

# קטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה



## תוכן העניינים

|     |                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------|
| 1   | 1. טריגונומטריה במשולש ישר זווית                    |
| 6   | 2. זהויות טריגונומטריות                             |
| 27  | 3. משוואות טריגונומטריות                            |
| 48  | 4. טריגונומטריה במישור                              |
| 81  | 5. חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה               |
| 87  | 6. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות  |
| 105 | 7. חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות     |
| 140 | 8. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות |

# דידקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

פרק 1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

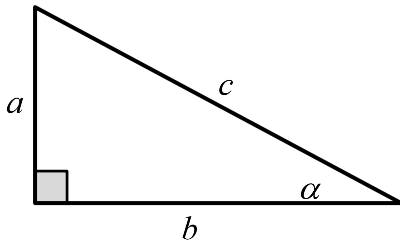
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 1

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

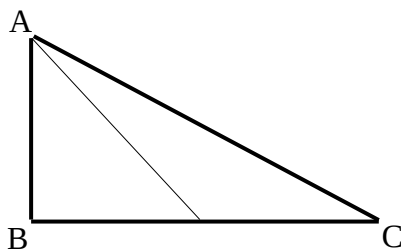
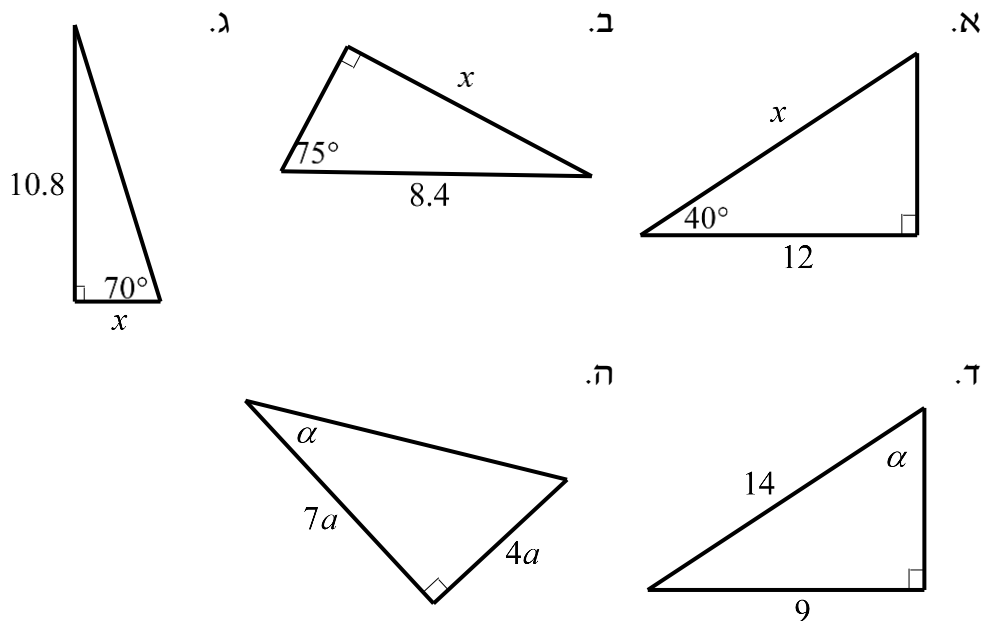
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $x$  /  $\alpha$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



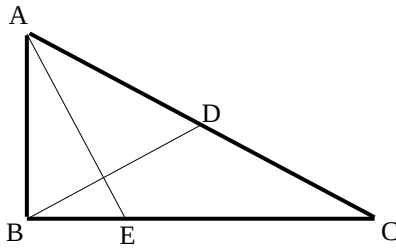
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

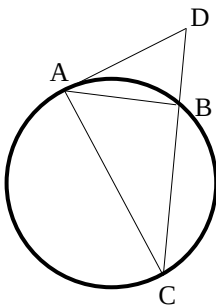
נתון:  $\angle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\angle BAD$ .



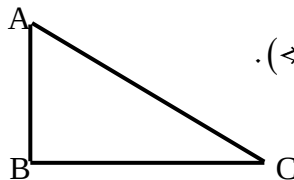
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר AC והוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BD = 5.6$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויתיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

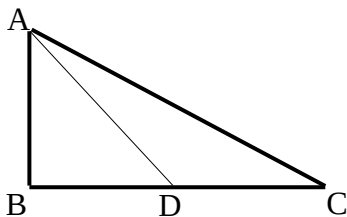


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

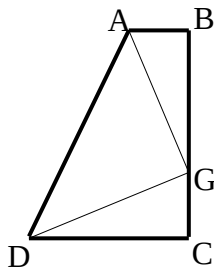


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש.

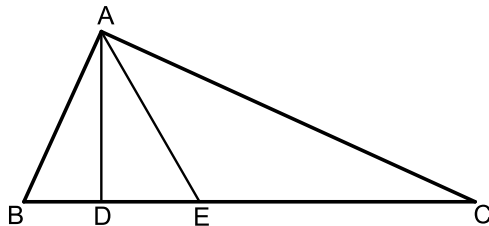


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $b$  ו- $\alpha$  את אורכי הקטעים BD ו-AD.

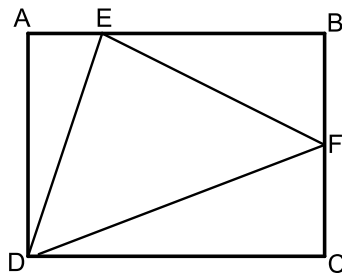
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה זווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש-  $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $m$  את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו-  $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו-  $k = 2$ .

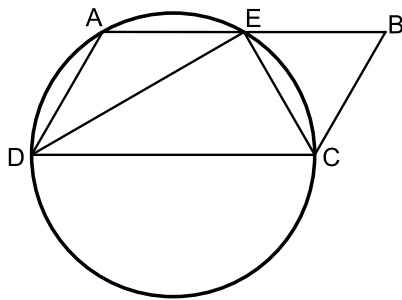


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש-  $AE = BE$  ו-  $3AE = BE$ . מקיימת:  $AE = BE$  ו-  $3AE = BE$ . אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.  
א. סמן ב-  $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

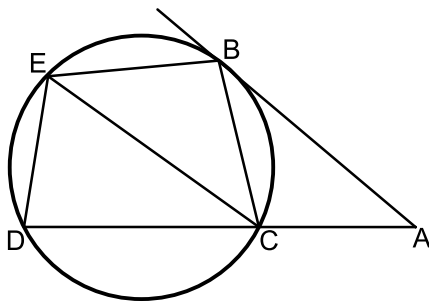
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $k$  את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E,  $(AE = BE)$ . נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
- ב. רדיוס המעגל יסומן ב-R.
- הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
- ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
- ב. הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
- ג. נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# דיקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

## פרק 2 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

|    |                                                    |    |
|----|----------------------------------------------------|----|
| 1. | זהויות יסוד.                                       | 6  |
| 2. | ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות. | 10 |
| 3. | מעגל היחידה.                                       | 12 |
| 4. | סכום והפרש זוויות.                                 | 15 |
| 5. | זווית כפולה.                                       | 19 |
| 6. | סכום והפרש פונקציות.                               | 22 |
| 7. | מכפלת פונקציות.                                    | 25 |

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  | קשרים בין פונקציות           |

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 & \text{(2)} & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha & \text{(1)} \\
 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha & \text{(4)} & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha & \text{(3)} \\
 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 & \text{(6)} & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 & \text{(5)} \\
 \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 & \text{(8)} & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha & \text{(7)} \\
 \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha & \text{(10)} & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha & \text{(9)} \\
 \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 & \text{(12)} & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha & \text{(11)} \\
 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha & \text{(14)} & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha & \text{(13)} \\
 \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha & \text{(16)} & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha & \text{(15)}
 \end{array}$$

## הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad \text{נתון כי:}$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{נתון כי:}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

### תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm \sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

### סיכום כללי:

| $\alpha = 90^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$  | $\alpha = 45^\circ$  | $\alpha = 30^\circ$  | $\alpha = 0^\circ$ |               |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|---------------|
| 1                   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0                  | $\sin \alpha$ |
| 0                   | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1                  | $\cos \alpha$ |
| $\phi$              | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0                  | $\tan \alpha$ |
| 0                   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\phi$             | $\cot \alpha$ |

### הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

### שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

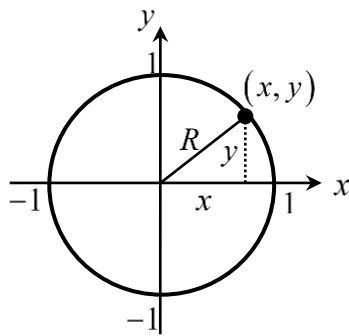
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע   | סינוס                                     | קוסינוס                                   | טנגנס                                     |
|--------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| II     | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ |
| III    | $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$  |
| VI     | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$            | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$             | $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$            |
| סימנים |                                           |                                           |                                           |

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

### שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.  
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| א. $\sin 120^\circ$ | ב. $\cos 150^\circ$ |
| ג. $\tan 160^\circ$ | ד. $\cot 130^\circ$ |
| ה. $\sin 215^\circ$ | ו. $\cos 245^\circ$ |
| ז. $\tan 230^\circ$ | ח. $\cot 200^\circ$ |
| ט. $\sin 300^\circ$ | י. $\cos 310^\circ$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

|                     |                      |                        |
|---------------------|----------------------|------------------------|
| א. $\sin 150^\circ$ | ב. $\cos 210^\circ$  | ג. $\tan 120^\circ$    |
| ד. $\sin 330^\circ$ | ה. $\tan 225^\circ$  | ו. $\sin 315^\circ$    |
| ז. $\cos 120^\circ$ | ח. $\tan(-30^\circ)$ | ט. $\cos(-45^\circ)$   |
| י. $\sin 510^\circ$ | יא. $\cos 930^\circ$ | יב. $\tan(-225^\circ)$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

- א.  $(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2$   
 ב.  $8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$   
 ג.  $\frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$

(4) הוכח כי אם  $\alpha, \beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

- א.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$   
 ב.  $\sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{י. } \frac{1}{2} \quad \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{יב. } -1$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

|                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$    | ב. $\sin 15^\circ$  | ג. $\sin 105^\circ$   |
| ד. $\sin(-15^\circ)$  | ה. $\cos 75^\circ$  | ו. $\cos 15^\circ$    |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

$$\text{א. } \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\text{ב. } \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ד. } \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

(4) נתון:  $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

$$\text{א. } \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. } \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{ג. } \tan(\alpha + \beta)$$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ 

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(11) הוכח כי מתקיים :  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$

(12) הוכח כי מתקיים :  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$

(13) נתון כי :  $\sin 76^\circ = m$  . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$  .

(14) הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי :  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$  ו-  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$

הראה כי מתקיים :  $\alpha + \beta = 60^\circ$  .

(15) היעזר בנוסחה :  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$

אם ידוע כי :  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$  . הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א.  $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$   
 ב.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$   
 ג.  $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$   
 ד.  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$   
 ה.  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$   
 ו.  $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$   
 ז.  $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$   
 ח.  $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$ .

ב.  $\cos \alpha$ .

ג.  $\sin 2\alpha$ .

ד.  $\cos 2\alpha$ .

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו-  $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו-  $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$ .

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$ .

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$ .

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$ .

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$ .

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$ .

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$ .

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

$$(7) \quad .0.44$$

$$(8) \quad \cos 4\alpha$$

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

$$(10) \quad .1$$

$$(11) \quad -1.25$$

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה :  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה :  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה :  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} : \text{ הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \text{ במחשבון אם ידוע כי}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ : \text{ הראה כי}$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) 1.

(18)  $\frac{1}{8}$ .(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$

(2) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$

(3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$

(4) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$

(5) הוכח את הזהות הבאה:  $2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$

(6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$

(7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$

(8) הוכח את הזהות הבאה:  $2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$

(9) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

**תשובות סופיות:**

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

# דידקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

## פרק 3 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

|    |                                                         |
|----|---------------------------------------------------------|
| 27 | 1. משוואות טריגונומטריות כלליות                         |
| 30 | 2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית                    |
| 32 | 3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד                   |
| 34 | 4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה         |
| 35 | 5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס                |
| 36 | 6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות   |
| 37 | 7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה         |
| 38 | 8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$           |
| 39 | 9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות |
| 41 | 10. משוואות עם תחום נתון                                |
| 42 | 11. משוואות עם זוויות ברדיאנים                          |
| 46 | 12. אי שוויונים טריגונומטריים                           |

## משוואות טריגונומטריות כלליות:

### סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות  
כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה                | הפתרון                                                                  |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$                                    |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$                                              |

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$   
 ג.  $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$     ד.  $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א.  $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א.  $x = 30^\circ + 180^\circ k$     ב.  $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א.  $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$   
 ב.  $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$     ג.  $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$     ב.  $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$   
 ג.  $x = -9^\circ + 36^\circ k$     ד.  $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$   
 ה.  $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$     ו.  $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א.  $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$   
 ב.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$     ג.  $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א.  $x_1 = 180^\circ k$ ,  $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$     ב.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$   
 ג.  $x = 60^\circ + 180^\circ k$     ד.  $x = 90^\circ k$   
 ה.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$     ו.  $x = 20^\circ + 60^\circ k$   
 ז.  $x = 180^\circ k$     ח.  $x = 90^\circ + 360^\circ k$     ט.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$   
 י.  $x = 90^\circ + 180^\circ k$     יא.  $x = 360^\circ k$     יב.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$   
 יג.  $x = 180^\circ k$     יד.  $x = 45^\circ + 180^\circ k$

## משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

### סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

### טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

## תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

|                                                                                    |                                                                                                |                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$         | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות           |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$<br>$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$<br>$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$             | זוויות משלימות ל- $90^\circ$ |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$                                      | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                                                  | קשרים בין פונקציות           |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2) \qquad \sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4) \qquad \cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6) \qquad \sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8) \qquad \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$\text{(1)} \quad x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{(2)} \quad x = 22.5^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{(3)} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(4)} \quad x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(5)} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(6)} \quad x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{(7)} \quad x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$$

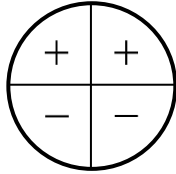
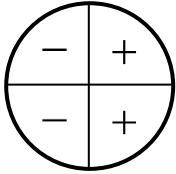
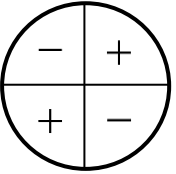
$$\text{(8)} \quad x = 180^\circ k$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

| רביע           | סינוס                                                                                 | קוסינוס                                                                                                                 | טנגנס                                                                                                                   |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I<br>II<br>III | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$<br>$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$<br>$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$<br>$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ |
| סימנים         |  |                                      |                                      |

### זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}, \quad \begin{array}{|l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}$$

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

## משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

### סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה:  $\sin x = a \cos x$  לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$  (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$ ). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

### הערה:

יש לבדוק האם ערכי  $x$  שמקיימים  $\cos x = 0$  מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

## משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

|                                                                                                                                                                                       |                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$                             | סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס |
| $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$ | סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

|                                                                                          |                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$                                                | סינוס זווית כפולה   |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ | קוסינוס זווית כפולה |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- |                                     |                              |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1)   |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4)       | $4 \cos x = \sin 2x$ (3)     |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6)            | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8)      | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7)   |

### תשובות סופיות:

- |                                                                                                                                 |                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2)                                                                  | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4)                                                                | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3)                      |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6)                                                           | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5)       |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7)                                            |                                                       |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) |                                                       |

## משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

### סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה:  $a \sin x + b \cos x = c$  לצורה:  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ .

מציאת זווית  $\alpha$  המקיימת:  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  תאפשר לכתוב:  $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ .

שימוש בזהות:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  וזהות:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן:  $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$  נקבל את המשוואה:  $\sin(x + \alpha) = k$  כאשר  $\alpha$  ו- $k$  ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

|                                                                                                                                                                                        |                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  | סכום והפרש פונקציות<br>עבור סינוס   |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | סכום והפרש פונקציות<br>עבור קוסינוס |

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

### תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

## משוואות עם תחום נתון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

### שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $8\sin x - 4 = 0$
- (2)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3)  $[-90^\circ:90^\circ]$ ,  $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4)  $[0^\circ:360^\circ]$ ,  $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5)  $[-30^\circ:30^\circ]$ ,  $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6)  $[0^\circ:180^\circ]$ ,  $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8)  $[-180^\circ:180^\circ]$ ,  $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

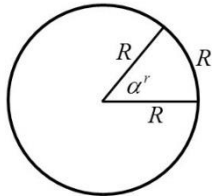
### תשובות סופיות:

- (1)  $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2)  $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3)  $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4)  $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5)  $x = 22.733^\circ$
- (6)  $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7)  $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8)  $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

## משוואות עם זוויות ברדיאנים:

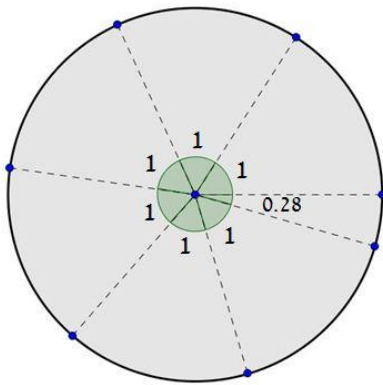
### סיכום כללי:

#### הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

#### קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

#### פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה                | הפתרון                                                  |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$                         |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$                                    |

כאשר  $k$  מספר שלם.

## שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

|                |                |                 |                  |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. $30^\circ$  | ב. $90^\circ$  | ג. $75^\circ$   | ד. $120^\circ$   |
| ה. $210^\circ$ | ו. $315^\circ$ | ז. $18^\circ$   | ח. $285^\circ$   |
| ט. $-15^\circ$ | י. $-80^\circ$ | יא. $510^\circ$ | יב. $-390^\circ$ |

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

|                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. $\pi$              | ב. $2\pi$             | ג. $4\pi$             | ד. $1.5\pi$           |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$   | ו. $\frac{\pi}{4}$    | ז. $\frac{\pi}{6}$    | ח. $\frac{1}{18}\pi$  |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

|                                                                                      |                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| א. $2\sin 3x = 1$ , $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$                                | ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$ , $[0 : \pi]$                                                              |
| ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$ , $[0 : 2\pi]$                                        | ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0 : \pi]$                            |
| ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ , $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$ | ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$ |
| ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$ , $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$                   | ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$         |

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

|                                                                                    |                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ , $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$                     | ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$          |
| ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$ , $[0 : \pi]$                                              | ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$ |
| ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$ | ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ , $[-\pi : \pi]$                                 |
| ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ , $[-\pi : 0]$                             | ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$ , $[0 : 2\pi]$                                   |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א.  $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א.  $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א.  $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{\pi}{6}$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג.  $\frac{5\pi}{12}$  ד.  $\frac{2\pi}{3}$  ה.  $\frac{7\pi}{6}$   
ו.  $\frac{7\pi}{4}$  ז.  $\frac{\pi}{10}$  ח.  $\frac{19\pi}{12}$  ט.  $-\frac{\pi}{12}$  י.  $-\frac{4\pi}{9}$   
יא.  $\frac{17\pi}{6}$  יב.  $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א.  $180^\circ$  ב.  $360^\circ$  ג.  $720^\circ$  ד.  $270^\circ$  ה.  $90^\circ$   
ו.  $45^\circ$  ז.  $30^\circ$  ח.  $10^\circ$  ט.  $130^\circ$  י.  $285^\circ$   
יא.  $210^\circ$  יב.  $405^\circ$
- (3) א.  $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$  ב.  $x = \frac{5\pi}{6}$  ג.  $x = \frac{\pi}{2}$  ד.  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
ה.  $x = 0$  ו.  $x = \frac{2\pi}{9}$  ז.  $x = 0.0875\pi$  ח.  $x = 0.224\pi$   
א.  $x = \frac{\pi}{3}$  ב.  $\phi$  ג.  $x = 0.398\pi, 0.602\pi$  ד.  $\phi$   
ה.  $x = 0, 0.437\pi$  ו.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$   
ז.  $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$  ח.  $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$   
א.  $x = \frac{\pi}{8}$  ב.  $x = 0, 0.42\pi, \pi$  ג.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$   
א.  $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$  ב.  $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$   
ג.  $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$  ד.  $x = \pm \frac{\pi}{3}, 0$   
א.  $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$  ב.  $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$   
ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3}$  ד.  $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

## אי שוויונים טריגונומטריים:

### סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
  2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
  3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
    - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
    - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
  4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

### הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- |                                                             |                                                                     |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $[0, 1.5\pi] \quad 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ (2)           | $[0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2}$ (1)                     |
| $[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ (4)         | $(-90^\circ, 90^\circ) \quad 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$ (3)         |
| $(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$ (6)    | $[0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ (5) |
| $(-\pi < x < \pi) \quad  \tan(x)  > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (8) | $[0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0$ (7)                           |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

# דידקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

פרק 4 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 48
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 56
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 65
4. שאלות מסכמות ..... 69

## שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

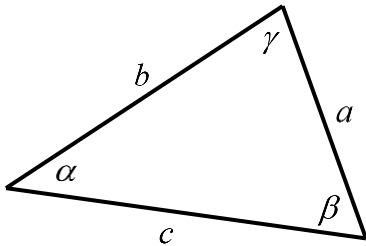
### סיכום כללי:

#### משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:



#### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

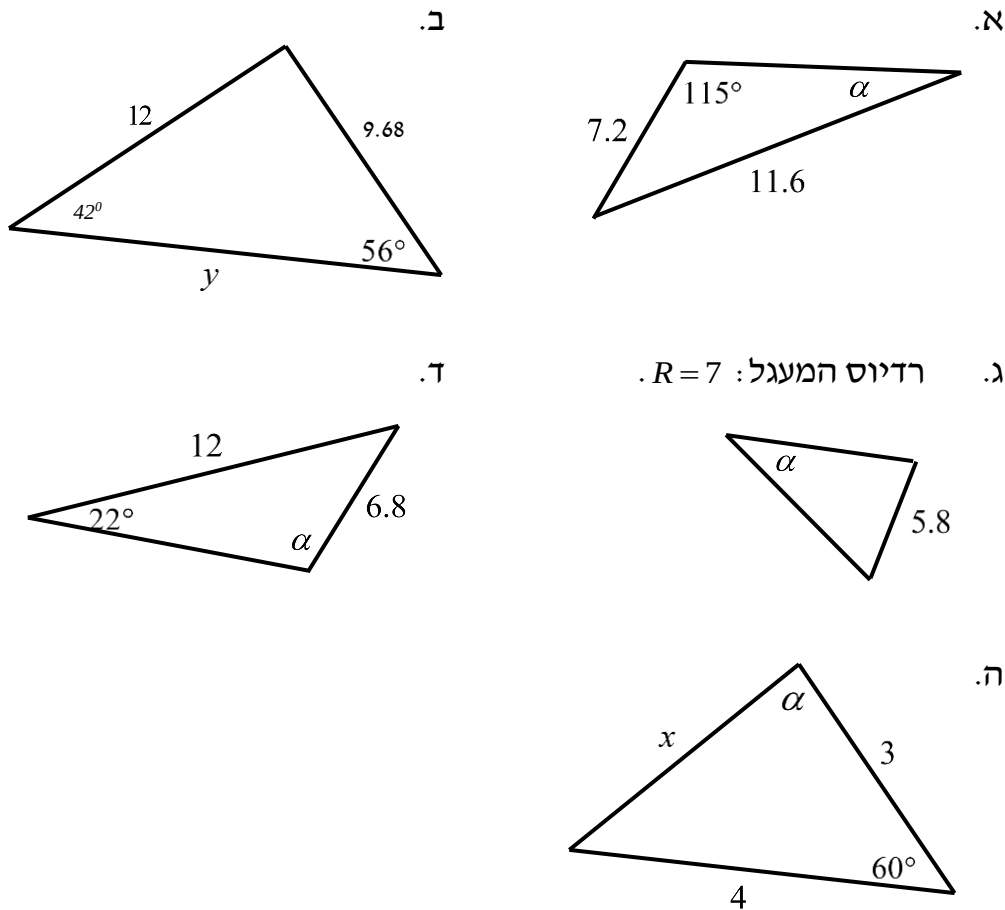
בקוסינוס הזווית שבניהן:

#### מתי נשתמש בכל משפט:

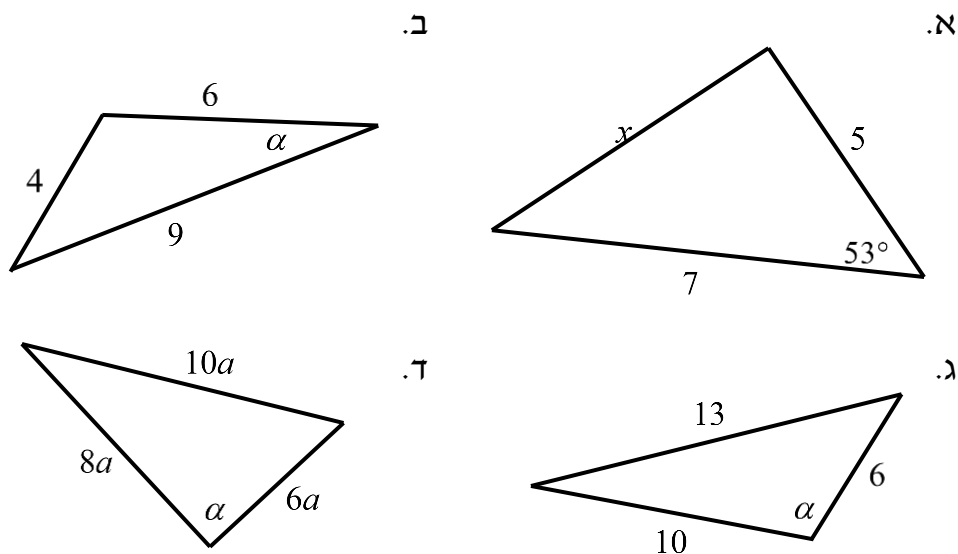
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי זוויות וצלע.
  - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

## שאלות:

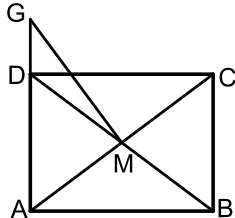
(1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים  
 (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



(2 מצא את ערכו של  $a/x$  במשולשים הבאים:

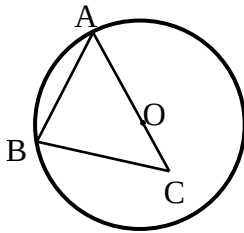


- (3) נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .  $CD$  הוא חוצה זווית הבסיס  $C$ . מצא את אורכו של הקטע  $AD$ .



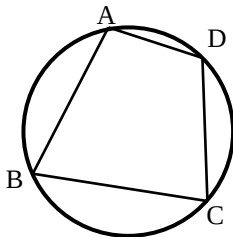
- (4) אלכסוני המלבן  $ABCD$  נפגשים בנקודה  $M$ . הנקודה  $G$  נמצאת על המשך הצלע  $AD$ . נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ. מצא את גודלו של הקטע  $GM$ .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

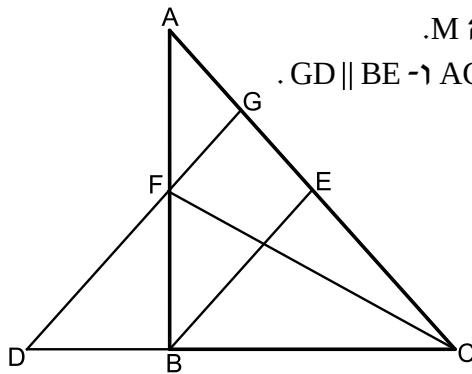


- (6) הצלע  $AB$  במשולש  $ABC$  היא מיתר במעגל שמרכזו  $O$ . הצלע  $AC$  עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע  $AB$ .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע  $ABCD$  חסום במעגל. נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ, ו- $AD = 4$  ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון  $AC$  ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

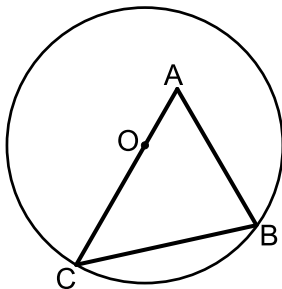
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים:  $AC = DC$  ו- $GD \parallel BE$ .

א. הוכח:  $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$ .

ב. נתון כי:  $ME = 4$  ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי:  $\angle ACD = 48.189^\circ$ . הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

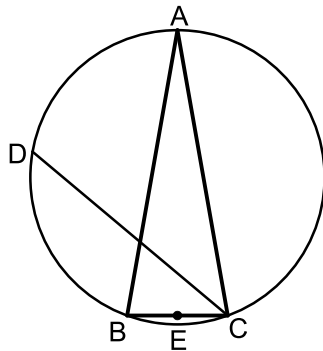
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא  $60^\circ$ .



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.

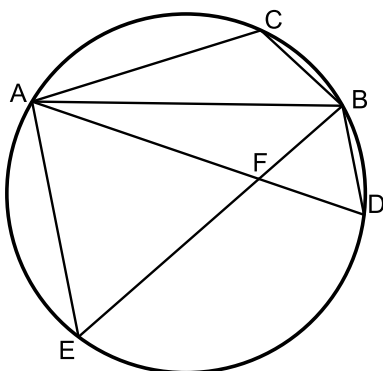
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$ . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא  $80^\circ$ .



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב.  $r$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את  $r$ .

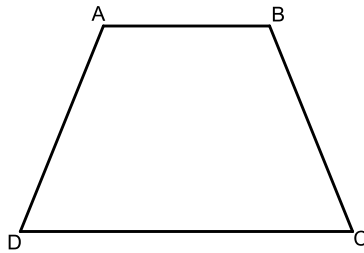
12)  $AB$ ,  $AC$  ו- $AD$  הם מיתרים במעגל המקיימים:  $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ . מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים BE ו-AE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי:  $AC = AF = EF$ .



א. הוכח:  $\triangle ABF \cong \triangle ABC$ .

ב. נתון גם:  $3 \cdot \angle CAB = \angle DAE$ . הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ( $AB \parallel CD, AD = BC$ ).

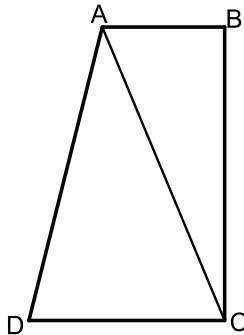


מידות הטרפז הן:

$$AB = 6 \text{ ס"מ}, BC = 8 \text{ ס"מ}, CD = 12 \text{ ס"מ}.$$

- מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$ ).

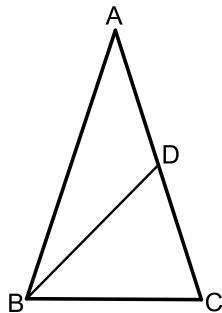


מסמנים את הבסיס:  $AB = t$  וידוע כי:  $AD = 3t, DC = 1.6t$ .  
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

- הבע באמצעות  $t$  את אורך האלכסון AC.
- ידוע גם כי:  $\angle D = 60^\circ$ .
- חשב את אורך הקטע AC.
- חשב את שטח הטרפז.

**15** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) בעל זווית

ראש  $36^\circ$  החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



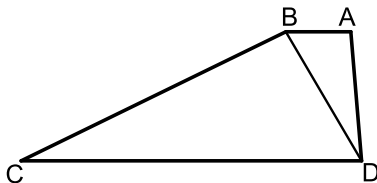
- מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
- חשב את אורך התיכון BD.
- מסמנים:

$r_1$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$  - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ \text{ הוכח את היחס הבא:}$$

**16** המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).



מעבירים את האלכסון BD המקיים:  $\angle BCD = \angle ADB$ .

נתון כי:  $AB = 5 \text{ ס"מ}, AD = 10 \text{ ס"מ}, CD = 20 \text{ ס"מ}$ .

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

- הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
- חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17 באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי:  $\angle D = 90^\circ$ .

נסמן את הצלעות באופן הבא:  $AB = 6x$ ,  $BC = 5x$ ,  $CD = 8x$ ,  $AD = 3x$ .

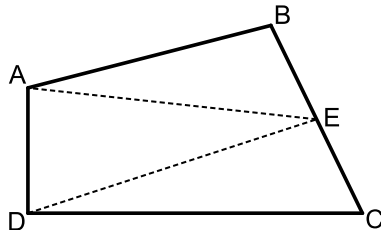
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא:  $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$ .



18 מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$ .

המשולש COD הוא ישר זווית  $\angle CDO = 90^\circ$ .

נתונים האורכים:  $BO = 9$ ,  $DO = 10$ .

מסמנים:  $BC = 1.4m$ ,  $CD = 1.5m$ .

א. הבע באמצעות  $m$  את  $\sin \alpha$ .

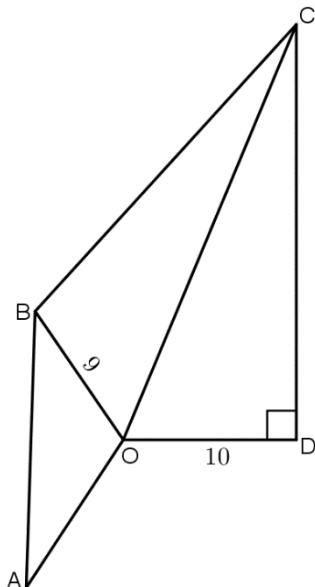
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי:  $AB = m$ .

מצא את  $m$  אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא  $8\frac{2}{3}$ .

ג. חשב את זווית BOC.



19 במשולש ABC הזווית A היא בת  $60^\circ$ .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית:  $\angle ADB = 60^\circ$ .

ידוע כי  $AB = \sqrt{28}$  וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

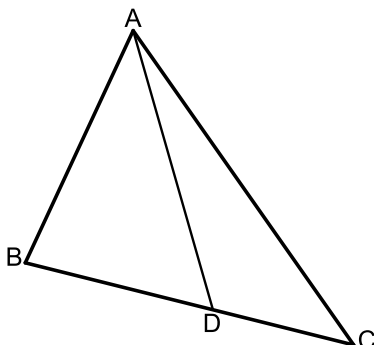
ב. היקף המשולש ABC הוא:  $P = 5\sqrt{7} + 7$ .

i. סמן:  $DC = t$  והבע באמצעות  $t$

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את  $t$ .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E, C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

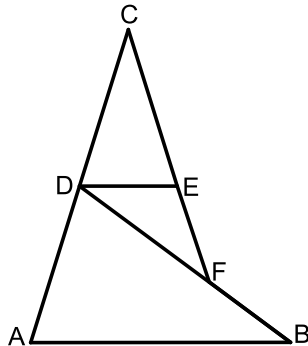
שווי שוקיים ( $AB = BD$ ,  $DC = CE$ ,  $EF = DE$ ).

נתון כי:  $AD = 8$ .

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

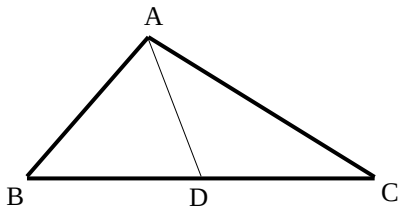
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון:  $AB = 6$  ס"מ,  $AC = 8$  ס"מ,

$AD = 5$  ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



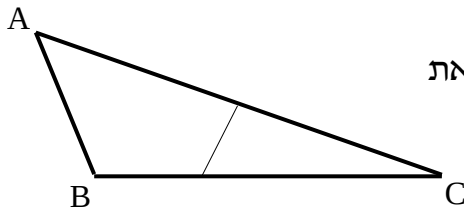
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים  $DC = 2BD$ .

נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ .

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

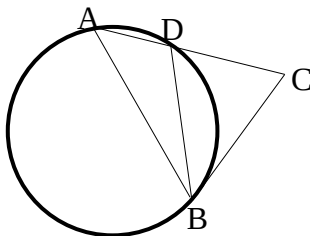


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle ADB = \beta$ .

הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

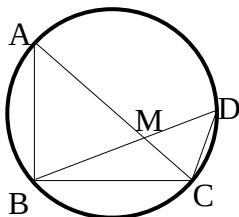


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה.

נתון:  $AB = k$ ,  $DM = p$ ,  $DC = q$ .

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



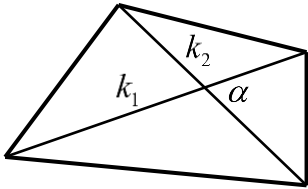
## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\alpha = 34.231^\circ$  ב.  $y = 14.33$  ס"מ ג.  $\alpha = 155.526^\circ$  או  $\alpha = 24.474^\circ$
- (2) א.  $x = 5.646$  ס"מ ב.  $\alpha = 20.742^\circ$  ג.  $\alpha = 105.962^\circ$  ד.  $\alpha = 90^\circ$
- (3)  $AD = 13.064$  ס"מ
- (4)  $GM = 3.360$  ס"מ
- (5)  $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$
- (6)  $R = 9.242$  ס"מ,  $AB = 14.56$  ס"מ
- (7)  $P = 22$  ס"מ
- (8)  $R = 5.395$  ס"מ,  $AC = 10.790$  ס"מ
- (9)  $DG = 18$
- (10)  $R = 10.5$  ס"מ ב.  $24.32^\circ$
- (11) א.  $DE = 1.48R, CD = R\sqrt{3}$  ב.  $r = 1.15R$
- (12) א.  $68^\circ$  ב.  $11.66$  ס"מ ג.  $R = 6.29$  ס"מ
- (13) א.  $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$  ב.  $i. 13$  ס"מ ii.  $78$  סמ"ר
- (14) א.  $9.4$  ס"מ ב.  $i. 10$  ס"מ
- (15) א.  $\angle C = 28.9^\circ$  ג.  $R = 13.77$
- (16) א.  $64.04^\circ$  ב.  $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$
- (17) א.  $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$  ב.  $m = 16$  ג.  $56.94^\circ$
- (18) א.  $4$  ב.  $i. 1.5\sqrt{28} + 3 - t$  ii.  $3$  ג.  $S = 18.18$
- (19) א.  $4.94$  ס"מ ב.  $17.19$  ס"מ
- (20)  $BC = 10$  ס"מ
- (21)  $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$
- (22)  $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$  (24)
- (23)  $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$  (23)

## שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

### סיכום כללי:

#### שטחים של משולשים ומרובעים:

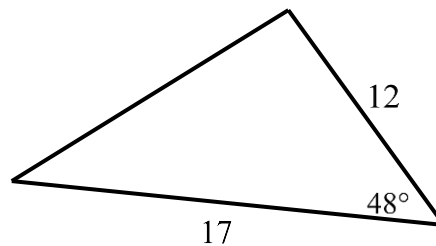


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

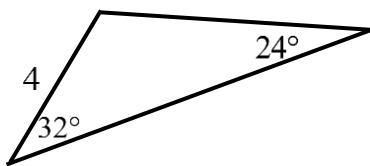
### שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של  $15^\circ$  עם הבסיסים.

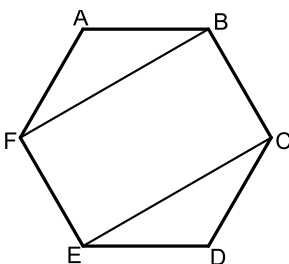
27) אורכו של מלבן הוא  $m$  ורוחבו  $n$ . הזווית שבין אלכסוני המלבן היא  $\theta$ .

$$\text{הוכח כי מתקיים: } \sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

28) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $BD$  חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש  $BCD$ .



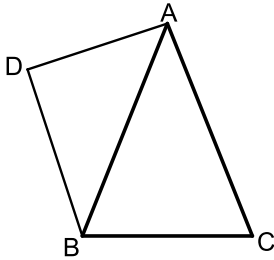
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא  $S$ .

א. הבע באמצעות  $S$  את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן  $BFEC$ .

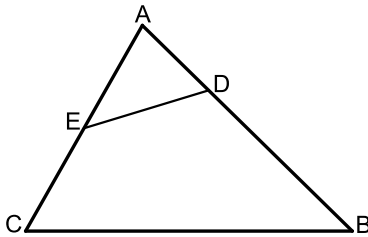
הבע באמצעות  $S$  את שטח המלבן.

**30** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש  $\alpha$ ,  $(AB = AC)$ . אורך הבסיס BC הוא  $k$ .



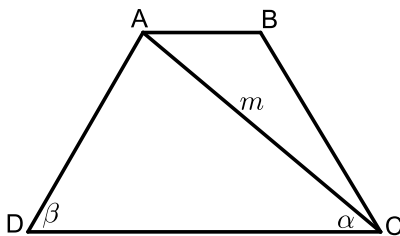
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו  $\angle D = 90^\circ$ .
- הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך שוק המשולש ABC.
  - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ .
  - וכי:  $\angle ABD = 40^\circ$ . מצא את זוויות המשולש ABC.
  - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי  $k = 6$ .

**31** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



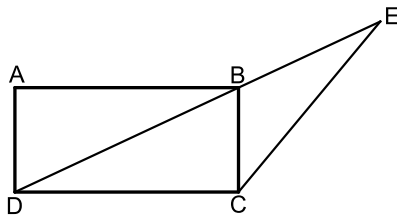
- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת:  $AD = 3$  ס"מ.
- ידוע כי:  $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ .
- מצא את אורך הקטע DE.
  - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
  - חשב את שטח המרובע BCED.

**32** המרובע ABCD הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ . הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

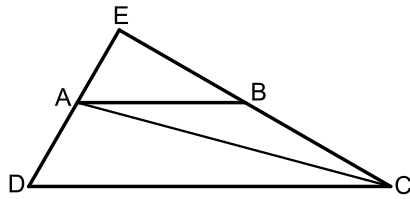


- מסמנים:  $AC = m$ ,  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ .
- הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את אורך הבסיס הגדול DC.
  - נתון כי האלכסון AC מקיים:  $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$ .
  - הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $m$  את הבסיס AB.
  - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  ו- $m = 8$ .

**33** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



- מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
- ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא  $115^\circ$ .
- מצא את אורך הקטע CE.
  - מצא את אורך האלכסון BD.
  - חשב את שטח המשולש DCE.



34) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).

ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם

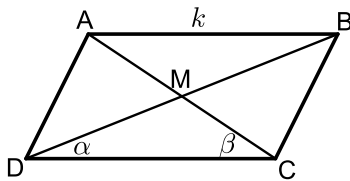
בנקודה E. ידוע כי:  $DE \perp CE$ .

מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C. מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$  ואת:  $\angle ACD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k = 12$  ס"מ.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים

את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים

בנקודה M כמתואר באיור.

מסמנים:  $AB = k$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ .

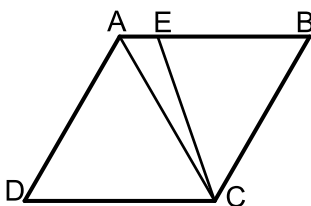
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:  $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $k$  את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי:  $\frac{AC}{BD} = 2$ . הראה כי שטח המקבילית הוא:  $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו  $\angle D = 60^\circ$ .

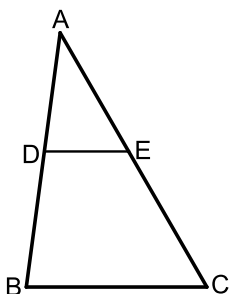
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס:  $\frac{BE}{AE} = 4$ .

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

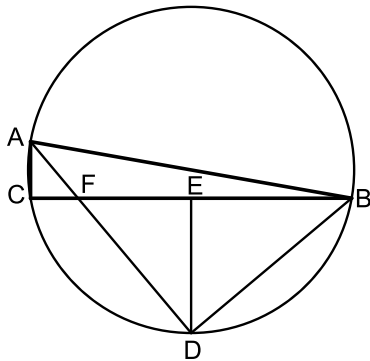
נתון כי:  $CE = 13$ ,  $BC = 15$ ,  $BD = \sqrt{129}$ .

ידוע כי זווית AED היא  $60^\circ$ .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.



**(38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

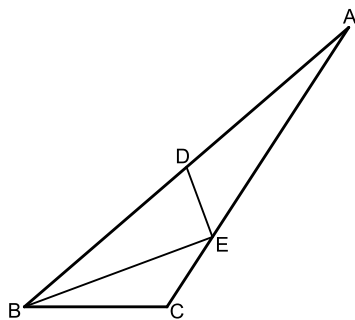
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים:  $DE = k$  ונתון כי:  $\angle ABC = 10^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות  $k$  את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את  $k$  אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



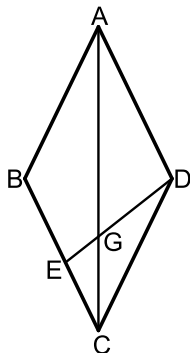
**(39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת:  $DE = CE$ .

ידוע כי:  $BC = 6$ ,  $BE = 8$ ,  $BD = 9$ .

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



**(40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

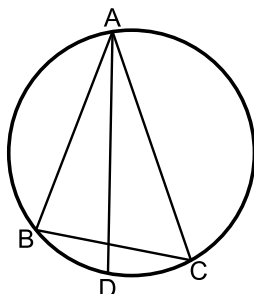
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא  $m$ .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .

i. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש EGC.



**(41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

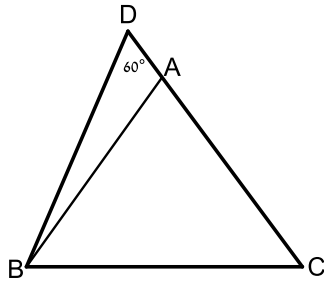
ידוע כי:  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ .

מסמנים:  $AD = k$ .

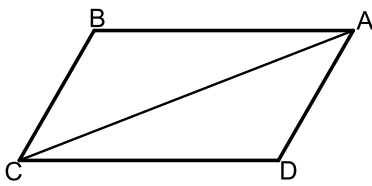
א. הבע באמצעות  $k$  את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

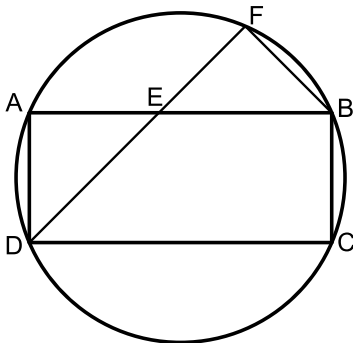
מצא את  $k$  (עגל למספר שלם).



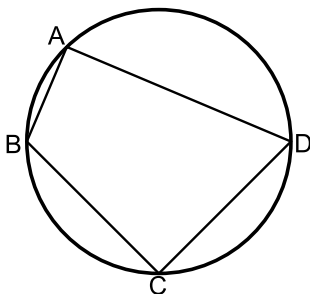
- 42** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי:  $\angle D = 60^\circ$ . אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ. א. מצא את אורך הקטע AD. ב. חשב את שטח המשולש ABC.



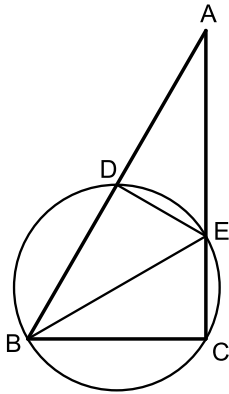
- 43** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא  $\sqrt{79}$  ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי:  $\angle B = 120^\circ$ . א. מצא את אורכי צלעות המקבילית. ב. חשב את שטח המקבילית. ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- 44** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי:  $\widehat{AF} = \widehat{CF}$ . הצלע AD של המלבן תסומן ב- $a$ . א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים. ב. נתון גם כי:  $BC = BF$ . i. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל. ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות:  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  (אין צורך לסרטט אותן).



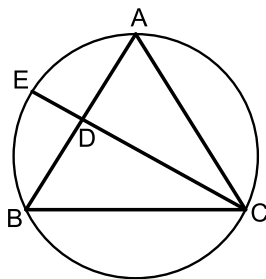
- 45** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי:  $AB = b$ ,  $BC = a$ ,  $CD = a$ ,  $AD = 3b$ . א. הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את  $\cos \angle BCD$ . ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים:  $a = b\sqrt{5}$ . ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית  $\angle C = 90^\circ$  ובו:  $\angle B = 2\alpha$ .  
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C  
 אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.  
 המיתר BE חוצה את זווית B.  
 א. הבע באמצעות R ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABE.  
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים  
 וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש ABE.

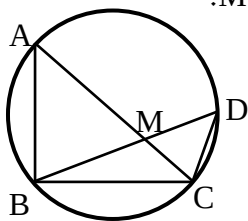
- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$ , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}} \quad \text{הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:}$$



- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) החסום במעגל.  
 מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.  
 ידוע כי E היא אמצע הקשת  $\widehat{AB}$  והיחס בין  
 הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.  
 מסמנים:  $\angle ACD = \alpha$ .

- א. מצא את זוויות המשולש ABC  
 (עגל למספרים שלמים).  
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי  
 רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.  
 זווית B היא זווית ישרה.  
 נתון:  $\angle MCB = \beta$ ,  $\angle MBC = \alpha$ .

- א. הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש BDC.

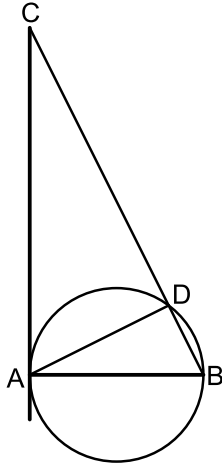
$$S_{BDC} = \frac{1}{2} R^2, \quad \beta = 2\alpha \quad \text{ב. נתון:}$$

- חשב את  $\alpha$ .

(50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא  $b$  והזווית שליד הבסיס הגדול היא  $\gamma$  נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות  $\gamma$  ו- $b$  את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את  $\gamma$  אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי  $\sqrt{3}$  מהבסיס הקטן.



(51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו  $R$  ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

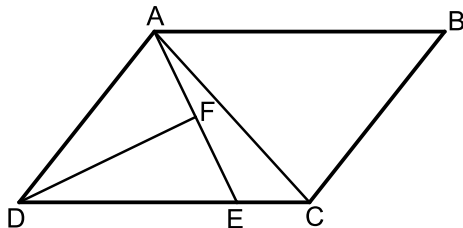
מסמנים:  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $R$  את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



(52) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים:  $3CE = DE$ .

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי:  $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$ .

מסמנים:  $CE = k$ .

א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא  $4.5k$ . מצא את  $\alpha$ .

### תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(27) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 67.78^\circ, 67.78^\circ, 44.4^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad AB = 3 \text{ ס"מ} \quad BC = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ג.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

ב.ii.  $45^\circ, 135^\circ$

(43) ב.i.  $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$

ג.  $S = 14.4$  סמ"ר

(44) א.  $\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$

ב.  $S = 36\sqrt{3}$  סמ"ר

(45) א.  $S = R^2 \tan 2\alpha$

ב.  $BE = 7.75$

(48) א.  $58^\circ, 58^\circ, 64^\circ$

ב.  $\alpha = 22.5^\circ$

(49) א.  $S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$

ב.  $\gamma = 75^\circ$

(50) א.  $\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

ג.  $\alpha = 26.56^\circ$

ב.  $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$

(51) א.  $S = R^2 \sin 2\alpha$

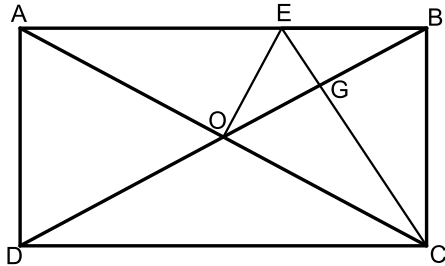
ב.  $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$

(52) א.  $AE = 6k \sin \alpha$

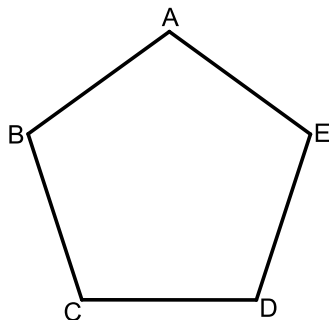
ג.  $\alpha = 14.47^\circ$

## שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

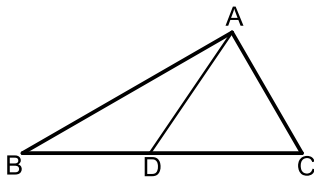
### שאלות:



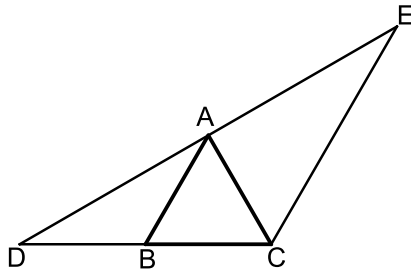
- (53) המרובע ABCD הוא מלבן.  
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש-  $2BE = AE$ .  
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.  
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.  
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.  
 ב. הוכח כי מתקיים:  $4GE = AE$ .  
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.  
 חשב את שטח המלבן ABCD.



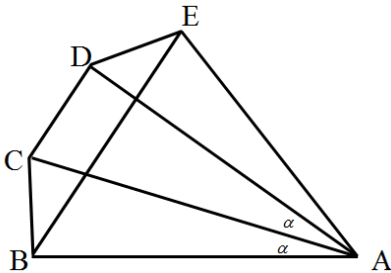
- (54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן  $108^\circ$ ) בעל אורך צלע  $\alpha$ .  
 א. הבע באמצעות  $\alpha$  את אלכסון המחומש AD.  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.  
 ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המחומש.  
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.  
 חשב את שטח המחומש.



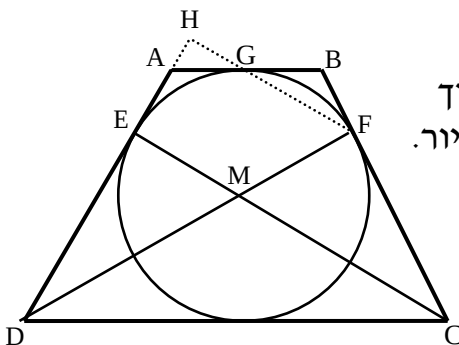
- (55) במשולש ABC הזווית C היא  $60^\circ$ .  
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.  
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא:  $R_1 = \sqrt{3}$  ס"מ.  
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא:  $R_2 = 3$  ס"מ.  
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
 ב. היקף המשולש ABC הוא:  $12 + 4\sqrt{3}$  ס"מ.  
 חשב את שטח המשולש.



- 56** המשולש ABC הוא שווה צלעות.  
 הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים  
 שני משולשים ABD ו-ACE.  
 ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.  
 א. הוכח:  $AB \parallel CE$ .  
 ב. הוכח:  $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .  
 ג. נתון:  $DC = 8$  ס"מ.  
 וכי:  $AC \perp DE$ .  
 i. חשב את שטח המשולש DCE.  
 ii. חשב את שטח המשולש ABD.

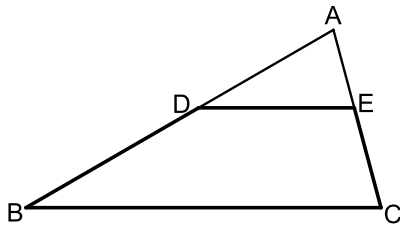


- 57** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE.  
 כך שמתקיים:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  ו- $AB = AE$ .  
 מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.  
 מתקיים:  $BE \parallel CD$ .  
 ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.  
 א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.  
 ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ( $AC = AD$ ).  
 הוכח כי:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .  
 ג. ידוע כי:  $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$  ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$ .  
 הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.  
 ד. נסמן:  $AB = m$ .  
 i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.  
 ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.  
 iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

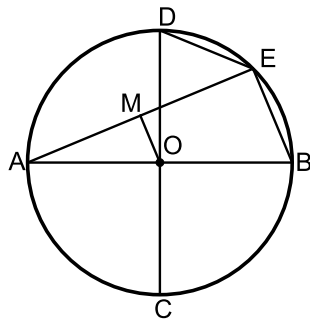


- 58** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך  
 הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F, G ו-H כמתואר באיור.  
 הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז  
 ונחתכים בנקודה M.  
 א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.  
 ב. חשב את זוויות הטרפז.  
 ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

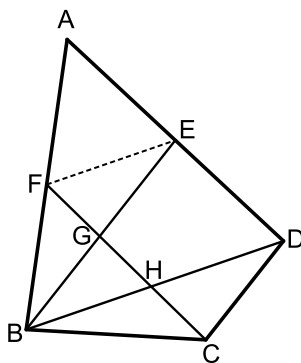
$$\text{חשב את היחס } \frac{EM}{FH}.$$



- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז  $BC \parallel DE$ . המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ ). נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .  
 א. סמן את אורך הבסיס DE ב- $x$  ואת שטח הטרפז BDEC ב- $S$ .  
 הבע את  $S$  באמצעות  $x$ .  
 ב. על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.  
 חשב את היחס:  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ .



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת:  $BE + DE = 15$  ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE. א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית. ב. מצא את אורך המיתר BE. נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר. ג. מצא את רדיוס המעגל. ד. חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$ . נתון כי הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle BFE$  משלימות ל- $180^\circ$ . א. הוכח:  $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$ . ב. נתון כי  $BE = 7.5$  וכי:  $GE - HD = 17\frac{1}{15}$ . חשב את אורך הקטע FE. ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא:  $R = 4.001$  ס"מ. מצא את זווית  $\angle EBD$ .

## תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א.  $1.618\alpha$       ב.  $0.85\alpha$       ג.  $1.72\alpha^2$       ד.  $S = 85.57$

(55) ב.  $S = 8\sqrt{3}$

(56) א.י.  $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$       ג.י.  $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד.י.  $BC = 0.4663m$  ,  $DE = 0.4663m$  ,  $CD = 0.4776m$  ,  $BE = 1.2175m$

(62) ד.י.  $0.7232m^2$       ד.י.  $m = 8$  ס"מ

(58) ב.  $60^\circ$  ,  $120^\circ$       ג.  $\frac{2}{3}$

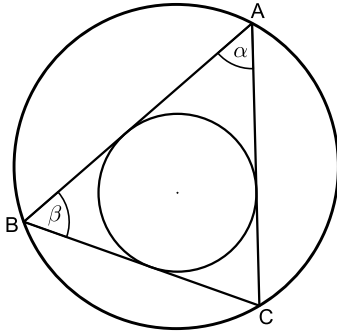
(59) א.  $S = 81 - 0.25x^2$       ב.  $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(60) ב.  $BE = 10$       ג.  $R = 13$       ד.  $\angle B = 67.38^\circ$

(61) ב.  $FE = 4$       ג.  $16.73^\circ$

## שאלות מסכמות:

### שאלות:



(1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו  $R$ .

נתון כי  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .

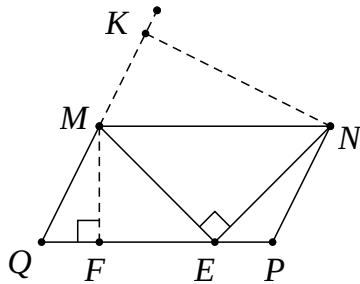
א. הבע את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$ .

ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ .

חשב את רדיוס המעגל החסום

במשולש בעזרת  $R$ .

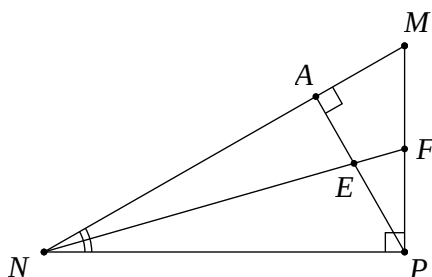


(2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על

הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור).

נתון:  $12$  ס"מ  $MQ$ ,  $\angle MQP = 70^\circ$ ,  $\angle MNE = 40^\circ$ .

מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



(3) במשולש ישר-זווית MNP, ( $\angle P = 90^\circ$ )

PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה

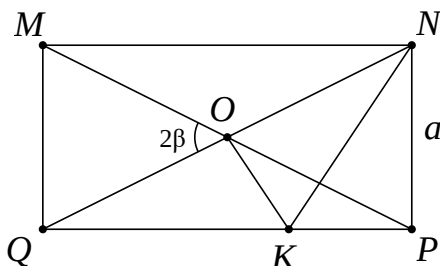
את הזווית  $\angle MNP$ .

PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון:  $24$  ס"מ  $NP$ ,  $\angle MNP = 40^\circ$ .

א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.



(4) אלכסוני המלבן MNQP נחתכים בנקודה O.

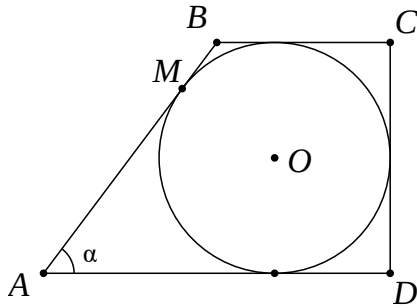
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך

את QP בנקודה K (ראה ציור).

נתון:  $\angle MOQ = 2\beta$ ,  $NP = a$ .

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו- $a$ .



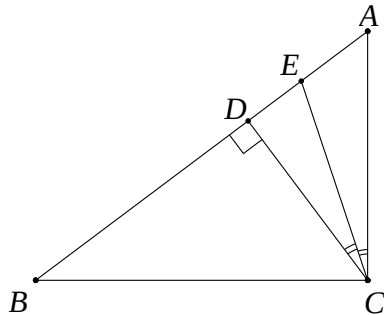
(5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.

נתון:  $AM = 12$  ס"מ,  $\angle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .



(6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:

$\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 8$  ס"מ

CD הוא הגובה ליתר.

CE הוא חוצה-הזווית  $\angle ACD$ .

הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

(7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.

מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה.

חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

(8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו 12 ס"מ.

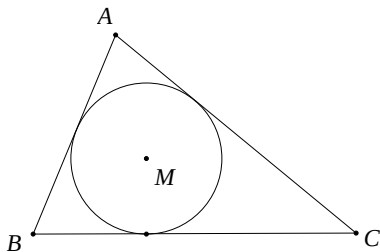
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.

שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).

א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות

הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



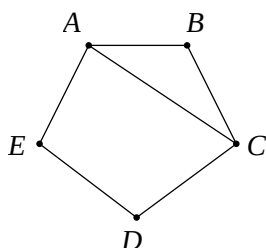
(9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M

ורדיוסו r (ראה ציור).

נתון:  $\angle B = 62^\circ$ ,  $\angle C = 46^\circ$ .

א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.

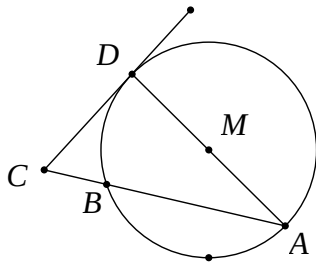
ב. נתון:  $BC = 16$  ס"מ. מצא את r.



(10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)

אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.

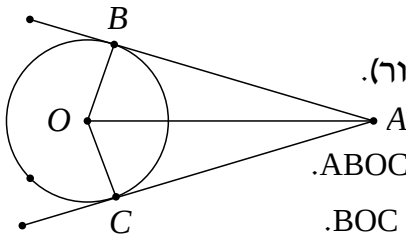
חשב את שטח המחומש.



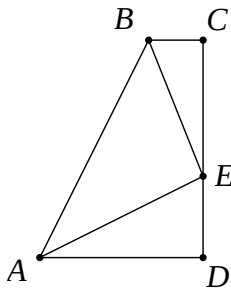
11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחיתך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.  
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



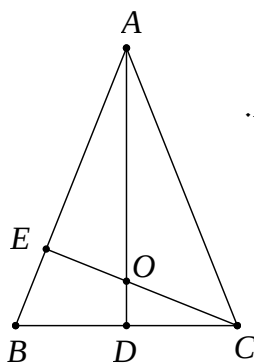
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.  
א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.  
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.  
ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי:  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ).  
נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$ , ו- $\angle CBE = \beta$ .  
הבע באמצעות  $k$  ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

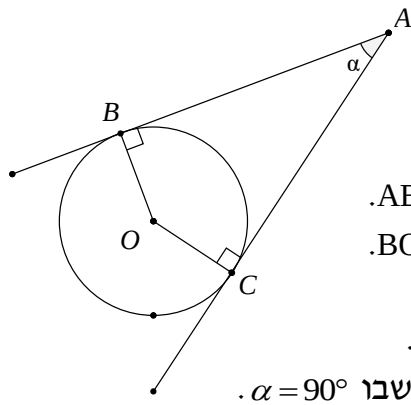
- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.  
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.  
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.  
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

- א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CO ו-CE.  
ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ , והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



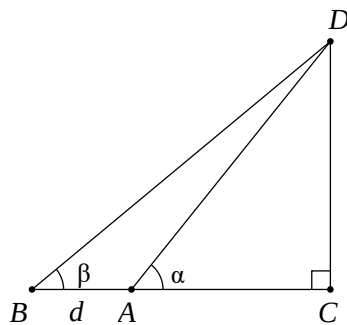
16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם  $m$  (כלומר:  $AB = AC = m$ ). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$  (ראה ציור).

א. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



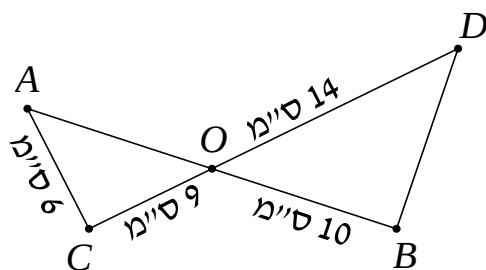
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ .

מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ .

נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור).

סמן:  $AC = x$ .

הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



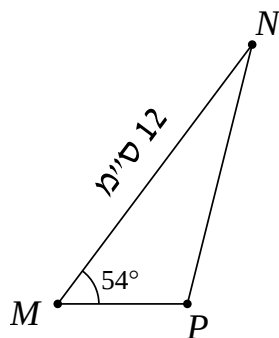
18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.

נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,

$AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,

$OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ.

חשב את  $\angle ODB$ .



19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ .

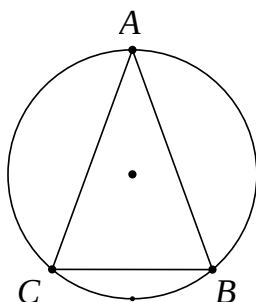
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.



20) המשולש השווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ )

חסום במעגל (ראה ציור).

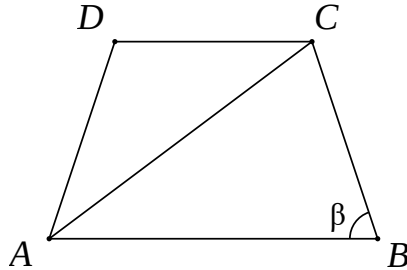
נתון:  $\angle ABC = \beta$ .

כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.

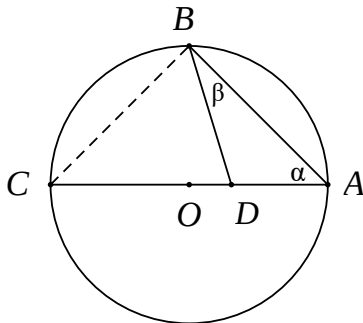
א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

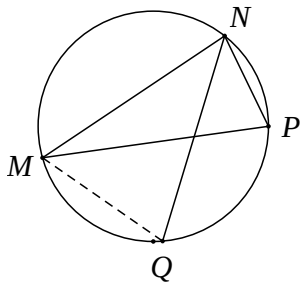
- (21) במשולש ABC הזווית  $\angle C$  היא בת  $60^\circ$ , אורך הצלע AB הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



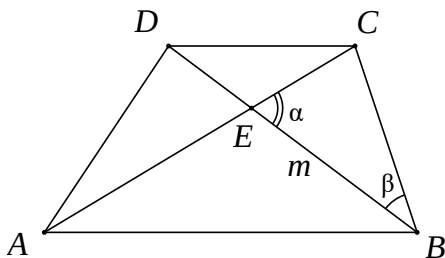
- (22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ), (ראה ציור). הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



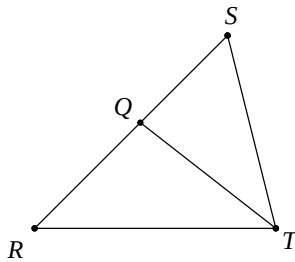
- (23) הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



- (24) משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית  $\angle MNP$ . נתון:  $\angle MPN = 70^\circ$ ,  $\angle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



- (25) נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  $\angle CBD = \beta$ ,  $\angle CEB = \alpha$  (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  $\angle RTS$

(ראה ציור),  $RQ = \sqrt{2}$ ,  $QS = m$ ,

$\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .

א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .

ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

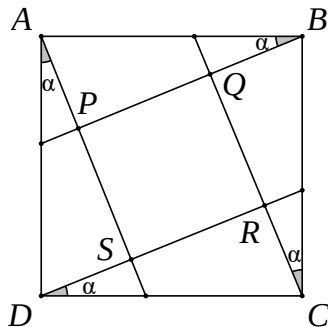
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$ .

א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

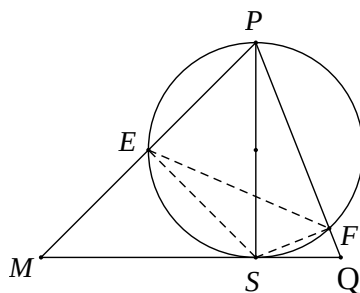
קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

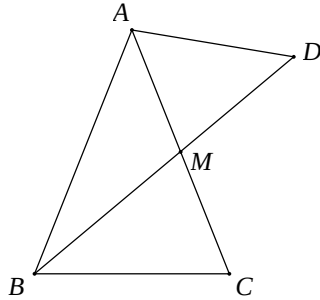
ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**(31)** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**(32)** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש

ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

**(33)** משולש שווה שוקיים BCE ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא  $\alpha$ .

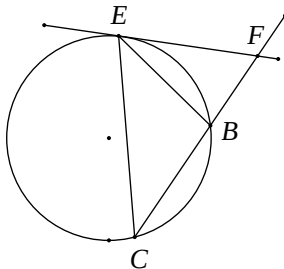
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

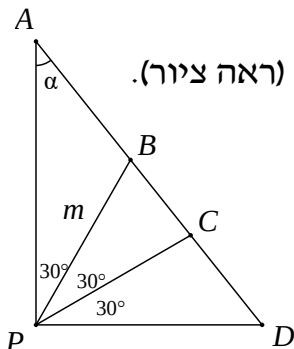


**(34)** בטרפז BCDE ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא  $80^\circ$ .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .

חשב את היקף הטרפז.



**(35)** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$

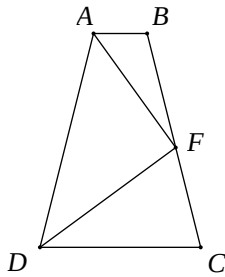
לשלוש זוויות שוות, כלומר  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$  (ראה ציור).

נתון כי:  $PB = m$ ,  $\angle PAD = \alpha$ .

א. היעזר במשפט הסינוסים,

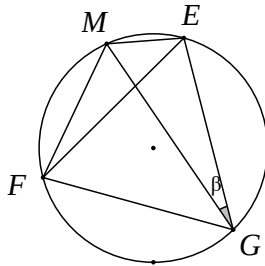
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- $\alpha$ .

ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$ .



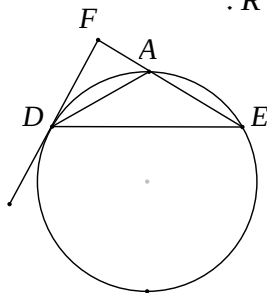
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),

F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את הזווית  $\angle CDA$  ו-AF חוצה את הזווית  $\angle DAB$  (ראה ציור). נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $AB = b$ . הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס DC.



37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל. נתון:  $\angle MGE = \beta$  (ראה ציור).

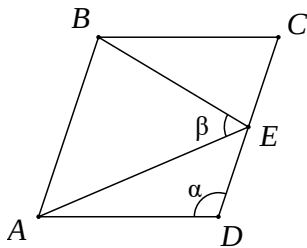
א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$ .  
 ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על  $\angle MGE$ ?



38) משולש שווה שוקיים ADE ( $AD = AE$ ) חסום במעגל שרדיוסו R.

ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון:  $\angle ADE = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

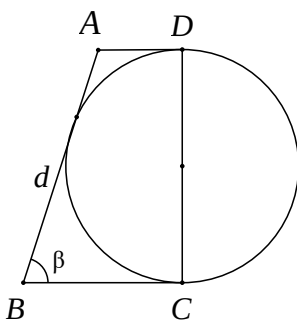
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .  
 ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.  
 ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון:  $\angle AEB = \beta$ ,  $\angle ADC = \alpha$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$ .



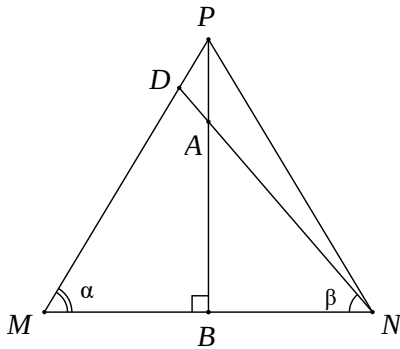
40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי:  $AB = d$ ,  $\angle B = \beta$ .

א. הבע באמצעות  $d$  את סכום בסיסיו של הטרפז.  
 ב. הבע באמצעות  $d$  ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



41) במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),

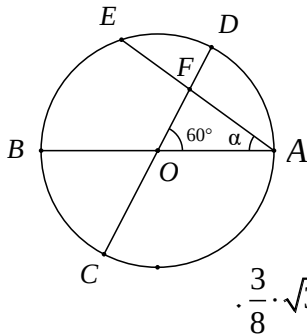
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון:  $\angle DNM = \alpha$ ,  $\angle DNB = \beta$  ו-  $BN = \alpha$ .

א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .

ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני

קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .

מיתר AE, היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר AB,

חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו-  $\alpha$ .

ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש ACF הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

## תשובות סופיות:

$$r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\text{ב. } \frac{1}{2} R$$

$$\text{KN} = 21.52 \text{ ס"מ}, \text{MF} = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$\text{EF} = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{א. NA} = 18.385 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

$$\text{א. OK} = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{ב. } \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$$

$$12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \text{ב.}$$

$$\text{AE} = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad \text{א. BC} = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$\text{ב. 27 יח"ש.}$$

$$r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\text{ב. } 90.45 \text{ סמ"ר} \quad S \approx$$

$$\text{א. CE} = 2a \cdot \sin \beta, \text{ CO} = \frac{a}{\sin \beta} \quad (15)$$

$$\text{ב. } \frac{\text{CO}}{\text{CE}} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\triangle ABOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} : \text{יחס השטחים}$$

ד. במקרה זה  $\triangle ABOC$  הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\angle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\triangle PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א.} \quad (20) \quad \text{ב. } 400 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta : \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א.} \quad (23) \quad \text{ב. } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א.} \quad (26) \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \text{ או } \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א.} \quad (30) \quad \text{ב. i. } \angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.} \quad (31)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad (31) \quad \text{א.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad (32) \quad \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.}$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ ב. } S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \text{ א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \text{ (34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \text{ א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה. } CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \text{ (36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \text{ ב. } S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \text{ א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \text{ ב. } AD + BC = d \text{ א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \text{ ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \text{ ב. } \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ א. (41)}$$

$$. S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \text{ א. (42)}$$

# דיקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

פרק 5 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

|                         |                 |
|-------------------------|-----------------|
| 1. הסבר כללי            | (ללא ספר) ..... |
| 2. הצבה                 | 81 .....        |
| 3. צמצום                | 82 .....        |
| 4. הכפלה בצמוד          | 83 .....        |
| 5. גבולות טריגונומטריים | 84 .....        |

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

|                    |                    |        |                      |                   |
|--------------------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| -3 (5)             | $n-1$ (4)          | 6 (3)  | $\frac{10}{8.5}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\frac{1}{5}$ (10) | $\frac{8}{17}$ (9) | 27 (8) | 3 (7)                | 32 (6)            |

## הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

|                          |                     |                   |                    |                     |
|--------------------------|---------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| $\frac{1}{2}$ (5         | $\frac{1}{2}$ (4    | $\frac{1}{2}$ (3  | $\frac{3}{4}$ (2   | $\frac{3}{4}$ (1    |
|                          | $\frac{1}{4}$ (9    | 4 (8              | $\frac{1}{8}$ (7   | $\frac{1}{2}$ (6    |
| $\frac{1}{\cos^2 a}$ (13 | $-\sin a$ (12       | $\cos a$ (11      | $-\frac{1}{2}$ (10 |                     |
| 1 (17                    | $\frac{2}{\pi}$ (16 | $\frac{1}{2}$ (15 | $\frac{4}{10}$ (14 | $-\frac{1}{12}$ (18 |

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

# דיקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

פרק 6 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

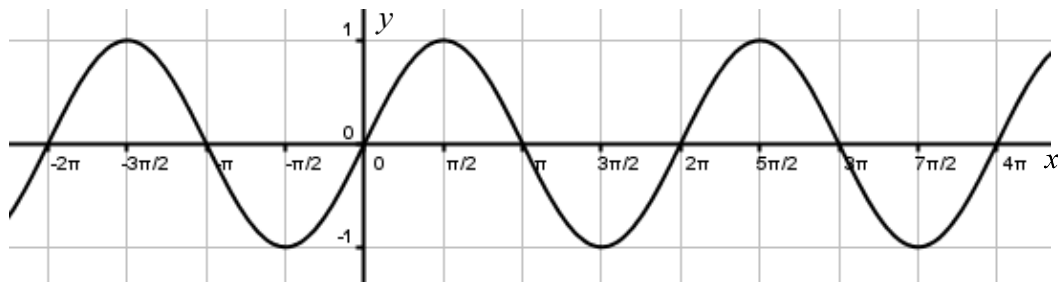
תוכן העניינים

|    |                                                |
|----|------------------------------------------------|
| 87 | 1. הגדרות כלליות                               |
| 89 | 2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות             |
| 91 | 3. שאלות עם משיקים                             |
| 93 | 4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות |
| 94 | 5. מציאת נקודות קיצון                          |
| 95 | 6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים            |
| 96 | 7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות            |
| 97 | 8. חקירת פונקציה טריגונומטרית                  |

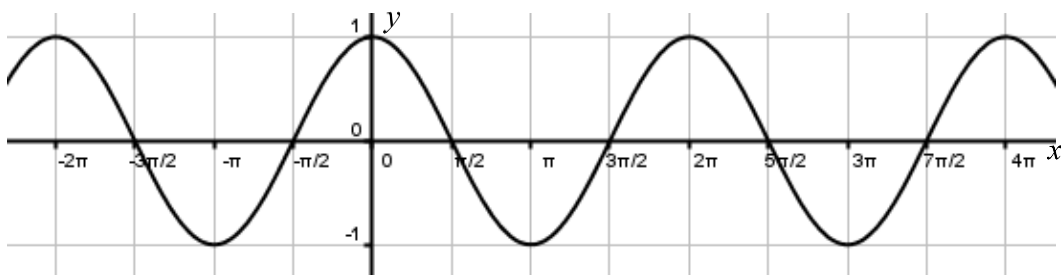
## הגדרות כלליות:

### סיכום כללי:

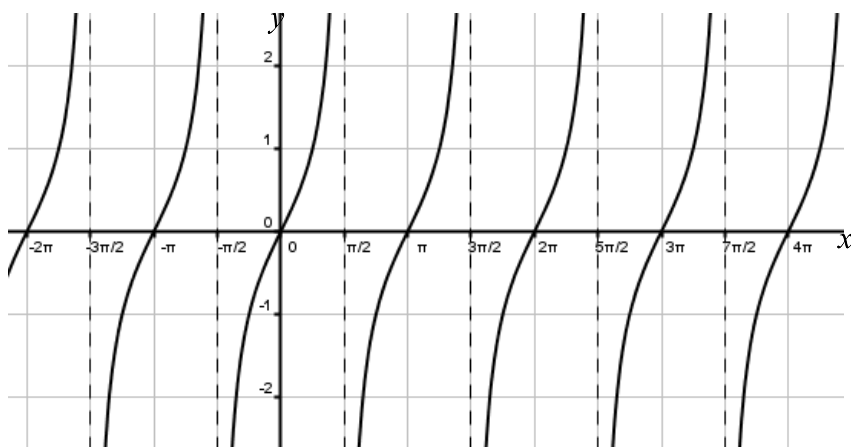
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס :  $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס :  $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס :  $y = \tan x$



## הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

| הפונקציה     | הנגזרת                     |
|--------------|----------------------------|
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$              |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$             |
| $y = \tan x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$  |
| $y = \cot x$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |

## זוגיות של פונקציות:

- פונקציה  $f(x)$  תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = -f(-x)$ .
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

## מחזוריות של פונקציות:

(1) פונקציה  $f(x)$  תיקרא מחזורית במחזור  $T$  אם היא מקיימת:  $f(x+T) = f(x)$  לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה  $f(x) = \sin x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\sin(x+2\pi) = \sin x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \cos x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\cos(x+2\pi) = \cos x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \tan x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\tan(x+\pi) = \tan x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \cot x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\cot(x+\pi) = \cot x$ .

## גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

### שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin x + 3\cos x + x$

ג.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

ב.  $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$

ב.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^3 x$

ג.  $f(x) = \sin^2 x$

ה.  $f(x) = \cos^2 2x$

ב.  $f(x) = 2 \cos^4 x$

ד.  $f(x) = \sin^3 2x$

ו.  $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ג.  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

ב.  $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \cos x - 3\sin x + 1 \quad \text{ב. } 2\sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \text{ג. } \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$(2) \quad \text{א. } 3\cos 3x - 10\sin 5x \quad \text{ב. } -\frac{2}{1 + \sin 2x}$$

$$(3) \quad \text{א. } 3\sin^2 x \cdot \cos x \quad \text{ב. } -8\cos^3 x \sin x \quad \text{ג. } \sin 2x$$

$$\text{ד. } 6\sin^2 2x \cos 2x \quad \text{ה. } -2\sin 4x \quad \text{ו. } \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} \quad \text{ב. } \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2\sin 2x \quad \text{ב. } 4\sin 4x \quad \text{ג. } -\sin 4x$$

## שאלות עם משיקים:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \cos x$  בנקודה  $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sin 2x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{2}$ .

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \tan 3x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{9}$ .

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה:  $f(x) = 4\sin^2 x$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = 1$  בתחום  $[0, \pi]$ .

(10) שיפוע המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$ ,  $a$  (פרמטר) בנקודה שבה  $y = 1$

בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  הוא  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(11) נתונה הפונקציה:  $f(x) = a\sin^2 x - 5\sin x + ax$ ,  $a$  (פרמטר) בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

ידוע כי הישר:  $y = ax - 2$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{6}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא:  $m = 2$ .

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

**(12) נתונות הפונקציות הבאות:**  $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ,  $g(x) = x^2 + \sin^2 x$ .

א. הוכח כי ההפרש:  $f(x) - g(x)$  שווה ל- $\cos 2x$ .

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום:  $-\pi < x < \pi$ .

ג. ישר  $x = t$ ,  $(0 < t < 1)$  חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים

לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה  $g(x)$  לשיפוע

המשיק של גרף הפונקציה  $f(x)$  הוא 1.

מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $t$ .

### תשובות סופיות:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

$$y = -2x + \pi \quad (7)$$

$$y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (8)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2 \quad \text{א.} \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right) \quad \text{ב.} \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. } y = 2x - 3 \quad (11)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right) \quad \text{ב.} \quad t = \frac{\pi}{12} \quad \text{ג.} \quad (12)$$

## מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

### שאלות:

13) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

$$\text{א. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}, [0, 2\pi] \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}, [-\pi, \pi]$$

$$\text{ג. } f(x) = \tan x, [0, 2\pi]$$

### תשובות סופיות:

$$13) \text{ א. } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{ב. } -\pi \leq x \leq \pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{ג. } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

## מציאת נקודות קיצון:

### שאלות:

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x + \cos x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

16 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$  בתחום:  $[0, 1.5\pi]$ .

18 לפונקציה:  $f(x) = a\sin x + b\sin^3 x$  (פרמטרים) יש נקודת קיצון ששיעוריה  $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

14  $\max(2\pi, 1)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  קצה,  $\min(0, 1)$  קצה.

15  $\max(2\pi, -\pi)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  קצה,  $\min(0, 0)$  קצה.

16  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$  מוחלט,  $\min(2\pi, -1)$  קצה,  $(0, -1)$  קצה,  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$  מוחלט.

17  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$  קצה.

18  $b = -4$ ,  $a = 3$ .

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

### שאלות:

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \tan x$  בתחום:  $[-\pi, \pi]$ .

### תשובות סופיות:

(19)  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$

(20)  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$

(21)  $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

## מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

### שאלות:

**(22)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

### תשובות סופיות:

**(22)** נקודות פיתול:  $\left(\frac{7}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right)$ , קעור מעלה:  $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ , קעור מטה:  $0 < x < \frac{7}{6}\pi$ .

## חקירת פונקציה טריגונומטרית:

### שאלות:

(23) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4\sin 2x - 2$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר  $y = k$  היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי  $k$  הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר  $x$ .
- מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(27)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$ ,  $1 < m < 3$ , ( $m$  פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר:  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$ .
- האם הנקודה שבה:  $x = -\frac{\pi}{2}$  היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.  
אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום:  $0 < x < 2\pi$ .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

**(28)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

**(29)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא בתחום  $[0, \pi]$  את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8\sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$  בתחום  $[0, 4]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cos x - x$  בתחום:  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי:  $f'(3.67) = 0$ ,  $f'(-3.67) = 0$  וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**(34)** נתונה הפונקציה:  $y = (\cos x + k)^2$ ,  $k$  פרמטר, בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

- מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

**(35)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$ , ( $m$  פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \pi$  שמשוואתו:  $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $k$  ו- $m$ .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בתחום הנ"ל.

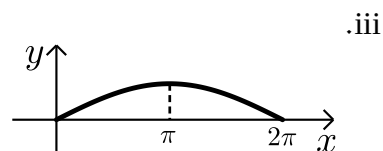
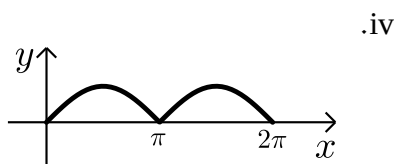
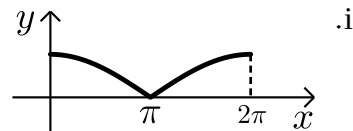
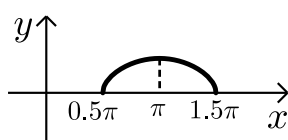
**(36)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan x + kx$ , ( $k$  פרמטר) בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה:  $g(x) = \tan^2 x + kx$  חותכת את הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר  $k$ , ( $k \neq 0$ ).
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

37) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ,  $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$ .

הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$  והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- א. האם הגרפים חותכים את ציר ה- $x$  בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- ד. לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של  $f(x)$  ואיזה מתאר את הגרף של  $g(x)$ . נמק.



## תשובות סופיות:

(23) א.  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

ב.  $\max(2\pi, 2\pi+2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ .

ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ , קעירות כלפי מטה:  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

(24) א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .

ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .

ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .

(25) א.  $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right), (0, -2)$ .

ב.  $\max(\pi, -2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0, -2)$ .

ד.  $-6 < k < 2$  וגם  $k \neq -2$ . ה.  $\frac{\pi}{2}$ .

(26) א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .

ב.  $\max(2\pi, -2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi, 0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0, -2)$ .

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ , יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ .

(27) א.  $m = 2$ . ב. נקודת פיתול. ג. 2 נקודות.

ד.  $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$ .

(28) א.  $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ . ב.  $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0, 1)$ .

ד. 2 פתרונות.

(29) א. חיתוך:  $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$  קצה,  $\min(0, 0)$  קצה.

$$(30) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. } \min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right) \text{ קצה}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו. } (0,0)$$

$$\text{ז. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ או } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$(31) \text{ א. } (0,0), (\pm 0.23\pi, 0) \quad \text{ב. } x = \pm 0.25\pi \quad \text{ג. } \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right).$$

$$(32) \text{ א. } 0 \leq x \leq 4 \text{ וגם } x \neq 0.44, x \neq 3.56$$

$$\text{ב. } \max(0,0), \min(2, -1.16), \max(4,0) \text{ קצה.}$$

$$(33) \text{ א. } (0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$$

$$\text{ב. ii. } \max(2\pi,0), \min(-2\pi,0), (0,0) \text{ פיתול.}$$

$$(34) \text{ א. } y = (\cos x + 0.5)^2, k = 0.5 \quad \text{ב. } (\pi, 0.25) \quad \text{ג. לא.}$$

$$(35) \text{ א. } m = 6, k = \sqrt{7} \quad \text{ב. } (-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6) \quad \text{ג. בשתי נקודות.}$$

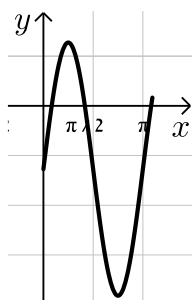
$$(36) \text{ א. } x = 0.5\pi \quad \text{ב. } k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$$

$$\text{ג. } \max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4).$$

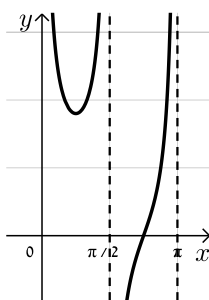
$$(37) \text{ א. כן. } f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0), g(x): (\pi, 0) \quad \text{ב. כן, } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\text{ג. } \max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1) \quad \text{ד. איור I - } g(x), \text{ איור II - } f(x).$$

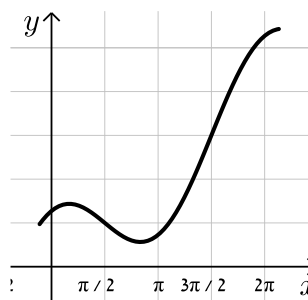
## סקיצות לשאלות החקירה:



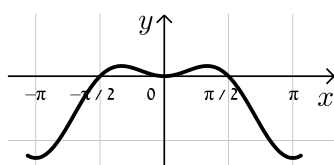
(25)



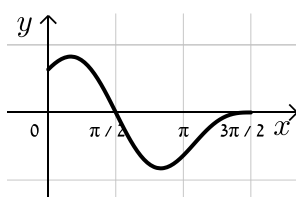
(24)



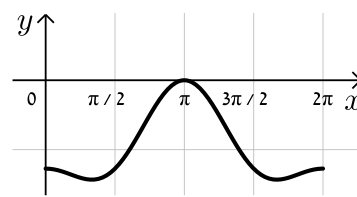
(23)



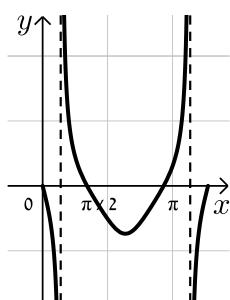
(29)



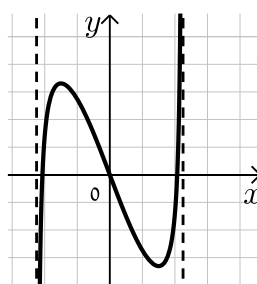
(28)



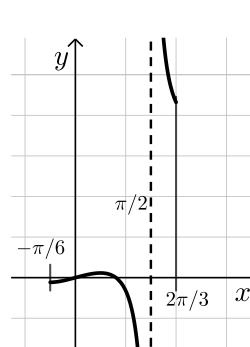
(26)



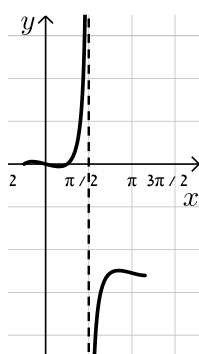
(32)



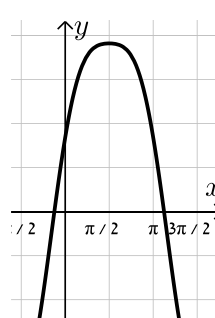
(31)



(30)



(36)



(35)

# דיקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

פרק 7 - חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות

תוכן העניינים

|     |                                  |
|-----|----------------------------------|
| 105 | 1. הקדמה כללית                   |
| 107 | 2. הוספת קבוע לפונקציה           |
| 115 | 3. הכפלת פונקציה בקבוע           |
| 122 | 4. הזזת פונקציה ימינה ושמאלה     |
| 126 | 5. מתיחה וכיווץ של פונקציה       |
| 131 | 6. היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y |
| 136 | 7. ערך מוחלט של פונקציה          |

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

- הוספת קבוע לפונקציה :  
בהינתן פונקציה  $y = f(x)$ , כל הנקודות שעל גרף הפונקציה :  $g(x) = f(x) + k$  מתקבלת ע"י הוספת קבוע  $k$  לערך ה- $y$ . במילים אחרות, אם נקודה  $(x_0, y_0)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  אז הנקודה  $(x_0, y_0 + k)$  תמצא על גרף הפונקציה  $g(x)$ . הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה  $f(x)$  ב- $k$  יחידות.
- הכפלת פונקציה בקבוע :  
בהינתן פונקציה  $y = f(x)$  ועליה נקודה כללית  $(x_0, y_0)$ , הפונקציה  $g(x) = k \cdot f(x)$  מתקבלת ע"י הכפלת  $f(x)$  בקבוע  $k$  ( $k \neq 0$ ). נקודה על  $g(x)$  תהיה מהצורה :  $(x_0, k \cdot y_0)$ . הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה- $x$ .
- הזזת פונקציה ימינה ושמאלה :  
כדי להזיז פונקציה  $y = f(x)$  ב- $k$  יחידות ימינה נציב :  $g(x) = f(x - k)$  וכדי להזיז אותה שמאלה ב- $k$  יחידות נציב :  $g(x) = f(x + k)$ .
- מתיחה וכיווץ אופקיים של פונקציה :  
כדי לכווץ פונקציה כלשהי  $y = f(x)$  פי  $k$  (מניחים  $k > 1$ ) נציב :  $g(x) = f(k \cdot x)$ .  
כדי להרחיב פונקציה כלשהי  $y = f(x)$  פי  $k$  (מניחים  $k > 1$ ) נציב :  $g(x) = f(x/k)$ .
- שיקוף גרף פונקציה ביחס לציר  $y$  :  
כדי לשקף את גרף הפונקציה  $y = f(x)$  סביב ציר ה- $y$  נכפיל את ערך ה- $x$  פי -1. הגרפים של הפונקציות  $y_1 = f(x)$  ו- $y_2 = f(-x)$  מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה- $y$ .

- ערך מוחלט של פונקציה :  
 הערך המוחלט של :  $y = f(x)$  , מתקבל ע"י לקיחת ערכי ה-  $y$  בגודלם בלבד.  
 במילים אחרות, הערך המוחלט של  $f(x)$  הוא :  $y = |f(x)|$  . הגרפים של  
 הפונקציות  $f(x)$  ו-  $|f(x)|$  זהים לחלוטין בערכם החיובי (ז"א בחלקם שמעל לציר  
 ה-  $x$ ) וסימטריים לחלוטין בערכם השלילי ביחס לציר ה-  $x$  . כאשר הגרף של  $f(x)$   
 נמצא מתחת לציר ה-  $x$  והגרף של  $|f(x)|$  נמצא מעל לציר ה-  $x$  .

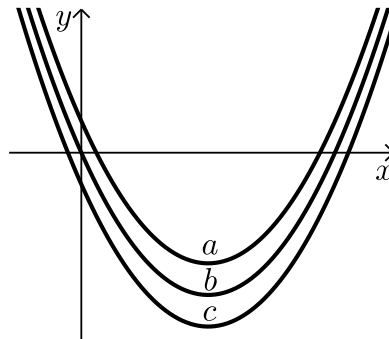
## הוספת קבוע לפונקציה:

### שאלות:

- (1) סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  ואת הגרף  $y = f(x) + k$  עבור  $k = 1$  ו- $k = -4$ .

- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -2x^2$ . מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = f(x) + b$ .  
 א. מהו ערך הפרמטר  $b$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יעבור בנקודה  $(2, 10)$ ?  
 ב. מצא את ערך הפרמטר  $b$  עבורו  $g(x)$  תקבל ערך מקסימלי של 4.  
 ג. מצא את ערך הפרמטר  $b$  עבורו  $g(x)$  תקבל ערך מקסימלי של -3.

- (3) לפניך שלושה גרפים של פונקציות:  
 $f(x) = x^2 - 6x$ ,  $g(x) = x^2 - 6x - 2$ ,  $h(x) = x^2 - 6x + 2$   
 התאם כל גרף מבין הגרפים  $a, b, c$  לכל פונקציה:



- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x$ . מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = f(x) + A$ .  
 כאשר  $A$  הוא פרמטר השונה מאפס.  
 א. הבע באמצעות  $A$  את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. מהו  $A$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יהיה נמוך משל  $f(x)$  ב-5 יחידות?  
 ג. מהו  $A$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יחתוך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$ ?

$$(5) \quad \text{נתונות שתי פונקציות: } f(x) = \frac{3-2x}{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{3}{x}.$$

א. הראה כי גרף הפונקציה  $f(x)$  נמצא מתחת לגרף הפונקציה  $g(x)$

לכל ערך של  $x$  וחשב בכמה יחידות  $f(x)$  מתחת ל- $g(x)$ .

ב. כתוב פונקציה שערכיה יהיו גדולים משל  $g(x)$  ב-4 יחידות לכל  $x$ .

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{2}{x^2}. \text{ מגדירים את הפונקציה: } g(x) = f(x) + B, \quad B \neq 0.$$

א. מהן האסימפטוטות האופקיות של  $f(x)$  ושל  $g(x)$ ?

ב. סרטט במערכת צירים אחת באופן איכותי את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$

ו- $g(x)$  עבור  $B > 0$ .

ג. האם גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $x$  עבור  $B > 0$ ?

נמק אלגברית וגרפית (היעזר בסעיף הקודם).

ד. מצא את  $B$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יחתוך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x=2$  וקבע איזה גרף מבין השנים יהיה מעל השני ובכמה יחידות.

$$(7) \quad \text{מצא בכמה יחידות יש להוריד את גרף הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ על מנת שהיא תהיה}$$

אי-חיובית בכל תחום הגדרתה.

$$(8) \quad \text{הפונקציה: } f(x) = \sqrt{x} + b, \quad (b \text{ פרמטר}) \text{ חותכת את ציר ה-} x \text{ בנקודה שבה } x=9.$$

מצא בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה:  $g(x) = \sqrt{x}$ .

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{9-x^2}.$$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נקודת הקיצון המקומית שלה

ונקודות החיתוך שלה עם הצירים.

ב. מגדירים את הפונקציה  $g(x) = f(x) + 3$ .

סרטט במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

**(10)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+b}{(x+a)^2}$ ,  $a, b \neq 0$ . ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון  $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

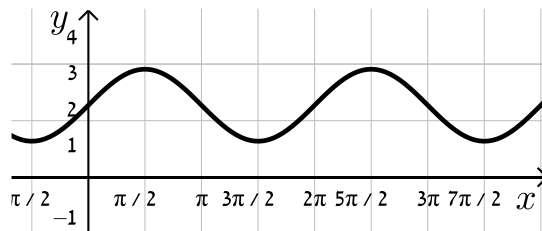
ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום ההגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה.

ג. מגדירים:  $g(x) = f(x) + k$ . מצא לאלו ערכי  $k$  יהיה גרף הפונקציה  $g(x)$  כולו מתחת לציר ה- $x$ .

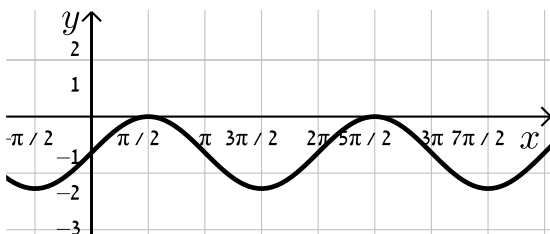
**(11)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x + b$ .

קבע את הערך של  $b$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



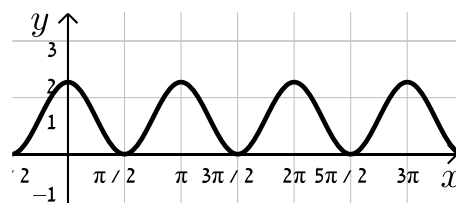
ב.



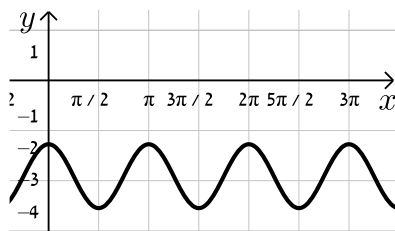
**(12)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos 2x + b$ .

קבע את הערך של  $b$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



ב.



**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{x+1}{x+b}$ ,  $(a, b)$  פרמטרים.

ידוע כי הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  מקיימת:  $f(x) = g(x) + k$

כאשר  $k$  הוא ערך קבוע כלשהו.

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$ ,  $b$  ו- $k$ .

ב. מצא את נק' הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות.

ג. הראה כי לפונקציות אין נקודות פיתול.

ד. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

ציין על הגרפים את נקודות הקיצון והחיתוך עם הצירים.

**14** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a}}{x+1}$ ,  $a$  פרמטר.

ידוע כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי של  $-\sqrt{2}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מגדירים פונקציה:  $g(x) = f(x) + k$ . מצא את הערכים של  $k$  עבורם לפונקציה  $g(x)$  ולציר ה- $x$  לא יהיו נקודות משותפות כלל.

**15** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{ax^2+2x+2}}$ ,  $a \neq 0$  פרמטר.

א. עבור אלו ערכים של  $a$  הפונקציה מוגדרת לכל  $x$ ?

ב. הבע באמצעות  $a$  את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה אם נתון שהפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

ג. ידוע כי לפונקציה:  $g(x) = f(x) - a$  יש נקודת קיצון על ציר ה- $x$ . מצא את ערכו של  $a$ .

**16** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sin x + a}{\cos x + 1}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , ( $a$  פרמטר).

א. עבור אילו ערכים של  $a$  אין לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון.

ב. מגדירים פונקציה נוספת ע"י הוספת הקבוע  $k$  באופן הבא:  $g(x) = f(x) + k$ .

ידוע כי ל- $g(x)$  נקודת קיצון  $\left(-\frac{\pi}{4}, 3\right)$ .

מצא את ערכו של הפרמטר  $k$ .

**17** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)^2}$ .

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

iii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \frac{9x-8x^2}{(2x-1)^2}$ .

- i. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?
- ii. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$  עם הצירים?
- iii. הראה כי לכל נקודה  $A(x_0, y_0)$  שבתחום ההגדרה של  $f(x)$ , מתקיים:  $f(x_0) - g(x_0) = k$  ומצא את  $k$ .  
מה ניתן לומר על הקשר שבין שתי הפונקציות?
- ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות.

**18** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a}}$ , כאשר  $a$  הוא פרמטר השונה מאפס.

- א. הבע את תחום ההגדרה של  $f(x)$  באמצעות  $a$  (הבחן בין שני מקרים).
- ב. הראה כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון והבע את סוגה כתלות ב- $a$ .  
עבור הסעיפים הבאים הנח כי  $a = 3$ .
- ג. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. כתוב את האסימפטוטה האופקית של  $f(x)$ .
- ii. מצא את נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם הצירים.
- iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \frac{bx + 3b + (\sqrt{x+3})\sqrt{x+3} + 2x + 6}{x+3}$ .  
 $b$  פרמטר.

- i. הבע באמצעות  $b$  את האסימפטוטה האופקית של  $g(x)$ .
- ii. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם ניתן לכתוב את  $g(x)$  באופן הבא:  $g(x) = f(x) + k$ . אם כן, הבע את  $k$  באמצעות  $b$ .

## תשובות סופיות:

- (1) סרטוט בסוף.
- (2) א.  $b=18$  ב.  $b=4$  ג.  $b=-3$ .
- (3) ההתאמה:  $f(x) \rightarrow b, g(x) \rightarrow c, h(x) \rightarrow a$ .
- (4) א.  $g(x) = x^3 - 4x + A$  ב.  $A = -5$  ג.  $A = 3$ .
- (5) א. הוכחה. ב.  $h(x) = \frac{3+4x}{x}$ .
- (6) א.  $f(x) \rightarrow y=0, g(x) \rightarrow y=B$  ב. סרטוט בסוף ג. לא.
- ד.  $B = -\frac{1}{2}$   $f(x)$  נמצאת מעל  $g(x)$  ב-  $\frac{1}{2}$  יחידה.
- (7)  $\frac{1}{2}$  יחידה (לפחות).
- (8) 3 יחידות.
- (9) א. תחום הגדרה:  $-3 \leq x \leq 3$ , נקודת קיצון:  $\max(0, 3)$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 3), (3, 0), (-3, 0)$  ב. סרטוט בסוף.
- (10) א.  $a=3, b=2$  ב. תחום הגדרה:  $x \neq -3$ , נקודת קיצון:  $\max\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ , עולה:  $-3 < x < -1$ , יורדת:  $-1 < x$ ,  $x < -3$ , חיתוך עם הצירים:  $(-2, 0), \left(0, \frac{2}{9}\right)$ .
- אסימפטוטות:  $x = -3, y = 0$  ג.  $k < -\frac{1}{4}$ .
- (11) א.  $b=2$  ב.  $b=-1$ .
- (12) א.  $b=1$  ב.  $b=-3$ .
- (13) א.  $a=1, b=2, k=1$  ב. נקודת קיצון של  $f(x)$ :  $\max\left(-1\frac{1}{2}, -3\right)$ .
- נקודת קיצון של  $g(x)$ :  $\max\left(-1\frac{1}{2}, -4\right)$ . תחום עלייה:  $x < -2$  או  $-2 < x < -1\frac{1}{2}$ , תחום ירידה:  $-1\frac{1}{2} < x < -1$  או  $-1 < x$ .
- ג. סעיף הוכחה, אין נקודות פיתול. ד. סרטוט בסוף.
- (14) א.  $a=-2$   $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x+1}$  ב. תחום הגדרה:  $x \leq -\sqrt{2}$  או  $\sqrt{2} \leq x$ , נקודת קיצון:  $\max(-\sqrt{2}, 0), \min(\sqrt{2}, 0), \min(-2, -\sqrt{2})$ . תחום עלייה:  $\sqrt{2} < x$  או  $-2 < x < -\sqrt{2}$ , תחום ירידה:  $x < -2$ .

נקודות חיתוך עם הצירים:  $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ .

אסימפטוטות: יש אסימפטוטה אופקית  $y=1$  כאשר  $x \rightarrow \infty$ , כאשר  $y=-1$  כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .  
 סרטוט בסוף.

ג.  $k > \sqrt{2}$  או  $k \leq -1$ .

(15) א.  $a > \frac{1}{2}$       ב.  $\max\left(-\frac{1}{a}, \sqrt{\frac{a^3}{2a-1}}\right)$       ג.  $a=1$ .

(16) א.  $a=0$       ב.  $k=3$ .

(17) א. i.  $x \neq 0.5$       ii. אין.      iii.  $(0, 2)$       iv.  $x=0.5, y=0$ .

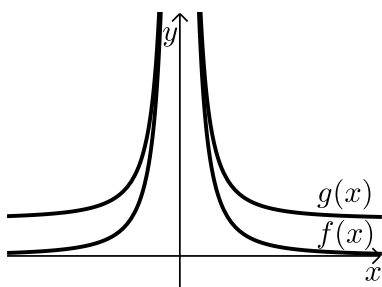
ב. i.  $x \neq 0.5$       ii.  $(0, 0), \left(\frac{9}{8}, 0\right)$       iii.  $g(x) = f(x) - 2, k=2$ .

(18) א.  $a > 0: x \geq 0$ ,  $a < 0: x > -a$       ב. אם  $a > 0$ , אז:  $\max(1, \sqrt{a+1})$

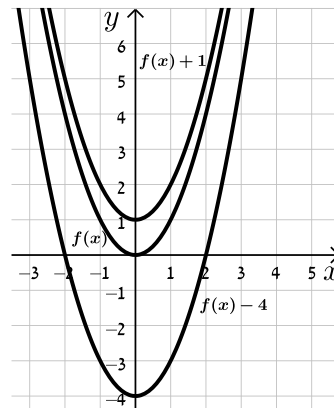
אם:  $-1 < a < 0$  אז:  $\min(1, \sqrt{a+1})$       אם:  $a \leq -1$  אז: אין קיצון.

ג. i.  $y=1$       ii.  $(0, \sqrt{3})$       ד. i.  $y=b+3$       ii. כן,  $k=b+2$ .

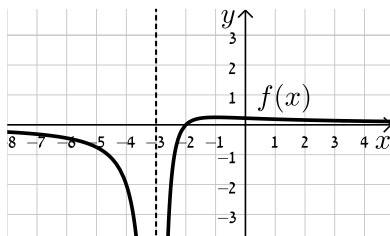
### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:



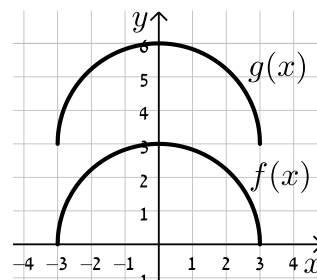
(6)



(1)

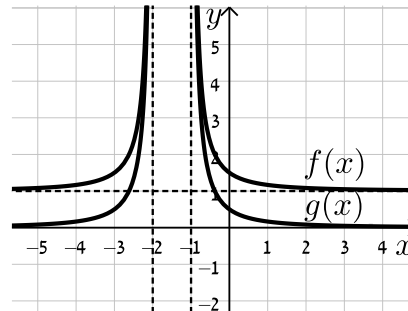


(10)

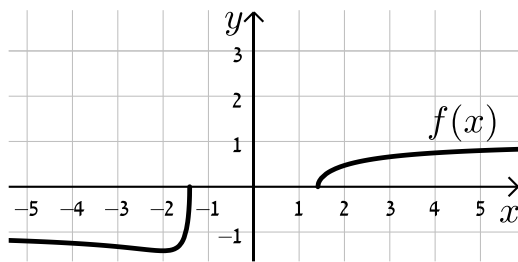


(9)

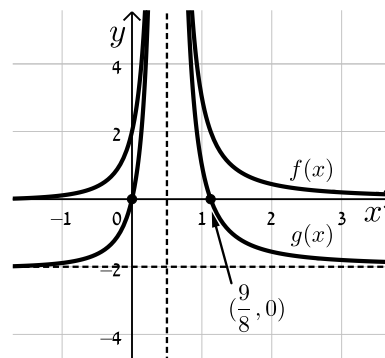
(13



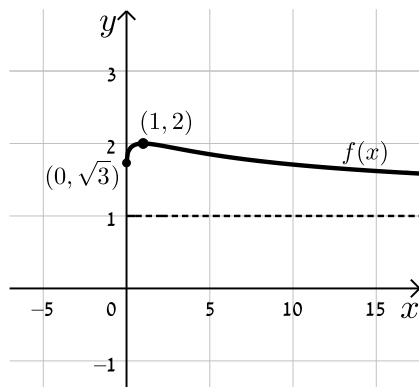
(14



(17



(18



## הכפלת פונקציה בקבוע:

### שאלות:

(19) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x^2, \quad h(x) = 4x^2$$

(20) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad h(x) = \frac{1}{4}x^2$$

(21) סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = -2x^2, \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

(22) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 8 - x^3$

א. מגדירים פונקציה חדשה:  $g_1(x) = m \cdot f(x)$ ,  $m > 1$

סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g_1(x)$ .

ב. מגדירים פונקציה חדשה:  $g_2(x) = m \cdot f(x)$ ,  $0 < m < 1$

סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g_2(x)$ .

ג. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה-y,

ב-B<sub>1</sub> את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $g_1(x)$  עם ציר ה-y

וב-B<sub>2</sub> את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $g_2(x)$  עם ציר ה-y.

i. מצא את ערך הפרמטר  $m$  עבור סעיף א' שמקיים:  $y_{B_1} - y_A = 24$

ii. מצא את ערך הפרמטר  $m$  עבור סעיף ב' שמקיים:  $y_A - y_{B_2} = 4$

(23) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = 3 \cdot f(x)$ . ענה על השאלות הבאות:
  - i. מהו תחום ההגדרה של  $g(x)$ ?
  - ii. מהן נקודות הקיצון של  $g(x)$ ?
  - iii. מהם תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$ ?
  - iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם הצירים?
  - v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $g(x)$ ?
- ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה  $g(x)$  לצד  $f(x)$ .

(24) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = -2 \cdot f(x)$ . ענה על השאלות הבאות:
  - i. מהו תחום ההגדרה של  $g(x)$ ?
  - ii. מהן נקודות הקיצון של  $g(x)$ ?
  - iii. מהם תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$ ?
  - iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם הצירים?
  - v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $g(x)$ ?
- ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה  $g(x)$  לצד  $f(x)$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$ ,  $a \neq 0$ .

- ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון עבור  $x=1$ .
- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$  ואת תחום הגדרתה.
  - ב. האם יש ל- $f(x)$  נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן וקבע את סוגן.
  - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ד. מהן האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $f(x)$ ?

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה של  $f(x)$ .

ו. מגדירים את הפונקציה  $g(x) = k \cdot f(x)$ .

ידוע כי ל- $g(x)$  יש נקודת קיצון  $(1,1)$ .

מצא את  $k$  ואת נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה  $g(x)$ .

ז. מוסיפים קבוע  $B$  לפונקציה  $g(x)$  כך שמתקבלת הפונקציה  $h(x) = g(x) + B$

ובה אחת מנקודות הקיצון נמצאת על ציר ה- $x$ .

מצא את כל הערכים האפשריים עבור הקבוע  $B$ .

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x^3 - x$  ומגדירים גם את הפונקציה:  $g(x) = -f(x)$ .

א. מצא את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. התייחס לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  וענה על השאלות הבאות:

i. הוכח כי לשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ .

ii. מה הקשר בין נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  של כל פונקציה?

iii. מה הקשר בין נקודות הקיצון של כל פונקציה?

iv. האם, ואם כן – כיצד, משתנים תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$  ביחס

ל- $f(x)$ ? נמק.

**(27)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = k \cdot \frac{x-1}{x^2+3}$ ,  $k > 0$ .

ידוע כי הנקודה הגבוהה ביותר על גרף הפונקציה מקיימת:  $y = 1$ .

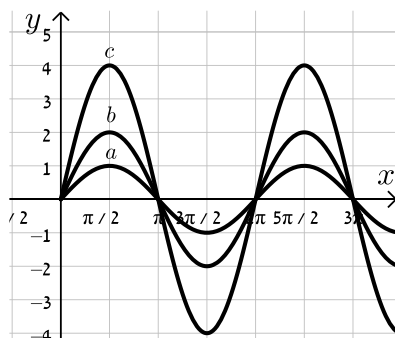
א. מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה

וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוסף באותו הסרטוט סקיצה של הפונקציה:  $g(x) = -f(x)$ .



**(28)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = k \sin x$ .

באיור שלפניך 3 גרפים שונים.

קבע מה צריך להיות ערכו של הפרמטר  $k$

עבורו כל גרף יתאים לפונקציה  $f(x)$ :

**(29)** מהפונקציה  $f(x) = \cos x$  בונים פונקציה חדשה  $g(x)$  המתקבלת ע"י הכפלת

הפונקציה המקורית פי 3 והזזתה כלפי מעלה ב-2 יחידות.

א. סרטט סקיצה של הפונקציה  $g(x)$ .

ב. בהנחה וסדר הפעולות של יצירת הפונקציה  $g(x)$  היה הפוך, כלומר תחילה

היינו מזיזים את הפונקציה המקורית כלפי מעלה ב-2 יחידות ורק לאחר מכן

הפונקציה הייתה מוכפלת פי 3, האם הפונקציה המתקבלת הייתה זהה לזו

שקיבלת בסעיף הקודם? נמק.

## תשובות סופיות:

(19) סרטוט בסוף.

(20) סרטוט בסוף.

(21) סרטוט בסוף.

(22) א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. i.  $m=4$  ii.  $k=\frac{1}{2}$ .(23) א. תחום הגדרה: כל  $x$  ב. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, \frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $x < -2$ יורדת:  $x > -2$  ד. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ ה. אסימפטוטות:  $y=0$  ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל  $x$ .ii. נקודת קיצון:  $\min\left(-2, \frac{3}{4}\right)$  iii. עולה:  $x < -2$ , יורדת:  $x > -2$ iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{3}{8}\right)$  v. אסימפטוטות:  $y=0$ 

ח. סרטוט בסוף.

(24) א. תחום הגדרה: כל  $x$  ב. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, \frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $x < -2$ יורדת:  $x > -2$  ד. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ ה. אסימפטוטות:  $y=0$  ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל  $x$ ii. נקודת קיצון:  $\min\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  iii. עולה:  $x > -2$ , יורדת:  $x < -2$ iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$  v. אסימפטוטות:  $y=0$ 

ח. סרטוט בסוף.

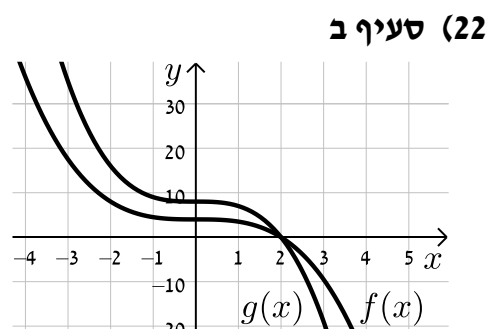
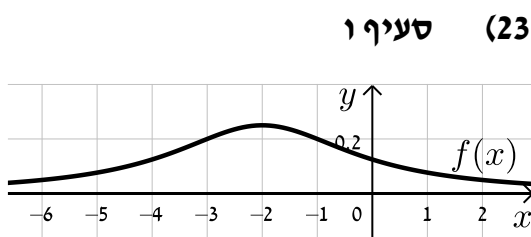
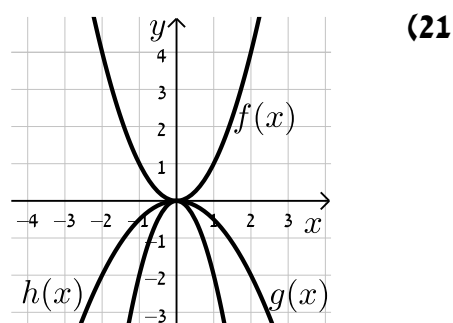
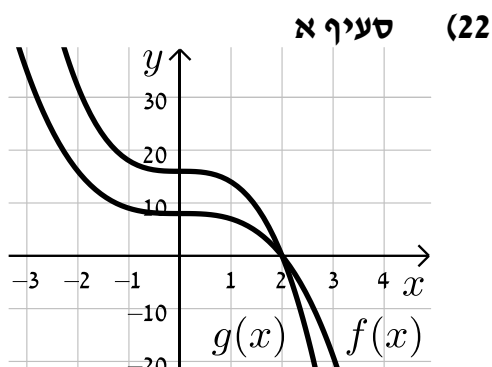
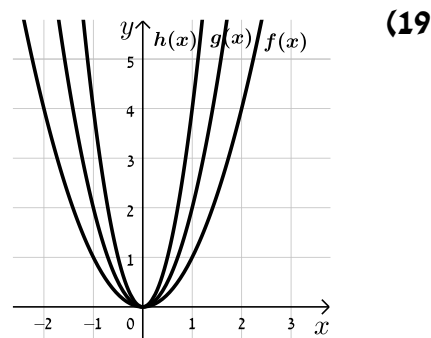
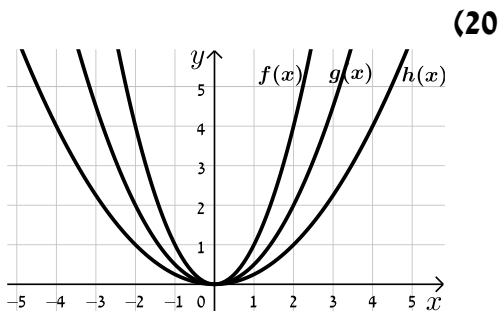
(25) א.  $a=1$ ,  $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ , תחום הגדרה: כל  $x$ ב. נקודות קיצון:  $\min\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\max\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ג. עולה:  $-1 < x < 1$ , יורדת:  $x < -1$ ,  $x > 1$  ד. אסימפטוטות:  $y=0$ ה. סרטוט בסוף. ו.  $k=2$ ,  $\min(-1, -1)$  ז.  $B=\pm 1$ .(26) א. נקודות קיצון:  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -0.192\right)$ ,  $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, 0.192\right)$ , נקודות חיתוך עםהצירים:  $(0,0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  ב. סרטוט בסוף.

- ג. i. הוכחה. ii. זו אותה נקודה.  
 iii. שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון זהים, אך שיעורי ה- $y$  הפוכים בסימנם וסוג הקיצון הפוך.  
 iv. כל תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

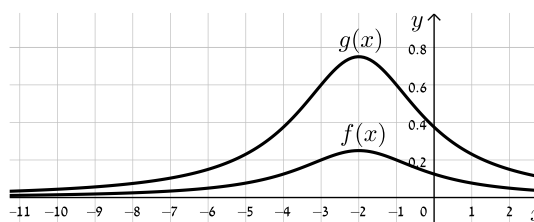
27 א.  $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$ ,  $k=6$

- ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון:  $\min(-1, -3)$ ,  $\max(3, 1)$ , עולה:  $-1 < x < 3$ , יורדת:  $x < -1$ ,  $x > 3$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -2)$ ,  $(1, 0)$ , אסימפטוטות:  $y=0$ .  
 ג. סרטוט בסוף.  
 ד. סרטוט בסוף.  
 28  $a:k=1$ ,  $b:k=2$ ,  $c:k=4$   
 29 א. סרטוט בסוף. ב. לא הייתה מתקבלת אותה הפונקציה.

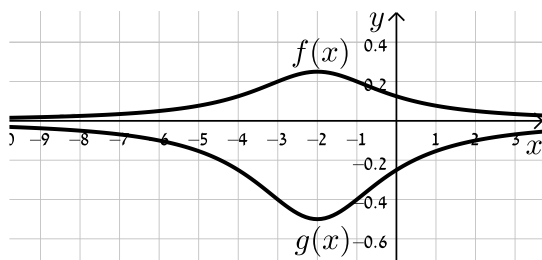
### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:



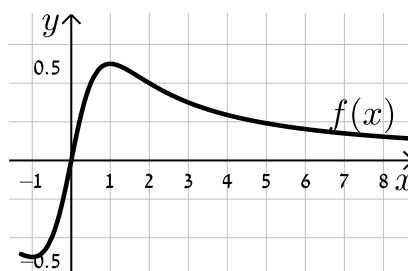
(23) סעיף ח



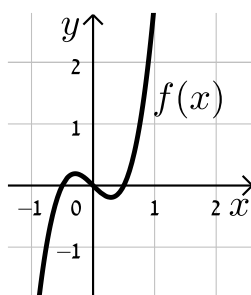
(24) סעיף ח



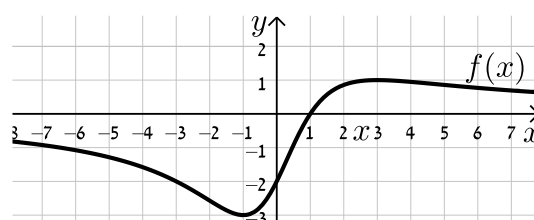
(25)



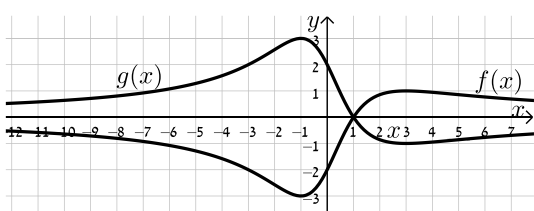
(26)



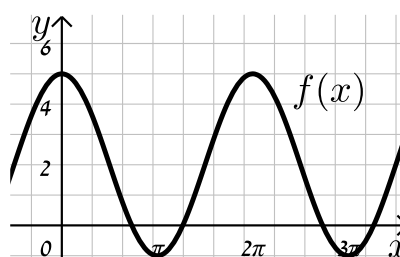
(27) סעיף ג



(27) סעיף ד



(29)



## הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

### שאלות:

(30) לפניך הפונקציה:  $f(x) = x^2$ .

סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה  $f(x)$  ואת הגרפים של הפונקציות:  $g(x) = f(x-2)$  ו-  $h(x) = f(x+3)$ .

(31) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2$ .

א. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$  3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$  4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$   $\frac{1}{2}$  יחידה שמאלה ולמעלה.

(32) נתונה פונקציה  $f(x) = x^2$ . מזיזים את הפונקציה ומקבלים:  $g(x) = f(x+a)+b$ .

כאשר  $a$  ו-  $b$  הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו-  $b$  אם ידוע כי:  $g(x) = x^2 + 2x$ .

ב. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו-  $b$  אם ידוע כי:  $g(x) = x^2 - 4x + 7$ .

(33) מזיזים את גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה  $g(x)$ .

א. כתוב באופן מפורש את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה  $f(x)$  שמאלה על מנת

שיחתוך את ציר ה-  $y$  בנקודה שבה  $y = 1$ .

(34) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ .

א. כתוב את תחום ההגדרה של  $f(x)$  ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = f(x-1)$ .

i. כתוב באופן מפורש את הפונקציה  $g(x)$ .

ii. על סמך ממצאך מהסעיפים הקודמים, סרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$ .

**(35)** לפי הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות קיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

iv. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

vi. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. סרטט את גרף הפונקציה  $g(x) = \frac{(x+2)^3}{x-2}$  על סמך הסעיפים הקודמים.

**(36)** מזיזים את הפונקציה:  $f(x) = \sin x + \cos x$  במספר יחידות  $a$  כך שיש לה נקודת מקסימום על ציר ה- $y$ .

א. מצא בכמה יחידות יש להזיז את הפונקציה  $f(x)$  על מנת שתקיים את

הדרישה וקבע האם התזוזה היא ימינה או שמאלה. נמק.

האם קיים רק ערך אחד של הפרמטר  $a$  אשר מקיים את דרישה זו?

ב. היעזר בזהות:  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  והראה כי הפונקציה

המוזזת יכולה להיות מיוצגת ע"י  $g(x) = k \cos x$  ומצא את ערך הפרמטר  $k$ .

## תשובות סופיות:

(30) סרטוט בסוף.

(31) א.  $g(x) = x^2 - 6x + 13$     ב.  $g(x) = x^2 + 8x + 14$     ג.  $g(x) = x^2 + x + \frac{3}{4}$

(32) א.  $a = 1, b = -1$     ב.  $a = -2, b = 3$

(33) א.  $g(x) = \sqrt{x-5}$     ב. 1.

(34) א. תחום הגדרה:  $x \neq -1$ , אסימפטוטות:  $x = -1$

ב. נקודות קיצון:  $\min(1, -1), \max(-3, -9)$

ג. עולה:  $x < -3, x > 1$ , יורדת:  $-3 < x < -1, -1 < x < 1$

ד. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 0), (3, 0)$

ה. סרטוט בסוף    ו.  $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$     ii. סרטוט בסוף.

(35) א. i. תחום הגדרה:  $x \neq 4$     ii. נקודת קיצון:  $\min(6, 108)$

iii. עולה:  $x > 6$ , יורדת:  $4 < x < 6, x < 4$

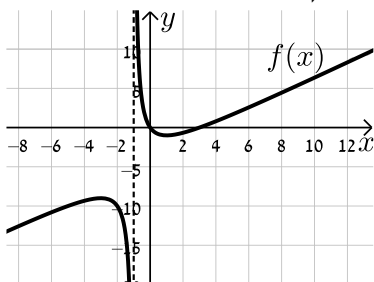
iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$

v. אסימפטוטות:  $x = 4$     vi. סרטוט בסוף    ב. סרטוט בסוף.

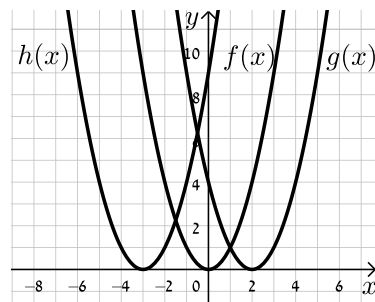
(36) א.  $\frac{\pi}{4}$  יחידות.    ב.  $k = \sqrt{2}$

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

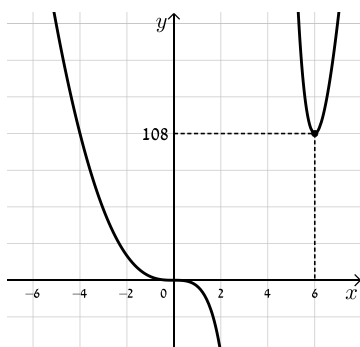
(34) סעיף ה



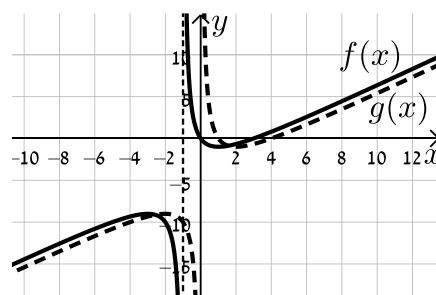
(30)



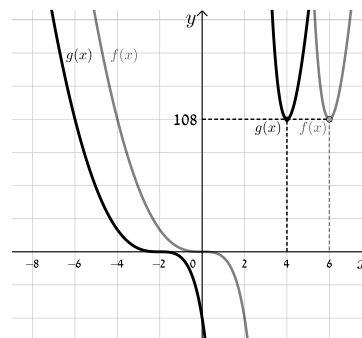
(35) סעיף א. iv.



(34) סעיף ו. ii.



**35) סעיף ב**



## מתיחה וכיווץ של פונקציה:

### שאלות:

**(37)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2$ . כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את

$$\text{הפונקציות הבאות: } g(x) = f(2x), h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

**(38)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 6x - 2x^2$ . כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת

$$\text{את הפונקציות הבאות: } g(x) = f(2x), h(x) = f\left(\frac{x}{4}\right).$$

**(39)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 12x - 3x^3$ . רוצים לכווץ את הפונקציה כך שנקודת החיתוך החיובית שלה עם ציר ה- $x$  תקטן פי 4. כתוב פונקציה מפורשת המתארת את הכיווץ הנ"ל.

**(40)** הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^4 - 8x}{16}$  חותכת את ציר ה- $x$  בחלקו החיובי בנקודה A.

מצא כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו  $(1, 0)$ .

**(41)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 6x - x^2$ . רוצים לכווץ אותה פי  $k$  כך שנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $x$  שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב- $g$ .

א. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$ .

ב. כתוב את הפונקציה המכווצת  $g(x)$  בצורה מפורשת.

ג. סרטט את הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  באותה מערכת צירים.

ד. הראה כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

**(42)** גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax - x^2}$ ,  $a \neq 0$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A שאינה בראשית

הצירים, וגרף הפונקציה  $g(x) = f(4x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה B שאינה

בראשית הצירים. ידוע כי  $x_B = 3$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  וחקור את הפונקציה  $f(x)$  לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון (מקומיות ומוחלטות אם ישנן) וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. היעזר בתוצאות הסעיף הקודם וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נמק כל שלב בקביעותיך.

**(43)** מותחים את הפונקציה  $f(x) = \sqrt{4 - 3x - x^2}$  פי  $k$ ,  $k > 1$  כך שמתקבלת

הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי תחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $-16 \leq x \leq 4$ .

א. מצא את  $k$ .

ב. האם לגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  אותה נקודת קיצון מקומית?

אם כן – מהי? אם לא – נמק קביעותיך.

**(44)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{x^2 + 8x + 12}$  ומגדירים את:  $g(x) = f(x/4)$  ו- $h(x) = f(3x)$ .

א. חקור את  $f(x)$  לפי: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות

חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה.

ב. היעזר בסעיפים הקודמים וענה על השאלות הבאות:

i. מהו הקשר בין האסימפטוטות של הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  לבין

האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ ?

ii. מהו הקשר בין נקודות הקיצון של הפונקציות  $g(x)$  ו- $h(x)$  לבין נקודות

הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ?

ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ו- $h(x)$ .

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{a \sin^2 x + 1}$ ,  $a > 0$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  אם ידוע כי לפונקציה ערך מינימלי של  $\frac{1}{5}$ .
- ב. הראה כי לפונקציה נקודות מקסימום המקיימות:  $x_{\max} = \pi k$ ,  $k$  שלם. וכי הערך המירבי של הפונקציה הוא 1.
- ג. מגדירים פונקציה:  $g(x) = B \cdot f(x/m)$  אשר מקיימת:
- נקודות המקסימום של הפונקציה מקיימות:  $x_{\max} = \frac{\pi}{2} k$ ,  $k$  שלם.
  - הערך המירבי של הפונקציה הוא 2.
- מצא את ערכי הפרמטרים  $m$  ו- $B$ .

## תשובות סופיות:

$$g(x) = 4x^2, h(x) = \frac{x^2}{4} \quad (37)$$

$$g(x) = 12x - 8x^2, h(x) = 1\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} \quad (38)$$

$$f(4x) = 48 - 192x^3 \quad (39)$$

$$f(2x) = x^4 - x \quad (40)$$

$$g(x) = 18x - 9x^2 \quad \text{ב. סרטוט בסוף} \quad \text{א. } k = 3 \quad (41)$$

ד. ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום  $\max(3,9)$  הופך ל- $\max(1,9)$ ).

$$a = 12 \quad \text{א. } (42) \quad \text{i. תחום הגדרה: } 0 \leq x \leq 12 \quad \text{ii. נקודת קיצון: } \min(12,0)$$

קצה,  $\max(6,6)$ ,  $\min(0,0)$  קצה, iii. עולה:  $0 < x < 6$ , יורדת:

ב. סרטוט בסוף. iv. סרטוט בסוף  $6 < x < 12$

ב. לגרפים אין את אותה נקודת קיצון. ערך ה- $x$  של נקודת

הקיצון של  $g(x)$  גדל פי 4 ביחס ל- $f(x)$  (מ- $x_{\max} = -1.5$  ל- $x_{\max} = -6$ ) עקב חלוקת ה- $x$  ב-4, כמו כל הנקודות בפונקציה (וערך ה- $y$  נותר ללא שינוי).

א. תחום הגדרה:  $x \neq -2, -6$ , אסימפטוטות:  $y = 0$ ,  $x = -2, -6$ , נקודות חיתוך עם

הצירים:  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ , נקודת קיצון:  $\max\left(-4, -\frac{3}{4}\right)$ , עולה:  $-6 < x < -4$ ,  $x < -6$

יורדת:  $x > -2$ ,  $-4 < x < -2$  ב. i. האסימפטוטה האופקית

נותרת ללא שינוי. האסימפטוטות האנכיות משתנות ב- $g(x)$  הן מוכפלות ב-4

וב- $h(x)$  הן מחולקות ב-3. ii. ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון

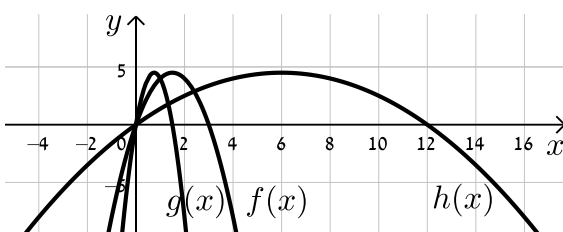
משתנה: ב- $g(x)$  הוא מוכפל ב-4 וב- $h(x)$  הוא מחולק ב-3. ערך ה- $y$  של נקודת

הקיצון נותר ללא שינוי וכך גם סוג הקיצון. ג. סרטוט בסוף.

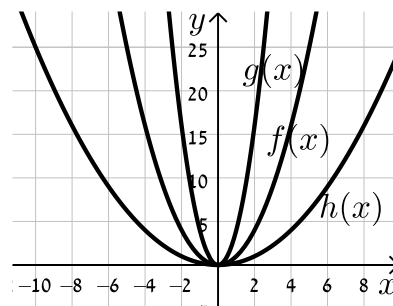
$$a = 4 \quad \text{א. } (45) \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{ג. } (0,2) \quad \text{ii. } m = \frac{1}{2}, B = 2$$

## סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

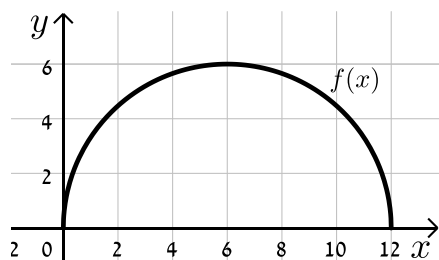
(38)



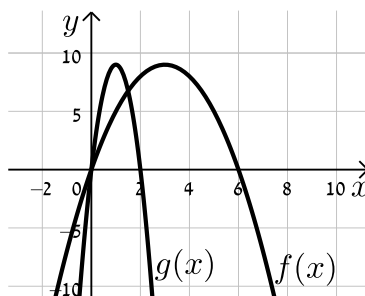
(37)



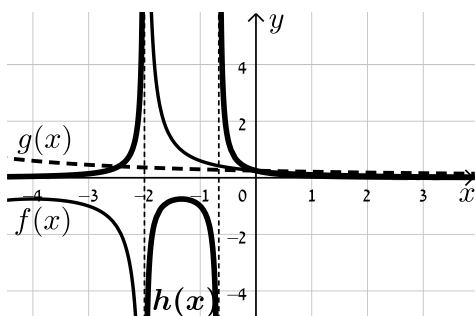
(42) סעיף א. iv.



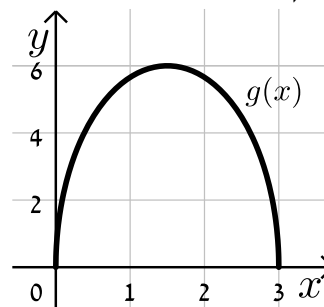
(41)



(44)



(42) סעיף ב



## היפוך גרף פונקציה ביחס לציר $y$ :

### שאלות:

**46** סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות:  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = f(-x)$  והראה כי ציר ה-  $y$  מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

**47** שקף כל אחת מהפונקציות הבאות וכתוב ביטוי מפורש לכל אחת מהן:

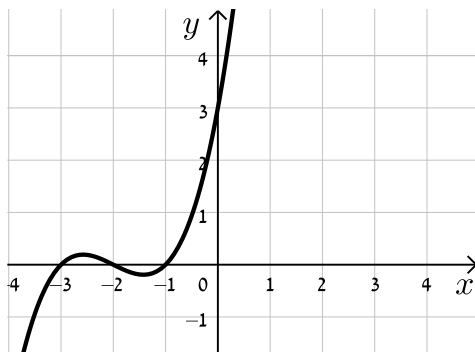
א.  $f(x) = x^3 + 2x - 1$

ב.  $f(x) = \frac{x}{x+3}$

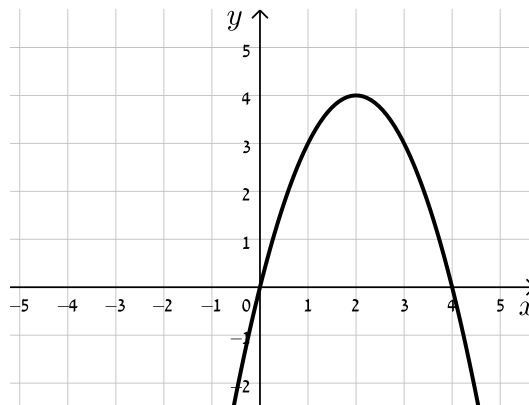
ג.  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

**48** לפניך סרטטים של פונקציות שונות. הוסף לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה-  $y$ .

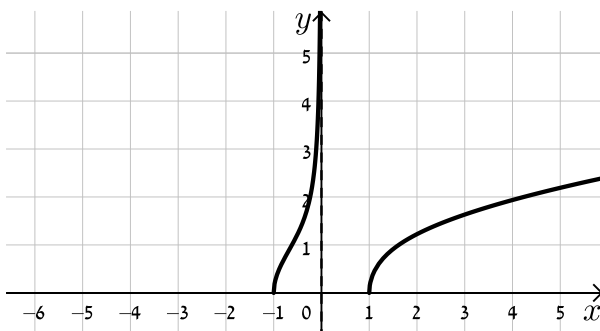
ב.



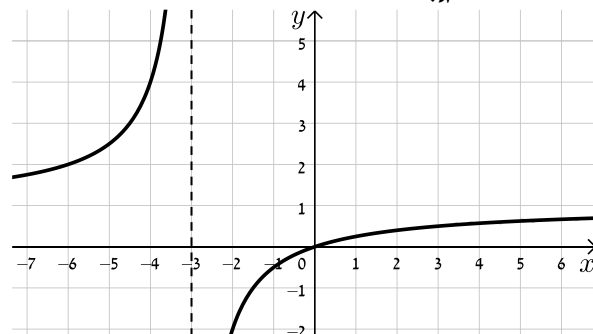
א.



ד.



ג.



(49) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .
- שקף את הפונקציה וכתוב ביטוי מפורט של הפונקציה המתקבלת.
- הראה כי נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  של הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ושל הפונקציה המשוקפת שלה הם מספרים נגדיים.

(50) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ .

- סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ,  $g(x) = f(-x)$  ו- $h(x) = -f(x)$  והסבר איזה ציר מהווה סימטריה בכל מקרה ביחס ל- $f(x)$ .

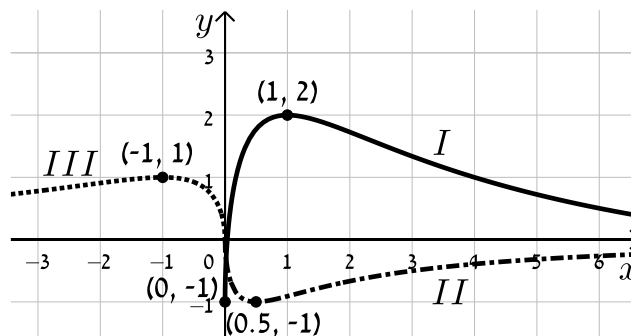
(51) הראה כי הפונקציה  $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2 + 1}$  זהה לפונקציה  $g(x) = f(-x)$  והסבר מה ניתן לומר על הגרפים של הפונקציות הללו ועל הסימטריה שלהן זו לזו ביחס לציר ה- $y$ .

(52) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{18\sqrt{x}}{x^2 + 7x + 10}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
- הראה כי הפונקציה חותכת את הצירים רק בראשית הצירים וכי ציר ה- $x$  הוא האסימפטוטה האופקית שלה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- לפניך מספר פונקציות:

- $g_1(x) = f(-x)$
- $g_2(x) = k \cdot f(x) + B$  כאשר:  $k > 1, B \neq 0$
- $g_3(x) = -f(ax)$  כאשר:  $a > 1$

באיור שלפניך מופיעים הגרפים של שלוש הפונקציות. התאם כל גרף לכל פונקציה ומצא את ערכי הפרמטרים  $k, a$  ו- $b$  על בסיס הנתונים המספריים. נמק.



(53) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{(x-a)^2}{(x-b)^3}$ ,  $a \cdot b < 0$ .

מגדירים פונקציה נוספת  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = f(ax)$ .

- א. בטא באמצעות  $a$  ו- $b$  את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $g(x)$ ?
- ג. הוכח כי לפונקציה  $g(x)$  נקודת קיצון  $(x_0, y_0)$  המקיימת:  $x_0 > 3$ .
- ד. נתון כי  $x_0 = 7$ . מצא את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה (ללא פרמטרים).
- ה. נתון כי  $y_0 = -\frac{4}{81}$ .
- i. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- ii. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .  
היעזר בהגדרת הפונקציה  $g(x)$ .

(54) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x-2} - 2x + 1}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של  $f(x)$ ?
- ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $f(x)$ .
- ג. מצא את נקודת הקיצון של  $f(x)$  ורשום את תחומי העלייה והירידה שלה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. מגדירים את הפונקציות:  $g(x) = f(ax)$  ו- $h(x) = f(x+a)$ ,  $a$  פרמטר.  
הנח  $a = 1.5$  וענה על הסעיפים הבאים:
  - i. האם לכל הגרפים אותו תחום הגדרה? נמק.
  - ii. האם לכל הגרפים אותו סוג קיצון? נמק.
  - iii. לאיזה מבין הגרפים של הפונקציות הנ"ל תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור  $x$  הקטן ביותר ולאיזה תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור  $x$  הגדול ביותר? נמק איכותית.

### תשובות סופיות:

(46) סרטוט בסוף.

(47) א.  $f(-x) = -x^3 - 2x - 1$     ב.  $f(-x) = \frac{x}{x-3}$     ג.  $f(-x) = \sqrt{-4x - x^2}$

(48) סרטוט בסוף.

(49) א.  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(2,0)$     ב.  $f(-x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$     ג. הוכחה.

(50) סרטוט בסוף. ציר ה- $y$  מהווה את ציר הסימטריה בין  $f(x)$  ל- $g(x)$  וציר ה- $x$  מהווה את ציר הסימטריה בין  $f(x)$  ל- $h(x)$ .

(51) הפונקציות זהות. עבור שתיהן ציר ה- $y$  מהווה ציר סימטריה.

(52) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x$     ב. נקודות קיצון:  $\max(1,1)$ ,  $\min(0,0)$  קצה, עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$     ג. הוכחה.    ד. סרטוט בסוף.

ה.  $g_1(x) \leftrightarrow III$ ,  $g_2(x) \leftrightarrow I$ ,  $g_3(x) \leftrightarrow II$ ,  $k=3$ ,  $B=-1$ ,  $a=2$

(53) א. תחום ההגדרה:  $x \neq \frac{b}{a}$     ב. אסימפטוטות מאונכות:  $x = \frac{b}{a}$ ,  $y = 0$

ג. הוכחה    ד.  $x = -2$     ה. i.  $a = -1$ ,  $b = 2$

ii. סרטוט בסוף.

(54) א.  $2 \leq x$     ב. אסימפטוטות מקבילות:  $y = -1$

ג. נקודות קיצון:  $\max\left(2, -1\frac{1}{3}\right)$ ,  $\min(3, -2)$ , תחום עלייה:  $3 < x$

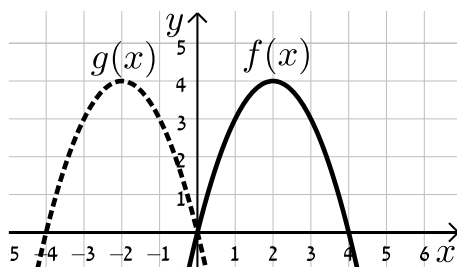
תחום ירידה:  $2 < x < 3$     ד. סרטוט בסוף.

ה. i. לא:  $h(x)x \geq \frac{1}{2}$ ,  $g(x): x \geq 1\frac{1}{3}$ ,  $f(x): x \geq 2$     ii. כן.

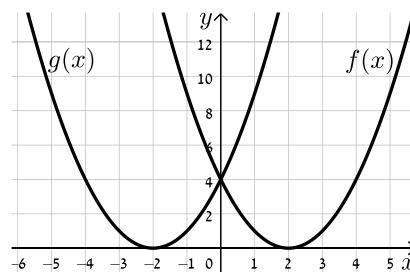
iii. ל- $f(x)$  השיעור הגבוה ביותר, ל- $h(x)$  השיעור הקטן ביותר.

### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

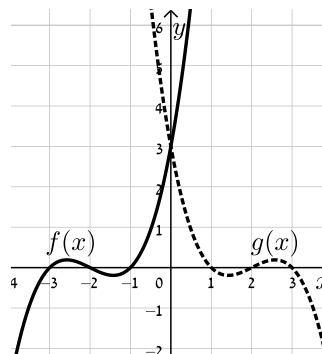
(48) סעיף א



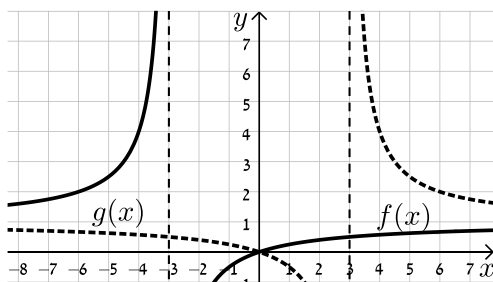
(46)



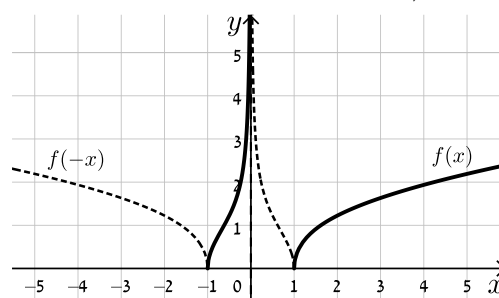
(48) סעיף ב



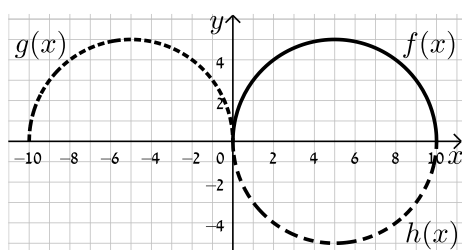
(48) סעיף ג



(49) סעיף ד



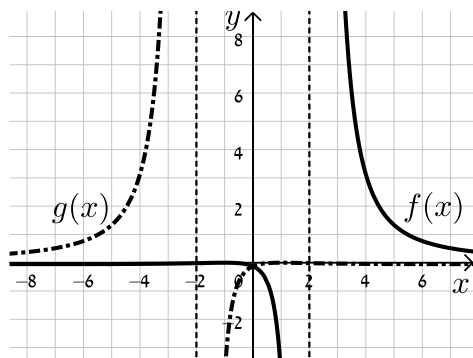
(50)



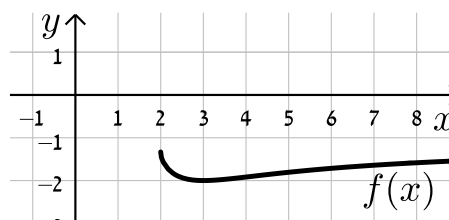
(52)



(53)



(54)



## ערך מוחלט של פונקציה:

### שאלות:

55 נתונות הפונקציות:  $f(x) = x$  ו-  $g(x) = |x|$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים עם ציר ה- $x$ .
- סרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת והסבר מה ההבדל ביניהם.
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = x - 2$ ?
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = 3(x - 2)$ ?
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = 3x - 2$ ?

56 סרטט במערכת צירים אחת את זוגות הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = x^2 - 2x$  ו-  $g(x) = |x^2 - 2x|$ .

ב.  $f(x) = x^3$  ו-  $g(x) = |x^3|$ .

ג.  $f(x) = \frac{1}{x}$  ו-  $g(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$ .

57 סרטט את הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \tan x$  ו-  $g(x) = |\tan x|$ .

58 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ועליה מבצעים את הפעולות הבאות:

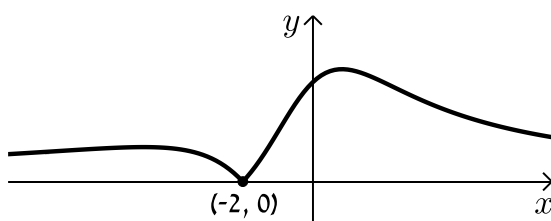
- מזיזים את הפונקציה  $f(x)$  ב-3 יחידות ימינה.
- מורידים 4 יחידות מערך הפונקציה.
- לוקחים את הערך המוחלט של הפונקציה.
- א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה המתקבלת.
- ב. האם תשתנה התוצאה אם נחליף בין שתי הפעולות הראשונות?

59 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+ax+6}$ ,  $a \neq 0$ .

באיור שלפניך מתואר גרף

הפונקציה  $g(x) = |f(x)|$ .

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .



60 לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ .

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון מקומיות וקצה (אם ישנן).

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. נקודות חיתוך עם הצירים (אם ישנן).

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוסף לאותה מערכת הצירים את הסקיצה של גרף הפונקציה:  $g(x) = |f(-x)|$ .  
נמק את שיקולך.

61 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$  בתחום  $[-2\pi : 2\pi]$ .

א. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

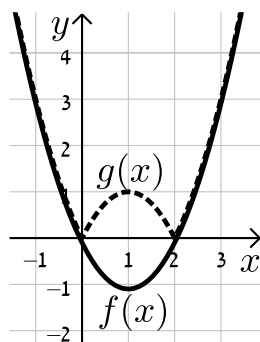
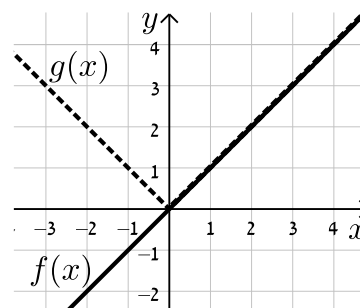
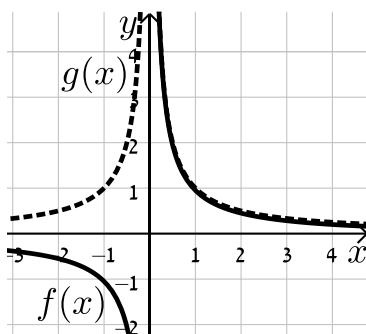
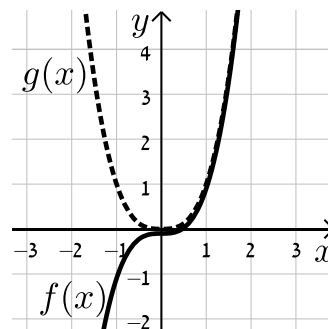
ג. נתון כי לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות בתחום הנתון.  
מצא את משוואותיהן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

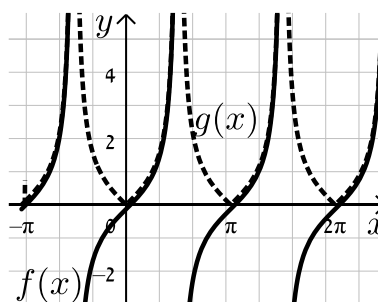
ה. קבע בכמה נקודות חותך הישר  $y = 1$  את גרף הפונקציה  $|f(x)|$  בתחום הנתון.  
מצא את נקודות החיתוך.

**תשובות סופיות:**

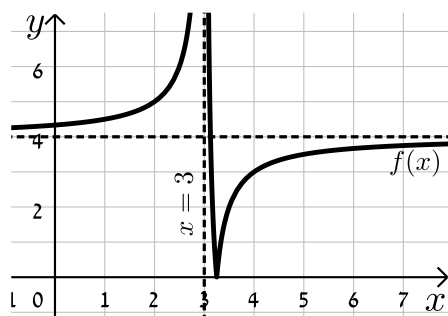
- (55) א.  $(0,0)$  ב. סרטוט בסוף.
- (56) א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. סרטוט בסוף.
- (57) סרטוט בסוף.
- (58) א. סרטוט בסוף ב. התוצאה לא תשתנה.
- (59)  $a=1$ .
- (60) א. i. תחום הגדרה:  $0 < x$  ii. נקודת קיצון: אין.  
 iii. עולה:  $x > 0$  iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(1,0)$   
 v. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.
- (61) א. הוכחה. ב.  $(0,1)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$  ג.  $x = \frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ .  
 ד. סרטוט בסוף. ה. 2 נקודות:  $(\pi, -1)$ ,  $(-\pi, -1)$ .

**סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:**
**(55) סעיף א**

**(55)**

**(56) סעיף ג**

**(56) סעיף ב**


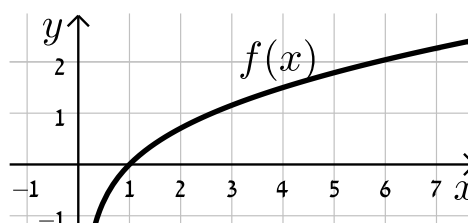
(57)



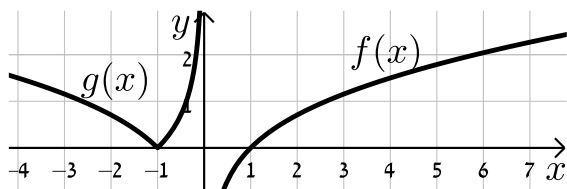
(58)



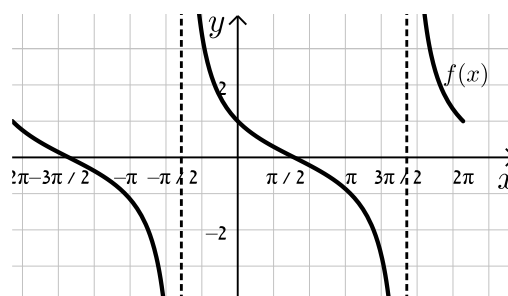
(60) סעיף א. v



(60) סעיף ב



(61)



# דיקטיקה ופדגוגיה של הוראת הטריגונומטריה בחטיבה העליונה

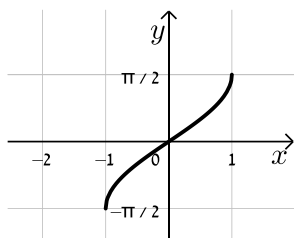
פרק 8 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות טריגונומטריות הפוכות

תוכן העניינים

1. הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... 140
2. הנגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות ..... 143

## הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

### סיכום כללי:

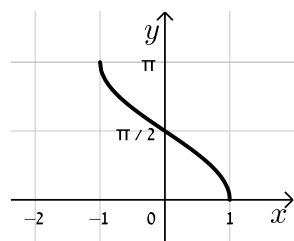


תיאור גרפי של הפונקציה :  $f(x) = \arcsin(x)$

סימון נוסף :  $f(x) = \sin^{-1}(x)$

תחום הגדרה :  $-1 \leq x \leq 1$

טווח :  $-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$

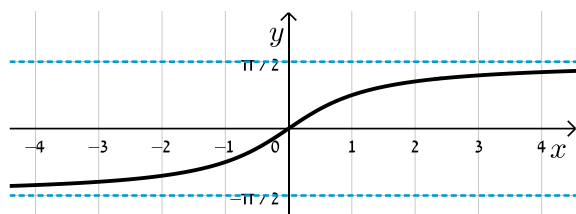


תיאור גרפי של הפונקציה :  $f(x) = \arccos(x)$

סימון נוסף :  $f(x) = \cos^{-1}(x)$

תחום הגדרה :  $-1 \leq x \leq 1$

טווח :  $0 \leq f(x) \leq \pi$

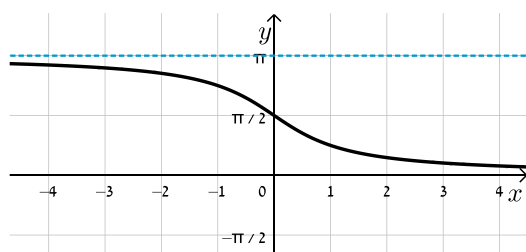


תיאור גרפי של הפונקציה :  $f(x) = \arctan(x)$

סימון נוסף :  $f(x) = \tan^{-1}(x)$

תחום הגדרה :  $-\infty < x < \infty$

טווח :  $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$



תיאור גרפי של הפונקציה :  $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

סימון נוסף :  $f(x) = \cot^{-1}(x)$

תחום הגדרה :  $-\infty < x < \infty$

טווח :  $0 < f(x) < \pi$

## קשרים בין הפונקציות הטריגונומטריות להפוכות:

עבור הפונקציות הטריגונומטריות, שאינן חח"ע, נקבל את הקשרים הבאים:

| הפונקציה | זהות                                                                                                                                                                                                  |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| סינוס    | $\sin(\sin^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$                                                                                                                                                       |
|          | $\sin^{-1}(\sin(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi(k+1) - x & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$ |
| קוסינוס  | $\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad -1 \leq x \leq 1$                                                                                                                                                       |
|          | $\cos^{-1}(\cos(x)) = \begin{cases} x - 2\pi k & 2\pi k \leq x \leq \pi(1+2k) \\ 2\pi k - x & \pi(1+2k) \leq x \leq 2\pi(k+1) \end{cases}$                                                            |
| טנגנס    | $\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$                                                                                                                                                   |
|          | $\tan^{-1}(\tan(x)) = x - \pi k \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$                                                                                                             |
| קוטנגנס  | $\cot(\cot^{-1}(x)) = x \quad -\infty < x < \infty$                                                                                                                                                   |
|          | $\cot^{-1}(\cot(x)) = x - \pi k \quad \pi k < x < \pi + \pi k$                                                                                                                                        |

## שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון:

- א.  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- ב.  $\arccos(-1)$
- ג.  $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ד.  $\arctan(-\sqrt{3})$
- ה.  $\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- ו.  $\arcsin(-0.5)$

(2) חשב ללא מחשבון:

- א.  $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- ב.  $\sin(\arcsin(-0.5))$
- ג.  $\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
- ד.  $\cos(\operatorname{arccot}(1))$
- ה.  $\sin(2\arctan(\sqrt{3}))$
- ו.  $\tan(-\operatorname{arccot}(\sqrt{3}))$

(3) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } y = \arcsin \frac{2x+1}{3-3x} & \text{ב. } y = \arccos \frac{x+3}{2x+1} \\ \text{ג. } y = \arctan \frac{1}{1-\ln x} \end{array}$$

(4) הוכח כי לכל  $x$  מתחום ההגדרה מתקיים :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} & \text{ב. } \sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ \text{ג. } \arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{ד. } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}, x \neq 0 \end{array}$$

(5) הראה את הקשר הבא :  $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $-\frac{\pi}{4}$  ב.  $\pi$  ג.  $\frac{\pi}{3}$  ד.  $-\frac{\pi}{3}$  ה.  $\phi$  ו.  $-\frac{\pi}{6}$
- (2) א.  $-\frac{\pi}{6}$  ב.  $-\frac{1}{2}$  ג.  $\frac{1}{2}$  ד. 1 ה.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ו.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (3) א.  $x \leq \frac{2}{5}, x \geq 4$  ב.  $x \leq -\frac{4}{3}, x \geq 2$  ג.  $x > 0, x \neq e$
- (4) שאלות הוכחה.
- (5) הוכחה.

## הנגזרת של פונקציות טריגונומטריות הפוכות:

### סיכום כללי:

נוסחאות הגזירה של הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

$$f(x) = \arcsin(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

### שאלות:

(1) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

(2) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = (\sin^{-1}(x))^2$

(3) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(4) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = (\cos^{-1}(x^2))^2$

(5) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x}{\arccos(x)}$

(6) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(7) גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$$(8) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \sqrt{\operatorname{arccot}(x)}$$

$$(9) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \cos(\arcsin(x^2))$$

$$(10) \quad \text{גזור את הפונקציה הבאה: } f(x) = \arctan\left(\sqrt{\sin(\sqrt{x})}\right)$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x-9}}$$

$$(2) \quad f'(x) = \frac{2\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) \quad f'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{-4x \arccos(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(5) \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^{-1}(x)} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (\cos^{-1}(x))}$$

$$(6) \quad f'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1}$$

$$(7) \quad f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(8) \quad f'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arccot}(x)}}$$

$$(9) \quad f'(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(10) \quad f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sin\sqrt{x})\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$