

דרכי הוראת האנליזה



תוכן העניינים

1.	טריגונומטריה במשולש ישר זווית	1
2.	זהויות טריגונומטריות	6
3.	משוואות טריגונומטריות	27
4.	טריגונומטריה במישור	48
5.	טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה	81
6.	טריגונומטריה במרחב - המנסרה	94
7.	טריגונומטריה במרחב - הפירמידה	99
8.	טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור	114
9.	פרק מקדים - מבוא לפונקציות	(ללא ספר)
10.	פרק מקדים - הפונקציה הקווית	(ללא ספר)
11.	פרק מקדים - הפונקציה הריבועית	(ללא ספר)
12.	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות	(ללא ספר)
13.	הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות	121
14.	הפונקציה הממשית - גבול של פונקציה	138
15.	חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת	147
16.	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים	155
17.	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום	170
18.	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש	183
19.	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות	221
20.	חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת	(ללא ספר)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

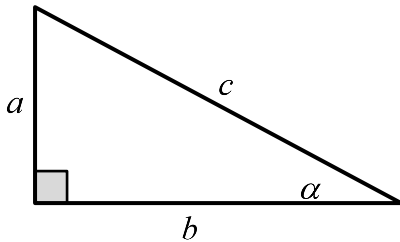
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית 1

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

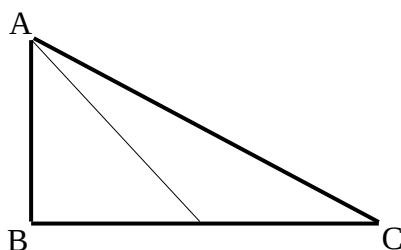
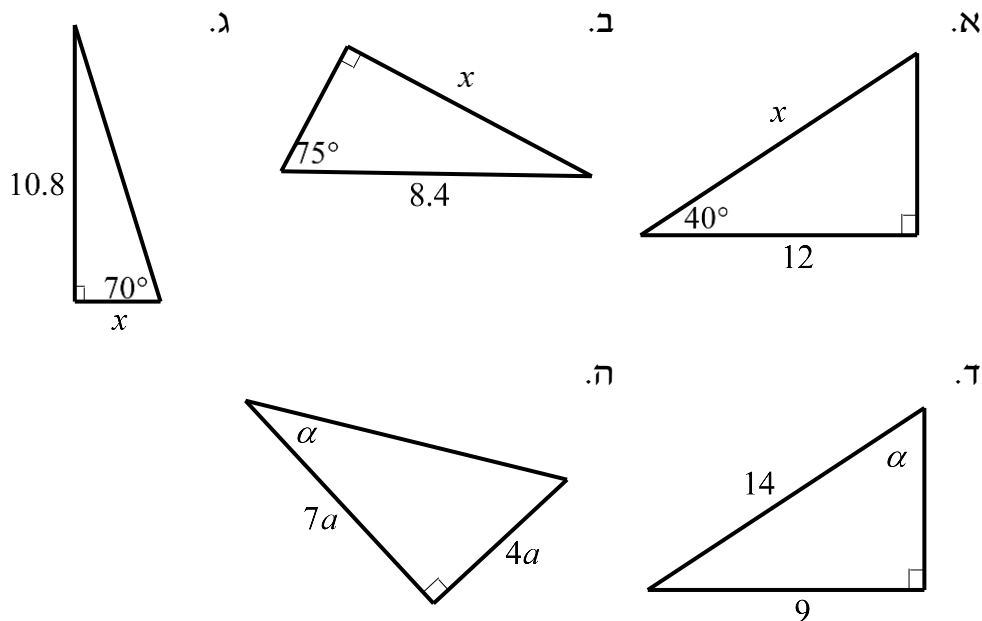
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

שאלות:

1) מצא את ערכו של x / α במשולשים ישרי הזווית הבאים:



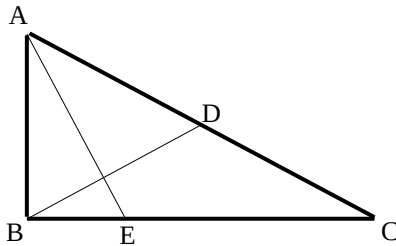
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC.

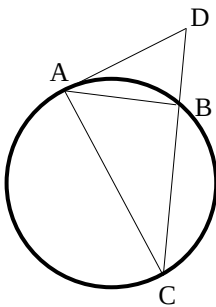
נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6$ ס"מ.

מצא את AD ואת $\angle BAD$.



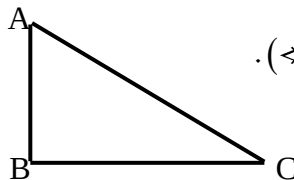
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). BD הוא התיכון ליתר AC והוא חוצה הזווית $\angle A$. נתון: $BD = 5.6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. מצא את BE ואת $\angle BAE$.

- (4) מצא את זוויתיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

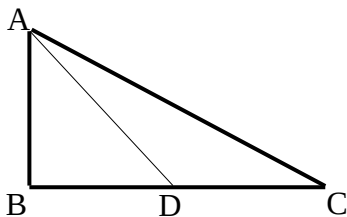


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון: $BD = 4$ ס"מ, $\angle DAB = 32^\circ$. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

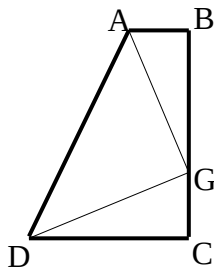


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות a ו- α את היקף המשולש.

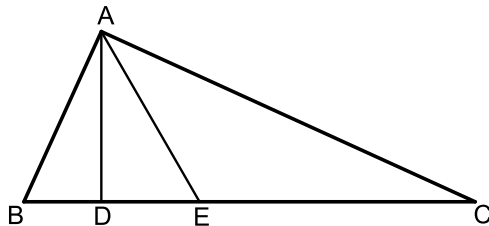


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות b ו- α את אורכי הקטעים BD ו-AD.

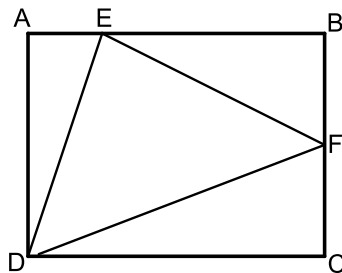
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.
א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

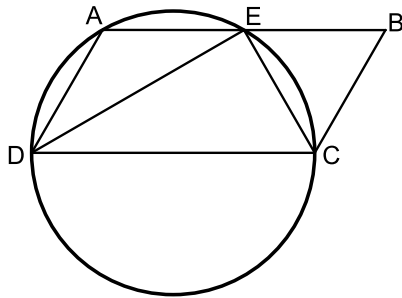


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש- $AE = BE$. מקיימת: $3AE = BE$ ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

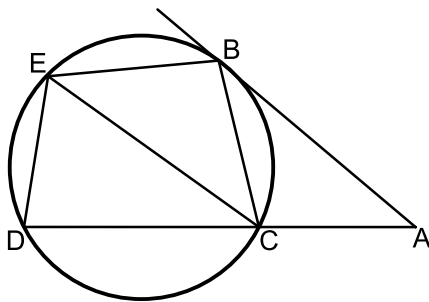
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$. נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
 - רדיוס המעגל יסומן ב- R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
 - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
 - הוכח כי: $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$.
 - נתונים: $\angle A = 40^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 2 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1.	זהויות יסוד	6
2.	ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות	10
3.	מעגל היחידה	12
4.	סכום והפרש זוויות	15
5.	זווית כפולה	19
6.	סכום והפרש פונקציות	22
7.	מכפלת פונקציות	25

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 & \text{(2)} & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha & \text{(1)} \\
 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha & \text{(4)} & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha & \text{(3)} \\
 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 & \text{(6)} & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 & \text{(5)} \\
 \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 & \text{(8)} & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha & \text{(7)} \\
 \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha & \text{(10)} & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha & \text{(9)} \\
 \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 & \text{(12)} & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha & \text{(11)} \\
 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha & \text{(14)} & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha & \text{(13)} \\
 \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha & \text{(16)} & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha & \text{(15)}
 \end{array}$$

הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left(\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad \text{נתון כי:}$$

הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב. $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג. $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{נתון כי:}$$

מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי: $\tan \alpha = \sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$.

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm \sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan \alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot \alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

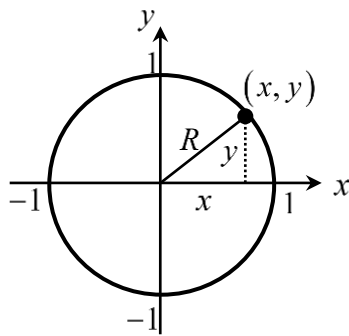
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קונוי שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ מתאימות לזוויות של 270° , 180° , 90° , 0° .

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
III	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$
VI	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{י. } \frac{1}{2} \quad \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{יב. } -1$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

(4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$ יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$
 ב. $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

$$\text{א. } \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\text{ב. } \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ד. } \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

(4) נתון: $\cos \beta = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ו- α, β זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב :

$$\text{א. } \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. } \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{ג. } \tan(\alpha + \beta)$$

(5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות: $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות: $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות: $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(11) הוכח כי מתקיים : $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$

(12) הוכח כי מתקיים : $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$

(13) נתון כי : $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m .

(14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי : $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ ו- $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$

הראה כי מתקיים : $\alpha + \beta = 60^\circ$.

(15) היעזר בנוסחה : $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי : $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א. $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$
 ב. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$
 ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$
 ד. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$
 ה. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$
 ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$
 ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$
 ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות: $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות: $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos \alpha$

ב. $\tan \alpha$

ג. $\sin 2\alpha$

ד. $\cos 2\alpha$

ה. $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin \alpha$.

ב. $\cos \alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

(6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$.

ב. $\cos(\alpha + \beta)$.

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$.

(7) נתון כי $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$ עבור $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. חשב את $\sin 2\alpha$.

(8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$.

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$.

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$.

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$

ה. $-\frac{720}{1519}$

(5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$

(6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$

(7) 0.44

(8) $\cos 4\alpha$

(9) $\frac{1}{6}$

(10) 1

(11) -1.25

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{array}{l}
 \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{array}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \text{ במחשבון אם ידוע כי}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ : \text{ הראה כי}$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $-\frac{7}{9}$.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

(17) 1.

(18) $\frac{1}{8}$.(19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$$

$$(2) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2} (\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$$

$$(3) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} (\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$$

$$(4) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$$

$$(5) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$$

$$(6) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$$

$$(7) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$$

$$(8) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$$

$$(9) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

דרכי הוראת האנליזה

פרק 3 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות 27
2. משוואות הנפתרות על ידי טכניקה אלגברית 30
3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד 32
4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה 34
5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס 35
6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות 36
7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה 37
8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$ 38
9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות 39
10. משוואות עם תחום נתון 41
11. משוואות עם זוויות ברדיאנים 42
12. אי שוויונים טריגונומטריים 46

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$

ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
 ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$
 ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
 ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
 ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$
 ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$ ג. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א. $x_1 = 180^\circ k$, $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$ ב. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$
 ג. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = 90^\circ k$
 ה. $x = 20^\circ + 180^\circ k$ ו. $x = 20^\circ + 60^\circ k$
 ז. $x = 180^\circ k$ ח. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ ט. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
 י. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ יא. $x = 360^\circ k$ יב. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
 יג. $x = 180^\circ k$ יד. $x = 45^\circ + 180^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	
		קשרים בין פונקציות

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

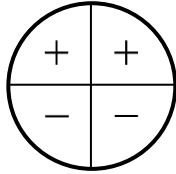
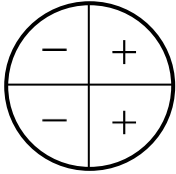
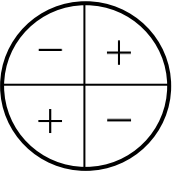
$$\cdot x = 180^\circ k \quad (8)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}, \quad \begin{array}{|l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a \cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$	סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$	סינוס זווית כפולה
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$	קוסינוס זווית כפולה

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1) |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4) | $4 \cos x = \sin 2x$ (3) |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6) | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8) | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|---|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2) | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4) | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3) |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6) | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5) |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7) | |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) | |

משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a \sin x + b \cos x = c$ לצורה: $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ וזהות: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x + \alpha) = k$ כאשר α ו- k ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור סינוס
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1) $[0^\circ:180^\circ]$, $8\sin x - 4 = 0$
- (2) $[-90^\circ:90^\circ]$, $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3) $[-90^\circ:90^\circ]$, $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4) $[0^\circ:360^\circ]$, $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5) $[-30^\circ:30^\circ]$, $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6) $[0^\circ:180^\circ]$, $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

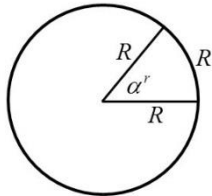
תשובות סופיות:

- (1) $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2) $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3) $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4) $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5) $x = 22.733^\circ$
- (6) $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7) $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8) $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

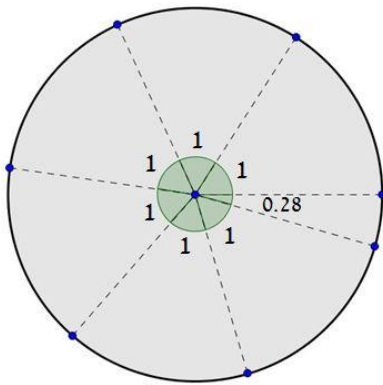
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30°	ב. 90°	ג. 75°	ד. 120°
ה. 210°	ו. 315°	ז. 18°	ח. 285°
ט. -15°	י. -80°	יא. 510°	יב. -390°

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0 : \pi]$
ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$
ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$	ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$
ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$	ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$
ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$
יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°
ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°
יא. 210° יב. 405°
- (3) א. $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x = \frac{5\pi}{6}$ ג. $x = \frac{\pi}{2}$ ד. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
ה. $x = 0$ ו. $x = \frac{2\pi}{9}$ ז. $x = 0.0875\pi$ ח. $x = 0.224\pi$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x = 0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ
ה. $x = 0, 0.437\pi$ ו. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
ז. $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א. $x = \frac{\pi}{8}$ ב. $x = 0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א. $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א. $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$
ג. $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ד. $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
 2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
 3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
 - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
 - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
 4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- | | |
|---|---|
| $[0, 1.5\pi] \quad 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ (2) | $[0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2}$ (1) |
| $[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ (4) | $(-90^\circ, 90^\circ) \quad 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$ (3) |
| $(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$ (6) | $[0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ (5) |
| $(-\pi < x < \pi) \quad \tan(x) > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (8) | $[0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0$ (7) |

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 4 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים 48
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש 56
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה 65
4. שאלות מסכמות 69

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

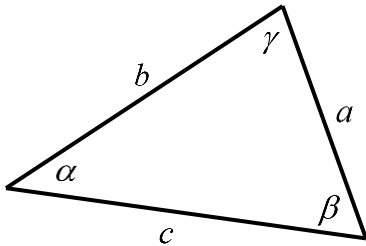
סיכום כללי:

משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:



משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

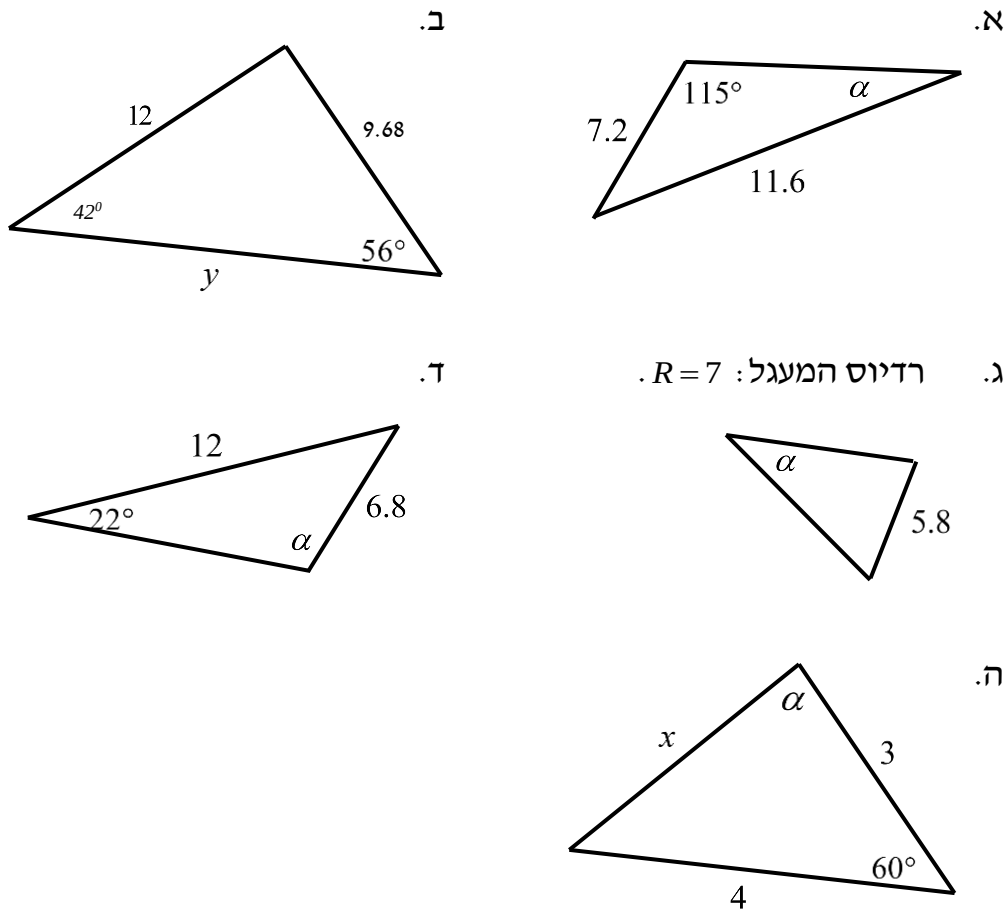
בקוסינוס הזווית שבניהן:

מתי נשתמש בכל משפט:

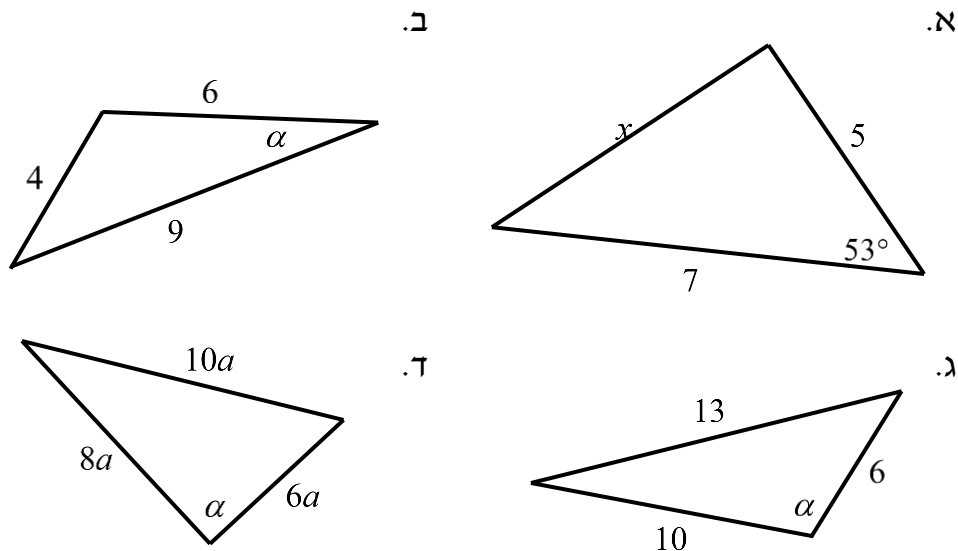
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי זוויות וצלע.
 - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
 - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שאלות:

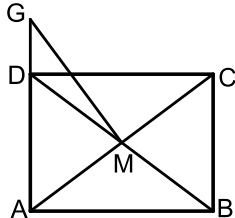
(1 מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
 (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



(2 מצא את ערכו של a/x במשולשים הבאים:

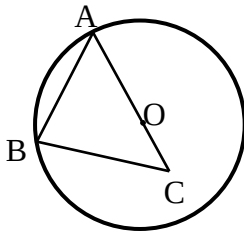


- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס C . מצא את אורכו של הקטע AD .



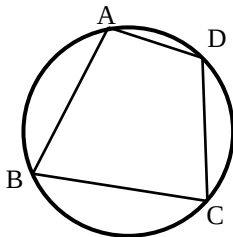
- (4) אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD . נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DG = 1.2$ ס"מ. מצא את גודלו של הקטע GM .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

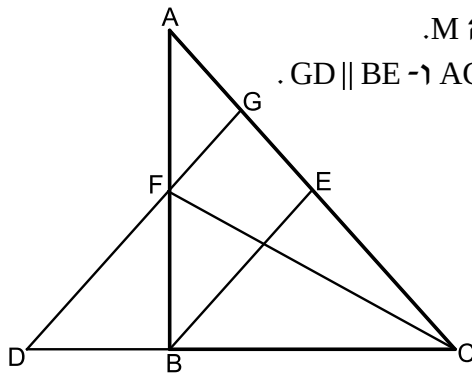


- (6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O . הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון: $BC = 9$ ס"מ, $OC = 3$ ס"מ, $\angle BAC = 38^\circ$. מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע $ABCD$ חסום במעגל. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ ו- $AD = 4$ ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

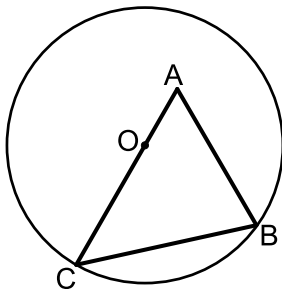
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\angle ACD = 48.189^\circ$. הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

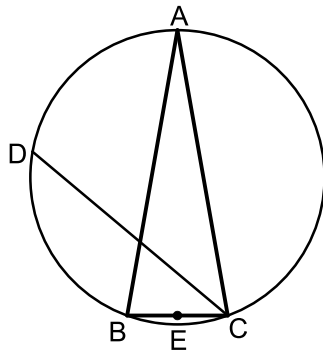
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60° .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

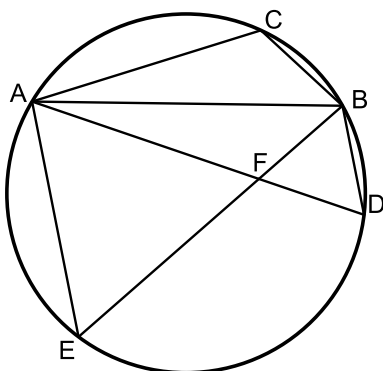
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\widehat{AB}$. ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80° .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את r .

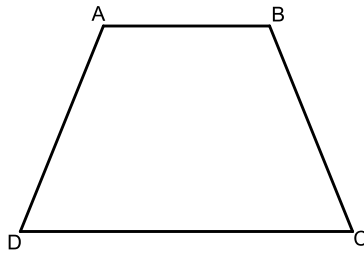
12) AB , AC ו- AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\widehat{BC} = \widehat{BD}$. מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים BE ו-AE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי: $AC = AF = EF$.



א. הוכח: $\triangle ABF \cong \triangle ABC$.

ב. נתון גם: $3 \cdot \angle CAB = \angle DAE$. הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).



מידות הטרפז הן:

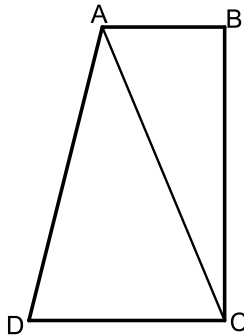
$AB = 6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $CD = 12$ ס"מ.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$).



מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $AD = 3t$, $DC = 1.6t$.

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

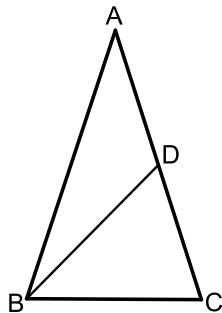
ב. ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) בעל זווית

ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

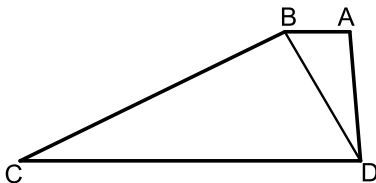
ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$.

16) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\angle BCD = \angle ADB$.

נתון כי: $AB = 5$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ, $CD = 20$ ס"מ.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי: $\angle D = 90^\circ$.

נסמן את הצלעות באופן הבא: $AB = 6x$, $BC = 5x$, $CD = 8x$, $AD = 3x$.

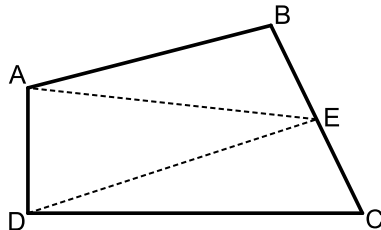
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α .

המשולש COD הוא ישר זווית $\angle CDO = 90^\circ$.

נתונים האורכים: $BO = 9$, $DO = 10$.

מסמנים: $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin \alpha$.

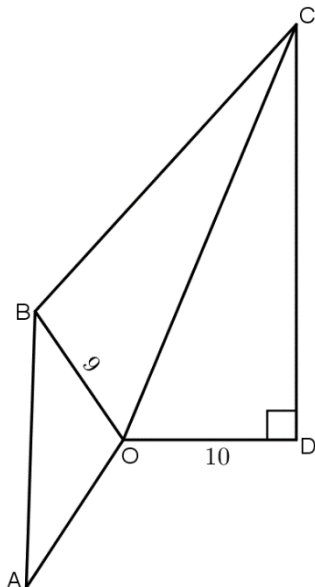
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.

מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\angle ADB = 60^\circ$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

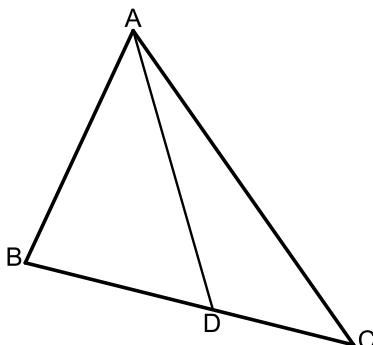
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E, C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

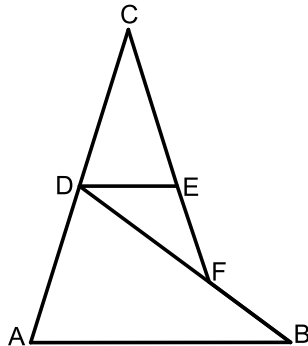
שווי שוקיים ($AB = BD$, $DC = CE$, $EF = DE$).

נתון כי: $AD = 8$.

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

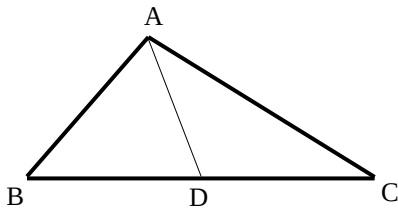
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון: $AB = 6$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ,

$AD = 5$ ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



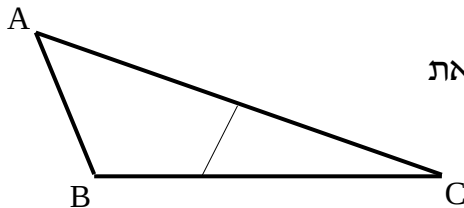
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $AB = a$, $BC = b$.

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

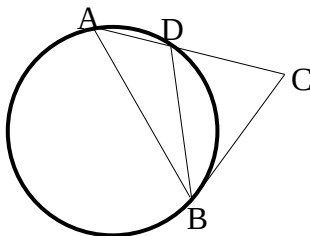


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון: $\angle C = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

הבע באמצעות R, α ו- β את אורך הקטע BC.

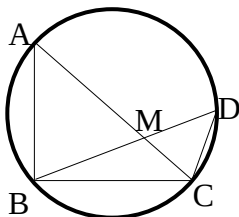


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה.

נתון: $DC = q$, $DM = p$, $AB = k$.

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



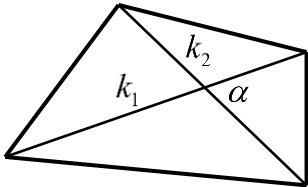
תשובות סופיות:

- (1) א. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. $y = 14.33$ ס"מ ג. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$
- (2) א. $x = 5.646$ ס"מ ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$
- (3) $AD = 13.064$ ס"מ
- (4) $GM = 3.360$ ס"מ
- (5) $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$
- (6) $R = 9.242$ ס"מ, $AB = 14.56$ ס"מ
- (7) $P = 22$ ס"מ
- (8) $R = 5.395$ ס"מ, $AC = 10.790$ ס"מ
- (9) $DG = 18$
- (10) $R = 10.5$ ס"מ ב. 24.32°
- (11) א. $DE = 1.48R, CD = R\sqrt{3}$ ב. $r = 1.15R$
- (12) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R = 6.29$ ס"מ
- (13) א. $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב. $i. 13$ ס"מ $ii. 78$ סמ"ר
- (14) א. 9.4 ס"מ ב. $i. 10$ ס"מ
- (15) א. $\angle C = 28.9^\circ$ ג. $R = 13.77$
- (16) א. 64.04° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$
- (17) א. $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. 56.94°
- (18) א. 4 ב. $i. 1.5\sqrt{28} + 3 - t$ $ii. 3$ ג. $S = 18.18$
- (19) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ
- (20) $BC = 10$ ס"מ
- (21) $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$
- (22) $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$ (24)
- (23) $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$ (23)

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

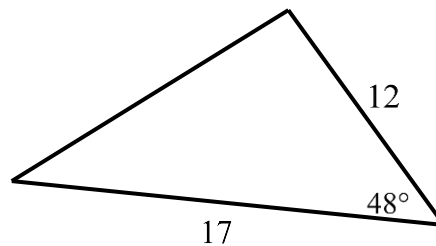


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו: $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

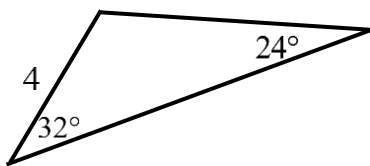
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

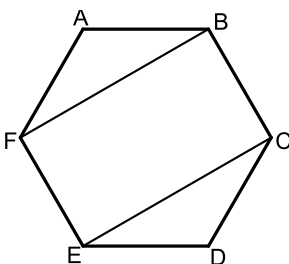
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית שבין אלכסונו המלבן היא θ .

$$\text{הוכח כי מתקיים: } \sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

28) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), BD חוצה את הזווית $\angle B$.

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש BCD .



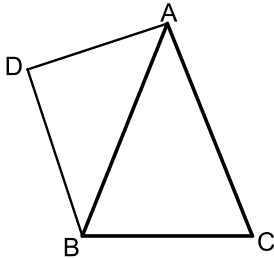
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S .

א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן $BFEC$.

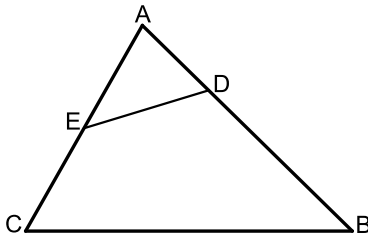
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30 המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , $(AB = AC)$. אורך הבסיס BC הוא k .



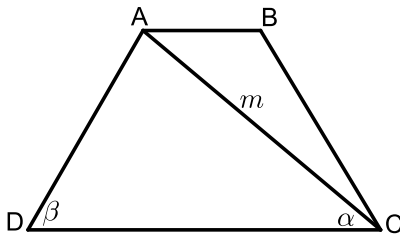
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\angle D = 90^\circ$.
- הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
 - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$.
 - וכי: $\angle ABD = 40^\circ$. מצא את זוויות המשולש ABC.
 - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31 במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$ ס"מ.



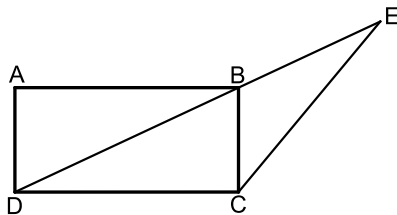
- ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.
- מצא את אורך הקטע DE.
 - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 - חשב את שטח המרובע BCED.

32 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

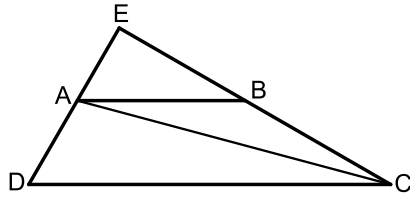


- מסמנים: $AC = m$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.
- הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
 - נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
 - הבע באמצעות α , β ו- m את הבסיס AB.
 - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ ו- $m = 8$.

33 המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



- מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
- ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא 115° .
- מצא את אורך הקטע CE.
 - מצא את אורך האלכסון BD.
 - חשב את שטח המשולש DCE.



34) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם

בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.

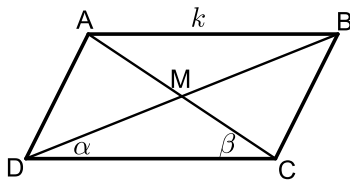
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.

מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-k ואת: $\angle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $k = 12$ ס"מ.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים

את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.

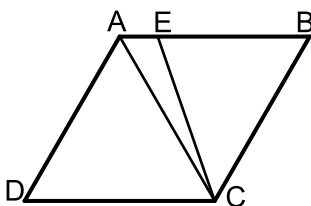
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\angle D = 60^\circ$.

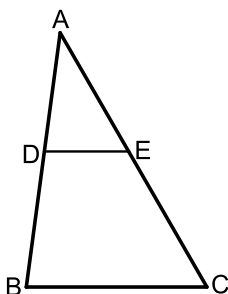
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

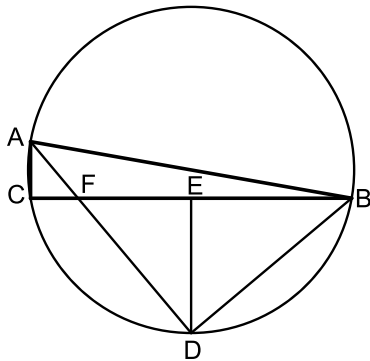
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.

ידוע כי זווית AED היא 60° .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.



(38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

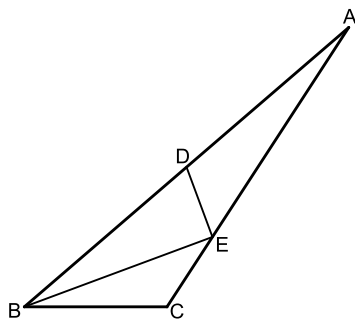
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\angle ABC = 10^\circ$.

א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



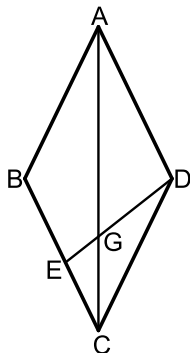
(39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.

ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



(40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

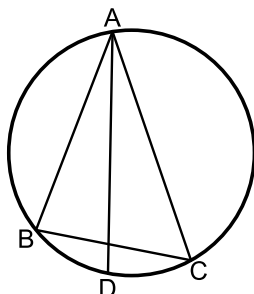
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- α .

i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



(41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

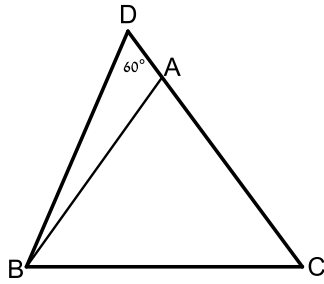
ידוע כי: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$.

מסמנים: $AD = k$.

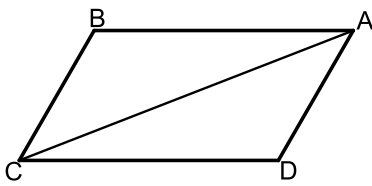
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

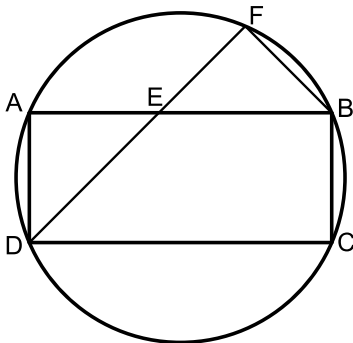
מצא את k (עגל למספר שלם).



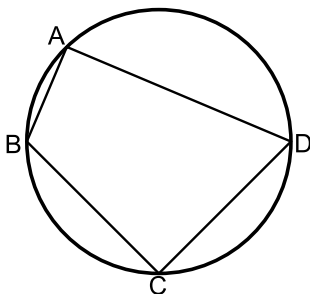
- (42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי: $\angle D = 60^\circ$. אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



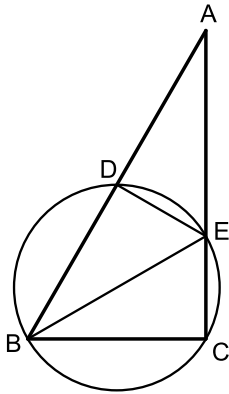
- (43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\angle B = 120^\circ$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- (44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. הצלע AD של המלבן תסומן ב- a .
א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ (אין צורך לסרטט אותן).



- (45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos \angle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

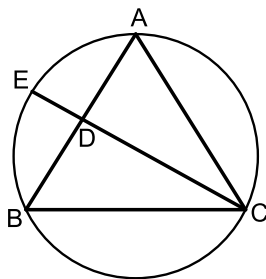


- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית $\angle C = 90^\circ$ ובו: $\angle B = 2\alpha$.
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
 אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
 המיתר BE חוצה את זווית B.
 א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
 וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

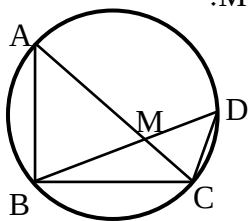
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$



- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) החסום במעגל.
 מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
 ידוע כי E היא אמצע הקשת $\widehat{AB}$ והיחס בין
 הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
 מסמנים: $\angle ACD = \alpha$.

- א. מצא את זוויות המשולש ABC
 (עגל למספרים שלמים).
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
 רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
 זווית B היא זווית ישרה.
 נתון: $\angle MCB = \beta$, $\angle MBC = \alpha$.

- א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.

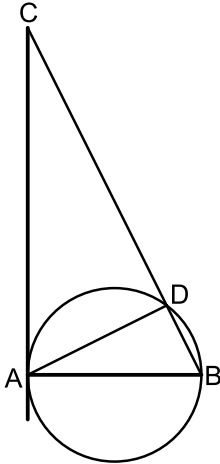
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2} R^2$.

- חשב את α .

(50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.



(51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

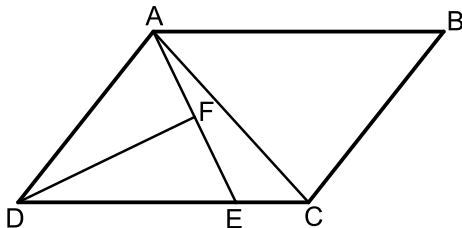
מסמנים: $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



(52) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים: $3CE = DE$.

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$.

מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(27) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 44.4^\circ, 67.78^\circ, 67.78^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad AB = 3 \text{ ס"מ} \quad BC = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ג.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

ב.ii. $45^\circ, 135^\circ$

(43) ב.i. $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$

ג. $S = 14.4$ סמ"ר

(44) א. $\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$

ב. $S = 36\sqrt{3}$ סמ"ר

(45) א. $S = R^2 \tan 2\alpha$

ב. $BE = 7.75$

(48) א. $58^\circ, 58^\circ, 64^\circ$

ב. $\alpha = 22.5^\circ$

(49) א. $S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$

ב. $\gamma = 75^\circ$

(50) א. $\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

ג. $\alpha = 26.56^\circ$

ב. $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$

(51) א. $S = R^2 \sin 2\alpha$

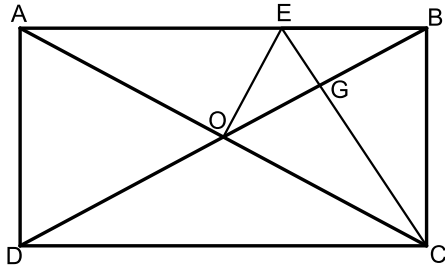
ב. $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$

(52) א. $AE = 6k \sin \alpha$

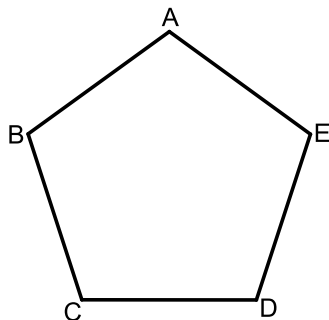
ג. $\alpha = 14.47^\circ$

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

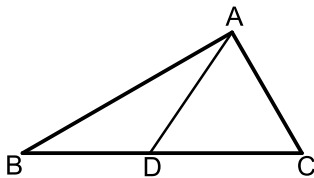
שאלות:



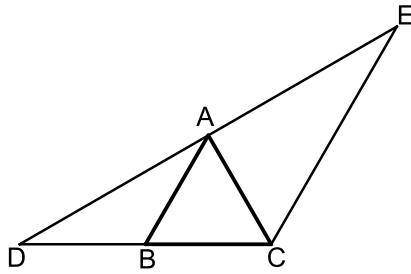
- 53) המרובע ABCD הוא מלבן.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$.
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
 ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
 חשב את שטח המלבן ABCD.



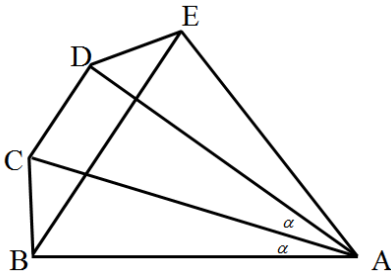
- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .
 א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
 ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.
 ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המחומש.



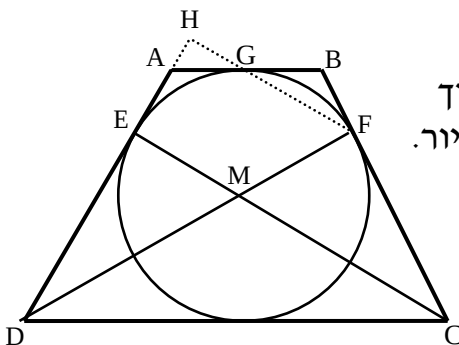
- 55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
 ב. היקף המשולש ABC הוא: $12 + 4\sqrt{3}$ ס"מ.
 חשב את שטח המשולש.



- 56** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
 שני משולשים ABD ו-ACE.
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.
 א. הוכח: $AB \parallel CE$.
 ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
 ג. נתון: $DC = 8$ ס"מ.
 וכי: $AC \perp DE$.
 i. חשב את שטח המשולש DCE.
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.

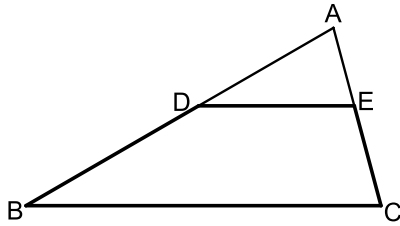


- 57** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE.
 כך שמתקיים: $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$.
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
 מתקיים: $BE \parallel CD$.
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$).
 הוכח כי: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.
 ג. ידוע כי: $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$.
 הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.
 ד. נסמן: $AB = m$.
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

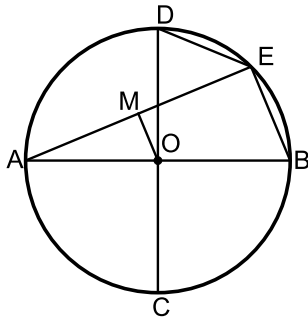


- 58** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך
 הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו-H כמתואר באיור.
 הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז
 ונחתכים בנקודה M.
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
 ב. חשב את זוויות הטרפז.
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

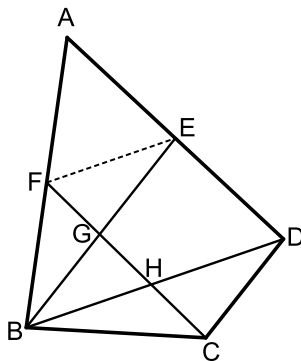
$$\text{חשב את היחס } \frac{EM}{FH}.$$



- (59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$. המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$). נתון: $AB = 18$ ס"מ, $\angle ADE = 30^\circ$.
 א. סמן את אורך הבסיס DE ב- x ואת שטח הטרפז BDEC ב- S .
 הבע את S באמצעות x .
 ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
 חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



- (60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת: $BE + DE = 15$ ס"מ.
 מעבירים את המיתר AE.
 הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.
 א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
 ב. מצא את אורך המיתר BE.
 נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.
 ג. מצא את רדיוס המעגל.
 ד. חשב את זווית B.



- (61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$. נתון כי הזוויות $\angle A$ ו- $\angle BFE$ משלימות ל- 180° .
 א. הוכח: $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$.
 ב. נתון כי: $BE = 7.5$ וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
 חשב את אורך הקטע FE.
 ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא: $R = 4.001$ ס"מ. מצא את זווית $\angle EBD$.

תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א. 1.618α

ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S = 85.57$

(55) ב. $S = 8\sqrt{3}$

(56) א. $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$ ג. $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$ ii.

(57) ד. $BC = 0.4663m$, $DE = 0.4663m$, $CD = 0.4776m$, $BE = 1.2175m$ i.

(62) ד. $0.7232m^2$ ii. ד. 8 ס"מ iii.

(58) ב. 60° , 120° ג. $\frac{2}{3}$

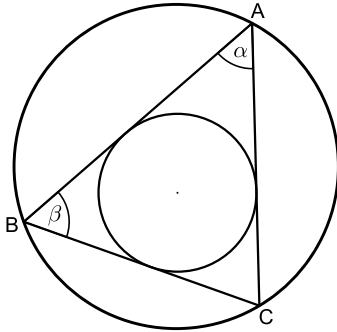
(59) א. $S = 81 - 0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(60) ב. $BE = 10$ ג. $R = 13$ ד. $\angle B = 67.38^\circ$

(61) ב. $FE = 4$ ג. 16.73°

שאלות מסכמות:

שאלות:



(1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R .

נתון כי $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

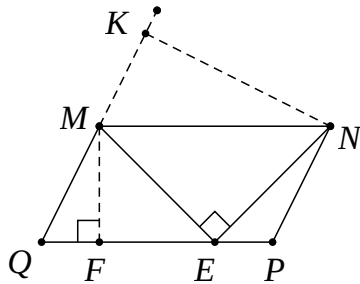
א. הבע את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת α, β, R .

ב. נתון כי: $\alpha = \beta = 60^\circ$.

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת R .

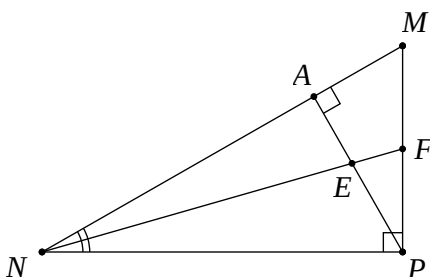


(2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על

הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$ (ראה ציור).

נתון: 12 ס"מ MQ , $\angle MQP = 70^\circ$, $\angle MNE = 40^\circ$.

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



(3) במשולש ישר-זווית MNP, ($\angle P = 90^\circ$)

PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה

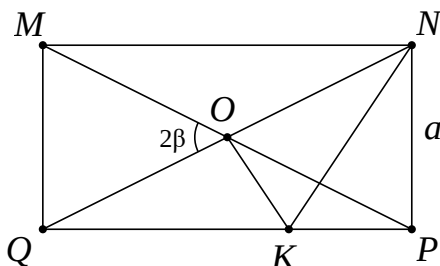
את הזווית $\angle MNP$.

PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון: 24 ס"מ NP , $\angle MNP = 40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



(4) אלכסוני המלבן MNQP נחתכים בנקודה O.

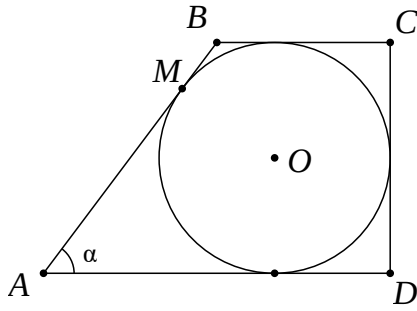
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך

את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון: $\angle MOQ = 2\beta$, $NP = a$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a .

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a .



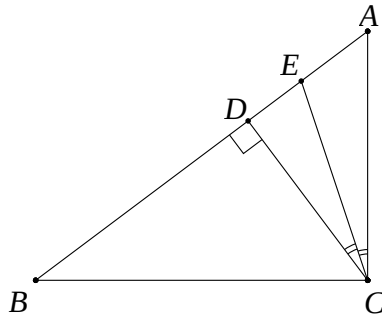
(5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון: $AM = 12$ ס"מ, $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



(6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 8$ ס"מ.

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית $\angle ACD$.

הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

(7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

(8) $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

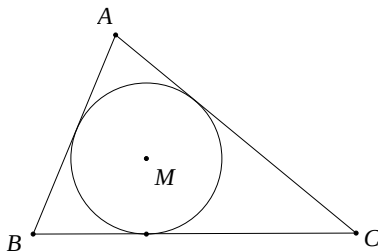
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).

א. הבע את היחס $AO : DO$ באמצעות α .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



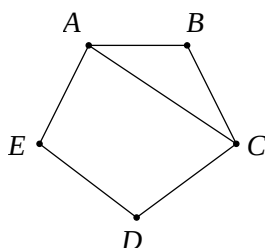
(9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון: $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 46^\circ$.

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

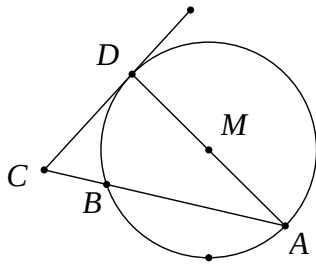
ב. נתון: $BC = 16$ ס"מ. מצא את r.



(10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

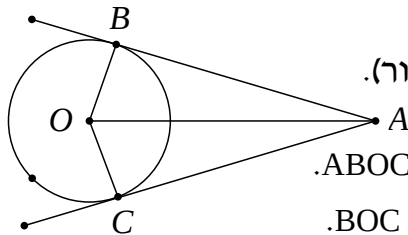
חשב את שטח המחומש.



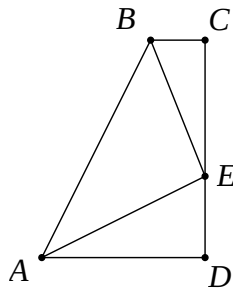
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD = \frac{3}{5}R$.

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



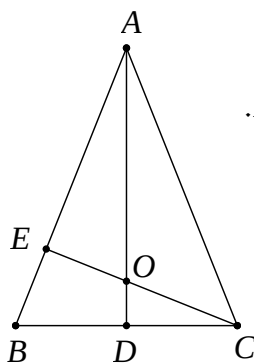
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).
נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $AO = 10$ ס"מ.
א. הבע באמצעות α את S_1 , שטח המרובע ABOC.
ב. הבע באמצעות α את S_2 , שטח המשולש BOC.
ג. הראה שאם $\alpha = 30^\circ$, אזי: $S_1 = 4 \cdot S_2$.



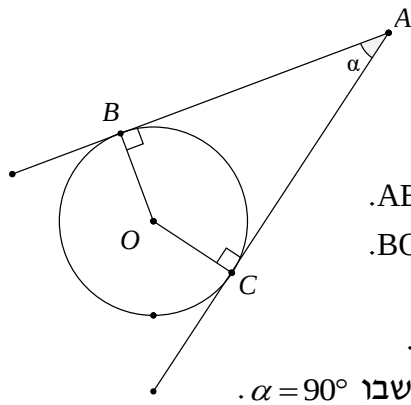
13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\angle C = \angle D = 90^\circ$).
נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).
נתון: $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE = k$, ו- $\angle CBE = \beta$.
הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).
א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.
ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



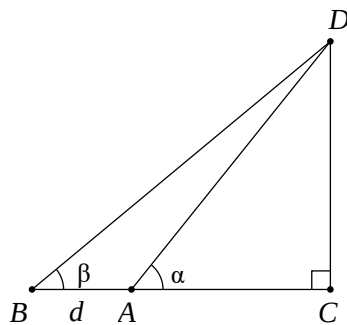
16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\angle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90^\circ$.



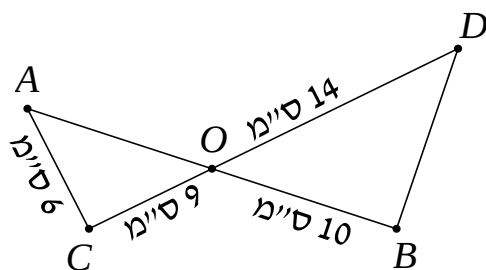
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\angle DAC = \alpha$.

מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.

נתון כי: $\angle DBA = \beta$ (ראה ציור).

סמן: $AC = x$.

הבע את x באמצעות d , α ו- β .



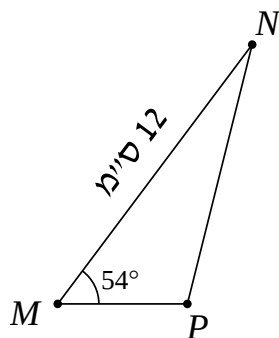
18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.

נתון כי: $\angle OAC = 60^\circ$,

$AC = 6$ ס"מ, $CO = 9$ ס"מ,

$OB = 10$ ס"מ, $OD = 14$ ס"מ.

חשב את $\angle ODB$.



19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא 54° .

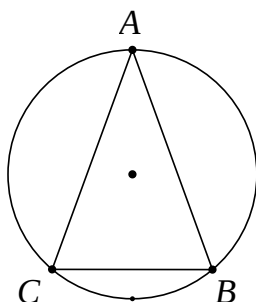
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.



20) המשולש השווה-שוקיים ABC ($AB = AC$)

חסום במעגל (ראה ציור).

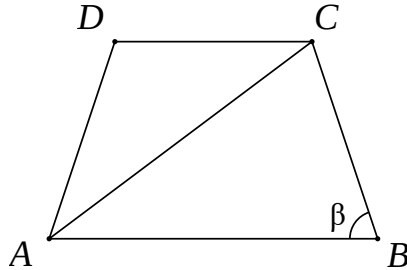
נתון: $\angle ABC = \beta$.

כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

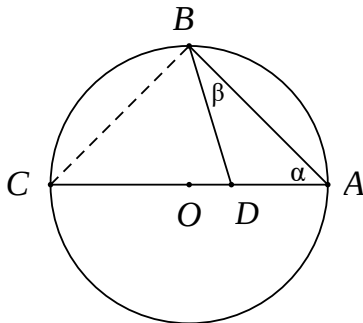
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45^\circ$.

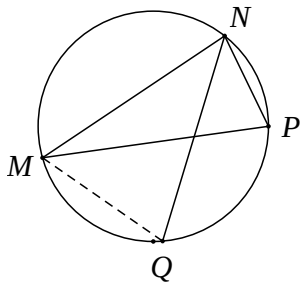
- (21) במשולש ABC הזווית $\angle C$ היא בת 60° , אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7 + \sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



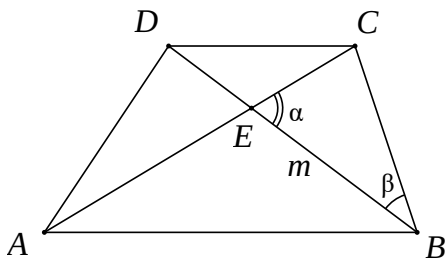
- (22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD = BC$) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא β ($\beta > 60^\circ$), (ראה ציור). הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



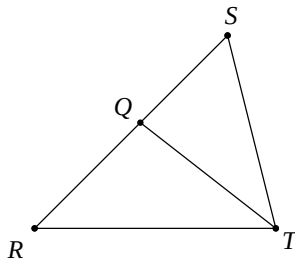
- (23) הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



- (24) משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית $\angle MNP$. נתון: $\angle MPN = 70^\circ$, $\angle MNP = 80^\circ$, $NP = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



- (25) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון: $BE = m$, $DC = BC$, $\angle CBD = \beta$, $\angle CEB = \alpha$ (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות m , α ו- β .



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\angle RTS$

(ראה ציור), $RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$,

$\angle TRQ = 45^\circ$, $\angle RST = \alpha$.

א. הבע את $\sin \alpha$ באמצעות m .

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

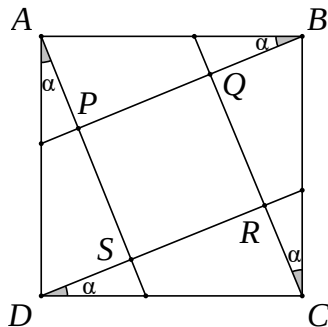
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו t , $2t$, kt .

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

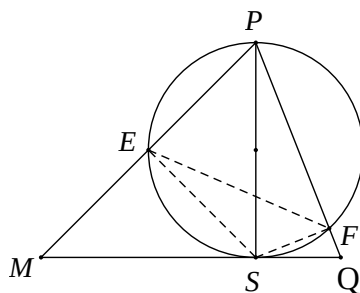
קטעים היוצרים את אותה זווית α

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון $PS = h$, $\angle MPS = \alpha$, $\angle SPQ = \beta$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות α ו- β את $\angle ESF$.

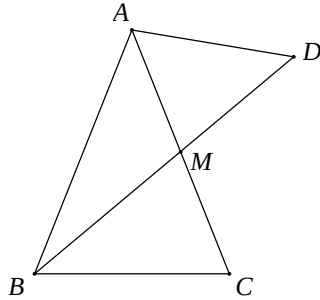
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

(31) במשולש ABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



(32) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית $\angle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

(33) משולש שווה שוקיים BCE ($BC = BE$) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא α .

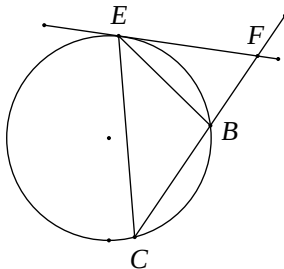
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α .

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

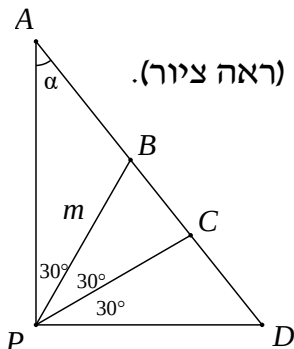


(34) בטרפז BCDE ($BC \parallel ED$) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80° .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\angle CBE$.

חשב את היקף הטרפז.



(35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\angle P$

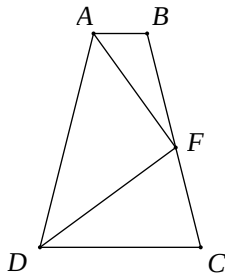
לשלוש זוויות שוות, כלומר $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$ (ראה ציור).

נתון כי: $PB = m$, $\angle PAD = \alpha$.

א. היעזר במשפט הסינוסים,

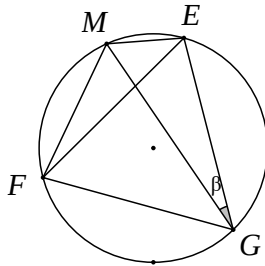
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- α .

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



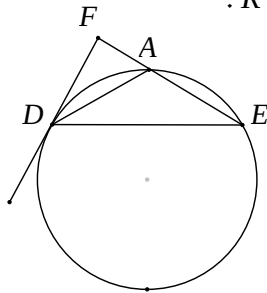
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AD = BC$, $AB \parallel DC$),

F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את הזווית $\angle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\angle DAB$ (ראה ציור). נתון: $\angle FAB = \beta$, $AB = b$. הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל. נתון: $\angle MGE = \beta$ (ראה ציור).

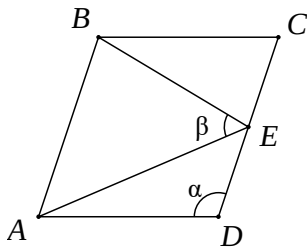
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
 ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על $\angle MGE$?



38) משולש שווה שוקיים ADE ($AD = AE$) חסום במעגל שרדיוסו R.

ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון: $\angle ADE = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$).

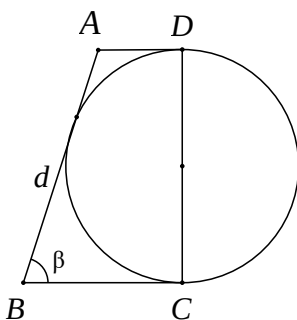
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α .
 ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
 ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון: $\angle AEB = \beta$, $\angle ADC = \alpha$ (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$.



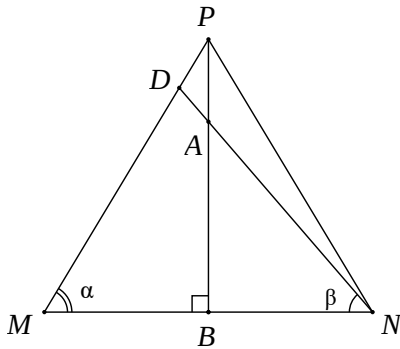
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי: $AB = d$, $\angle B = \beta$.

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
 ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה β .



41) במשולש שווה שוקיים PMN ($PM = PN$),

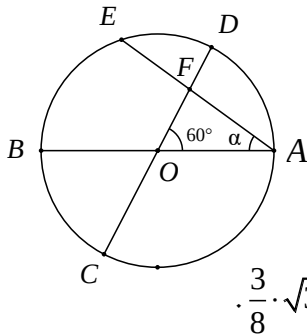
A היא נקודה על הגובה PB , כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\angle DNM = \alpha$, $\angle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan \beta : \tan \alpha$.

ב. חשב את היחס $PM:DM$.



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני

קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של 60° .

מיתר AE , היוצר זווית α עם הקוטר AB ,

חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α .

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30^\circ$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

$$r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\text{ב. } \frac{1}{2} R$$

$$\text{KN} = 21.52 \text{ ס"מ}, \text{MF} = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$\text{EF} = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{א. NA} = 18.385 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$\text{OK} = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\text{ב. } \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$$

$$12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$24 \cdot \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \text{ב.}$$

$$\text{AE} = 8 \sin \beta \cdot \left[\tan \beta - \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים: $AO = 2 \cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad \text{א. BC} = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$\text{ב. 27 יח"ש.}$$

$$r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\text{ב. } 90.45 \text{ סמ"ר} \approx S$$

$$\text{CE} = 2a \cdot \sin \beta, \text{CO} = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\frac{\text{CO}}{\text{CE}} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta} \quad \text{ב.}$$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\triangle ABOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} : \text{יחס השטחים}$$

ד. במקרה זה $\triangle ABOC$ הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ($\tan^2 45^\circ = 1$).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\angle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א.} \quad (20) \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta : \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א.} \quad (23) \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א.} \quad (26) \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \quad \text{או} \quad \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א.} \quad (30) \quad \text{ב. i. } \angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.} \quad (31)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad (31) \quad \text{א.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad (32) \quad \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.}$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ ב. } S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \text{ א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \text{ (34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \text{ א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה. } CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \text{ (36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \text{ ב. } S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \text{ א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \text{ ב. } AD + BC = d \text{ א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \text{ ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \text{ ב. } \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ א. (41)}$$

$$. S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \text{ א. (42)}$$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 5 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

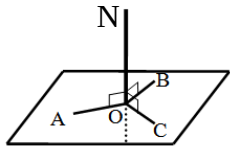
תוכן העניינים

81	1. הגדרות יסודיות
84	2. תיבה שבסיסה ריבוע
88	3. תיבה שבסיסה מלבן
93	4. הקובייה

הגדרות יסודיות:

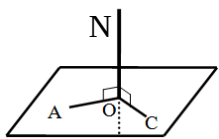
סיכום כללי:

הגדרה:



ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, BO, CO שעל המישור.

משפט:



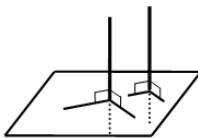
אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

משפט:

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

משפט:

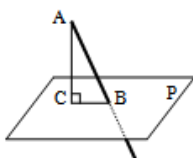
מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.



משפט:

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים. באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

הגדרה:



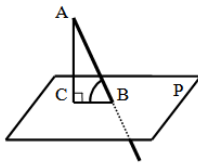
ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור. הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור. באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P, AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

הגדרה:

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

הגדרה:

זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.
 באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\angle ABC$.

**הגדרה:**

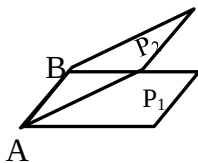
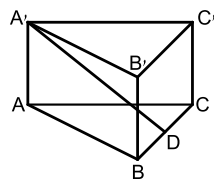
שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

הגדרה:

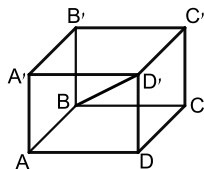
אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

הגדרה:

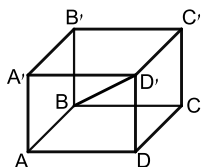
שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.
 ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.
 באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים P_1 ו- P_2 הנקרא מקצוע.
 הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

**שאלות:**

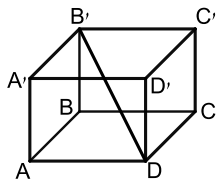
- (1) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) הנקודה D היא אמצע המקצוע BC . סמן את הזווית בין הישר $A'D$ לבין הבסיס ABC .



- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. סמן את הזווית בין האלכסון BD' לבין הבסיס $ABCD$.



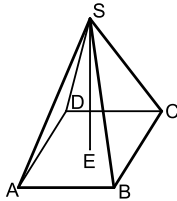
- (3) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה איור). סמן את הזווית בין האלכסון AC' לבין הפאה $D'C'D$.



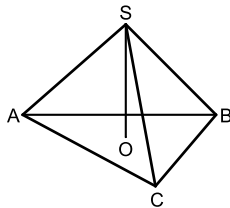
(4) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. סמן את הזוויות בין :

א. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $B'C'CB$.

ב. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $D'C'CD$.



(5) $SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור). סמן את הזווית בין המקצוע SB לבין הבסיס $ABCD$.



(6) $SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

סמן את הזווית בין המקצוע SA לבין הבסיס ABC .

תשובות סופיות:

(1) $\angle A'DA$

(2) $\angle D'BD$

(3) $\angle AC'D$

(4) א. $\angle DB'C$ ב. $\angle B'DC'$

(5) $\angle SBE$

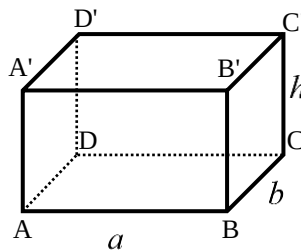
(6) $\angle SAO$

תיבה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב ($ABCD$ ו- $A'B'C'D'$) הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.

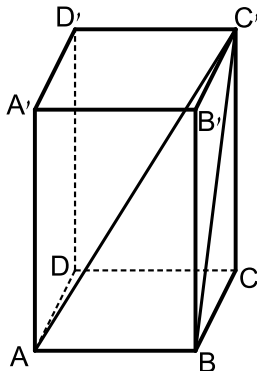


נוסחאות:

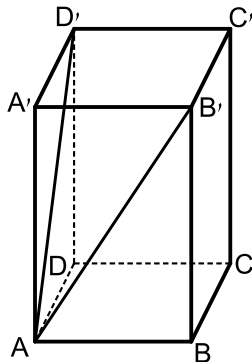
הנוסחה	תיאור מילולי
$S = a \cdot b$	שטח בסיס התיבה
$V = a \cdot b \cdot h$	נפח התיבה
$M = 2h(a + b)$	שטח מעטפת התיבה
$P = 2h(a + b) + 2ab$	שטח פנים

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסה הם ריבועים. מתקיים: $a = b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a = b = h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

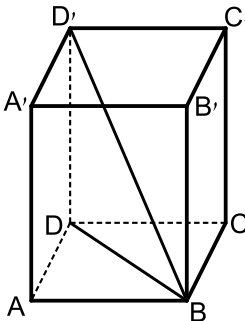
שאלות:



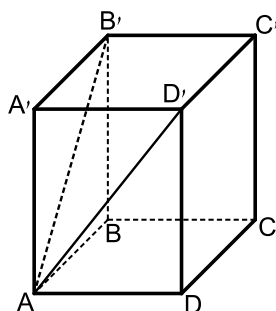
- (1) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע, אורך אלכסון הבסיס AC הוא 15.2 ס"מ. אורך המקצוע הצדדי AA' הוא 10 ס"מ.
- חשב אורך מקצוע הבסיס.
 - חשב נפח התיבה ושטח הפנים.
 - חשב את BC' , אלכסון הפאה $BB'C'C$, ואת אלכסון התיבה AC' .
 - חשב את זווית $\angle AC'B$, שבין האלכסון BC בפאה $BB'C'C$ לבין אלכסון התיבה AC' .



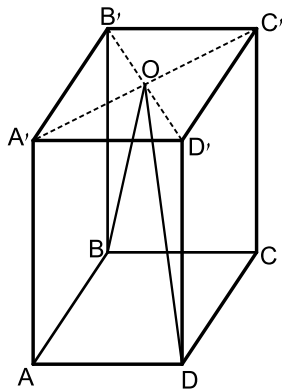
- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון AD' של הפאה הצדדית $ADD'A'$ הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים AD' ו- AB' היא 58° .
- חשב את אורך אלכסון הבסיס, $B'D'$.
 - חשב את אורך מקצוע הבסיס AB .
 - חשב את גובה התיבה AA' .
 - חשב את נפח התיבה.



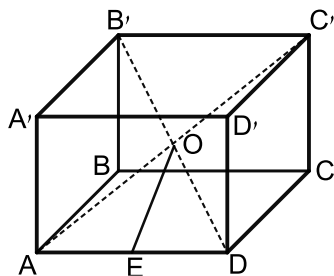
- (3) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע. אורך אלכסון הבסיס BD הוא 16 ס"מ ונפח התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:
- גובה התיבה DD' .
 - הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבסיס $ABCD$.
 - אורך מקצוע הבסיס AB .



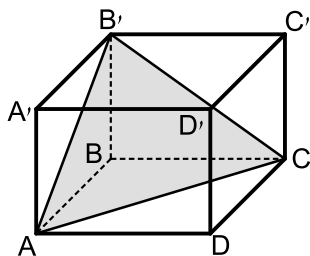
- (4) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$, שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא 48° .
- חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון $B'D'$.
 - חשב את שטח הבסיס של התיבה.



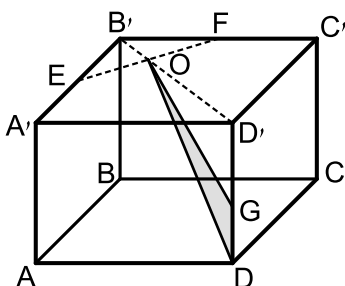
- (5) בתיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$ מעבירים את האלכסונים $B'D'$ ו- $A'C'$ במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD . נתון כי: $\angle BOD = 23^\circ$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.
- א. חשב את היקף המשולש BOD .
- ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה $AA'D'D$.



- (6) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים AC' ו- $B'D'$. האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה. מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש- E היא אמצע המקצוע AD . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
- א. מצא את אורך גובה התיבה.
- ב. מצא את אורך הקטע OE .



- (7) בתיבה ריבועית וישרה $ABCD A'B'C'D'$ מסמנים את אורך הגובה ב- h . מעבירים את הקטעים AB' , AC ו- $B'C$. כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור. הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש $AB'C$ ומישור הבסיס $ABCD$ היא α .
- א. הבע באמצעות h ו- α את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
- ב. הבע באמצעות h ו- α את נפח התיבה.



- (8) בתיבה הריבועית $ABCD A'B'C'D'$ שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון $B'D'$. הנקודות E ו- F נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $B'C'$ כך שהקטע EF חותך את האלכסון $B'D'$ בנקודה O . מקצים נקודה נוספת G - הנמצאת על הגובה DD' כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו- DO כך שנוצר המשולש DOG . אורך מקצוע הבסיס הוא k וגובה התיבה הוא h .
- א. הבע באמצעות k ו- a את שטח המשולש DOG .
- ב. מצא את היחס: $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{DOG}$.

- (9) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h . נתון: $\angle ADC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא: $\frac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos \beta}}$.

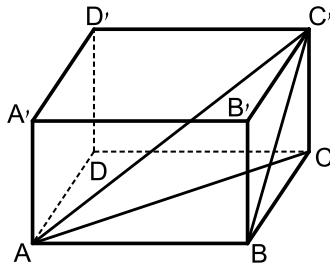
ב. לאלו ערכים של β יש פתרון לבעיה?

תשובות סופיות:

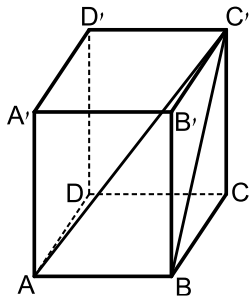
- (1) א. 10.748 ס"מ. ב. 1155.2 סמ"ק V , 660.959 סמ"ר S .
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\angle AC'B = 36.21^\circ$.
- (2) א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. 1622.485 סמ"ק V .
- (3) א. 11 ס"מ. ב. 34.51° . ג. 11.313 ס"מ.
- (4) א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.
- (5) א. 51 ס"מ. ב. 8.1° .
- (6) א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.
- (7) א. $\frac{h\sqrt{2}}{\tan \alpha}$. ב. $\frac{2h^3}{\tan^2 \alpha}$.
- (8) א. $S_{\text{DOG}} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$. ב. $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$.
- (9) א. $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

תיבה שבסיסה מלבן:

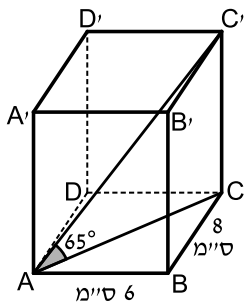
שאלות:



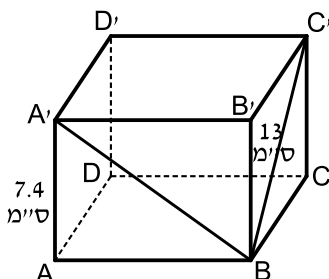
- 10** בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם :
 $AB = 12$ ס"מ , $BC = 5$ ס"מ. הזווית בין BC' אלכסון הפאה, $BB'C'C$, לבסיס $ABCD$ היא 40° .
 א. חשב את גובה התיבה CC' .
 ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC .
 ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$.
 ד. חשב את אורך אלכסון התיבה AC' .
 ה. חשב את נפח התיבה.
 ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



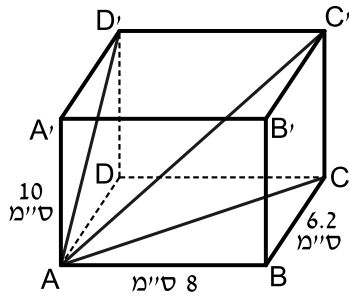
- 11** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.
 אורך צלע הבסיס : $AB = 9$ ס"מ.
 אלכסון הפאה $BB'C'C$ הוא : $BC' = 15$ ס"מ.
 חשב את הזווית בין BC' אלכסון הפאה $BB'C'C$, לאלכסון התיבה AC' .



- 12** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$, בה מתקיים :
 $AB = 6$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ. הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$ היא 65° .
 א. חשב את גובה התיבה CC' .
 ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



- 13** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. גובה התיבה AA' הוא 7.4 ס"מ.
 אורך אלכסון הפאה $BC' = 13$ ס"מ.
 הזווית בין אלכסון הפאה $A'B$ לבסיס $ABCD$ היא 37° .
 א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.
 ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



14 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון :

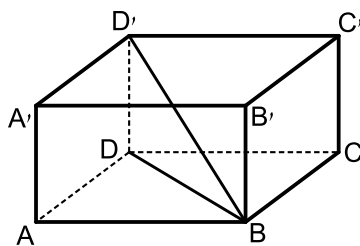
$$AA' = 10 \text{ ס"מ}, AB = 8 \text{ ס"מ}, BC = 6.2 \text{ ס"מ}$$

חשב את :

א. אלכסון הבסיס, AC , אלכסון הפאה, AD' , ואלכסון התיבה, AC' .

ב. הזווית בין AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$, לאלכסון התיבה AC' : $\angle D'AC'$.

ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.



15 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. $AB = 12 \text{ ס"מ}$.

אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ .

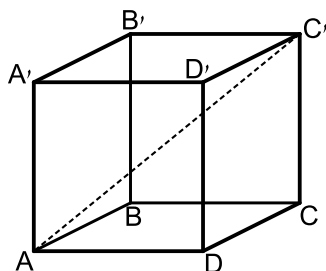
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק .

חשב את :

א. רוחב הבסיס של התיבה, BC .

ב. גובה התיבה, AA' .

ג. הזווית בין אלכסון התיבה BD' לבסיסה $ABCD$.



16 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור), נתון :

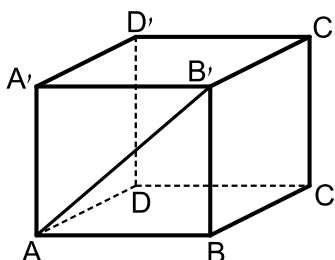
$$AD = 12 \text{ ס"מ}, DC = 8 \text{ ס"מ}, CC' = 14 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס, AC .

ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה AC' לבין הבסיס $ABCD$.

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.



17 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור) נתון :

$$AD = 10 \text{ ס"מ}, AB = 12 \text{ ס"מ}$$

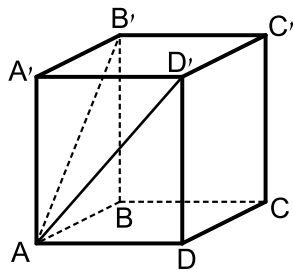
הזווית שבין אלכסון הפאה AB' לבין

הבסיס $ABCD$ היא 35° .

א. חשב את גובה התיבה BB' .

ב. חשב את AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$.

ג. חשב את הזווית שבין AD' לבין הבסיס $ABCD$.



(18) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור).

אורך גובה התיבה AA' הוא 10 ס"מ.

אורך AB' , אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.

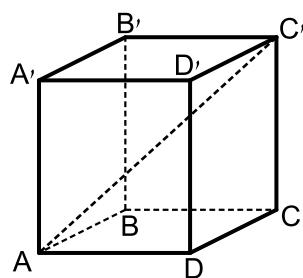
א. חשב את אורך המקצוע AB .

הזווית שבין AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$,

לבין הבסיס $ABCD$ היא בת 40° .

ב. חשב את נפח התיבה.

ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.



(19) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבה

10 ס"מ $AB =$, 12 ס"מ $AD =$ (ראה ציור).

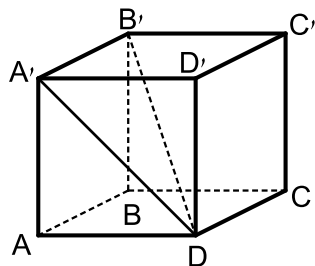
הזווית שבין אלכסון התיבה, AC' ,

לבין הבסיס $ABCD$ היא בת 38° .

א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה התיבה.

ג. חשב את שטח פני התיבה.

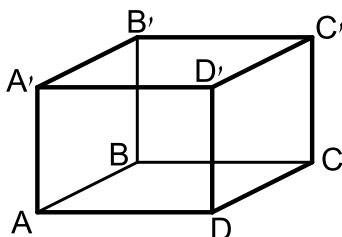


(20) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראו סרטוט)

שבה: 10 ס"מ $AB =$, 12 ס"מ $AD =$, 8 ס"מ $AA' =$.

א. חשב את אורך $A'D'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.

ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D'$.

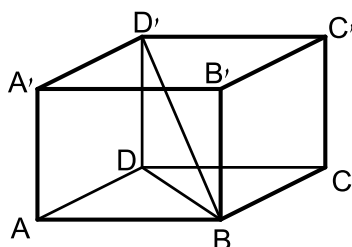


(21) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון:

7 ס"מ $AA' =$, 12 ס"מ $AD =$, 8 ס"מ $AB =$.

חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית

בינו לבין בסיס התיבה.



(22) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.

מעבירים את האלכסונים BD ו- BD' כך

שמתקיים: $\angle DBD' = \angle ABD = \alpha$.

אורך האלכסון BD יסומן ב- a .

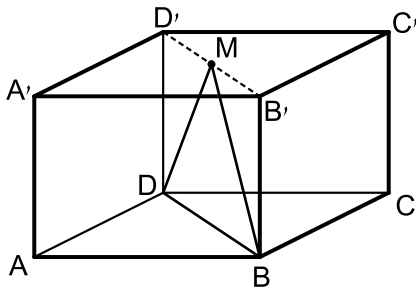
א. הבע באמצעות a ו- α את:

i. אורך התיבה AB .

ii. רוחב התיבה AD .

iii. גובה התיבה AA' .

ב. מצא את α אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.



(23) בתיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון B'D' בבסיס העליון.

מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו-BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD ($\angle BMD = 90^\circ$).

אורך מקצוע הבסיס AB הוא 5a
ואורך הקטע DM הוא 4a.

א. הבע באמצעות a את אורך המקצוע AD.

ב. מעבירים את הקטע AM. חשב את זווית MAD.

ג. מצא את a אם ידוע כי שטח

המשולש MAD הוא 125 סמ"ר (עגל למספר שלם).

(24) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $BD' = m$. הזווית שבין האלכסון BD' לבסיס

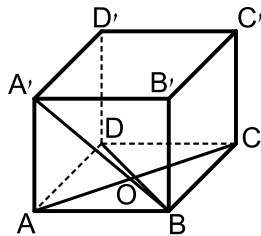
ABCD היא α והזווית שבין האלכסון BD' לפאה צדדית ABB'A' היא γ .
הבע באמצעות m, α ו- γ את נפח התיבה.

תשובות סופיות:

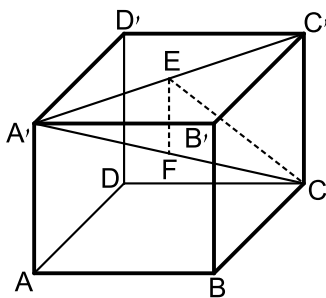
- (10) א. $CC' = 4.195$ ס"מ ב. $AC = 13$ ס"מ ג. 17.886° ד. $AC' = 13.66$ ס"מ ה. $V = 251.7$ סמ"ק ו. 142.63 סמ"ר $M =$
- (11) $\angle AC'B = 30.96^\circ$
- (12) א. $CC' = 21.44$ ס"מ ב. 1029.6 סמ"ק V , 696.96 סמ"ר $P =$
- (13) א. 9.82 ס"מ AB , 10.688 ס"מ BC ב. 303.5184 סמ"ר M , 513.43 סמ"ר $P =$
- (14) א. 10.121 ס"מ AC , 11.766 ס"מ AD' , 14.227 ס"מ AC' ב. 34.22° ג. 496 סמ"ק V , 284 סמ"ר $M =$
- (15) א. 9 ס"מ BC ב. 8 ס"מ h ג. 28.072° ד. 752 סמ"ר
- (16) א. 14.42 ס"מ AC ב. 44.15° ג. 560 סמ"ר ד. 752 סמ"ר
- (17) א. 8.4 ס"מ BB' ב. 13.06 ס"מ AD' ג. 40.03°
- (18) א. 9.8 ס"מ AB ב. $1,167.9$ סמ"ק V ג. 434.4 סמ"ר
- (19) א. 15.62 ס"מ ב. 12.2 ס"מ h ג. 776.8 סמ"ר $P =$
- (20) א. 14.42 ס"מ AD' ב. 17.55 ס"מ $B'D'$
- (21) $\angle D'BD = 25.89^\circ$, $BD' = 16.031$ ס"מ
- (22) א. i. $a \cos \alpha$ ii. $a \sin \alpha$ iii. $a \tan \alpha$ ב. 53.13°
- (23) א. $a\sqrt{7}$ ב. 70.6° ג. $a = 5$
- (24) $V = m^3 \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \alpha}$

הקובייה:

שאלות:



(25) בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס"מ. הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון. מצא את הזווית שבין OA' לפאה $ABB'A'$.



(26) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$ מעבירים את האלכסון $A'C'$ בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון $A'C'$ מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע $A'E$. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון $A'B'C'D'$ (EF מאונך ל- $A'C'$). הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי $A'C$. נסמן: $\angle A'CE = \alpha$, $AF = m$. הבע באמצעות α ו- m את נפח הקובייה.

תשובות סופיות:

(25) 24.095° .

(26) $(m \sin 2\alpha \cos \alpha)^3$.

דרכי הוראת האנליזה

פרק 6 - טריגונומטריה במרחב - המנסרה

תוכן העניינים

- 1. מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות..... 94
- 2. מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים..... 96
- 3. מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית..... 97

מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב. המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה. כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

נעסוק במנסרות הבאות:

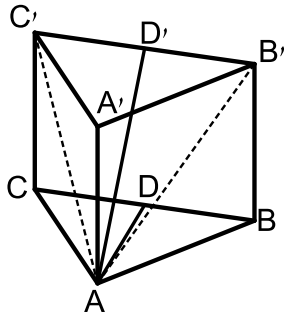


- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

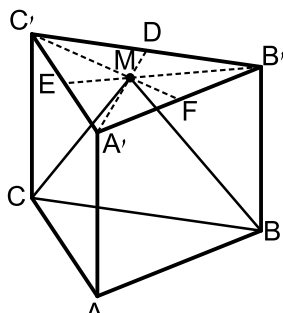
הערה:

התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

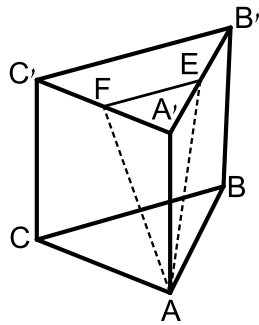
שאלות:



- (1) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו- AC' כך שנוצר המשולש $AB'C'$. הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע $B'C'$ במשולש $AB'C'$ היא 40° . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.
- א. חשב את שטח המשולש $A'B'C'$.
- ב. חשב את נפח המנסרה.



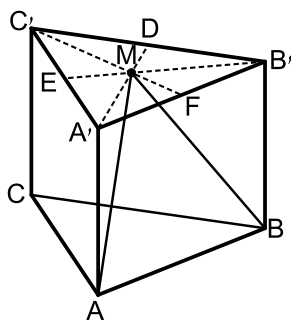
- (2) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$, אשר נחתכים בנקודה M . מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו- MB כך שנוצר המשולש MCB .
- גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה. חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC .



- (3) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $A'C'$. מעבירים את הקטעים AE ו-AF, כך שנוצר המשולש AEF. אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.

א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF.

ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF.



- (4) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$ אשר נחתכים ב-M. מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו-MB כך שנוצר המשולש MAB. גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.

א. הבע באמצעות a את אורך הקטע MA.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC.

ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC.

ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה $AA'B'B$.

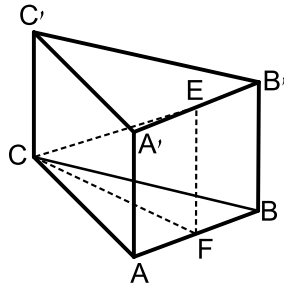
ה. הבע באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.

תשובות סופיות:

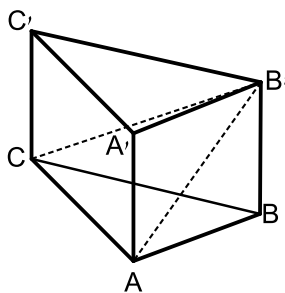
- (1) א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.
- (2) 73.89° .
- (3) א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. 19.84° .
- (4) א. $MA = 2.3a$ ב. 60° ג. 73.9° ד. 14.47° ה. $P = 15.46a^2$.

מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות:



- (5) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו- AB מעבירים את הקטע EF . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא k ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס AC . נסמן: $\angle FCE = \alpha$.
 א. הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.
 ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF = CE$, וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.



- (6) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) מעבירים את האלכסונים AB' ו- CB' כך שנוצר המשולש $AB'C$. ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC ואנך למקצוע AC במשולש $AB'C$ היא 45° (האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E).
 זוויות הבסיס ABC הן $\angle CAB = \angle ABC = 75^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.
 א. מצא את אורך המקצוע AC .
 ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

- (7) נתונה מנסרה $ABCA'B'C'$ שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$), אורך השוק היא k וזווית הראש היא γ . הזווית שבין המישור ABC למישור ABC' היא β . הבע באמצעות k , γ ו- β את נפח המנסרה.

תשובות סופיות:

$$(5) \quad \text{א. } V = \frac{15k^3 \tan \alpha}{8} \quad \text{ב. } \frac{15}{\sqrt{3}} \text{ סמ"ק.}$$

$$(6) \quad \text{א. } 10 \text{ ס"מ.} \quad \text{ב. } 26.56^\circ.$$

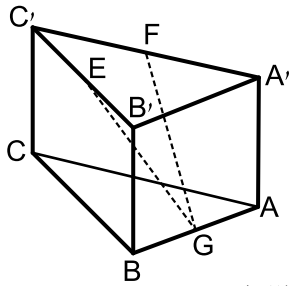
$$(7) \quad V = \frac{1}{2} k^3 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \tan \beta$$

מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

שאלות:

8) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$),

הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו-AB כמתואר באיור.



מסמנים את מידות הבסיס $AB = 5t$, $BC = 12t$.

הזווית שבין הקטע GE למישור הבסיס ABC היא 36.86° .

א. הבע באמצעות t את גובה המנסרה.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע GF

ולמישור הבסיס ABC.

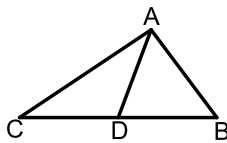
ג. מצא את t אם ידוע כי אורך הקטע GF הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו

לשני משולשים שווי שטח. כלומר, הקטע AD

הוא תיכון במשולש ABC. הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.



במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש

ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הנקודות F ו-G מחלקות

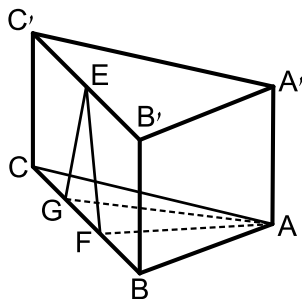
את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים.

הנקודה E היא אמצע המקצוע $B'C'$.

ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך

המקצוע BC הוא 24 ס"מ.

שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.



ב. איזה משולש הוא המשולש EFG? מצא את זוויותיו.

ג. מצא את גובה המנסרה.

ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB.

ה. (רמז: התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).

ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

10 לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

ידוע כי הפאה הצדדית $AA'B'B$ היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ- AB .

הנקודות E ו- G נמצאות על אמצעי

המקצועות AB ו- $B'C'$ בהתאמה.

מעבירים את הקטעים $A'E$, $A'G$ ו- GE .

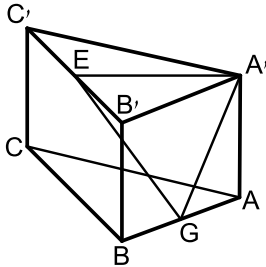
א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE

ומישור הבסיס.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE

ומישור הפאה $AA'B'B$.

ג. חשב את זווית $EA'G$.



תשובות סופיות:

8 א. $4.875t$ ב. 39.1° ג. $t = 8$

9 ב. משולש שווה שוקיים. 66.42° , 47.15° ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.

ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.

10 א. $\angle EGH = 32.31^\circ$ ב. $\angle B'GE = 53.3^\circ$

ג. $\angle GAE = 71.93^\circ \sim 72^\circ$.

דרכי הוראת האנליזה

פרק 7 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

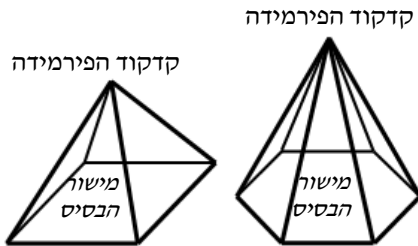
תוכן העניינים

99	1. פירמידה שבסיסה ריבוע
103	2. פירמידה שבסיסה מלבן
110	3. פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות
112	4. פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים
113	5. פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית

פירמידה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:



גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה. בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

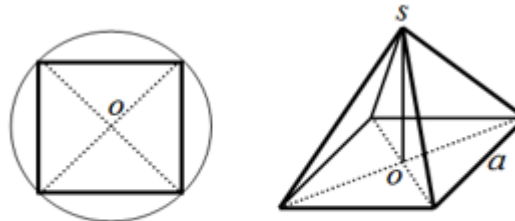
הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.

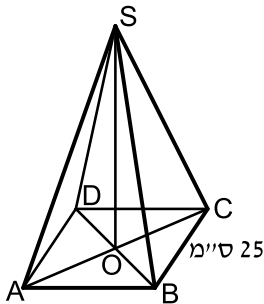


תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.

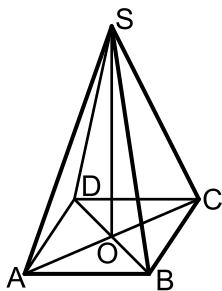
נפח פירמידה:

נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה h הוא: $V = \frac{S \cdot h}{3}$.

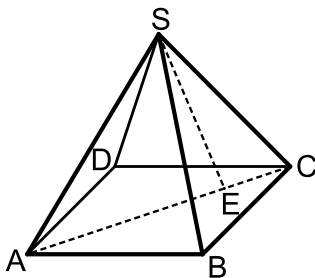
שאלות:



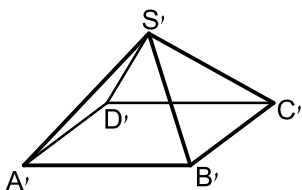
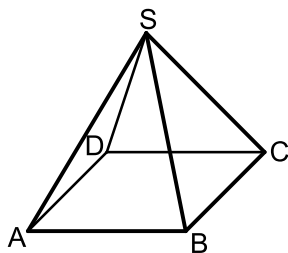
- (1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) $SABCD$.
 אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ.
 הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת 35° .
 א. חשב את אלכסון הבסיס.
 ב. חשב את גובה הפירמידה.
 ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.



- (2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת $SABCD$.
 אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
 אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
 א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.
 ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
 ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



- (3) נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a .
 אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
 מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E
 המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}\right)$.
 מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.
 א. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.
 ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.
 ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא $\sqrt{560}$ סמ"ר.



- (4) נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: $SABCD$ ו- $S'A'B'C'D'$.
 אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא a וגובהה הוא $2a$.
 אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא a .
 א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.
 ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: a^3 .
 מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה $SABCD$ למקצוע הצדדי של הפירמידה $S'A'B'C'D'$.
 ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

(5) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ. חשב את:

- א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.
- ב. גובה הפירמידה.
- ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.
- ד. נפח הפירמידה.
- ה. שטח הפנים של הפירמידה.

(6) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא α . הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

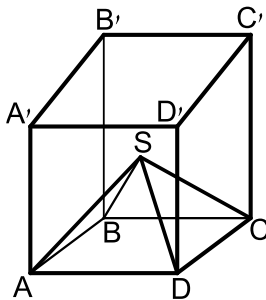
(7) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא a והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הבע באמצעות β את $\sin \gamma$.

(8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β . הוכח: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(9) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. גובה הפירמידה הוא h והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא β . הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\frac{h}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \sqrt{-2 \cos \beta}$.

(10) בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המהצעות שווים. בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה.

מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.



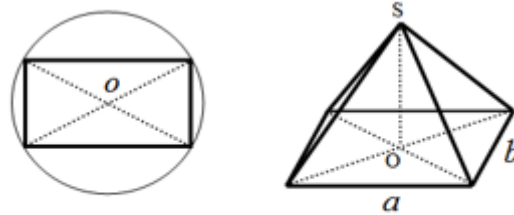
תשובות סופיות:

- (1) א. 35.36 ס"מ ב. 12.378 ס"מ h ג. 44.72°
- (2) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ P ג. 64.896°
- (3) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. 6.9° ג. $a = 2$
- (4) א. $V_{S'ABCD'} = \frac{4}{3}a^3 > V_{SABCD} = \frac{2}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$
- ג. דנה טועה - $P_{S'ABCD'} = 9a^2 \neq P_{SABCD} \approx 7a^2$
- (5) א. 63.77° ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. 70.79° ד. 478.42 סמ"ק
- ה. 403.97 סמ"ר.
- (6) $V = \frac{b^3 \tan \alpha}{3\sqrt{2}}, M = 2b^2 \sqrt{\frac{1}{2} \tan^2 \alpha + \frac{1}{4}}$
- (7) $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \beta}}$
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.
- (10) 30°

פירמידה שבסיסה מלבן:

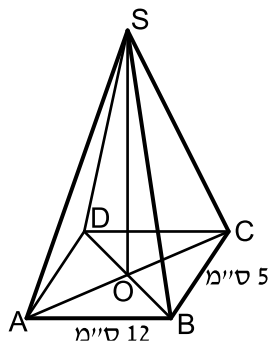
סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.

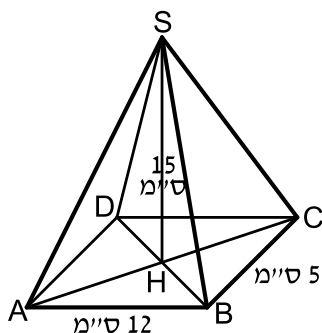


תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

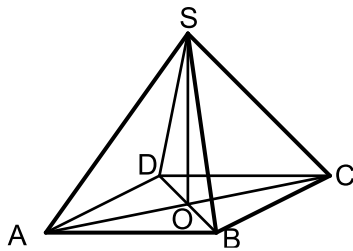
שאלות:



- 11** נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא: $SO = 15$ ס"מ.
- חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את אורך אלכסון הבסיס.
 - חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



- 12** נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא: $SH = 15$ ס"מ.
- חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
 - חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.
 - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
 - הנקודה E היא אמצע BC. חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.



13 נתונה פירמידה ישרה ומרובעת

שבסיסה ABCD הוא מלבן.

נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.

גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.

א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.

ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 40° .

חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.

חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

14 נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.

E אמצע BC. $AB = 16$ ס"מ. גובה הפירמידה: $SO = 10$ ס"מ.

א. חשב את הזווית שבין הקטע SE

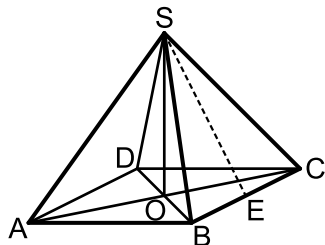
לבסיס הפירמידה ABCD.

ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח

הפירמידה הוא 480 סמ"ק.

ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB.

חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.



15 נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן.

זווית הראש של פאה צדדית SAB היא 56° .

אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.

א. חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.

ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.

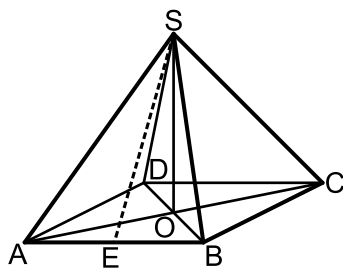
ג. נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ.

חשב את גובה הפירמידה.

ד. חשב את נפח הפירמידה.

ה. חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.

ו. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



16 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה

שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ.

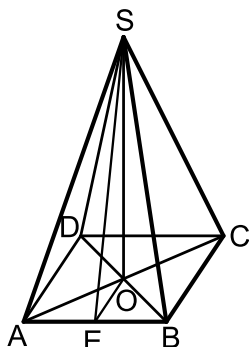
הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ.

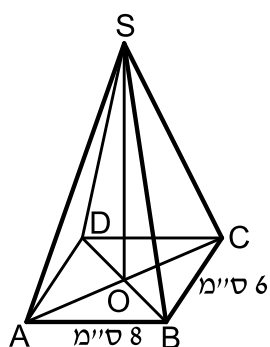
גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.

א. חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.

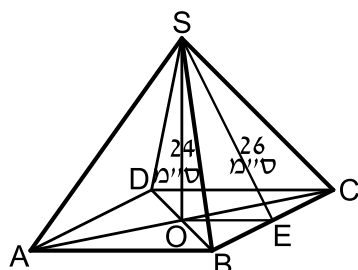
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

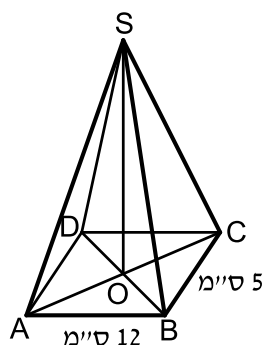




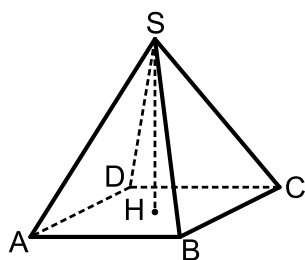
- 17 נתונה פירמידה ישרה SABCD.
 הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.
 אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.
 א. חשב את הזווית $\angle CSA$.
 ב. חשב את הזווית $\angle CSB$.
 ג. חשב את נפח הפירמידה.



- 18 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
 גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ.
 הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ.
 חשב את:
 א. אורך המקצוע AB.
 ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.
 ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.
 ד. חשב את אורך המקצוע BC.

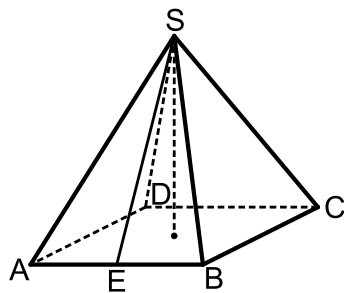


- 19 נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
 בסיס הפירמידה הוא מלבן.
 אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ.
 זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 42° .
 א. חשב אורך מקצוע צדדי.
 ב. חשב את שטח הפאה SBC.
 ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.



- 20 הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
 נתון: $AD = 17$ ס"מ, $AB = 25$ ס"מ, $SH = 12$ ס"מ.
 א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.
 ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.
 ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

(21) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

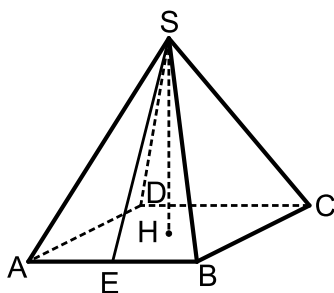


נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.

- חשב את גובה הפירמידה.
- חשב את נפח הפירמידה.
- חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

(22) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

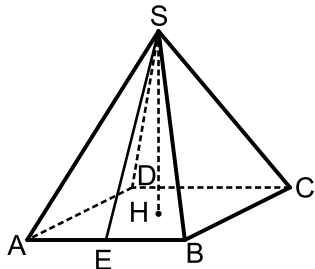


נתון: $AD = 16$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.

- חשב את גובה הפירמידה.
- חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
- חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.

(23) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

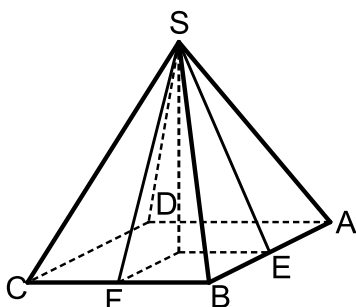


נתון: $AB = 20$ ס"מ, $SH = 8$ ס"מ.

הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.

- חשב את האורך AD.
- חשב את אורך DH.
- חשב את נפח הפירמידה.

(24) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).



נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB.

הזווית שבין הישר SE לבסיס היא 55° .

- חשב את גובה הפירמידה.
- F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
- חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
- חשב את שטח הפאה SAB.

(25) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.

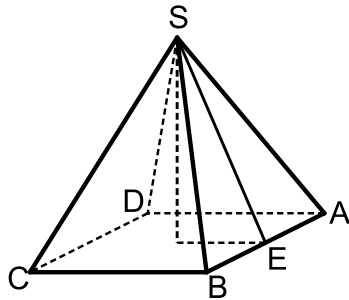
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $SE =$.

א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.

ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB.

אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.



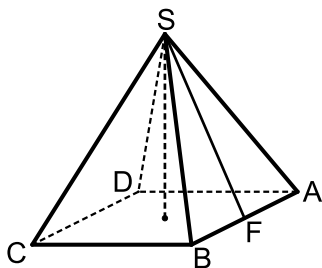
(26) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.

זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .

א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.

ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.

ג. חשב את גובה הפירמידה.



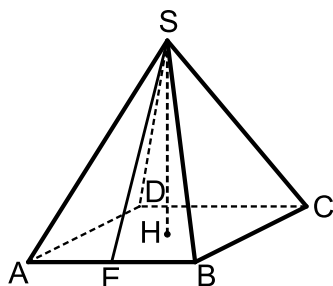
(27) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.

זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .

א. חשב את גובה הפאה SAB.

ב. חשב את גובה הפירמידה.

ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.



(28) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבבסיסה מלבן.

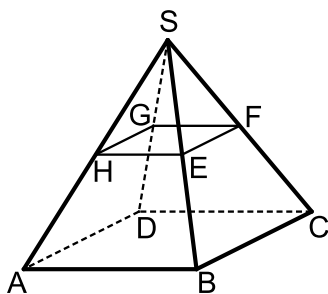
מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH. ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ.

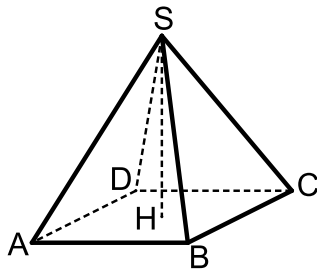
הזווית HSF היא 50° .

א. מצא את מידות הבסיס ABCD.

ב. מצא את גובה הפירמידה.

ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.





(29) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן :

האחת- $SABCD$ והשנייה- $S'A'B'C'D'$.

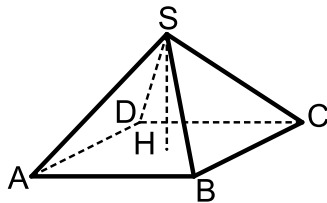
הקטעים SH ו- $S'H'$ הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.

ידוע כי : $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$

וכי : $A'B' = 3k$, $B'C' = k$, $H'S' = 2k$

א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות.

נמק.



i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.

ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.

iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.

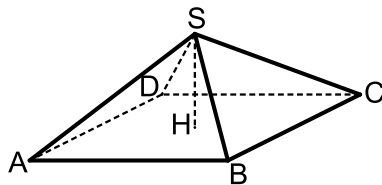
iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה $SABCD$

גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה $S'A'B'C'D'$.

ב. מצא את הערך של k בעבורו סכום הנפחים

של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה

בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.



(30) נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה מלבן.

ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה

הפירמידה ויסומן ב- t .

כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול

פי 4 מהמקצוע BC .

א. הבע באמצעות t את אורך המקצוע AB .

ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית

הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס $ABCD$.

ג. חשב את הזווית שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.

ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב- N .

מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים

במישור הבסיס $ABCD$ לנקודה N .

חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

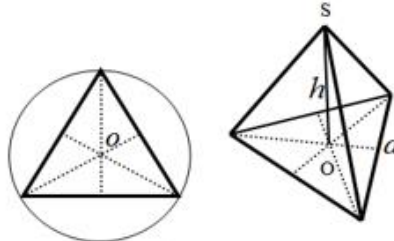
תשובות סופיות:

- (11) א. 300 סמ"ק $V =$ ב. 13 ס"מ ג. 66.57°
- (12) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. 263.26 סמ"ר $M =$ ד. 68.2°
- (13) א. 13 ס"מ ב. 67.38° ג. 8.89 ס"מ $BC =$ ד. 4.579 ס"מ $AB =$, 162.32 סמ"ק $V =$
- (14) א. 51.34° ב. 9 ס"מ $BC =$ ג. 65.77°
- (15) א. 11.284 ס"מ $SE =$ ב. 12.78 ס"מ $SA =$ ג. 10.551 ס"מ $h =$ ד. 337.632 סמ"ק $V =$ ה. 69.24° ו. 55.65°
- (16) א. 17.435 ס"מ $AD =$ ב. 19.5 ס"מ $SF =$ ג. 640 סמ"ר $M =$
- (17) א. 34.21° ב. 20.328° ג. 260 סמ"ק $V =$
- (18) א. 20 ס"מ $AB =$ ב. 67.38° ג. 15 ס"מ $BC =$
- (19) א. 6.796 ס"מ ב. 16.282 סמ"ר $S_{\Delta SBC} =$ ג. 2.533 ס"מ $h =$
- (20) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. 38.44°
- (21) א. 20.68 ס"מ $h =$ ב. 2068.2 סמ"ק $V =$ ג. 70.07°
- (22) א. 8.94 ס"מ $h =$ ב. 14.7 ס"מ ג. 37.45°
- (23) א. 17.89 $AD =$ ב. 13.42 ס"מ $DH =$ ג. 954.1 סמ"ק $V =$
- (24) א. 14.28 ס"מ $h =$ ב. 62.29° ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר
- (25) א. 50.6° ב. 27.93 ס"מ $BC =$ ג. 6.32 ס"מ $AB =$
- (26) א. 29.04 ס"מ ב. 75.03° ג. 28.05 ס"מ $h =$
- (27) א. 29.04 ס"מ ב. 28.05 ס"מ $h =$ ג. 28.27°
- (28) א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.
- (29) א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'ABCD} \approx 11.68k^2$, $P_{SABCD} \approx 11.245k^2$.
 ii. נכון. הנפח הוא: $V = 2k^3$.
 iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: 51.67° , 69.56° .
 iv. לא נכון. 16.282 סמ"ר $S_{\Delta SBC} =$.
 v. לא נכון. 14.28 ס"מ $h =$.
 vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$. ב. $k = \sqrt[3]{16}$.
 (30) א. $AB = t\sqrt{15}$ ב. $\angle SHM = 27.31^\circ$ ג. $\angle ASC = 126.86^\circ$ ד. $\angle NMH = 14.47^\circ$.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
 ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת
 התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

שאלות:

31 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא

משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD

בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC.

זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא 50°

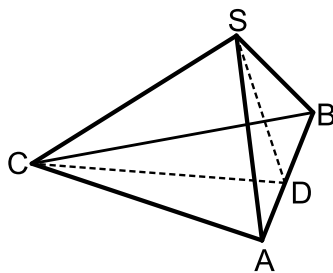
ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.

א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. חשב את הזווית SDC.

ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.



32 נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.

אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.

א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.

ב. חשב את גובה פירמידה.

ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.

ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

33 נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות

סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ .

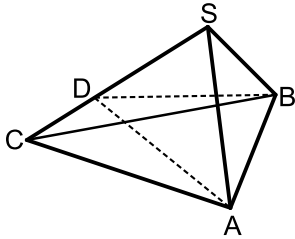
$$\text{הוכח: } \sin \gamma \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$$

תשובות סופיות:

- (31) א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג. 61° ד. 42° .
- (32) א. 60.339° ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. 74.106° ד. 67.2° .
- (33) הוכחה.

פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות:



- (34) נתונה פירמידה ישרה $SABC$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו- SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\angle ADB = 42^\circ$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ. הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$.

- חשב את אורך הגובה AD .
- חשב את זווית הראש בפאה SAC .
- חשב את שטח משולש הבסיס ABC .

- (35) נתונה פירמידה משוכללת וישרה $SABC$. הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$), אורך שוקו k וזווית הראש שלו היא 2γ . אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k . הבע באמצעות k ו- γ את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

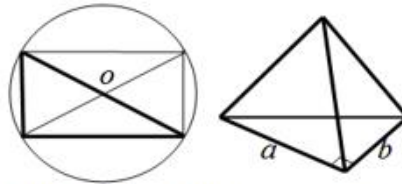
- (34) א. 11.16 ס"מ. ב. 53.13° . ג. 47.27 סמ"ר.

$$(35) \quad V = \frac{k^3 \sin 2\gamma \cdot \sqrt{4\cos^2 \gamma - 1}}{12 \cos \gamma}$$

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

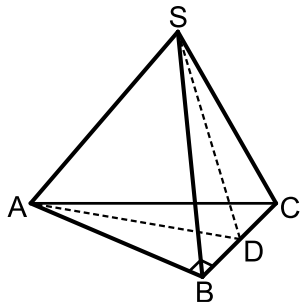
סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

שאלות:



(36) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא

משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה

הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.

ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו

נסמן: $SA = AD = 2m$.

הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\angle SDA = \alpha$.

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות m, α את גובה הפירמידה.

(37) נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.

אחד מהניצבים במשולש הוא c והזווית שמולו היא α .

הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא β .

הבע באמצעות c, α, β את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

(36) א. $SD = AB = 4m \cos \alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m \cos \alpha$.

$$V = \frac{c^3 \tan \beta}{12 \tan \alpha \sin \alpha} \quad (37)$$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 8 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

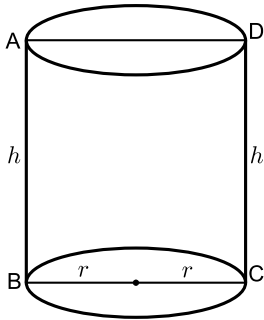
תוכן העניינים

114	1. הגליל
116	2. החרוט
119	3. הכדור

הגליל:

סיכום כללי:

הגדרות:

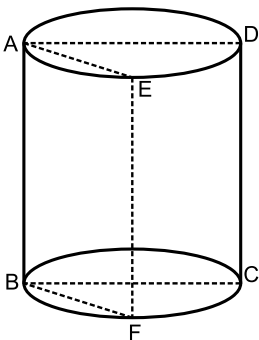


- נתון מעגל במישור α . אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור α ונחתוך אותם ע"י מישור נוסף β המקביל ל- α נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע"י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו $2\pi r$ וגובהו h .

נוסחאות:

- נפח גליל: $V = \pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של גליל: $M = 2\pi r h$.
- שטח פנים של גליל: $P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

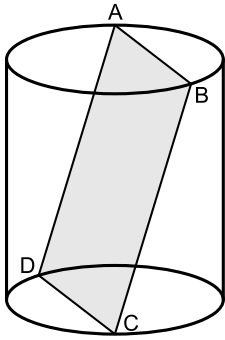
שאלות:



- (1) בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית α . האלכסון $AF = \ell$ של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית β . הבע את נפח הגליל באמצעות α, β ו- ℓ .

(2) האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית α עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא d .

הבע באמצעות d ו- α את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה: $\frac{\pi^2 d^2 \tan \alpha}{\pi^2 + \tan^2 \alpha}$



(3) ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר,

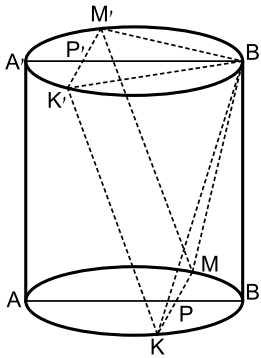
שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא α .

הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD

למישור בסיס הגליל היא β .

הצלע BC שווה ל- a .

הוכח שנפח הגליל הוא : $\frac{\pi a^3 \sin^3 \alpha}{4 \tan^2 \beta}$.



(4) נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ.

מעבירים את הקטרים AB ואת $A'B'$ אשר מקבילים זה לזה

בשני הבסיסים בהתאמה.

הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש: $AP' = \frac{1}{4}AB'$

ו- $BP = \frac{1}{4} AB$. דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB

ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'.

מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K'

וקדקודה בנקודה B'.

תשובות סופיות:

$$.V = \frac{\pi \ell^3 \cos^2 \beta \sin \beta}{4 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

(2) שאלת הוכחה.

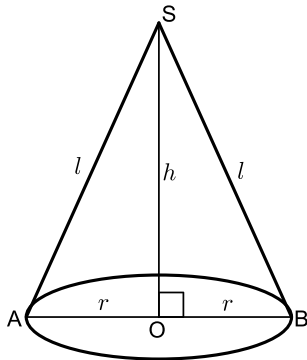
(3) שאלת הוכחה.

(4) צריך לחשב.

החרוט:

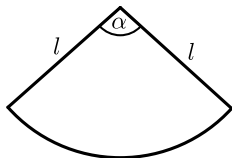
סיכום כללי:

הגדרות:



- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס r , עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב- l).

- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הצירי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת

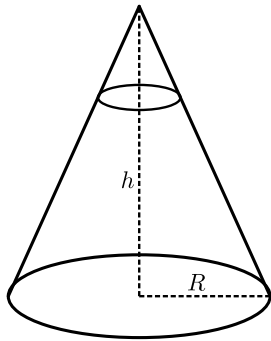


$$\text{עיגול עם זווית מרכזית } \alpha \text{ המקיימת: } \frac{\alpha}{360} = \frac{r}{l}$$

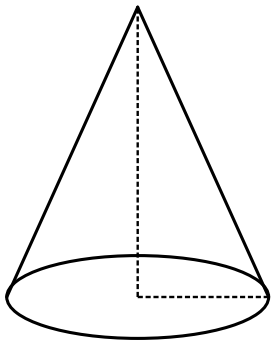
נוסחאות:

- נפח חרוט: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
- שטח מעטפת של חרוט: $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
- שטח פנים של חרוט: $P = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

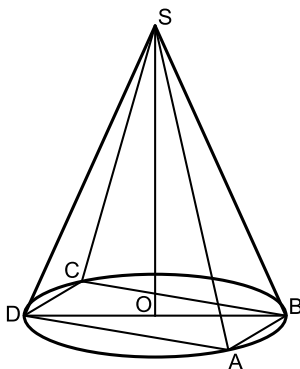
שאלות:



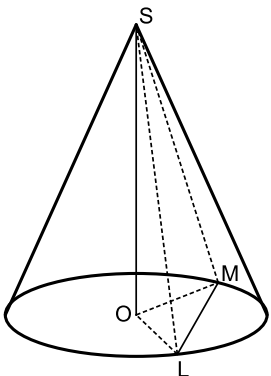
- (1) נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו R , וגובהו h .
 מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.
 החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של
 בסיס החרוט.
 מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע"י החיתוך,
 לבין נפח החרוט המקורי.



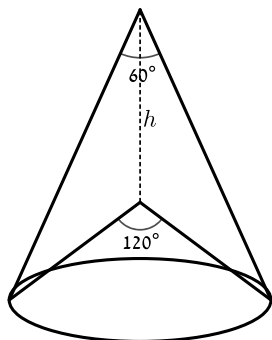
- (2) שטח פני חרוט ישר שווה ל- 245π סמ"ר.
 אם נפרוש את המעטפת הנ"ל במישור,
 נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- 60° .
 מצא את נפח החרוט הנ"ל.



- (3) בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע ABCD שצלעו a .
 מחברים את הקדקודים A ו-B של הריבוע עם
 ראש החרוט S, ומתקבל משולש שווה שוקיים SAB
 עם זווית הראש $\angle ASB = \alpha$.
 הבע את נפח החרוט באמצעות a ו- α .



- (4) נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכז בסיסו הוא O.
 מעבירים מיתר LM כך ש- $\angle LOM = \alpha$.
 הזווית שבין המישור LSM לבין בסיס החרוט היא β .
 מרחק המישור LSM ממרכז הבסיס הוא d .
 הבע את נפח החרוט באמצעות α , β ו- d .



- (5) נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף.
 בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא 60°
 ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא 120° .
 הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק h זה מזה.
 הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא $\frac{\pi h^3}{4}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1225\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{\pi d^3}{3 \sin^2 \beta \cos \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

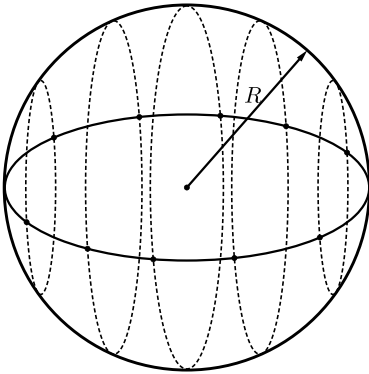
$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

הכדור:

סיכום כללי:

הגדרות:

כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו. קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור. כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).



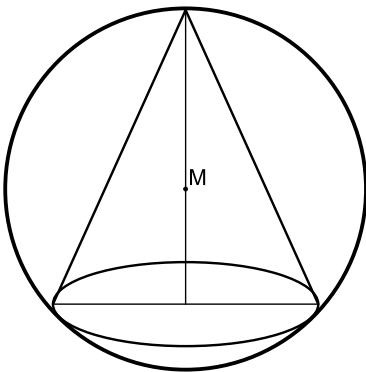
נוסחאות:

- נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

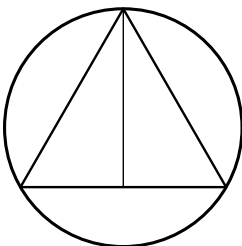
- שטח פני הכדור: $P = 4\pi R^2$

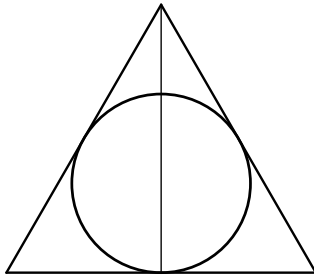
שאלות:

- (1) חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט. קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור. מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.



- (2) בכדור בעל רדיוס R חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- 2α . הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות R ו- α .





- (3) בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא α , והקו היוצר הוא ℓ , חסום כדור. הבע את נפח הכדור באמצעות α ו- ℓ .

- (4) חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוס בסיסו חסום בתוך כדור. שטח הפנים של הכדור הוא P . הבע את נפח החרוט באמצעות P .

- (5) בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו R . כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית β . הבע את נפח הפירמידה באמצעות R ו- β .

תשובות סופיות:

- (1) 75°
- (2) $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos \alpha$
- (3) $\frac{4}{3}\pi \ell^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \tan^3 \left(45 - \frac{\alpha}{4} \right)$
- (4) $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$
- (5) $\frac{4R^3}{3} \tan \beta \cot^3 \frac{\beta}{2}$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 9 - פרק מקדים - מבוא לפונקציות

תוכן העניינים

1. מהי פונקציה (ללא ספר)
2. מערכת הצירים (ללא ספר)
3. אורכי קטעים ושטחים יסודיים (ללא ספר)
4. השתנות של פונקציה (ללא ספר)
5. קצב השתנות של פונקציה (ללא ספר)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 10 - פרק מקדים - הפונקציה הקווית

תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר (ללא ספר)
2. שיפוע ישר (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית (ללא ספר)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 11 - פרק מקדים - הפונקציה הריבועית

תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית $y=x^2$ (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה $y=x^2+c$ (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2$ (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה $y=a(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות (ללא ספר)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 12 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 13 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

121	1. תחום הגדרה של פונקציה
123	2. הרכבת פונקציות
126	3. הפונקציה ההפוכה
130	4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית
135	5. פונקציה מחזורית

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

תשובות סופיות

(1) כל x .

(2) $x \neq \pm 2$

(3) כל x .

(4) $x \neq 0, 1, -1$

(5) $x \neq 2, -1$

(6) $x \geq 4$

(7) $x \leq -2, x \geq 1$

(8) כל x .

(9) $-1 < x < 1$

(10) $x < -2, x > 1$

(11) $x > 0, x \neq 1$

(12) כל x .

(13) $x > 0, x \neq 1$

(14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

(15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

(16) כל x .

(17) $3 < x < 5$

(18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו $f(f(x))$ עבור $x = 3$.

3) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x = 8$.

4) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

5) נתון: $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו $f(g(x))$ עבור $x = 2$.

6) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו $f(g(x))$, $g(f(x))$

7) נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

מצא את

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } -\sqrt{3} \leq x < 1 \quad \text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.

ג. אם f ו- g על, אז h על.

ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על. הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

- 16)** תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, ותהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h חח"ע. הוכיחו או הפריכו:
- א. g על.
 - ב. f על.
 - ג. g חח"ע.
 - ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה: $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = f(x^2), \quad k(x) = -f(x).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)| < 1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

(13) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

(14) הוכיחו כי :

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

(15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- נגדיר $z(x) = (f(x))^n$ כאשר $n > 1$ טבעי.
- קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

(16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי $f_{\text{odd}}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 + x + 1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$.
- ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

(18) הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה $f(x) = \cos x$ היא זוגית.
 ב. הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא אי-זוגית.
 ג. הפונקציה $f(x) = \tan x$ היא אי-זוגית.
 ד. הפונקציה $f(x) = \cot x$ היא אי-זוגית.

(19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

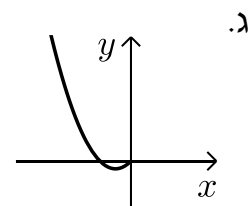
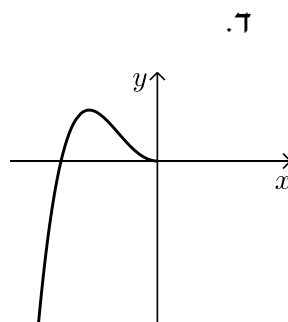
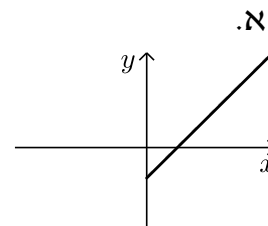
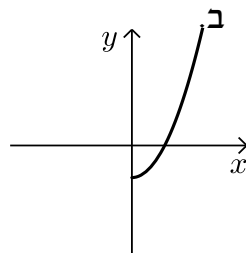
הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

(20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

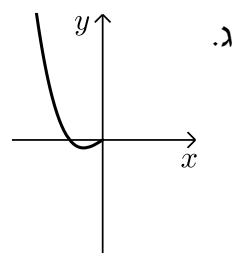
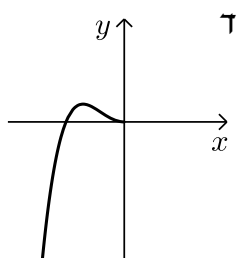
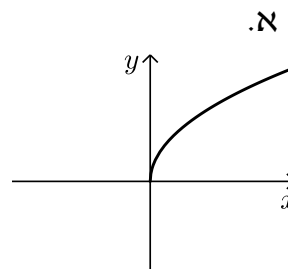
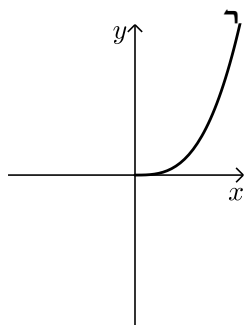
א. $y = \arctan x$

ב. $y = \arcsin x$

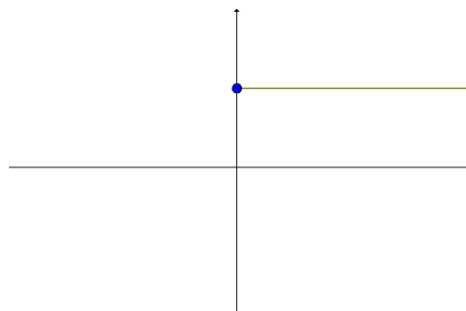
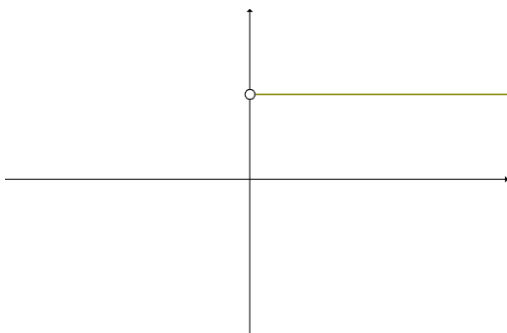
(21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



22 הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



23 השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) טענה ב'.

(11) k אי-זוגית, z זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

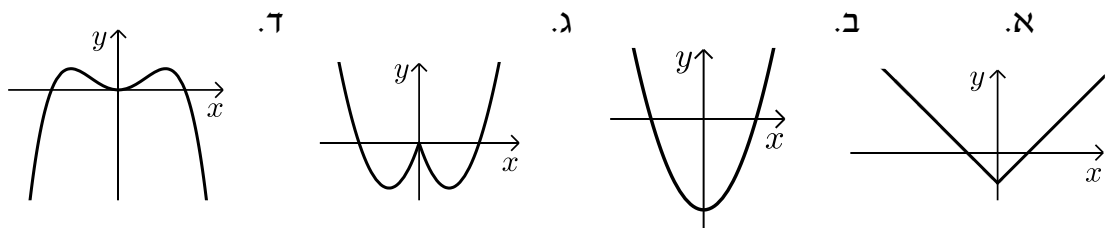
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

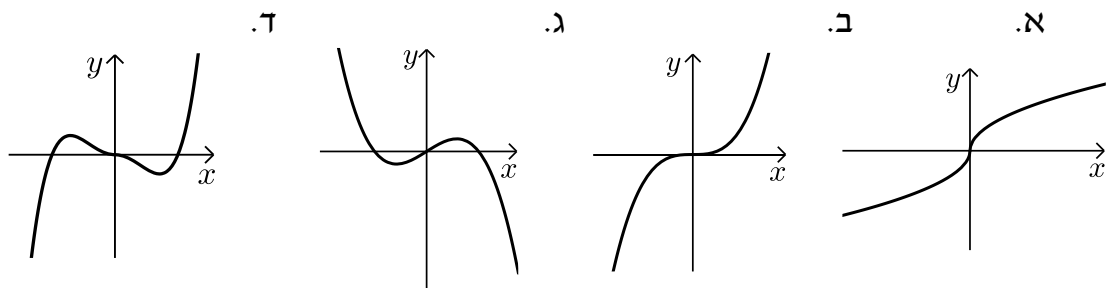
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2) \qquad y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4) \qquad y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6) \qquad y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8) \qquad y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10) \qquad y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12) \qquad y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14) \qquad y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16) \qquad y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18) \qquad y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20) \qquad y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23) \qquad y = x + \cos x \quad (22) \qquad y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26) \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (25) \qquad y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכיחו :

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p ,

אז $y = a + b \cdot f(cx + d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

(28) הוכיחו : אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x + nT) = f(x)$.

(29) נתון כי f, g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) הן מחזוריות.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x , שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב- $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

תשובות סופיות

- (1) 4π (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π (5) $\frac{\pi}{4}$
- (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) π (8) π (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) π
- (11) 40π (12) π (13) 2π (14) 2π (15) 2π
- (16) π (17) π (18) π

(19) הפונקציה היא למעשה $y = 1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

(20) $\frac{\pi}{2}$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

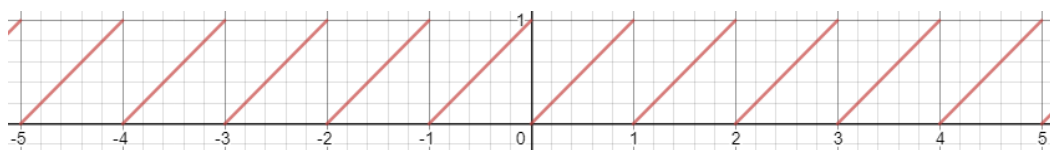
(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

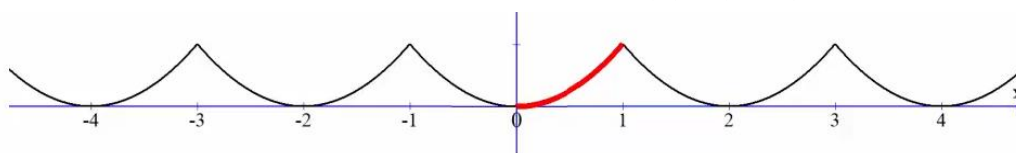
(30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

(31) $g(x) = x - k$, עבור k שלם, זוגי.

(32) $g(x) = (x - k)^2$, עבור k שלם, זוגי.



דרכי הוראת האנליזה

פרק 14 - הפונקציה הממשית - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	138
3. צמצום	139
4. הכפלה בצמוד	140
5. גבולות טריגונומטריים	141
6. פונקציה שואפת לאינסוף	144
7. איקס שואף לאינסוף	145

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x - 6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1
	$\frac{1}{4}$ (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13	$-\sin a$ (12	$\cos a$ (11	$-\frac{1}{2}$ (10	
1 (17	$\frac{2}{\pi}$ (16	$\frac{1}{2}$ (15	$\frac{4}{10}$ (14	$-\frac{1}{12}$ (18

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\
 \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\
 \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\
 \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\
 \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\
 \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}
 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

X שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5
$\frac{1}{4}$ (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	-3 (9
2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13
	0 (19	$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17
(20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.			
$-\frac{1}{2}$ (24	$\frac{1}{2}$ (23	$\frac{k}{2}$ (22	2.5 (21
$\frac{5}{4}$ (28	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27	$\frac{a-b}{2}$ (26	$\frac{1}{2}$ (25
			$\ln(6e)$ (29

דרכי הוראת האנליזה

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה 147

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = \sin 4x$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \ln x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44).$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$.
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$.

הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0) = 0$ ו- $f'(0) = k$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$.

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

א. אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f(x_0) = 0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(27) תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגדיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

(28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם f גזירה ב-0, אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(xy) = f(x) + f(y)$,

לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1) = 0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושכל $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

(30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

הוכיחו ש- f פונקציה ליניארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם f גזירה ב- x_0 , אז $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$, ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$.

(32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

(33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

(34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

(35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$.

(36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

(37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x) = (x-a)f(x)$. הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

(38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c) = 0$. הוכיחו:

א. אם $f'(c) = 0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c .

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c) = 0$.

(39) יהיו f, g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c) = g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x) - g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

(40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

תשובות סופיות

$$(1) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (2) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f'(x) = 4 \cos 4x$$

$$(4) \quad f'(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$$

$$(7) \quad 44! \quad (8) \quad 2 \quad (9) \quad 4$$

(10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

$$(11) \quad \text{א. } n > 1 \quad \text{ב. } n > 2$$

$$(12) \quad \text{א. } n > 1 \quad \text{ב. } n > 1$$

$$(13) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } e$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה. $f' = 0$

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$.

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1) = 0$.

$$(19) \quad \text{א. } f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2} n$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$ ג. $-5f'(x_0)$ (36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

דרכי הוראת האנליזה

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

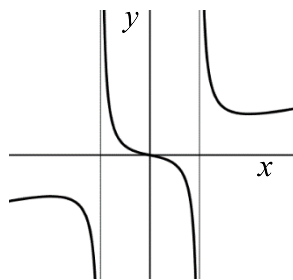
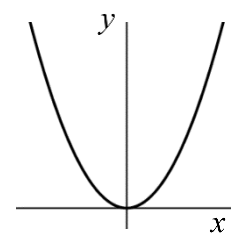
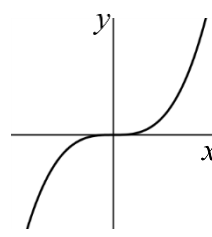
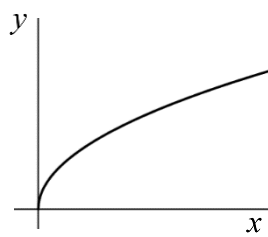
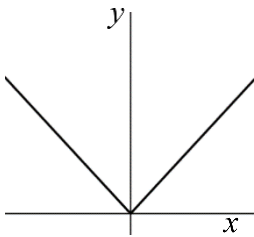
155	1. הקדמה כללית
156	2. גזירת פונקציות
162	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
163	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
166	5. שאלות עם פרמטרים
168	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$\text{טז. } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$\text{טו. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$$

$$\text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$$

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx$$

$$\text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$\text{ב. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10}$$

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ו. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$
- ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

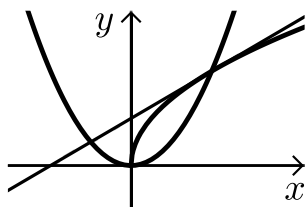
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

(17) $y = 24x + 22$

(18) $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

(19) $y = 6x - 24, y = -6x - 12$

(20) $y = 2x - 3$

(21) $y = -12x + 9$

(22) $(1, 3)$

(23) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

(24) $y = 22x - 56$

(25) א. $y = 3x - 1$ ב. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(26) $y = -2x + 8$

(27) $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

(28) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(29) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(30) א. $(1, 2)$ ב. $y = -1.5x + 3.5$ ג. $S = 4\frac{1}{12}$

(31) א. $(0, 0), (1, 1)$ ב. $y = 0.5x + 0.5$ ג. $(-0.5, 0.25)$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

(32) $a = 2, y = 8x - 18$

(33) $a = 2$

(34) $a = 4$

(35) $A = 1$

(36) $(-1, 5), y = 4x + 9$

(37) $a = 2, y = -4x - 2$

(38) $a = -\frac{1}{8}, c = 4$

(39) $b = 4, (4, 12)$

(40) $b = 2, a = 6, y = -6x + 12$

(41) $k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ או $k = 6 : (1, 1)$

(42) $(1, 1), k = 1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

(43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

(44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

(45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

(46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

(47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

(48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:

ב. $t = 0, -2$. (43) $y = 2tx - t^2 + 1$ א.

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

דרכי הוראת האנליזה

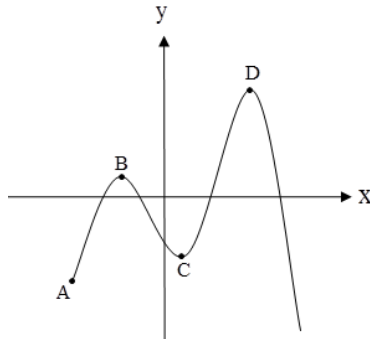
פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

170	1. נקודות קיצון של פונקציות
173	2. חקירת פונקציה פולינומית
177	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון.
 מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$.
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.
 מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$.

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$.

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$.

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$.

(5) $a = 3$.

(6) $a = -\frac{2}{3}$.

(7) $A = -1$, $B = 3$.

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$.

(9) $b = 6$, $a = -4$.

(10) $a = 2$, $b = -16$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

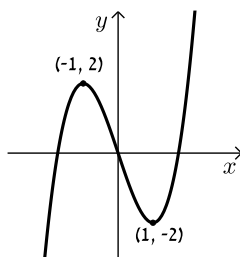
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



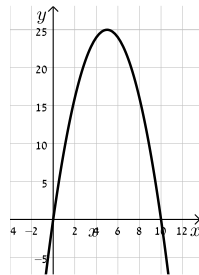
18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

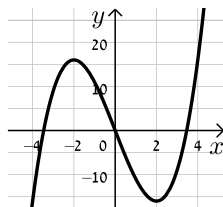
11) א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$

ד. $(0, 0)$, $(10, 0)$.



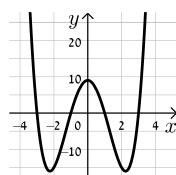
12) א. כל x ב. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$

ד. $(0, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$, $(-\sqrt{12}, 0)$.



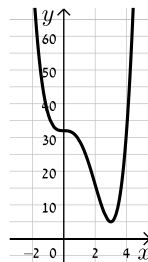
13) א. כל x ב. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$

ד. $(0, 9)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 3, 0)$.



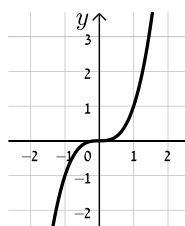
14) א. כל x ב. $\min(3, 5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$

ד. $(0, 32)$.



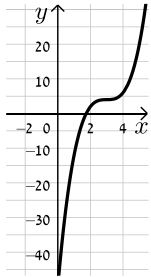
15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0, 0)$.



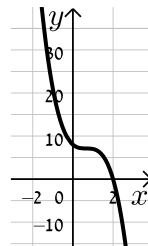
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

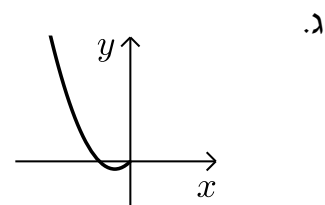
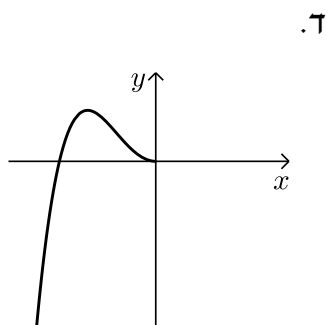
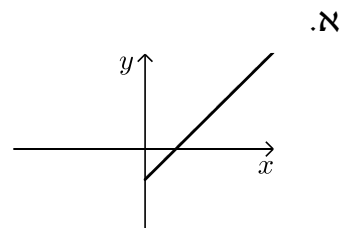
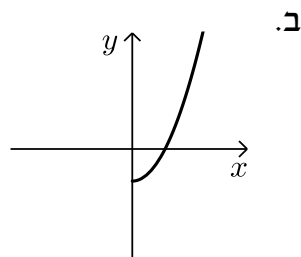
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

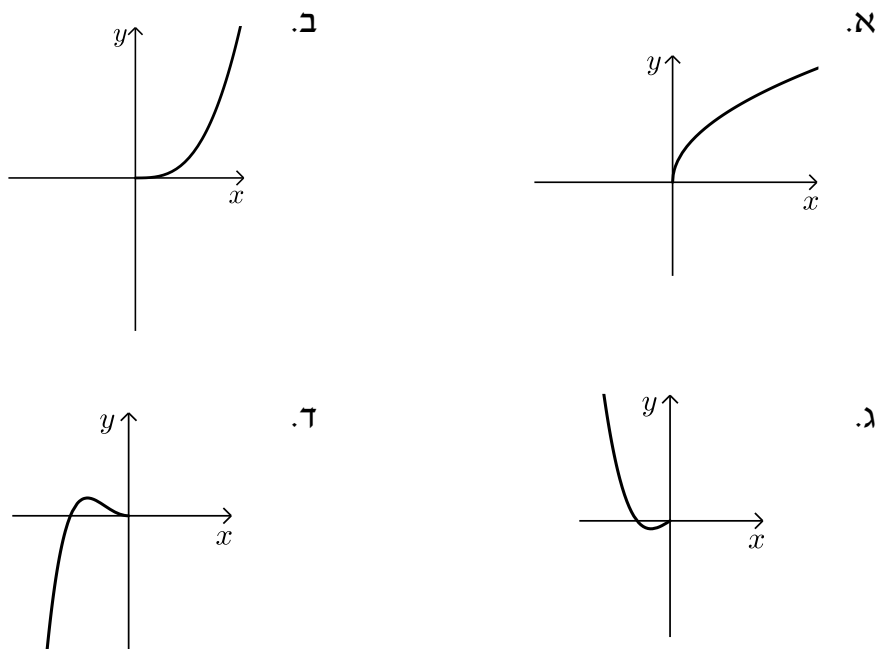
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.
- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, b פרמטר. ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

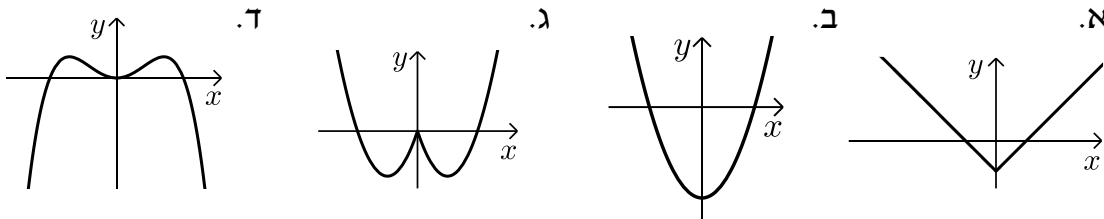
(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$.

- חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

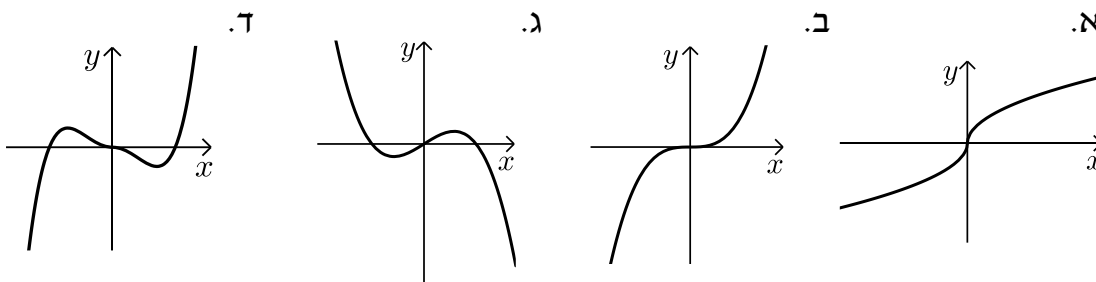
תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

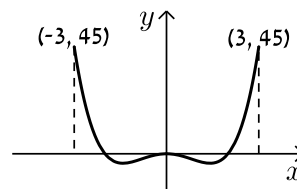
(2) להלן הגרפים:



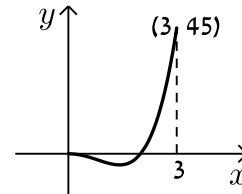
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$.iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה. $\max(0,0)$ קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

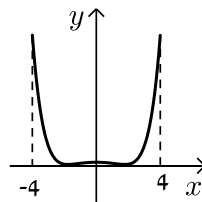


סרטוט עבור חלק v:

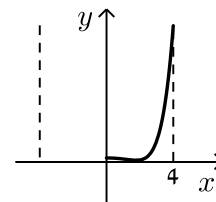
(5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



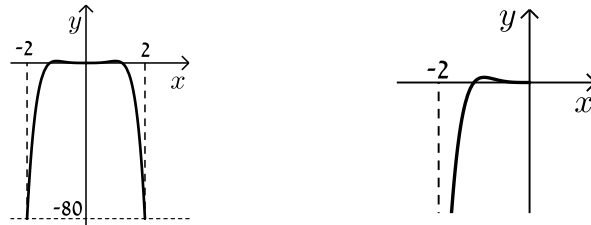
סרטוט עבור סעיף א:



6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(-1.225, 0)$, $(0, 0)$, $\min(-2, -80)$ קצה, $\max(-1, 1)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה,

עולה: $-1 < x < -2$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:

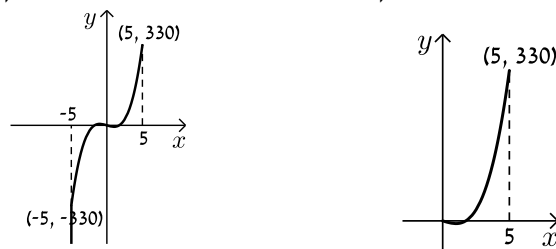


7) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$,

נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$ קצה, $\max(0, 0)$ קצה,

עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.

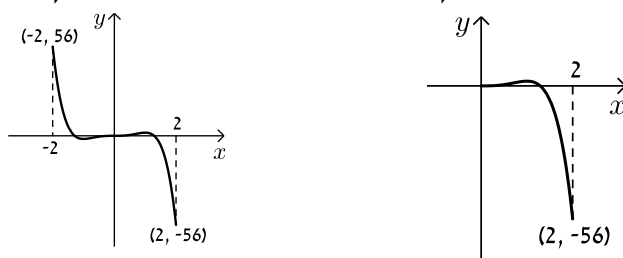
סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א. $b=0$ ב. $0 \leq x \leq 2$ ii. $(0, 0)$, $(1.29, 0)$ iii. $\min(2, -56)$ קצה,

$\max(1, 2)$ קצה. iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$.

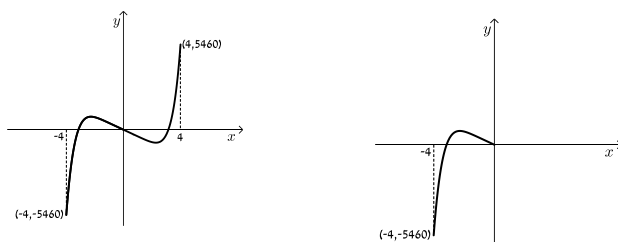
ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א. $-4 \leq x \leq 0$ ii. $(-1, 0)$, $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ קצה, $\max(-0.723, 0.207)$ קצה,

$\min(-4, -5460)$ קצה. iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$.

ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



דרכי הוראת האנליזה

פרק 18 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

183	1. מציאת תחום הגדרה
185	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
186	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
191	4. חקירת פונקצית מנה
200	5. חקירת פונקצית שורש
208	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
214	7. חקירת פונקציה עם פרמטר
217	8. פונקציות ללא תבנית מפורשת

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
 ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq -2, 4$ ט. כל x י. כל x יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$
 ו. $x \leq -2, x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$ ט. $x \leq -1.5, x \geq 1$
 י. $-3 < x < 0, x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$ יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$
 יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

ב. עולה: $-3 < x < 3$, $x \neq 1$, יורדת: $3 < x \neq 9$, $x < -3$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או: $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$
- הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
 - אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 - אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$
- הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה $(-1, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

$$(4) \quad x = 2, y = 3$$

$$(5) \quad x = \pm 3, y = 5$$

$$(6) \quad y = \frac{2}{3}$$

$$(7) \quad x = -3, x = 5, y = 0$$

$$(8) \quad \text{אין.}$$

$$(9) \quad x = b, y = a$$

$$(10) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (2, 4), x = 1, y = 1$$

$$(11) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (0, 0), x = 2, y = \frac{1}{2}$$

$$(12) \quad x = 2, y = 0$$

$$(13) \quad x = 4$$

$$(14) \quad x = 1, y = -1$$

$$(15) \quad x = 1, y = 2$$

$$(16) \quad y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$$

$$(17) \quad x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$$

$$(18) \quad b = -3, a = 2$$

$$(19) \quad b = 1, a = 2$$

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, $(a$ קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.

- מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

(31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x-2}$, $(a \text{ פרמטר})$.

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

(34) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, A (פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A, A)$.

- מצא את ערך הפרמטר A .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - נתון הישר: $y = k$.
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3, 0.5)$.

- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

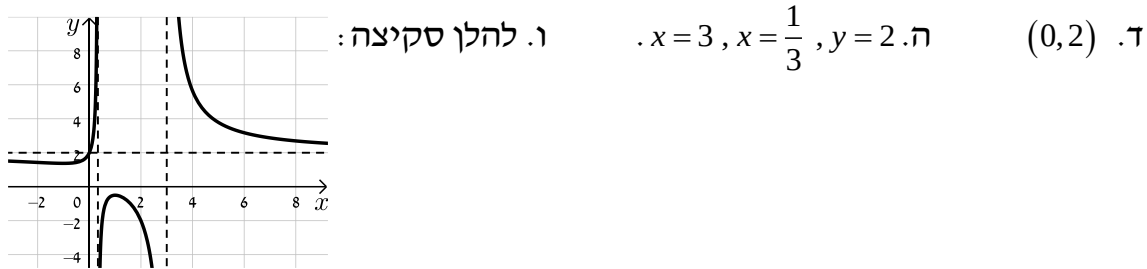
(36) ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .
- הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

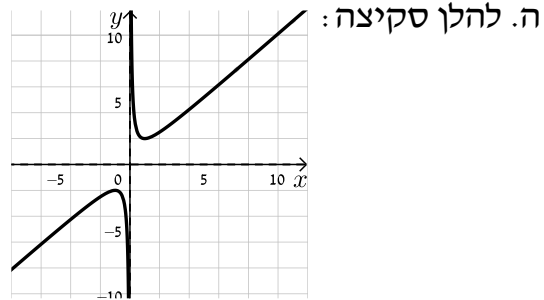
(20) א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$.



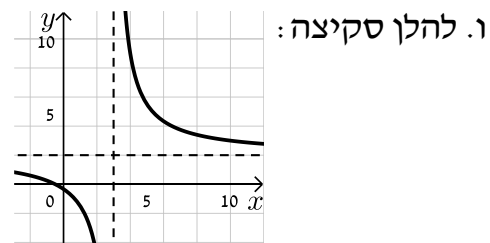
(21) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

ג. עולה: $x > 1$ או $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. אין



(22) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.

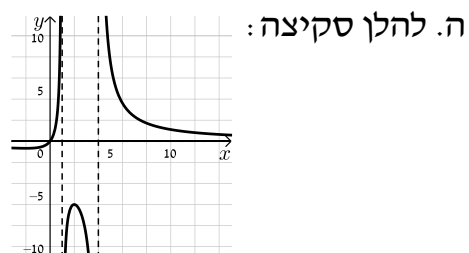
ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$



(23) א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2, x \neq 1$, תחומי ירידה: $x < -2$ או $x > 2, x \neq 4$

ד. $(0, 0)$ (אסימפטוטות: $x = 1, x = 4, y = 0$).

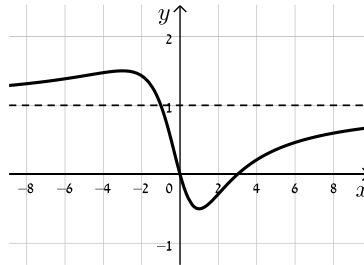


(24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x > 1$ או $x < -3$, יורדת: $-3 < x < 1$

ד. $(0,0), (3,0)$ (אסימפטוטה: $y = 1$).

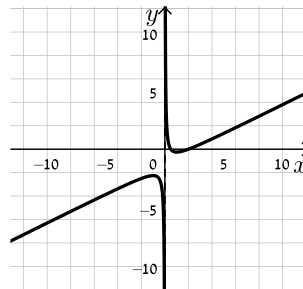
ה. להלן סקיצה:



(25) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה: $x > 1, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5, 0), (2, 0)$ ה. $x = 0$

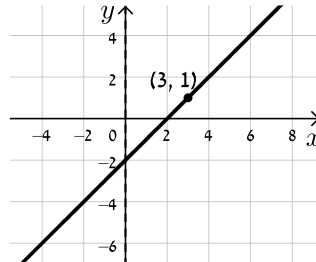
ו. להלן סקיצה:



(26) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3, 1)$.

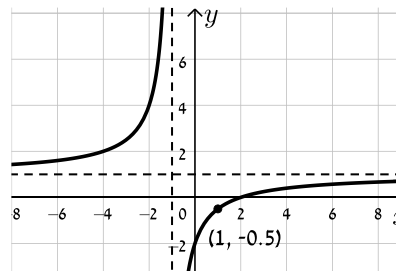
ו. להלן סקיצה:



(27) א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. $x = -1, y = 1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

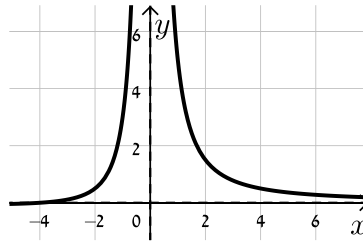
ו. להלן סקיצה:



28) א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$, $a=1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8$, $x > 0$

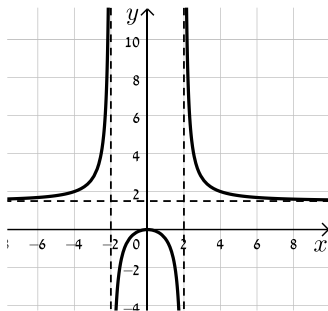
ג. $(-4, 0)$ ד. $x=0$, $y=0$

ה. להלן סקיצה:



29) א. $x \neq \pm 2$ ב. $\max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0$, $x \neq 2$ עולה: $x < 0$, $x \neq -2$

ד. $(0, 0)$ ה. $x = \pm 2$, $y = 1.5$ ו. להלן סקיצה:



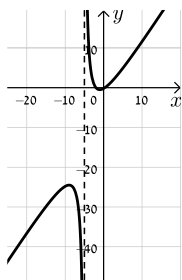
30) א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0)$, $(0, 4)$

ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$. נקודת החיתוך: $(1, 0)$.

31) א. $x \neq -5$ ב. $\min(-1, -0.5)$, $\max(-9, -24.5)$

ג. עולה: $x > -1$, $x < -9$ יורדת: $-9 < x < -1$, $x \neq -5$

ד. $(-2, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(0, -0.2)$ ה. $x = -5$ ו. להלן סקיצה:



32) א. $x \neq 1$ ב. $x=1$, $y=1$ ג. $(a, 0)$, $(0, a)$ ד. i. $a > 1$ ii. $a=2$

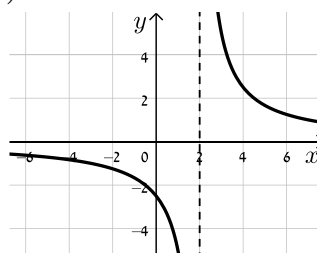
33) א. $a = -3$ ב. i. $x \neq 2$ ii. $(0, -3)$ iii. $\max(0, -3)$, $\min(4, 5)$

iv. $x=2$ ג. $x < 2$ ד. $-3 < k < 5$

34) א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$

ו. לא

ה. להלן סקיצה:



35 א. $a = 3$, $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, כל x .

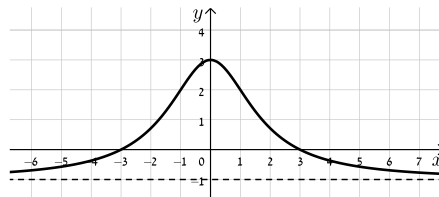
ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\max(-2, 8)$

ד. $(2, 0)$, $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$, $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו. $k = 8$, $-\frac{1}{3}$, 3

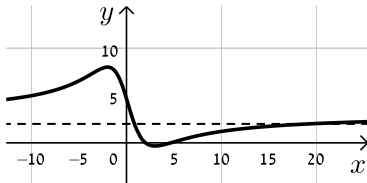
36 ב. $k = -3$ ג. $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ד. $y = -1$

ו. להלן סקיצה:



ג. עולה: $x > 3$, $x < -2$, יורדת: $-2 < x < 3$

ה. להלן סקיצה:



ה. באף נקודה.

חקירת פונקצית שורש:

שאלות:

(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(38) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(39) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(40) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(41) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(43) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.
- מצא את ערך הפרמטר a .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.
- מצא את k .
 - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?
אם כן מצא אותה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

(48) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
- ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A . ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$ יח"ש. מצא את ערך הפרמטר k .

(49) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
 - i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.
 - ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 - iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.
 - iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה: היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

(50) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$.

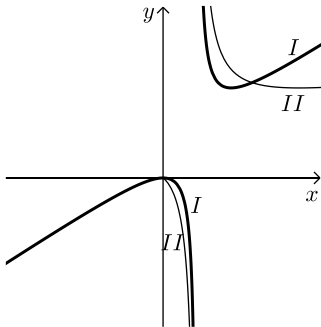
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.



(51) לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$. ($k > 0$).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

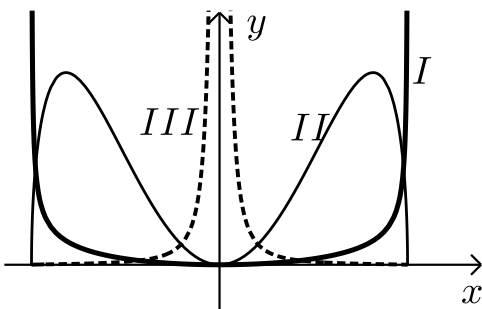
ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.

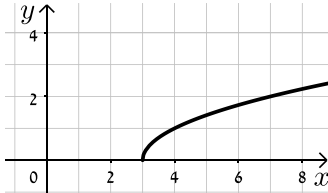
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

(37) א. $x \geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

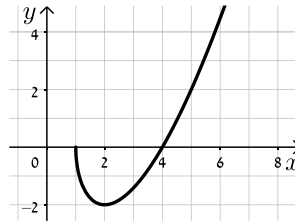
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



(38) א. $x \geq 1$ ב. $\max(1,0)$, $\min(2,-2)$ קצה

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1,0), (4,0)$ ה. אין.

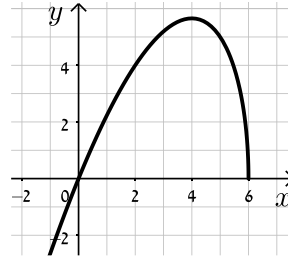
ו. להלן סקיצה:



(39) א. $x \leq 6$ ב. $\min(6,0)$, $\max(4,4\sqrt{2})$ קצה

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0), (0,0)$

ה. להלן סקיצה:



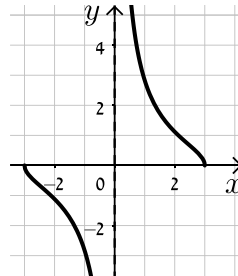
(40) א. $x \geq 0$ ב. $\min(0,0)$, $\max(1,1)$ קצה

ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $y = 0$.

ו. להלן סקיצה:

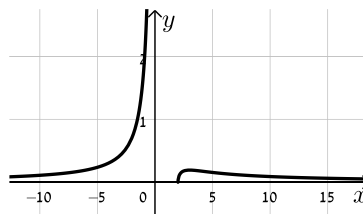


- (41) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3, 0)$ קצה, $\min(3, 0)$ קצה ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0), (3, 0)$

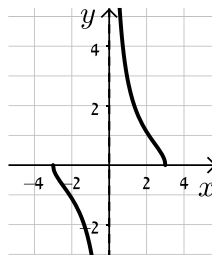


ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

- (42) א. $x < 0$, $x \geq 2$ ב. $\min(2, 0)$, $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ ג. $(2, 0)$ ד. להלן סקיצה:



- (43) א. $(2, 0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$
- (44) א. $x \neq 1$, $x \geq 0$ ב. $(9, 6)$ ג. $y = 6$
- (45) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3, 0)$ קצה, $\min(3, 0)$ קצה ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0), (3, 0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

- (46) א. $a=1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$ ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$

- (47) א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$

- (48) א. i. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ ii. $x = \pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$

- ג. $y = \sqrt{k}x$ ד. $k=4$

$$(49) \text{ א. } g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ג. } f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$\text{ב. } h(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

iii. נכון

(50) א. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ד. } I = h(x), II = f(x)$$

$$\text{ג. לא, } h(x) : x \neq 1$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

(51) א. i. לא נכון

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } I = g(x), II = f(x), III = h(x)$$

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

(56) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, a, b פרמטרים.

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

(57) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(58) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$\text{א. } f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$$

הערה: בסעיפים ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

(52) $(1,7), (2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה: $1 < x < 2$.

(53) $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x > 2$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 2$.

(54) קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

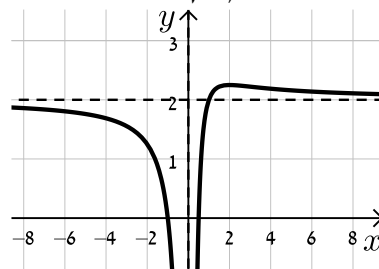
(55) קיצון: $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(1,-1), (2,0)$.

(56) $a = 4, b = 3$.

(57) א. $x \neq 0$ ב. $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x > 2, x < 0$

ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$ ה. $x = 0, y = 2$ ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 3$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 3$.

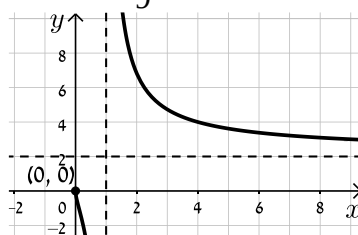


ח. להלן סקיצה:

(58) א. $x > 0, 1 \neq x$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x = 1, y = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$ ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9} < x < 1$.



ח. להלן סקיצה:

(59) א. i. $x \neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x = 0, y = 0$ iv. $\max(2, 0.25)$

v. עולה: $0 < x < 2$, יורדת: $x < 0, x > 2$ vi. $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

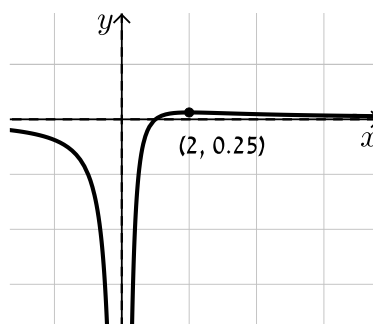
vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 3$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 3, x < 0$.

ב. i. $x \neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x = -1, y = 2$ iv. $\min(0,0)$

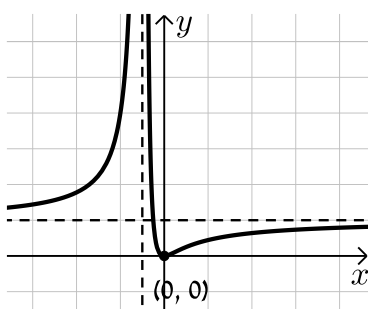
- v. עולה: $x < -1$, $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$
- vi. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-1 < x < \frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$, $x > \frac{1}{2}$
- ג. i. $x \neq \pm 2$ ii. $(0, 0)$ iii. $x = \pm 2$
- iv. $\min(\sqrt{12}, 5.2)$, $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$, יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $-2 < x < -\sqrt{12}$
- vi. $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 2$, $-2 < x < 0$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 2$, $x < -2$
- ד. i. $x \neq -1$ ii. $(0, 0)$ iii. $x = -1$ iv. $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה: $x > -1$, $x < -3$, יורדת: $-3 < x < -1$
- vi. $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 0$, $x < -1$
- ה. i. $x \neq 1$ ii. $(-1, 0), (0, -1)$ iii. $x = 1, y = 1$ iv. אין.
- v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-3 < x < -1$, $x > 1$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 1$, $x < -3$
- ו. i. $x \neq 2, 5$ ii. $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$ iii. $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv. $\min(0.359, -0.11)$, $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה: $2 < x < 2.78$, $0.359 < x < 2$, יורדת: $x > 5$, $2.78 < x < 5$, $x < 0.359$
- ז. i. $x \neq \pm 2$ ii. $(3, 0), (1, 0), (0, -0.75)$ iii. $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.
- ח. i. $x \neq \pm 1$ ii. $(0, 0)$ iii. $x = -1$ iv. $\min(0, 0)$, $\max(-2, -4)$
- v. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$, יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$
- vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:

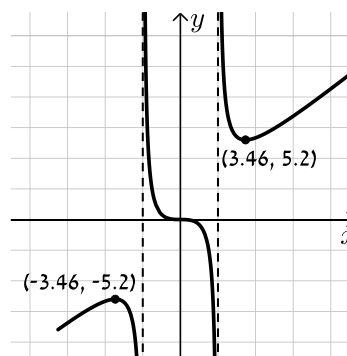
א.



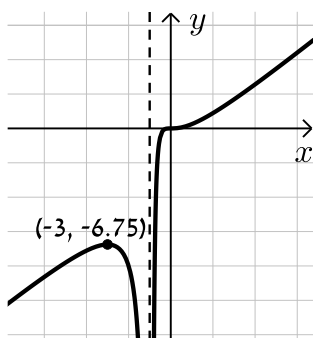
ב.



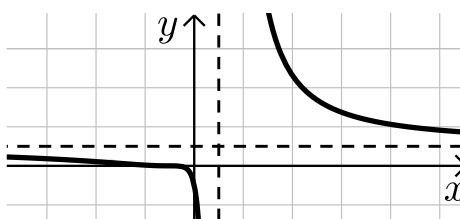
ג.



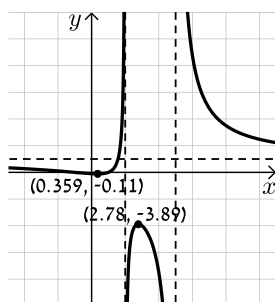
ד.



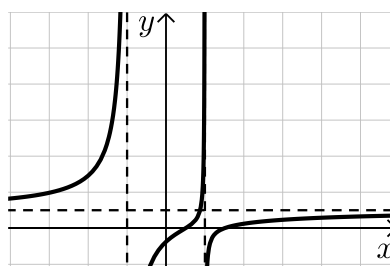
ה.



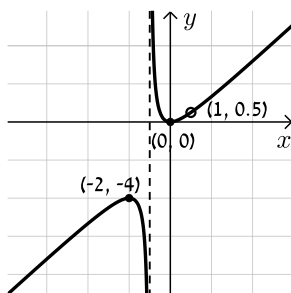
ו.



ז.



ח.



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות y'' :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$ פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$, $(a > 0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b > 1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$, $(b > 0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ה. נתון הישר: $y = k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

(1) $\min(2, -16), \max(-2, 16)$

(2) $\min(3, -25)$

(3) $\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה: $-a < x < a$ יורדת: $x < -a, x > a$

ד. $(0, 0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

(5) א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. עולה: $x > b, x < \frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$

ד. $\left(0, \frac{1}{b^2}\right), (-1, 0), (1, 0)$ ה. $x = b, y = -1$

(6) א. $-b \leq x \leq b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right), \max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right), \min(-b, 0)$ קצה,

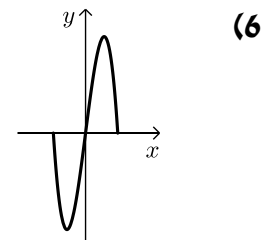
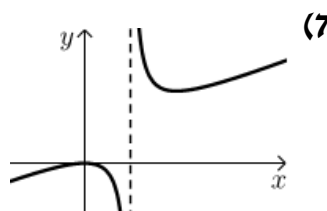
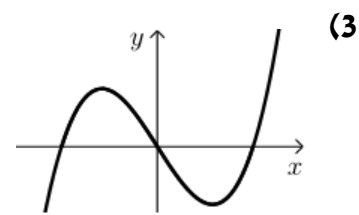
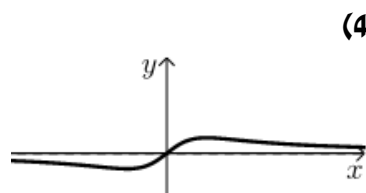
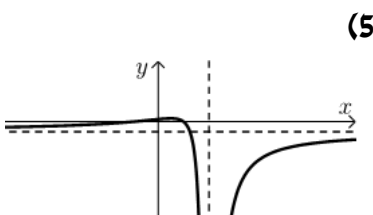
ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$ יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b, -b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד. $(b, 0), (-b, 0), (0, 0)$

(7) א. $m = 0$ ב. i. $x \neq \frac{4}{a}$ ii. $\max(0, 0), \min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ב. iii. $x = \frac{4}{a}$ ד. $a = 2$ ה. $0 < k < 4$

סקיצות לשאלות:



פונקציות ללא תבנית מפורשת:

סיכום כללי:

הגדרת פונקציה:

פונקציה f היא התאמה בין ערך x לערך y ומסומנת באופן הבא: $f: x \rightarrow y$.
 כך שלכל x מתאים ערך אחד בלבד של y . סימון אחר: $y = f(x)$.
 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת: $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה: $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

1) הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1) = 3$ ו- $f'(1) = -2$.
 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- $f(1) + 4$
- $f'(1) + 4$
- $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$
- $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

2) נתונה פונקציה f המקיימת: $f(4) = 0$ ו- $f'(4) = 1$.
 מגדירים: $g(x) = 2x + f(2x)$.
 חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

(3) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -1$ ו- $f'(8) = 1$.

א. נתון: $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$. חשב את $h(6)$.

(4) נתונה פונקציה המקיימת: $f(9) = -4$, $f'(9) = 3$.

מגדירים: $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

(5) פונקציה f מקיימת: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$.

מגדירים: $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

(6) פונקציה f מקיימת: $f(1) = -3$, $f'(1) = 3$. מגדירים: $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

(7) פונקציה f מקיימת: $f(-2) = 6$, $f'(-2) = 2$. מגדירים: $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

(8) פונקציה f מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x) = 3x \cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

(9) פונקציה f מקיימת: $f(6) = \frac{2}{3}$, $f'(6) = -\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x) = \frac{x+3 + f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

10 נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -3$. מגדירים: $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = 1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = (f'(8))^2$ וכי $f'(8) < 0$.

11 נתונה פונקציה המקיימת: $f(3) = -2$.

מגדירים: $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5) = -15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

12 נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4) = \frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f^2(x^2)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות f .

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4) = 1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2) = 11$ ו- $f''(4) = \frac{1}{4}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.
- (2) $g(2)=4, g'(2)=4$
- (3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$
- (4) $g(3)=19$
- (5) $g(4)=10, g'(4)=6$
- (6) $g(1)=1.5, g'(1)=3$
- (7) $g(-2)=\sqrt{37}, g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$
- (8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}, g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$
- (9) $g(3)=1\frac{9}{11}, g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$
- (10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$
- (11) $g(5)=25, f'(3)=-2$
- (12) א. $g'(x)=2x f(x^2)+2x^3 f'(x^2)+4x f'(x^2) f''(x^2)$
- ב. $g(2)=3, g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$

דרכי הוראת האנליזה

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

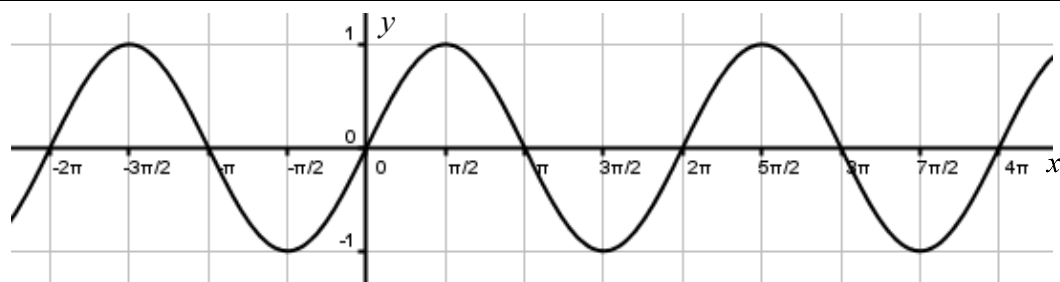
תוכן העניינים

221	1. הגדרות כלליות
223	2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות
225	3. שאלות עם משיקים
227	4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות
228	5. מציאת נקודות קיצון
229	6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
230	7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות
231	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית

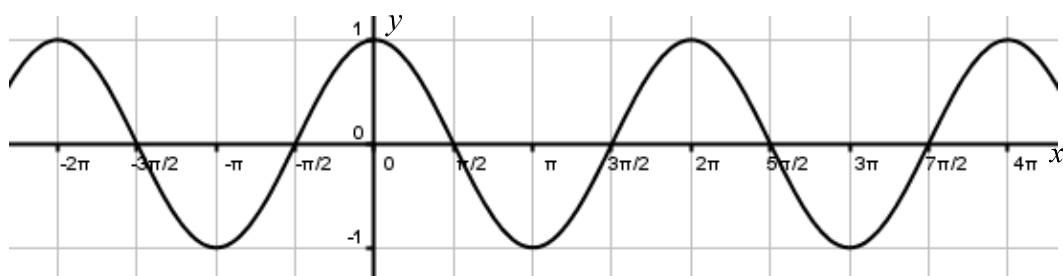
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

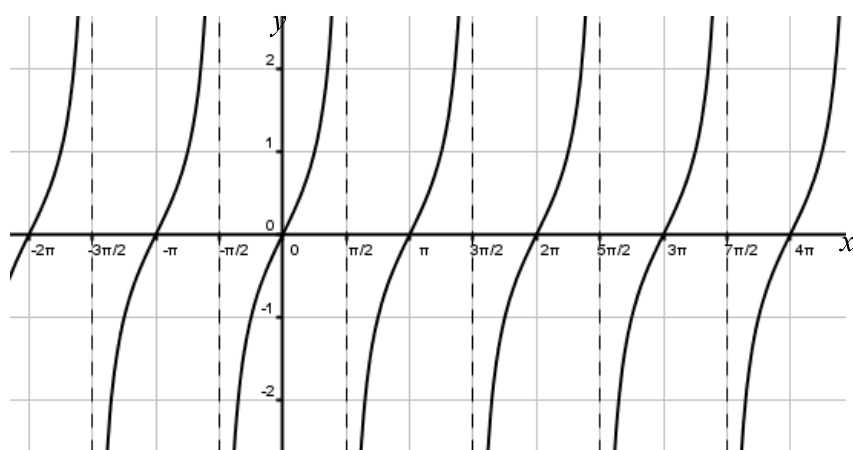
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס : $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס : $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס : $y = \tan x$



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

(1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T) = f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

(2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.

גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin x + 3\cos x + x$

ג. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

ב. $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$

ב. $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^3 x$

ג. $f(x) = \sin^2 x$

ה. $f(x) = \cos^2 2x$

ב. $f(x) = 2 \cos^4 x$

ד. $f(x) = \sin^3 2x$

ו. $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ג. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

ב. $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \cos x - 3\sin x + 1 \quad \text{ב. } 2\sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \text{ג. } \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$(2) \quad \text{א. } 3\cos 3x - 10\sin 5x \quad \text{ב. } -\frac{2}{1 + \sin 2x}$$

$$(3) \quad \text{א. } 3\sin^2 x \cdot \cos x \quad \text{ב. } -8\cos^3 x \sin x \quad \text{ג. } \sin 2x$$

$$\text{ד. } 6\sin^2 2x \cos 2x \quad \text{ה. } -2\sin 4x \quad \text{ו. } \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} \quad \text{ב. } \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2\sin 2x \quad \text{ב. } 4\sin 4x \quad \text{ג. } -\sin 4x$$

שאלות עם משיקים:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

(10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, a (פרמטר) בנקודה שבה $y = 1$

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

מצא את ערך הפרמטר a .

(11) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sin^2 x - 5\sin x + ax$, a (פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

(12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$, $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.

ג. ישר $x = t$, $(0 < t < 1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים

לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע

המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.

מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

תשובות סופיות:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

$$y = -2x + \pi \quad (7)$$

$$y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (8)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2. \text{ א. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ג. לא. } y = 2x - 3. \text{ ד. } \quad (11)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ג. } t = \frac{\pi}{12}. \quad (12)$$

מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

ב. $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$, $[-\pi, \pi]$

א. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$, $[0, 2\pi]$

ג. $f(x) = \tan x$, $[0, 2\pi]$

תשובות סופיות:

ב. $-\pi \leq x \leq \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

13) א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

מציאת נקודות קיצון:

שאלות:

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

16 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$ בתחום: $[0, 1.5\pi]$.

18 לפונקציה: $f(x) = a\sin x + b\sin^3 x$ (פרמטרים) יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

14 $\max(2\pi, 1)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ קצה, $\min(0, 1)$ קצה.

15 $\max(2\pi, -\pi)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה.

16 $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ מוחלט, $\min(2\pi, -1)$ קצה, $(0, -1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ מוחלט.

17 $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$

18 $b = -4$, $a = 3$

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi, \pi]$.

תשובות סופיות:

(19) $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$

(20) $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$

(21) $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

(22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

תשובות סופיות:

(22) נקודות פיתול: $\left(\frac{7}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$, קעור מטה: $0 < x < \frac{7}{6}\pi$.

חקירת פונקציה טריגונומטרית:

שאלות:

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0, \pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x .
- מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, m פרמטר.

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- מצא את ערך הפרמטר m .
- האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(28) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(3.67) = 0$, $f'(-3.67) = 0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

(34) נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, k פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$, (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו: $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

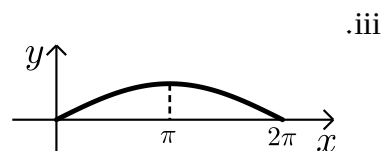
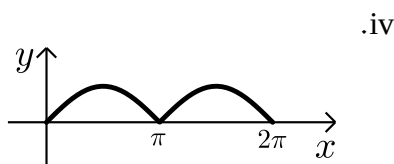
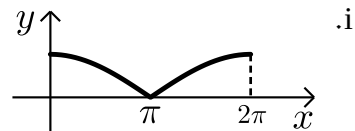
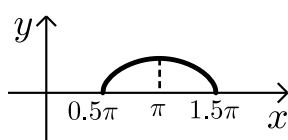
(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$, (k פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- ב. מצא את ערך הפרמטר k , ($k \neq 0$).
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
 - ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
 - ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
 - ד. לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv.
- קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

(23) א. $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(24) א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

(25) א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right), (0, -2)$.

ב. $\max(\pi, -2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0, -2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \neq -2$. ה. $\frac{\pi}{2}$.

(26) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.

ב. $\max(2\pi, -2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi, 0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0, -2)$.

ג. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

(27) א. $m = 2$. ב. נקודת פיתול. ג. 2 נקודות.

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

(28) א. $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. ב. $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0, 1)$.

ד. 2 פתרונות.

(29) א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה.

$$(30) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. } \min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right) \text{ קצה}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו. } (0,0)$$

$$\text{ז. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ או } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(31) \text{ א. } (0,0), (\pm 0.23\pi, 0) \quad \text{ב. } x = \pm 0.25\pi \quad \text{ג. } \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$$

$$(32) \text{ א. } 0 \leq x \leq 4 \text{ וגם } x \neq 0.44, x \neq 3.56$$

$$\text{ב. } \max(0,0), \min(2, -1.16), \max(4,0) \text{ קצה.}$$

$$(33) \text{ א. } (0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$$

$$\text{ב. ii. } \max(2\pi,0), \min(-2\pi,0), (0,0) \text{ פיתול.}$$

$$(34) \text{ א. } y = (\cos x + 0.5)^2, k = 0.5 \quad \text{ב. } (\pi, 0.25) \quad \text{ג. לא.}$$

$$(35) \text{ א. } m = 6, k = \sqrt{7} \quad \text{ב. } (-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6) \quad \text{ג. בשתי נקודות.}$$

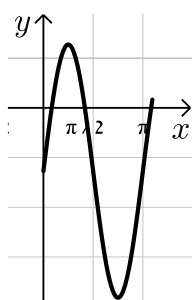
$$(36) \text{ א. } x = 0.5\pi \quad \text{ב. } k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$$

$$\text{ג. } \max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4)$$

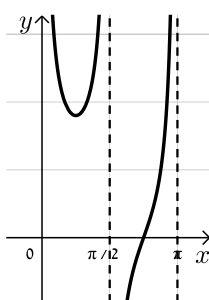
$$(37) \text{ א. כן. } f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0), g(x): (\pi, 0) \quad \text{ב. כן, } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{ג. } \max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1) \quad \text{ד. איור I - } g(x), \text{ איור II - } f(x)$$

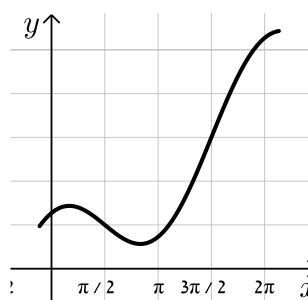
סקיצות לשאלות החקירה:



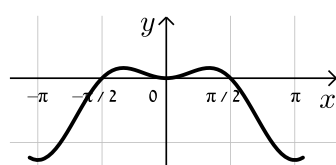
(25)



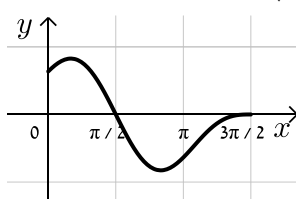
(24)



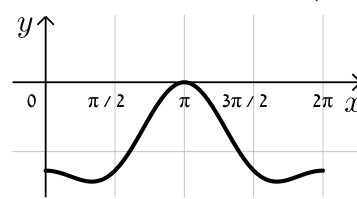
(23)



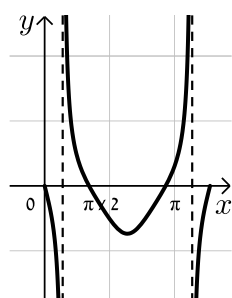
(29)



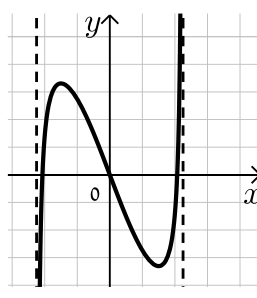
(28)



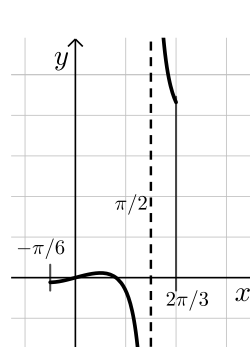
(26)



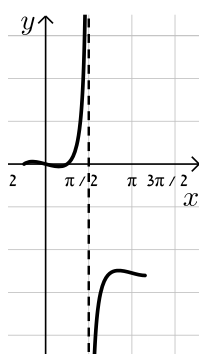
(32)



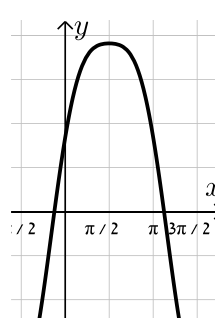
(31)



(30)



(36)



(35)

דרכי הוראת האנליזה

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)