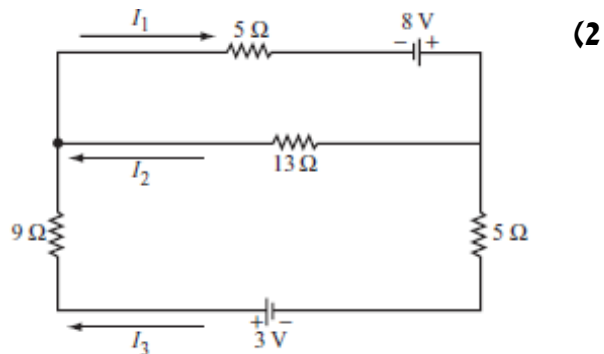
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1 , אם ידוע ש- $x_4 = 0$?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות בנוגע מערכת משוואות לינאריות.

תשובות סופיות

(1) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 60$. ג. 40.

(2) א. $I_1 = \frac{255}{317}$, $I_2 = \frac{97}{317}$, $I_3 = \frac{158}{317}$

(3) $I_1 = -\frac{5}{22}$, $I_2 = \frac{7}{22}$, $I_3 = \frac{6}{11}$

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 24 - מטריצות

תוכן העניינים

270	1. מטריצות
275	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
276	3. המטריצה ההופכית
283	4. דרגה של מטריצה
287	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
294	6. מטריצה אלמנטרית
296	7. פירוק LU
297	8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית

מטריצות

שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2 מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4 $2tr(D^2 - 2E)$

5 א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6 $I_2 BC$

7 $tr(C^T C)$

8 $DABC$

- (9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
נתון כי $(A-I)(A+I) = 0$.
הוכיחו או הפריכו: $A = I$ או $A = -I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקיימות $A^2 = -4I$.

(11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- (12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

- (13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

נתון כי $AA^T = 0$. הוכיחו כי $A = 0$.

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- (14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.

ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

(15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$, כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות

מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו- $(A-I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר

ℓ .

- 16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

17 תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

18 מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T$.

תשובות סופיות

(1) א. 4×6 ב. לא ג. 4×2 ד. לא ה. לא. ו. 6×6

ז. 6×2 ח. לא ט. 6×4 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

(1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

(3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A - B)^2$ סימטרית.

(4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו:

1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

(5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

(21) נתון כי $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
 ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
 ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
 ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
 ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
 ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ד. המכפלה AB לא הפיכה.
 ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
 ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
 ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים a, b, c, d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA = I - A^2$ וגם $B^2 = -AB$, אז $B = 0$.

ב. אם $A^2 = 2I$, אז $A + I$ ו- $A - I$ הפיכות.

(29) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $B^2A = -2B^3$ וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

(30) תהינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA + 2I = B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

(31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n = 0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ ו- $I + A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם $e^A = I$ אז $A = 0$.

(32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B , מסדר n .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
- ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ג.} \quad A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ג.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ג.} \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad (19)$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ג.} \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
- 28) שאלת הוכחה.
- 29) שאלת הוכחה.
- 30) שאלת הוכחה.
- 31) שאלת הוכחה.
- 32) ד

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמתו את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה}$$

חשבו את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את $\text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

ב. חשבו את $\text{rank}(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$.

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

ב. $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$.

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

(10) תהי A מטריצה מסדר $m \times n$, ותהי B מטריצה מסדר $n \times m$. הוכיחו:

א. אם $AB = I_m$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$.

ב. אם $BA = I_n$ אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$.

ג. אם $AB = I_m$ וגם $BA = I_n$ אז בהכרח $m = n$.

ד. אם A לא ריבועית אז לא ייתכן שגם $AA^T = I_m$ וגם $A^T A = I_n$.

(11) בשדה F נתונים a_1, a_2, \dots, a_m איברים, שלא כולם אפס, ו- b_1, b_2, \dots, b_n איברים, שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, כאשר $m_{ij} = a_i b_j$.

12 תהי $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$,

כאשר b_1, b_2, \dots, b_n מספרים ממשיים שונים ו- $n \geq 3$.

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל- $n \geq 2$?

הוכיחו או הפריכו.

13 תהיינה A, B מטריצות מעל \mathbb{R} , מסדר $m \times n$, כך שלכל $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

מתקיים $A\underline{x} \neq B\underline{x}$.

מה הדרגה של המטריצה $A - B$?

14 תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

א. נתון שכל פתרון של המערכת $(AB)\underline{x} = \underline{0}$, הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של AB שווה לדרגה של A .

ב. הוכיחו: אם A הפיכה, אז $\rho(AB) = \rho(A)$.

ג. הוכיחו שאם $\rho(AB) < \rho(A)$, אז A לא הפיכה.

15 תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

א. הוכיחו כי $P(A) \subseteq P(A^2)$.

ב. נתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$.

הוכיחו שקיים $v \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $Av \neq 0$ וגם $A^2v = 0$.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$, $k \neq 1, 4, 10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) n
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות $3x - 2y + 2z = 5$,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (-1, 4, -2), \quad (x, y, z) = (2, -8, 4)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10 למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$, $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי $rank(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
 מצאו את הקבועים k, m .

13 נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
 הוכיחו ש- A מטריצה לא הפיכה.

14 נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
 בטאו קבוע זה בעזרת k .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
- ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל \mathbb{R} : $Ax = d$ ($d \neq 0$). נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $\text{rank}(A) = 2$. ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א. $x = au + bv + cw$
- ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג. $x = au + bv + w$
- ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים: בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת $A_{m \times n} \cdot x = b$. הוכיחו או הפריכו:
- א. אם u וגם λu ($\lambda \neq 1$) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם u ו- v וגם $\alpha u + \beta v$ ($\alpha, \beta \neq 0$) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים $(1, 2, \dots, n)$, $(n, \dots, 2, 1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1, \dots, n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

(19) תהי A מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א. A הפיכה.
- ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^T פתרון יחיד.
- ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.

(20) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m < n$. הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
- ב. למערכת $(A^T A)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
- ג. ייתכן מצב בו למערכת $(A^T A)x=0$ יש פתרון יחיד.
- ד. ייתכן מצב בו למערכת $(AA^T)x=0$ יש פתרון יחיד.

(21) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n , כך שלכל מטריצה ריבועית $B \neq 0$ מסדר n , מתקיים $AB \neq 0$. הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$.

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$, אז בהכרח למערכת $A^T x=b$ יש פתרון לכל $b \in \mathbb{R}^m$.
- ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m < n$.
- ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$ וגם $AA^T = I_m$.
- ה. אם $m \neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

(23) תהא $A \in M_{4 \times 4}(R)$ ויהי $b \in R^4$.

ידוע כי u ו- v פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.

- א. נגדיר $w = \alpha u + \beta v$. הוכיחו כי אם גם w פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha + \beta = 1$.
- ב. נניח בנוסף כי $w = -u + 2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2 x = b$. הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

ג. מצאו $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$, כך ש- $C \neq D$ ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם $k \neq 2$ או $k \neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k = 2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k = -1$, אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. A^2 מ- B^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתרו בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \bullet \quad (2)$$

$$\bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

$$(1) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשמו את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

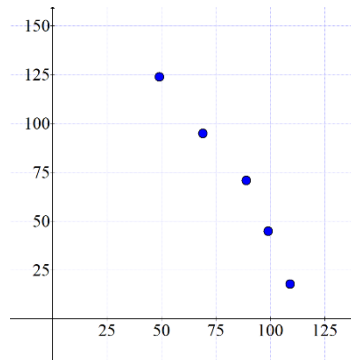
$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

- 1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- 2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא \$54.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

תשובות סופיות

- 1) $f(x) = 0.8x + 2$
- 2) א. $f(x) = -1.7x + 211$ ב. 119.2 יחידות. ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-\$1 נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש. ד. 14.41

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 25 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

298	1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג.
303	2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n.
308	3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות.
310	4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות.
311	5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה.
316	6. שימושי הדטרמיננטה.

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}
 \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכיחו כי:}$$

$$\text{det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשבו:}$$

(19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- k ($1 \leq k \leq n$).
- תהי C מטריצה הזוהה למטריצות A ו- B אך נבדלת מהן בשורה ה- k , שם היא שווה לסכום השורה ה- k של A והשורה ה- k של B .
- הוכיחו כי $|A| + |B| = |C|$.

$$\text{ב. חשבו:} \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $(k-1)^4(k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים a_0, \dots, a_{n-1} , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- n ?

(3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij} = |i - j|$

(5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A = (a_{ij})$ נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

$$(8) \quad a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases} \quad \text{המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי:}$$

חשבו את $|A|$.

$$(9) \quad a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases} \quad \text{המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי:}$$

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 3$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(11) \quad a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases} \quad \text{תהי } A = (a_{ij}) \text{ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:}$$

חשבו את $D_n = |A_{n \times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n = |A_{n \times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3, b=1, c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

(13) נתונה מטריצה $A_{n \times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה
הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה B .

חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של $A_{n \times n} = (a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n , כאשר $n \geq 2$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$|B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases} \quad (13)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases} \quad (14)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases} \quad (15)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases} \quad (16)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases} \quad (17)$$

$$D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases} \quad (18)$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \text{ הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \text{ חשבו את } |B|.$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} B^2-2A^{-1}=0, A+3B=0. \text{ חשבו את } |A|, |B|.$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n.$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|.$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

תשובות סופיות

(1) א. 4 ב. 2^{13}

(2) א. -8 ב. -2^{11}

(3) שאלת הוכחה.

(4) $\frac{81}{32}$

(5) $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9) 4^n

(10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{array} \quad (1)$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות: $x+y+kz+t+r=1$.

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$,x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$.x=y=z=t=r$$

(5) יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $(A^t A)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4$$

$$\text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{נתון: } A =$$

א. חשבו: $(adjA)_{1,5}$.

ב. חשבו: $(A^{-1})_{1,5}$.

(5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה A שווה ל- ± 1 , כאשר כל איברי

A ו- A^{-1} הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים,

אזי כל איברי A^{-1} גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.

הוכיחו ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- A הפיכה.

הוכיחו שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

(8) נתון כי A, B הפיכות ו- C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות?

א. $C+D$ ב. $A+B$ ג. AD ד. CD ה. AB

9) מצאו את ערכי k עבורם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

10) ידוע ש- A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם $AB = 0$, אז $A = 0$.
 ב. אם $|AB| = 0$, אז $A = 0$.
 ג. אם $|AB| = 0$, אז $|A| = 0$.
 ד. אם $AB = 0$, אז $|A| = 0$.

11) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}$, $B_{5 \times 3}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. $|AB| = |BA|$.
 ב. $adj(AB) \neq adj(BA)$.

12) אם B מתקבלת ממטריצה $A_{3 \times 3}$ על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז $|adj(A) \cdot B|$ שווה ל:

- א. $4^3 |A|^3$.
 ב. $4^3 |B|^3$.
 ג. $4 |B|^3$.
 ד. $4 |A|^3$.

13) נתונה מטריצה ריבועית $A = (a_{ij})$ מסדר $n \geq 3$ המקיימת $a_{ij} = i + j - 1$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $|A| = 4$.
 ב. A הפיכה.
 ג. $adj(A) = 0$.
 ד. $|A| = 0$.

- 14) אם G היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית A , אז:
- בהכרח $\det(A) = \det(G)$ וגם $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
 - בהכרח $\det(A) = \det(G)$, אך ייתכן ש $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$.
 - ייתכן ש- $\det(A) \neq \det(G)$, אך בהכרח $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$.
 - אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 2$, כך ש- $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, אז בהכרח מתקיים:

א. $|A| = n! - 1$

ב. הפיכה A .

ג. $\text{adj}(A)$ לא הפיכה.

ד. אם $n = 4$, אז $|\text{Adj}(A)| > 214$.

16) תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \geq 4$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n - 2$, אז בהכרח $\text{adj}(A) = 0$.

ב. אם A אנטי-סימטרית, אז בהכרח $\text{adj}(A)$ אנטי-סימטרית.

ג. אם $\text{adj}(A) = 0$, אז בהכרח $A = 0$.

17) מטריצה ריבועית B מתקבלת מ- A ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4, אז $\text{adj}B$ מתקבלת מ- $\text{adj}A$ ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 4.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 4.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי A מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$.

חשבו $|\det(A)|$.

19) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. A הפיכה $\Leftrightarrow Adj(A)$ הפיכה.

ב. $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

ג. $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

0.5 ב. א. 240 (4)

שאלת הוכחה. (5)

שאלת הוכחה. (6)

שאלת הוכחה. (7)

א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה. (8)

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

אם ורק אם $k = 0$. (9)

שאלת הוכחה. (10)

שאלת הוכחה. (11)

ד (12)

שאלת הוכחה. (13)

ד (14)

ד (15)

שאלת הוכחה. (16)

ד (17)

$$\frac{-5}{2^2} \quad (18)$$

שאלת הוכחה. (19)

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- 1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה: $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$.1
 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$.
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$.
הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- 1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$. ד. 2

הכנה למבחן פטור במתמטיקה לתואר שני

פרק 26 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

317	1. מרחבים ותת-מרחבים
321	2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית
325	3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה
329	4. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים
334	5. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס
336	6. תרגילי תיאוריה מתקדמים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

- R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות ($f: R \rightarrow R$) מעל השדה R .

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות 8-15 בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

(8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W = \{A \mid A = A^T\}$.

(9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B . כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

(10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

(11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

(12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

(13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר, $W = \{A \mid AB = 0\}$.

(14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$.

(15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות 16-21 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

(16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$.

(17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

(18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 . כלומר, $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$.

(19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

(20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n , כאשר $4 \leq n \leq 7$.

(21) $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$

בשאלות 22-30 בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[\mathbb{R}]$:

(22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
 כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$.

(23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
 כלומר, לכל x ממשי $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$.

(24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

(25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

(26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

(27) $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

(28) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(29) $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

(30) $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$

(31) בדקו האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי \mathbb{R} .

ב. מעל שדה המרוכבים \mathbb{C} .

(32) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

א. מצאו וקטור b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b , כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

- (33)** יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F .
- א. מצאו תנאי על k , עבורו הקבוצה $W = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(2) = k\}$, הינה תת-מרחב של V .
- ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V , שפורשים את W .

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות'.

תשובות סופיות

- | | | | | | | | | | |
|------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------|----|------|----|------|----|------|----|
| (1) | כן | (2) | כן | (3) | כן | (4) | לא | (5) | לא |
| (6) | כן | (7) | לא | (8) | כן | (9) | כן | (10) | לא |
| (11) | לא | (12) | כן | (13) | כן | (14) | כן | (15) | כן |
| (16) | כן | (17) | לא | (18) | כן | (19) | כן | (20) | לא |
| (21) | לא | (22) | כן | (23) | כן | (24) | כן | (25) | כן |
| (26) | כן | (27) | לא | (28) | כן | (29) | לא | (30) | כן |
| (31) | א. כן | ב. לא | | | | | | | |
| (32) | א. $u = (1, 0, 0, 0, 0)$ | ב. $B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \mid -b_1 + b_2 + 2b_3 \neq 0\}$ | | | | | | | |
| | ג. לא. | | | | | | | | |
| (33) | א. $k = 0$ | ב. $W = \text{span}\{2x - 3x^2 + x^3, 6x - 7x^2 + x^4\}$ | | | | | | | |

צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

שאלות

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- (1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה לינארית?
- (2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?
- (5) נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?

6) הביעו את הווקטור $v = (10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v = (7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3, u_4 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
 ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
 ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3$, $p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3$,
 $p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$

- א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
 ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
 ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

בשאלות 11-13 נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$. בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית, ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

$$\{u - v, u - w, u + v - 2w\} \quad (11)$$

$$\{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\} \quad (12)$$

$$\{u + v, v + w, w\} \quad (13)$$

בשאלות 14-15 בדקו האם הווקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים ליניארית ב- C^3 :

(14) מעל C .

(15) מעל R .

(16) נתבונן ב- $V = R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q . הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R , כשהוא מרחב וקטורי מעל Q .

(17) תהי $A_{m \times n}$ מטריצה, שעמודותיה A_1, A_2, \dots, A_n . הוכיחו את הטענה הבאה :
 למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

(18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 4, 3, 1)\}$$

א. האם $U = W$?

ב. האם $U = V$?

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2$, $u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2$, $u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א+ב+ג. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s$, $b = 4t - 13s$, $c = 7s$, $d = 7t$.
- (6) אינסוף, $v = 2u_1 + u_2 + u_3$.
- (7) אינסוף, $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$.
- (8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$.
- ב. $A = B + 2C$, $B = A - 2C$, $C = 0.5A - 0.5B$, $D = 0.25A + 0.25B$.
- (9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$.
- ב. $p_1 = p_2 + 2p_3$, $p_2 = p_1 - 2p_3$, $p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2$, $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$.
- (10) לכל ערך של a, b, c .
- (11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z$, $y = 0.5x + 0.5z$, $z = 2y - x$.
- (13) בלתי תלויים ליניארית.
- (14) תלויים.
- (15) בלתי תלויים ליניארית.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1), (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$

(2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

א. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x, x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

(4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים,

בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \cdot 3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \cdot 1$$

1. נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות2. נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות3. נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואותמצאו בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(6) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(7) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(8) נתון $U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(9) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A = A^T\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(10) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[\mathbb{R}] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(11) נתון $U = \{p(x) \in P_3[\mathbb{R}] \mid p(1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

(12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .(13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .(14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 15-16 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
- (4) א. לא. ב. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6)\}$. ג. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$.
- (5) א. W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (6) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (7) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (9) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3.
- (10) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 0.
- (11) בסיס: $\{p_1(x) = -1 + x^3, p_2(x) = -1 + x^2, p_3(x) = -1 + x\}$, ממד: 3.
- (12) א. בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$, ממד: 2.
- ב. בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$, ממד: 3.
- (13) בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2.
- (14) בסיס: $\{1 + x - x^2 + 2x^3, -3x + 3x^2 - 7x^3\}$, ממד: 2.
- (15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$, ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
- (16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$, ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים

שאלות

(1) להלן 3 מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1) \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- U, W ו- V .

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.

ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(2) להלן שני תת-מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = sp\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = sp\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.

ד. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).

ה. האם $U + V = R^4$?

ו. האם $U \oplus V = R^4$?

(3) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\{1 + x - x^2 + 2x^3, 3 - x + 7x^2 + 4x^3, -5 + 3x - 15x^2 - 6x^3\}$$

$$V = sp\{1 - x + x^2 + x^3, 1 + 2x^2 - x^3, 1 + x + 3x^2 - 3x^3, 5 + x + 5x^2 + 8x^3\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(4) להלן שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U = sp\{1 + x + x^3, 1 + 2x + x^2 + 2x^3, -1 + 2x + 3x^2 + 2x^3\}$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

א. מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

$$U = sp\{1+x, x+x^2, 1+x^3\} \quad (5) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } P_3[R] :$$

$$V = \{p(x) \in P_3[R] \mid p'(0) = 0\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

$$(6) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } M_2[R]$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$$

$$W = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- U ול- W .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
- אשרו את משפט הממד עבור תרגיל זה.

$$(7) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } V = M_2[R] :$$

$$U = \{A \in V \mid A = -A^T\}, \quad W = \left\{ A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- U ול- W .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
- האם $U+W=V$?
- האם $U \oplus W=V$?

$$(8) \quad \text{להלן שני תת-מרחבים של המרחב } V = M_3[R] :$$

$$U = \{A \in V \mid A = A^T\}, \quad W = \{A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה}\}$$

- מצאו בסיס וממד ל- U .
- מצאו בסיס וממד ל- W .
- מצאו בסיס וממד ל- $U+W$.
- מצאו בסיס וממד ל- $U \cap W$.
- האם $U \oplus W=V$?

$$(9) \quad \text{יהיו } U \text{ ו-} W \text{ שני תת-מרחבים מממד 2 של } R^3.$$

הוכיחו כי $\dim(U \cap W) \neq 0$.

- (10)** יהי V מרחב וקטורי מממד 10.
 יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 9.
 א. הוכיחו כי $U + W = V$.
 ב. חשבו $\dim(U \cap W)$.

- (11)** יהי V מרחב וקטורי מממד 10.
 יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V מממד 7.
 מצאו את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

- (12)** יהי V מרחב וקטורי מממד 7.
 יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V , כך ש- $\dim U = 4$, $\dim W = 5$, $(U \not\subseteq W)$.
 מצאו את המימדים האפשריים של $U \cap W$ ו- $U + W$.

- (13)** יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . $\phi \neq A, B \subseteq V$.

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

הוכיחו או הפריכו:

א. $sp(A + B) = sp(A) \cup sp(B)$

ב. $sp(A \cup B) = sp(A) \cup sp(B)$

ג. $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$

ד. $sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$

ה. $sp(A \cap B) = sp(A) \cap sp(B)$

- (14)** יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3 , המוגדרים על ידי:

$$U = \{(a, b, c) \mid a = b = c\}, \quad W = \{(0, b, c)\}$$

$$U \oplus W = R^3 \text{ הוכיחו כי}$$

- (15)** יהי $V = M_n[R]$.

- א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
 יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
 הוכיחו כי $U \oplus W = V$.
 ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
 יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
 הוכיחו כי $U \oplus W \neq V$.

תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 \quad \text{א. (1)}$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases} \quad , \quad B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2 \quad \text{א. (2)}$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 \quad , \quad B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} \quad , \quad \dim V = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{ג.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ד.} \quad \text{ה. כן.} \quad \text{ו. לא.}$$

$$U+V = sp\{1+x-x^2+2x^3, 2x-5x^2+x^3, x^2, x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad \text{א. (3)}$$

$$B_{U \cap V} = \{5+x+5x^2+8x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U+V} = \{1+x+x^3, x+x^2+x^3, x^2+2x^3\} \quad , \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{-1+x^2, 1+x^3\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ב. (5)}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U) = 2 \quad \text{א. (6)}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(W) = 3$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U+W) = 4 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U \cap W) = 1 \quad \text{ג.}$$

ד. ראו בסרטון.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim U = 1, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim W = 2. \quad \text{א. (7)}$$

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U+W) = 3. \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 0. \quad \text{ג.}$$

ד. לא. ה. לא.

א. (8)

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim U = 6$$

ב.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 6$$

ג.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(U+W) = 9$$

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U \cap W) = 3. \quad \text{ד.}$$

ה. לא.

שאלת הוכחה. (9)

א. שאלת הוכחה. ב. 8 (10)

$$\dim(U+W) = 8, 9 \text{ or } 10, \quad \dim(U \cap W) = 4, 5, 6 \text{ or } 7 \quad \text{(11)}$$

$$\dim(U \cap W) = 2, 3 \text{ or } 4, \quad \dim(U+W) = 6 \text{ or } 7 \quad \text{(12)}$$

שאלת הוכחה. (13)

שאלת הוכחה. (14)

שאלת הוכחה. (15)

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) \quad \text{נתונים שני בסיסים של } M_2[R]$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

(4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V .

הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ בת"ל,

אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,

לפי הבסיס B , $\{[u_1], [u_2], \dots, [u_m]\}$, הם בת"ל.

הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } (a, b-a-c, c) \quad \text{ב. } (a, b, c-a-b) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א. } (x, y-x, z-y+x, t-z+y-x) \quad \text{ב. } (x, y, z, t) \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

- (1) יהי V מרחב, ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה; $b \in V$.
הוכיחו כי: $b \in sp(A) \Leftrightarrow sp(A \cup \{b\}) = sp(A)$.
- (2) יהיו u, v, w וקטורים, כך ש- $\{u, v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו- $u \in sp(\{v, w\})$.
א. הוכיחו ש- $w \in sp(\{u, v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z , הקבוצה $\{u, w, z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u, v, z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
- (3) יהי U מרחב, תהי $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$ ויהי $u \in U$ וקטור כלשהו.
הוכיחו כי אם $u \in sp(A)$ וכן $u \notin sp(A - \{u_n\})$, אז $u_n \in sp(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u)$.
- (4) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A \cup \{b\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b \notin sp(A)$.
- (5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ ויהי $b \in sp(A)$.
למשוואה $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = b$ אין פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $k \geq n$.
ב. A פורשת את V .
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.
- (6) יהי V מרחב, $b \in V$ ו- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו או הפריכו:
א. אם $b \notin sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b \in sp(A)$, אז הקבוצה $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$ היא ת"ל.

- (7) יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} , ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$.
 נסמן: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $T = \{av_1 + v_2 + v_3, v_1 + av_2 + v_3, v_1 + v_2, av_3\}$.
 הוכיחו או הפריכו:
 א. $spS \subseteq spT$.
 ב. אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a \neq -2, 1$, אז בהכרח $sp(T) = sp(S)$.
 ג. $\dim(spT) \leq 2$.
 ד. $\dim(sp(T)) = \dim(sp(S))$.
- (8) יהי V מרחב ותהיינה $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V .
 הוכיחו או הפריכו:
 א. $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$.
 ב. אם $A \cup B$ בת"ל, אז A, B שתיהן בת"ל.
 ג. אם $\dim V = m + k$ וגם A, B שתיהן בת"ל, אז $A \cup B$ בת"ל.
 ד. אם $A \cup B$ בת"ל, אז $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.
- (9) יהי V מרחב ויהיו $U, W \subseteq V$ תמריים.
 תהיינה $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq U$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ שתי קבוצות בת"ל.
 הוכיחו כי אם $U \cap W = \{0\}$, אז $A \cup B$ בת"ל.
- (10) יהי V מרחב ויהיו U, W תמריים שלו.
 הוכיחו כי $U \cup W$ מרחב $\Leftrightarrow W \subseteq U$ או $U \subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:

- א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A .
 ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
 ג. אם $AB = 0$, אז בהכרח $B = 0$ או $A = 0$.
 ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(12) \text{ נסמן } W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}, U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תת-מרחבים של \mathbb{R}^3 .
אזי בהכרח מתקיים:

- א. $U = W$
 ב. $\dim U = \dim W$
 ג. $U \subseteq W$
 ד. אם $U + W = \mathbb{R}^3$, אז $U \cap W = \{0\}$.
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל \mathbb{R} (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

- א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
 ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
 ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
 ד. A תלויה ליניארית.
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי \mathbb{R}^2 מעל שדה \mathbb{R} ,

תהי $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- \mathbb{R}^2 .

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A = Pv$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות

וזרות של וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם $A \cup B$ תלויה לינארית,

אז בהכרח A תלויה לינארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V , אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W , אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V .

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W , אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U, W שני תתי-מרחבים של מרחב V ,

כך ש- $\dim V = n, \dim U = \dim W = n - 1$.

אז:

א. $n - 2 \leq \dim(U \cap W)$

ב. אם $U \neq W$, ייתכן ש- $U \subset W$.

ג. קיים $v \in V$, כך ש- $V = U + \text{sp}\{v\}$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$.

ד. אם $U + \text{sp}\{v\} = V$ ו- $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$, אז $v \in W$.

18) נניח כי v_1, v_2, v_3, v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V .

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\}$ והווקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 שונים זה מזה,

אז הווקטורים $v_1 - v_2$ ו- $v_3 - v_4$ הם בת"ל.

ב. אם v_1, v_2 בת"ל וגם v_3, v_4 בת"ל, וכן $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\} = \{0\}$,

אז v_1, v_2, v_3, v_4 הם בת"ל.

19) אם V, W תת מרחבים של מרחב וקטורי U , ומתקיים:

$$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$$

אז $\dim(V \cap W)$ יכול להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

ו. 5

20) V, W תת-מרחבים ממימד 3 של \mathbb{R}^7 , $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1, v_2, v_3\}$

בסיס של V , אז:

א. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ בלתי תלוי לינארית.

ב. $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ג. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ בת"ל.

ד. $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$ פורשת את $V + W$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(21) אם A מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

- מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A .
- מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A .
- ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A .
- אף תשובה אינה נכונה.

(22) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.

אזי בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A .
- אם $AB = 0$, אז בהכרח $B = 0$ או $A = 0$.
- אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
- אם $AB = 2I_n$, אז בהכרח $BA = 2I_n$.
- אף תשובה אינה נכונה.

(23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל \mathbb{R} (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$.

אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
- ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
- שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
- A בלתי תלויה לינארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(24) \text{ יהי } a \text{ מספר ממשי ויהיו } U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}, W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תתי-מרחבים של \mathbb{R}^4 . בהכרח מתקיים:

- $U \cap W = \{0\}$ לכל ערכי a .
- $U \cap W \neq \{0\}$ לכל ערכי a .
- $\dim(U \cap W) = 3$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- $\dim(U \cap W) = 1$ לכל ערכי $a \neq \pm 1$.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(25) \text{ נתונות המטריצות } T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים:

א. $\text{rank}(T) = 1, \text{rank}(R) = 2$

ב. $\text{rank}(R^3 T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של $R^3 T^5$ שווה למרחב השורות של T^5 .

ד. $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה של וקטורים

מ- V ($1 \leq n$). נניח בנוסף ש- $\dim(V) = n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V .

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V , אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V , אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהיינה A, B קבוצות שונות לא ריקות של

וקטורים מ- V . אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$.

ב. אם A, B תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A, B בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח $A \cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$, אז בהכרח $A \cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3 + 12x^2 - x + 11$,

ביחס לבסיס $\{2x^3 + 3x^2 + 2, x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 + 2\}$, הוא:

א. $(2, 2, -2, 4)$

ב. $(4, -2, -1, 2)$

ג. $(2, -1, -2, 4)$

ד. $(4, -1, 2, 2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

- אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.
- אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
- אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.
- אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(30) נתונים תת-מרחבים של \mathbb{R}^4 מעל \mathbb{R} :

$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$$

$$W = sp\{(1,0,1,1), (0,2,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0)\}$$

- מצאו בסיס וממד עבור $U, W, U \cap W$.
- עבור תת מרחבים K, L של מרחב וקטורי V , הגדירו את $K+L$.

(31) A מטריצה לא ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:

- יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.
- יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ עם יותר מפתרון אחד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(32) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4 , כך ש- $rank(A)=2, rank(B)=3$.

הוכיחו כי $AB \neq 0$.

(33) A מטריצה 3×3 , כך ש- $A^2=0$ אבל $A \neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:

- 0
- 1
- 2
- 3

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(34) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז:

- AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
- AB בהכרח לא הפיכה.
- BA בהכרח הפיכה.
- אם $AB=0$, אז $rank(A)+rank(B) \leq 5$.

- (35) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד, אז בהכרח:
- A הפיכה.
 - למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A' פתרון יחיד.
 - לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
 - מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A .

תשובות סופיות

- | | | | |
|----------|----------|----------|-------------|
| (11) א | (12) ב | (13) א | (14) ד |
| (15) ד+א | (16) ג | (17) א+ג | (18) הוכחה. |
| (19) ד+ג | (20) ב | (21) ב+ג | (22) ד |
| (23) ה | (24) ב+ד | (25) ב+ג | (26) א+ב |
| (27) א | (28) ג | (29) ג | |
- $$B_U = \{(-1, 1, 00), (-1, 010), (1, 001)\}$$
- $$B_W = \{(100-1), (010-1), (0012)\}$$
- $$U \cap W = sp\{(1, 0, 2, 3), (0, 1, 2, 3)\}$$
- $$\dim U = 3, \quad \dim W = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2$$
- | | | |
|--------|-------------|--------|
| (31) ד | (32) הוכחה. | (33) ב |
| (34) ד | (35) ד | |