גלים ואופטיקה 7321410

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית - 1
2. מודים עצמיים 13
3. אנליזת פורייה 14
4. מבוא לגלים 23
5. גלים רוחביים במיתר 24
6. גלים אורכיים-גלי קול 28
7. חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה) 38
8. גלים דו מימדיים ומנחה גלים 47
9. גלים אלקטרו-מגנטיים 52
10. התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים 70

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 1 - תנועה הרמונית -

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. בור פוטנציאל 4
3. תנועה הרמונית מרוסנת 6
4. תנועה הרמונית מאולצת 10

תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x-x_0)=m\ddot{x}$$

k ו$-m$- קבועים חיוביים כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k.

פתרון המשוואה:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+x_0$$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\Sigma\vec{F}=0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משוויי המשקל.

ω - תדירות זוויתית: $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

A, φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

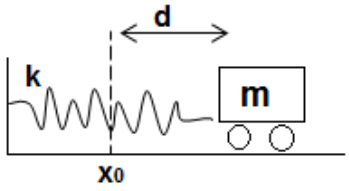
$$v_{max} = \omega A$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}mA^2$$

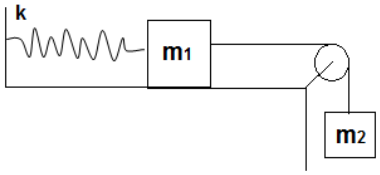
שאלות:

1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k.
מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה.
מצא את $x(t)$ של המסה.

2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



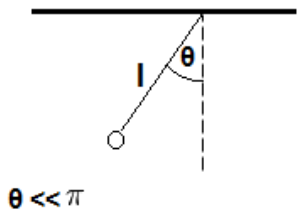
מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k. מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M.

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

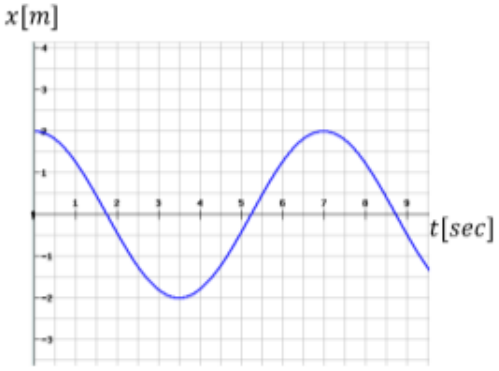
ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.
אורך החוט של המטוטלת הוא l.
מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.
הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

4) גרף מיקום זמן



הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

א. מהי אמפליטודת התנועה?

ב. מהו זמן המחזור?

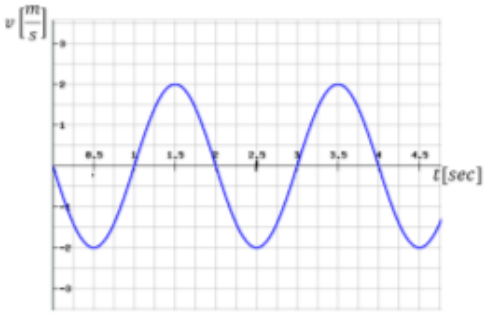
ג. מהי התדירות הזוויתית?

ד. מהי הפאזה?

ה. רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

5) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



א. מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?

ב. האם תאוצת הגוף ב- $t=1\text{sec}$ מקסימאלית?

ג. האם ב- $t=1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?

ד. מהו הכוח ב- $t=2.5\text{sec}$?

ה. כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

תשובות סופיות:

1) $x(t)=-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{2}\right)+x_0$

2) א. $x=\frac{m_2 g}{k}$ ב. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ ג. $A_{max}=\frac{g}{\omega^2}$

3) $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\theta(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

4) א. $A=2\text{m}$ ב. $T=7\text{sec}$ ג. $\omega\approx 0.898\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ד. $\varphi=0$

ה. $v(t)=-1.80\cdot\sin(0.898\cdot t+0)$

5) א. $t=0.5\text{sec}$ ב. כן. ג. כן. ד. 0

ה. 2

בור פוטנציאל:

רקע:

כאשר גוף נמצא בנקודת מינימום של הפוטנציאל והאנרגיה הכללית שלו גדולה רק במעט מהאנרגיה הפוטנציאלית אז הוא מבצע תנועה הרמונית בתדירות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

כאשר x_0 היא נקודת המינימום ו- U'' נגזרת שניה בנקודה

שאלות:

1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס

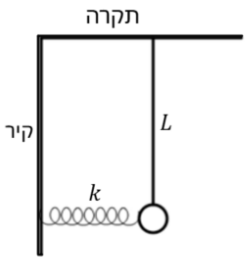
פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה: $U(r)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$

כאשר ε ו- r_0 קבועים ו- r הוא המרחק בין המולקולות.

מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.

ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה m המרגיש את הפוטנציאל מחלקיק שני במסה M הנשאר נייח $(m << M)$.

2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות



מטוטלת עם מסה m תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך L.

קושרים למסה קפיץ בעל קבוע k המחובר אופקית לקיר.

הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.

מזיזים את המסה זווית קטנה θ_0 ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.

ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך כדי תנועה.

3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך L.

לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה m

באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך l ובזווית α.

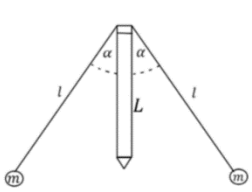
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית θ במישור הדף.

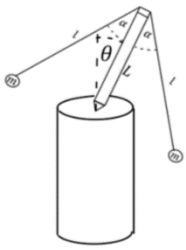
א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית θ.

ב. באיזו זווית θ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?





תשובות סופיות:

1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}}$

2) א. $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mg+kL}{mL}} \cdot t\right)$ ב. $T = mg + (mg+kL)\theta_0^2$

3) א. $U = 2mg(L - l\cos\alpha)\cos\theta$ ב. $\theta = 0$ ג. $L < l\cos\alpha$

ד. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l\cos\alpha - L}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\alpha}}}$

תנועה הרמונית מרוסנת:

רקע:

משוואת התנועה:

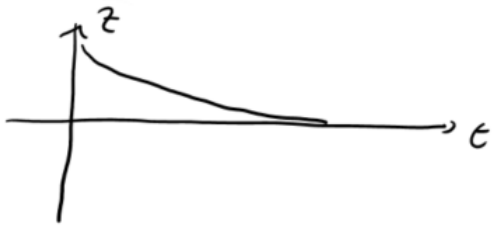
$$\ddot{z}+\Gamma\dot{z}+\omega_0^2 z=0$$

$$\Gamma=\frac{\lambda}{m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

(I). ריסון חזק: $\frac{\Gamma}{2}>\omega_0$

$$z(t)=e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}+Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2-\omega_0^2}\cdot t}\right)$$



אין תנודות.

(II). ריסון קריטי: $\frac{\Gamma}{2}=\omega_0$

$$z(t)=(A+B\cdot t)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

(III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

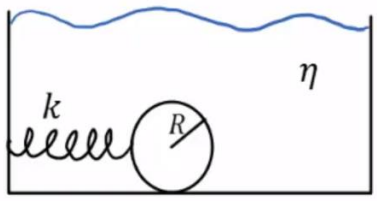
$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

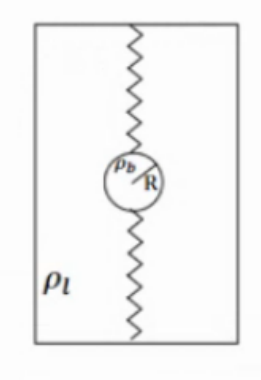
שאלות:

1) כדור במיכל מים



כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל.
קבוע הקפיץ הוא k. בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא: $\vec{F}=-6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.
התייחס ל- m, k, η, R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור בהנחה ש- $R<\frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.
נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,
ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים ו- η - צמיגות המים.
(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F=\rho_l Vg$ וכוח סטוקס: $F=-6\pi\eta Rv$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.
ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?
מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.
ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.
בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20\frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה.
הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי?
(הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25\frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\text{k}}{\text{m}} - \left(\frac{3\pi\text{R}\eta}{\text{m}}\right)^2}$

2) א. $y_{eq} = \frac{\text{F}_b}{2\text{K}}$ ב. $\omega^* = \sqrt{\frac{2\text{K}}{\text{m}} - \left(\frac{6\pi\eta\text{R}}{2\text{m}}\right)^2}$ ג. $\frac{2\text{K}}{\text{m}} = \frac{6\pi\eta\text{R}^2}{2\text{m}}$

3) 5%

4) א. 1.6sec ב. בערך מחזור אחד.

5) א. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\cdot\sqrt{2}t}$

תנועה הרמונית מאולצת:

רקע:

כוח מאלץ:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים במצב עמיד נזניח את הפתרון ההומוגני.

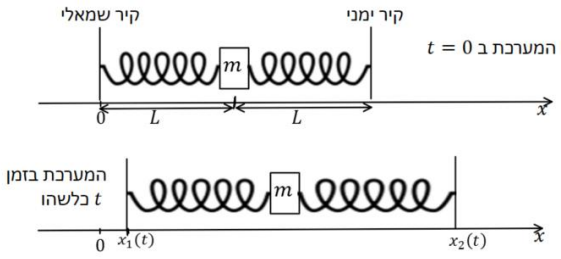
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma\, \Omega}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה - התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

שאלות:

1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F=-bv$. ב-$t=0$ הקירות מתחילים לזוז.

ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה.

מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_2(t)=2L+2d\sin(\omega t)$, $x_1(t)=d\sin(\omega t)$.

נתונים: m , b , k , L , d ו- $d<<L$.

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך.

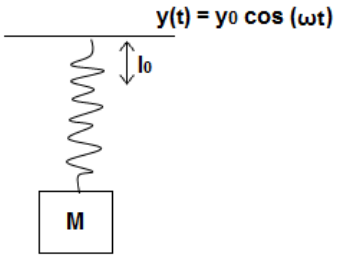
על המסה פועל כוח גרר: $f=-bv$ וכוח מאלץ: $F(t)=d\cdot\cos(\omega t)$.

מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית.

הנח כי: m , k , b , d נתונים וכי: $b<<\sqrt{mk}$.

3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y לפי: $y(t)=y_0\cos(\omega t)$.



קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים.

מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

1) א. $A(\omega)=\dfrac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$ ב. $\omega\sim\sqrt{\frac{2k}{m}}$

2) $\omega_{1,2}=\sqrt{\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}}$

3) $y(t)=\dfrac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}-\omega^2}\cos\omega t+y'_0$

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 2 - מודים עצמיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 13

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

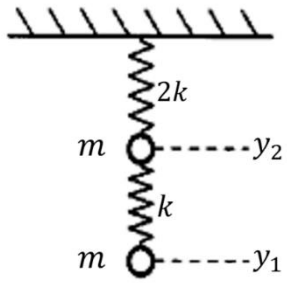
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0$ ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד.
$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$
$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 3 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 14

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2.

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x)g(x)dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

טור אקספוננטים:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$C_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$B_n=i\left(C_n-C_{-n}\right)$	$A_n=C_n+C_{-n}$
$C_{-n}=\frac{1}{2}\left(B_n+iA_n\right)$	$C_n=\frac{1}{2}\left(B_n-iA_n\right)$

$$\frac{A_0}{2}=C_0$$

תופעת גיבס:

- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

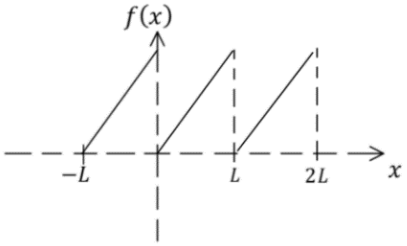
bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

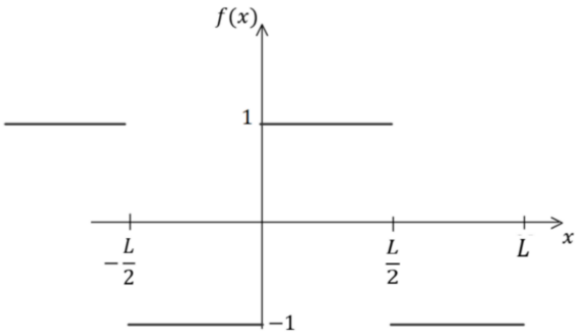
$f(x)=Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L. ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N=1$, $N=3$, $N=10$ ו- $N=50$ עבור $L=1$

$$sign(x)=\begin{cases}1, & x \ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$



3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0 \le x \le \frac{L}{2}\\ L-x, & \frac{L}{2} \le x \le L\end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \le x \le L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

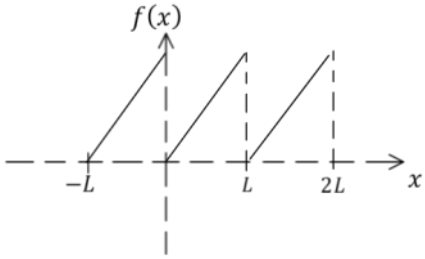
ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקצית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x)=Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x)=x$ בתחומים הבאים:

א. $[0,2\pi]$

ב. $[-\pi,\pi]$

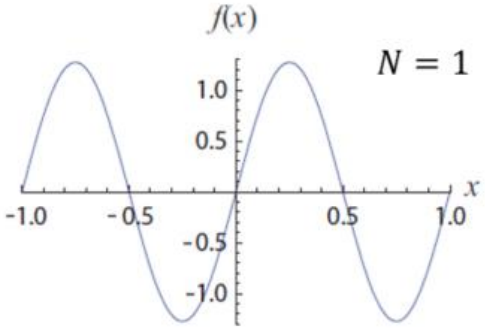
ג. $[0,4\pi]$

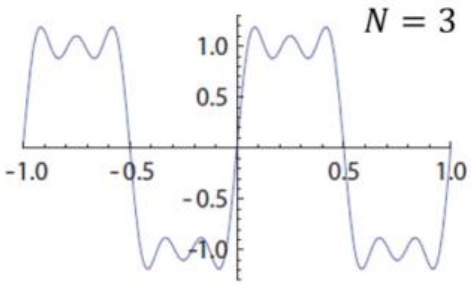
bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

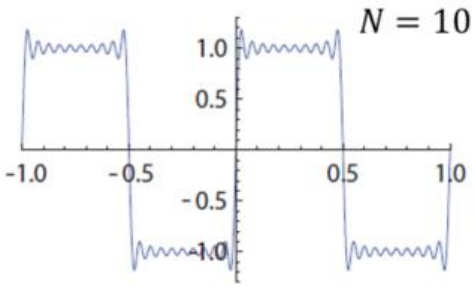
תשובות סופיות

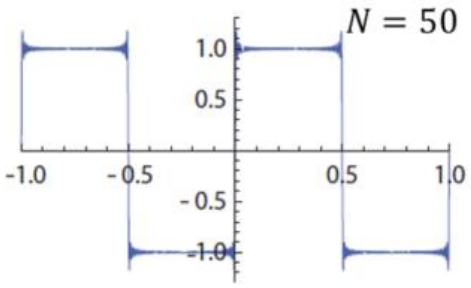
1) $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=n}^{\infty}-\frac{AL}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

2) $A_n=0$ לכל n; $B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$.









3) א. $f(x)=\frac{L}{4}-\sum_{n=1,\text{ odd}}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ג. $f(x)=\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

4) א. $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{iLA}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

ב. $A_0=AL,\ A_n=0,\ B_n=-\frac{LA}{\pi n}$

5) א. $f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$

ב. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

ג. $f(x)=2\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

התמרה (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

התמרה הפוכה

$$f(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

תכונות:

1. לינאריות: $\mathrm{FT}[\alpha f(\mathrm{x}) + \beta g(\mathrm{x})] = \alpha\mathrm{FT}[f(\mathrm{x})] + \beta\mathrm{FT}[g(\mathrm{x})]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mathrm{x})|\,\mathrm{dx} \neq \infty$ אז $f(\mathrm{x}) \in G$

- אם $f(\mathrm{x}) \in G$ אז $F(\mathrm{k})$ רציפה
- אם $f(\mathrm{x}) \in G$ אז $\lim_{\mathrm{k}\to\pm\infty} F(\mathrm{k}) = 0$, רימן - לבג
- אם $f(\mathrm{x})$ זוגית אז $\mathrm{F(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{f(x)}\cos(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $f(\mathrm{x})$ אי-זוגית אז $\mathrm{F(k)} = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{f(x)}\sin(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $f(\mathrm{x})$ ממשית אז $\overline{\mathrm{F(k)}} = \mathrm{F}(-\mathrm{k})$

התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right] = \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

$$FT\left[Ae^{-\alpha|x|}\right]=\frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1]=\delta(k)$$

<u>נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה):</u>

$$FT\left[f(x)e^{iCx}\right]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

<u>נוסחת הכיווץ והזזה:</u>

$$FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

<u>נוסחת הנגזרת:</u>

אם $f(x),f'(x)\in G$ ו- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT\left[f'(x)\right]=ikF(k)$$

<u>נוסחת המומנט:</u>

אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $FT[xf(x)]=i\frac{d}{dk}F(k)$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = Ae^{-\alpha x}\theta(x)$$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3) דוגמה - חלון מורחב

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -r \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$ כאשר $r > 0$.

4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{d}{dt}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$.

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) $\frac{A}{2\pi\left(a+ik\right)}$

2) $\frac{1}{\pi}\sin c\left(k\right)$

3) $\frac{\sin\left(rk\right)}{\pi k}$

4) $\frac{-ik}{4\alpha}e^{-\alpha(k)}$

5) $\frac{i}{\pi}\left(\frac{k\cos k-1\cdot\sin k}{k^2}\right)$

6) $\frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}}\left(1-\frac{k^2}{2\alpha}\right)$

7) $q\left(t\right)=\frac{1}{b-a}f_0\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\theta\left(t\right)+Ce^{-bt}$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 4 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 23

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

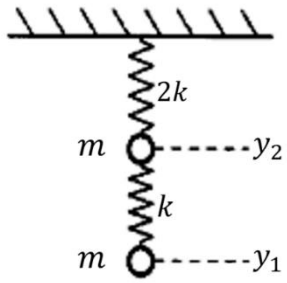
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0$

ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד.
$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$
$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 24

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t)=A\,cos(kx-\omega t)+B\,sin(kx-\omega t)+C\,cos(kx+\omega t)+D\,sin(kx+\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\psi(x,t)=A_1\,cos(kx-\omega t+\phi_1)+A_2\,cos(kx-\omega t+\phi_2)=$$
$$B_1\,cos\,k\,x\,cos\,\omega\,t+B_2\,cos\,k\,x\,sin\,\omega\,t+B_3\,sin\,k\,x\,cos\,\omega\,t+B_4\,sin\,k\,x\,sin\,\omega\,t=$$
$$C_1\,cos\,k\,x\,cos(\omega t+\phi_1)+C_2\,sin\,k\,x\,cos(\omega t+\phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים(העשרה בלבד)

$$\psi(x,t)=A_1e^{i(kx+\omega t)}+A_2e^{i(kx-\omega t)}+A_3e^{-i(kx+\omega t)}+A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3=A_1^*$ ו-$A_4=A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

שאלות

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2m$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4}\frac{\text{kg}}{m}$, במיתר מעורר גל מהצורה: $\psi(x,t) = 0.005\,cos(3x - 90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3sec$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

bagrut.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – מני גבאי ©

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\frac{\text{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5) תרגיל – מיתר בתוך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx , הוא $F = -bdx\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x,t) = X(x)f(t)$ זהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, t = 0) = a\,cos(k_0 x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר bagrut.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{m}{s}$

2) $30\frac{m}{s}; 0.102\text{N}; 0.45\frac{m}{s}$

3) א. $y(x,t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $a(x,t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. $x = 85_m + 50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד. $t = 0.001_s - 2.5_s n$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t) = (4x+8t)^2 + (4x-8t)^2$ ב. $2\frac{m}{s}$ ג. $0.12N$ ד. לא.

5) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T}\frac{\partial\psi}{2t} + \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

ב. $\psi(x,t) = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[\cos(\omega t)\, 2C\sin(\omega t)]$, כאשר $\Gamma = \frac{b}{\rho}$.

ג. $\psi(x,t) = a\cos(k_0 x)\, e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)\frac{\Gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר bagrut.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 6 - גלים אורכיים-גלי קול

תוכן העניינים

1. גלי קול בצינור 28
2. אפקט דופלר 35

גלי קול בצינור

רקע

גל אורכי - תנועת המולקולות היא בכיוון ההתקדמות של הגל

$\psi(x,t)$ -פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציין את מיקום המולוקולות בשיווי מישקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x,t)$ -פונקציית הלחץ העודף access pressure

$\Delta\rho(x,t)$ -פונקציית השינוי בצפיפות

נקודת צומת בפונקציית ההעתק היא נקודת טבור בפונקציות הצפיפות והלחץ ולהפך

נוסחה מתרמו לקשר בין לחץ ונפח עבור גז אידיאלי בתהליך אדיאבטי:

$$PV^{\gamma} = const$$

הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma P_0}\psi_p$$

P_0 - הלחץ בשיווי משקל

γ - קבוע הקשור לסוג הגז מתוך משוואת הגז בתהליך אדיאבטי

מקדם האלסטיות של הגז

מקדם האלסטיות של הגז

$$B_a = \gamma P_0$$

משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

מהירות הגלים - מהירות הקול (לפעמים גם כתובה באות c):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

באוויר בתנאים סטנדרטיים: $v \approx 340\,{}^{m}/_{s}$

אותה המשוואה מתקיימת גם עבור ψ_p ו- $\Delta\rho$

הקשר בין הצפיפות לפונקציית ההעתק:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

עכבה של גל קול מישורי ליחידת שטח:

$$\frac{Z}{A} = \rho_0 v$$

ρ_0 - צפיפות המסה בשיווי משקל

A - שטח החתך של הצינור

v - מהירות הקול בחומר

האנרגיה הכוללת ליחידת אורך:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}A\rho_0\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] = A\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

השוויון האחרון הוא עבור גלים נעים בלבד

אנרגיה פוטנציאלית וקינטית ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{U}_{dx} = \bar{E}_{k_{dx}} = \frac{1}{4}\rho_0 A\omega^2\psi_{max}^2$$

אנרגיה כוללת ממוצעת בזמן ליחידת אורך:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho_0 A\omega^2\psi_{max}^2$$

ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע

ω - התדירות הזוויתית

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

הספק של גל קול נע (כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן):

$$P(x,t) = \pm v\varepsilon(x,t)$$

כאשר הפלוס/מינוס הם עבור גל שנע בכיוון החיובי/שלילי בהתאמה

(לא לבלבל עם P של לחץ)

עוצמה של הגל (ההספק ליחידת שטח):

$$I(x,t) = \frac{|P(x,t)|}{A} = v\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}v\rho_0\omega^2\psi_{max}^2$$

מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי:

$$I_a = I_0 \cdot 10^a$$

a - היא העוצמה ב B (בל)

$$I_0 = 10^{-12}\frac{w}{m^2}$$

$1B = 10\,dB$ (dB זה דציבל)

עוצמה בגל כדורי:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

תנאי שפה בצינור:

- קצה סגור $\psi = 0$ (כמו קצה קשור במיתר)
- קצה פתוח $\psi_P = 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ (כמו קצה חופשי במיתר)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) **שעון מעורר בחלל**
אסטרונאוט הנמצא במעבורת חלל יצא מהמעברות לבצע תיקון חיצוני.
האסטרונאוט לקח איתו שעון מעורר וכיוון אותו לצלצל בשעה שבע בערב כך שיספיק לחזור לארוחת הערב בתוך המעבורת. האסטרונאוט הניח את השעון לידו בזמן שהוא מבצע את התיקון. האם האסטרונאוט ישמע את השעון מצלצל?
רמז: בחלל אין אוויר.

2) **מצאו פונקציית גל מנתונים על צפיפות**
גל קול הרמוני נע בכיוון החיובי. האמפליטודה של השינוי בצפיפות האוויר של הגל היא $A_{\Delta\rho} = 24 \cdot 10^{-3}\,{}^{kg}/_{m^3}$. התדירות של הגל היא $500Hz$. נתון גם כי $\Delta\rho(0,0) = 0$, $\rho_0 = 1.2\,{}^{kg}/_{m^3}$ ו- $v = 340\,{}^{m}/_{s}$. מצאו מהי ההסטה משיווי משקל של מולקולות האוויר הנמצאות ב $x = 15cm$ בזמן $t = 0$.

3) **כמה אנרגיה עברה בשעה**
העוצמה של גל קול מישורי היא $I = 1.4\mu\,W/c\,m^2$. חיישן בעל שטח חתך $A = 3.6cm^2$ קולט את הגל. כמה אנרגיה קיבל החיישן כל שעה?

4) **פי כמה גדלה העוצמה עבור שינוי של דציבל אחד**
ראינו כי גידול של העוצמה ב 1B הוא גידול של פי 10 ביחידות של ${}^{W}/_{m^2}$. חשבו פי כמה גדלה העוצמה ביחידות של ${}^{W}/_{m^2}$ עבור גידול של 1dB.

5) **חישוב הפרעה בלחץ מעוצמה ממוצעת**
נתון גל קול מישורי בתדירות $12kHz$. העוצמה הממוצעת בזמן של הגל היא $\bar{I} = 2.5 \cdot 10^{-4}\,W/m^2$. הגל מתקדם בתווך בעל:
$$P_0 = 0.7 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m^2}\,,\ \gamma = 1.48\,,\ v = 340\mathrm{m/\,sec}$$
מצאו ביטוי לשינוי בלחץ כתלות במיקום ובזמן אם ידוע שהגל הוא גל סינוס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

6) חישוב ירידה של העוצמה

מקור מייצר גל קול כדורי. חיישן בעל שטח חתך של $0.2m^2$ ממוקם במרחק $r_1 =$ $0.8m$ מהמקור ומודד הספק של $P = 3mW$.

א. מהי העוצמה של הגל במרחק r_1 ?

ב. מהו ההספק של המקור?

ג. מה העוצמה של הגל במרחק $r_2 = 1.2m$?

ד. מה ההספק שימדוד החיישון במרחק r_2 ?

7) חליל בצליל לה

מה צריך להיות אורכו של חליל על מנת שהתנודה הבסיסית שלו תהיה הצליל לה -תדר 440Hz ? הניחו שמהירות הקול היא $340\,m/s$ ושניתן להתייחס לחליל כצינור הפתוח בשני קצוותיו.

8) כמה תדירויות נמצאות בתחום השמיעה

צינור באורך של $1m$ מרעיש כאשר הרוח נושבת . מהירות הקול היא $340\,m/s$

א. אם הצינור פתוח בשני קצוותיו , כמה מתוך ההרמוניות שלו נמצאות בתחום השמיעה ? $(20Hz - 20kHz)$

ב. ציירו את החלק המרחבי של ψ_p עבור שלושת ההרמוניות הראשונות במקרה שבו הצינור פתוח רק בצד אחד.

9) רזולוציית מדידה של עטלף

עטלפים משתמשים בגלי קול בשביל למפות את המרחב (בדומה ל"סונר"). נניח כי עטלף שולח גלי קול אל חפץ מסוים ומודד את מיקומו ביחס אליו על ידי מדידת הזמן שלוקח לגלי הקול לחזור אליו מהחפץ.

א. בהנחה שהעטלף והחפץ עומדים במקומם, מה צריכה להיות רזולוציית המדידה של העטלף, כלומר מהו הזמן הכי קצר שהוא צריך למדוד, על מנת לזהות חפץ הנמצא במרחק 40cm ממנו?

ב. בהנחה שגודל החפץ הכי קטן שהעטלף מסוגל לזהות הוא בסדר גודל של אורך הגל שהעטלף מייצר, מה יהיה התדר אותו צריך העטלף לייצר על מנת לזהות חפץ בגודל של 1cm ? הניחו כי מהירות הקול היא $340\,m/s$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

10) ערכי RMS

ערך RMS של פונקציה מחזורית בזמן בעלת זמן מחזור T מוגדר כ -

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

ההפרעה בלחץ בגל קול מישורי נתונה ביחידות פסקל לפי :

$$\psi_P(x,t) = 6 \cdot 10^{-6}\cos(kx - \omega t)$$

נתון גם ש :

$$P_0 = 0.8 \cdot 10^4\ N/m^2\ ,\gamma = 1.4\ ,v = 340m/\sec\ \ ,\omega = 7000rad/\sec$$

א. מהו אורך הגל?

ב. מהו ערך ה RMS של התנודות בלחץ?

ג. מהו ערך ה RMS של המהירות החומרית בגל?

ד. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$?

ה. מהו ההספק הממוצע בזמן הנקלט בגלאי בעל שטח של $0.15m^2$ המאונך לכיוון התקדמות הגל?

11) גל קול כדורי וערכי RMS

מקור מייצר גל קול כדורי הרמוני בתדר $500Hz$. ערך ה RMS של הלחץ במרחק $r_1 = 30cm$ הוא $4\ N/m^2$. נתון גם ש : $P_0 = 10^5\ N/m^2\ ,\gamma = 1.5\ ,v = 330m/\sec$

א. מהו ערך ה RMS של הלחץ במרחק $r_2 = 15m$?

ב. מהו ערך ה RMS של פונקציית ההעתק באותו המיקום ?

ג. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$ באותו מיקום?

12) מוט ברזל מוחזק באמצע

נתון מוט ברזל באורך $L = 80cm$ ס"מ. מהירות הקול בברזל היא בערך $4910\ m/s$. מחזיקים את המוט במרכזו ונותנים לו מכה בנקודה הנמצאת באמצע בין נקודת האחיזה לקצה.

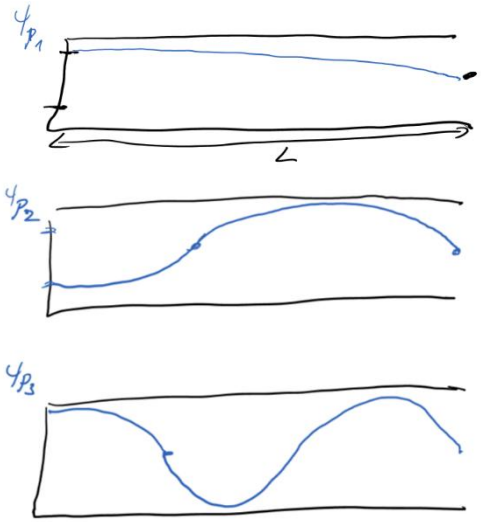
א. ציירו את הגל של תדירות הייסוד ושל ההרמוניה הראשונה וחשבו את התדירויות האלו.

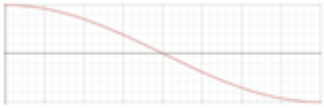
ב. חזרו על סעיף א אם נקודת האחיזה הייתה במרחק $\frac{1}{4}L$ מהקצה.

ג. היכן יש להחזיק את המוט בשביל להשמיע את שני הרזוננסים הבאים?

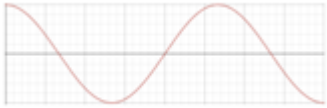
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

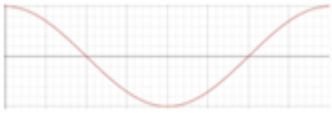
1) לא
2) 0.3mm
3) 18,144J
4) פי 1.26
5) $\psi_p(x,t) = 0.123\ sin(222x - 75.4 \times 10^3\ t)$
6) א. 15×10^{-3} W/m²t ב. 0.121 W ג. 6.67×10^{-3} W/m² ד. 1.33 mW
7) 0.39m
8) א. 117 ב.

9) א. 2.35mm ב. 34KHz
10) א. 0.31 m
ב. 4.24×10^{-6} Pa
ג. 1.29×10^{-7} m/s
ד. 1.6×10^{-15} J/m²
ה. 8.18×10^{-14} W
11) א. 0.08 N/m²
ב. 5.6×10^{-8} m
ג. 4.3×10^{-8} J/m
12) א. $f_1 = 3069Hz$



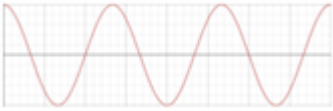
$f_2 = 9206Hz$



ב. $f_1 = 6138Hz$



$f_2 = 18{,}413Hz$



ג. עבור x=10cm ,n=4 ועבור x=8cm , n=5

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

אפקט דופלר

רקע

עבור מקור נע וצופה נייח:

$$f' = f_s \frac{1}{1-\frac{v_s}{v}}$$

f' - התדר המוסט.

v_s - מהירות המקור, חיובית עם כיוון התקדמות הגל.

f_s - תדירות המקור (התדירות שהצופה היה קולט אם המקור לא היה זז).

v - מהירות הגל.

עבור מקור וצופה נעים:

$$f_0 = f_s \frac{v+v_0}{v-v_s}$$

f_0 - התדר המוסט (התדר שקולט צופה שנע).

v_0 - מהירות הצופה, חיובית נגד כיוון התקדמות הגל.

גלי הלם:

$$\sin\theta = \frac{v}{v_s}$$

θ - חצי מזווית הראש של קונוס גל ההלם.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) מציאת המהירות של גוף בתנועה הרמונית

גוף קטן בעל מסה m נע בתנועה הרמונית. הגוף משדר גל קול באופן רציף.
מודדים את התדירות המינימלית והמקסימלית של גלי הקול הנקלטים מהגוף.
חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף באמצעות התדירויות.
הניחו שהבעיה חד מימדית.

2) מקור נע בתאוצה*

מקור נע במהירות v_s לכיוון צופה נייח הנמצא במרחק L ופולט גלי קול בתדירות f_s (תדירות המקור). המקור מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה a.
מהי התדירות אותה ימדוד הצופה כתלות בזמן? ניתן להניח כי: $aT << v_s$ וכי הצופה תמיד רחוק מהמקור. שימו לב כי לגל לוקח זמן להגיע לצופה.

3) נמלה מטיילת על מיתר

במיתר אינסופי קיימת הפרעה מהצורה: $\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$
כאשר אורך הגל ומהירות הגל הן: $\lambda=0.4\mathrm{m}$, $v=\frac{7\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

נמלה מטיילת על המיתר במהירות $0.2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ בכיוון הפוך לכיוון התקדמות הגל.
כמה פעמים עולה ויורדת הנמלה כל שניה?

4) מדידת מהירות של צוללת

צוללת נעה במהירות: $v_1=\frac{19\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ מזהה צוללת נוספת הנעה לכיוונה.
בצוללת יש סונר המייצר גלי קול בתדר קבוע: $f=1000\mathrm{Hz}$.
גלי הקול פוגעים בצוללת השנייה וחוזרים לסונר. התדר של הגל המוחזר שמודד הסונר הוא: $f'=1060\mathrm{Hz}$.

ידוע שמהירות הגלים במי ים היא: $v=1519\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.
חשבו את מהירות הצוללת השנייה (ביחס לקרקע).

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

5) פעימות של גל המוחזר מפגיעה בקיר

אדם העומד הרחק מקיר מחזיק מקור שפולט צלילים בתדירות 280Hz.

האדם מתחיל לנוע לכיוון הקיר, עם המקור בידיו, במהירות $3\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

הניחו שמהירות הקול היא: $330\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מה תדירות הצליל אותה היה שומע מאזין הנמצא ליד הקיר במנוחה?

ב. אילו האדם שנע היה יכול להאזין רק לגל המוחזר מהקיר,
מה תדירות הצליל שהוא היה שומע?

ג. נניח שעוצמת הגל המוחזר מהקיר זהה לזו של הגל הפוגע.
מה התדר ששומע האדם שנע ומהי תדירות הפעימות של גל זה?

תשובות סופיות

1) $E_k=\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{f_{\max}-f_{\min}}{f_{\max}+f_{\min}}\right)^2$

2) $f_s=\frac{1}{1-\frac{v_s+a\left(t-\frac{L}{v}\right)}{v}}$

3) 18

4) $34.8\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

5) א. 283Hz ב. 285Hz

ג. תדירות הגל היא: 283Hz ותדירות הפעימות היא: 2.6Hz.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 7 - חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)

תוכן העניינים

1. יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה 38
2. התרחבות בזמן של פולס 40
3. גלים דועכים ותדירויות סף 42
4. מקרים מיוחדים 43
5. תרגילים נוספים 45

יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה

רקע

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה: $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dx$

כאשר: $A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$

מהירות הפאזה: $v_\varphi(k)=\frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g(k)=\frac{\partial\omega}{\partial k}$

שאלות

1) מיתר מתכתי

יחס הנפיצה שמתאר תנודות של מיתר מתכתי ממשי הקשור בשני קצוותיו

נתון ע"י: $\omega^2=\left(\frac{T}{\rho}\right)k^2\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)$

כאשר T המתיחות, ρ צפיפות המסה ליחידת אורך, $\varepsilon<<1$ פרמטר חסר יחידות המייצג את קשיחות המיתר ו- L אורך המיתר.

א. חשבו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה.

ב. הסבירו מדוע מספרי הגל ואורכי הגל זהים לאלו המתקבלים אם המיתר היה אידיאלי.

ג. רשמו את התדירויות העצמיות כתלות ב- n ושאר הנתונים בבעיה.

ד. הראו שבגבול $n\to\infty$ התדירויות פרופרופציוניות ל- n^2 והשוו למיתר אידיאלי.

ה. נגדיר את התחום האידיאלי של מיתר על פי $\varepsilon L^2k^2<<1$.
כמה אופני תנודה נמצאים בתחום האידיאלי במיתר שבו $L=1.2m$ ו- $\varepsilon=2\cdot10^{-5}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

2) הוכחת נוסחה נוספת למהירות החבורה

הראו שניתן לרשום את מהירות החבורה בתור: $v_g(k)=k\frac{\partial v_\varphi}{\partial k}+v_\varphi$.

3) חילוץ משוואה מתוך יחס נפיצה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא:

$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו-c קבועים.

א. רשמו את משוואת הגלים המתאימה ליחס הדיספרסיה הנ"ל.

ב. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה ובדקו מה קורה בגבול של: $ck>>\omega_p$.

תשובות סופיות

1) א. $v_\varphi=\sqrt{\left(\frac{T}{\rho}\right)\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)}$, $v_g=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{T}{\rho}\left(2k+4\varepsilon L^2k^3\right)\right)$

ב. מספרי הגל ואורכי הגל מגיעים מתנאי השפה ואינם מושפעים מיחס הנפיצה.

ג. $f_n=\frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\pi^2n^2}{L^2}\left(1+\varepsilon\pi^2n^2\right)\right)\frac{1}{2}$

ד. הוכחה בסרטון.

ה. $n\approx 7$

2) הוכחה בסרטון.

3) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega_\rho^2\psi+c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

ב. $v_\varphi=\sqrt{\frac{\omega_\rho^2}{k^2}+c^2}$, $v_g=\frac{c^2k}{\omega}$ בגבול $ch>>\omega_\rho$ $v_g\chi v_\rho\chi c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

התרחבות בזמן של פולס

רקע

הרוחב כתלות בזמן של פונקציית גאוסיאן: $\sigma^2(t)=\frac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$,

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_{k_0}$.

שאלות

1) פולס בסיבים אופטיים

נתבונן על הדיספרסיה בסיבים אופטיים. משדרים פולס גאוסיאני בעל אורך זמני τ_0 לסיב באורך l.

מהירות החבורה בסיב היא: $v_g(k)$.

א. ההרחבה הזמנית של הפולס מוגדרת לפי: $\Delta\tau=\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}$.

מצאו נוסחה להרחבה הזמנית כתלות בפרמטרים: l, v_g, τ_0 ו- β

השווה ל- $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$.

הדרכה: השתמשו בנוסחה של ההרחבה המרחבית: $\sigma^2(t)=\frac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$

ועברו לרוחב הזמני על ידי חלוקה במהירות החבורה.

ב. נתון שמהירות הפאזה עבור סיב ספציפי סביב אורך גל: $\lambda_0=1.55\mu m$

היא: $v_\varphi(k)\approx\frac{c}{n}\left(1+\frac{k}{q}\right)$ כאשר c היא מהירות האור, n הוא מקדם

השבירה של הסיב ו- q פרמטר נוסף.

מהו משך רוחב הפולס שניתן לשדר כך שההרחבה שלו תהיה בגודל

הרוחב המקורי, כלומר: $\Delta\tau=\tau_0$

ג. חשבו את $\Delta\tau$ כאשר:

$l=75km$, $c=3\cdot10^8\frac{m}{\sec}$, $\lambda_0=1.55\mu m$, $q=4.35\cdot10^9\cdot\frac{1}{m}$, $n=1.47$.

מהי המגבלה על קצב השידור המירבי אם הדיספרסיה היא הגורם המגביל?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

2) יחס מדומה בגאוסיאן

בתווך כלשהו מתקיים יחס הנפיצה הבא: $\omega(k)=\alpha k-i\beta k^2$ כאשר α ו- β קבועים חיוביים נתונים.

א. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה כתלות ב- k.

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי כללי ל- $\psi(x,t)$ עבור פולס שנע בכיוון החיובי בהינתן: $\psi(x,0)=f(x)$.

ג. מצאו את: $\psi(x,t)$ עבור פונקציית גאוסיאן: $\psi(x,0)=Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

ד. מהו רוחבו ומרכזו של הגאוסיאן כתלות בזמן?

3) רוחב חבילה לאחר מרחק 3 סיגמה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

מעוררים בפלסמה חבילת גלים גאוסיאנית ברוחב σ ותדירות מרכזית $\omega_0>\omega_p$.

מצאו את רוחב החבילה לאחר שהתקדמה מרחק 3σ.

תשובות סופיות

1) א. $\Delta\tau=\frac{2\beta l}{\tau_0 v_g^3}$ ב. $\tau_0=\sqrt{\frac{2n^2l}{c^2q\left(1+\frac{4\pi}{q\lambda_0}\right)^3}}$ ג. $2.87\cdot10^{11}\,\text{sec}$

2) א. $v_\varphi(k)=\alpha-i\beta k$, $v_g(k)=\alpha-2i\beta k$

ב. $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{i\left(kx-\left(\alpha k-i\beta k^2\right)t\right)}dk$, $F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$

ג. $\psi(x,t)=\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+2\beta t}}Ae^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha t)^2}{\sigma^2+2\beta t}}$

ד. $\sigma=\sqrt{\sigma^2+2\beta t}$, $\mu=\alpha t$

3) $\frac{qc^2\omega_p^4}{\omega_0^4\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)}+\sigma^2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים דועכים ותדירויות סף

רקע

במקרים מסוימים יחס הנפיצה יכול לייצר מספר גל מורכב עבור תדירויות מסוימות. במקרים אלו נקבל גל דועך בתווך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

שאלות

1) גל דועך בפלסמה

גלים אלקרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו-c קבועים, מעוררים גל בתדירות: $\omega_0=\frac{1}{2}\omega_p$.

רשמו ביטוי לפונקציית הגל, מהו קבוע הדעיכה?

תשובות סופיות

1) $\psi(x,t)=Ae^{-\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}x}e^{-i\frac{1}{2}\omega_p t}$, קבוע הדעיכה הוא: $\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

מקרים מיוחדים

רקע

מכניקת הקוונטים:

פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

משוואת שרדינגר : $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{2x^2}$

התנע של חלקיק : $\rho=\hbar k$

גלי מים:

יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל

$$\omega^2=\left[gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tan h(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח

H - עומק הנוזל

g - תאוצת הכובד

ρ - צפיפות המסה ליחידת נפח

עבור גלים קצרים (גלי מתח פנים) : $\lambda\ll\lambda_c\sim 2cm$

$$\omega=\sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל) : $H>>\lambda>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gk}$$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל) : $\lambda>>H>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gHk}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) קירובים במים עמוקים

יחס הנפיצה של גלים על השפה של נוזל לא צמיג נתון בקירוב

ע"י: $\omega^2=\left[gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tanh\left(kH\right)$ כאשר g היא תאוצת הכובד, H גובה הנוזל,

σ מתח הפנים ו- ρ צפיפות הנוזל.

במקרים בהם המים עמוקים ביחס לאורך הגל אז: $\tanh\left(kH\right)\approx 1$ ויחס הנפיצה

ניתן בקירוב ע"י: $\omega^2=gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3$.

א. הראו באופן כללי שבנקודת הקיצון של מהירות הפאזה מתקבל שמהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

ב. מהו אורך הגל λ_c במקרה הנתון שבו מהירות הפאזה שווה למהירות החבורה? ומהן המהירויות באורך גל זה?

ג. הראו כי עבור גלי כבידה שבהן $\lambda >> \lambda_c$ מתקבל: $v_g=\frac{1}{2}v_\varphi$.

ד. הראו כי עבור גלי מתח פנים שבהם $\lambda << \lambda_c$ מתקבל: $v_g=\frac{3}{2}v_\varphi$.

2) צונמי ליד טונגה

בינואר 2022 התפוצץ הר געש תת ימי כ-65 ק"מ מאיי טונגה שבאוקיינוס השקט. קוטר הר הגעש הוא כ-10 ק"מ והוא יצר גל באורך של כ-20 ק"מ.
כמה זמן ייקח לגל להגיע לאיים? וכמה זמן ייקח לגל להגיע לחופי קליפורניה שנמצאים בערך 8,500 ק"מ מנקודת היווצרות הגל?
הניחו כי עומק האוקיינוס הוא כ-4 ק"מ.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון. ב. $\lambda_c=2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$, $v_g\left(\lambda_c\right)=\sqrt{2}\left(\frac{g\sigma}{\rho}\right)$

ג. הוכחה בסרטון. ד. הוכחה בסרטון.

2) כ-70 שניות לטונגה וכ-26 שעות לקליפורניה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תרגילים נוספים

שאלות

1) גלי רוחב בשרשרת מסות בדידה

נתונה מערכת של שרשרת מסות זהות m המחוברות בקפיצים זהים בעלי קבוע k_0. המסות נמצאות במרחקים זהים אחת מהשנייה ומרחקים אלו גדולים בהרבה מהאורך הרפוי של הקפיץ ומתנודות המסות.
מצאו את משוואת הגלים עבור גלי רוחב, כלומר תנודות המסות הן בכיוון מאונך לקפיצים, ומצאו את יחס הדיספרסיה.

2) מודל לגביש עם שכנים רחוקים

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה m.
בשיווי משקל המרחק בין זוג אטומים הוא l.
נתון שכל אטום מחובר לשני שכניו הקרובים ביותר באמצעות קפיצים זהים בעלי קבוע קפיץ k_0 ולשני שכניו הבאים בתור באמצעות קפיצים בעלי קבוע קפיץ k_1.

א. מצאו את יחס הנפיצה של תווך זה.

ב. מהי מהירות החבורה כתלות ב-k (מספר הגל)?

3) החזרה והעברה בתווך עם נפיצה

מיתר בעל יחס נפיצה: $\omega = ck$ משתרע מ-$x=-\infty$ עד $x=0$.
ב-$x=0$ המיתר מחובר למיתר אחר המשתרע עד $x=\infty$ ובו מתקיימת משוואת הגלים הבאה: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0$
(זוהי משוואת קליין גורדון לחלקיק קוונטי יחסותי).

א. מצאו את יחס הנפיצה במיתר הימני.

ב. גל הרמוני בתדירות ω ואמפליטודה A מתקדם מ-$-\infty$ למיתר הימני.
מצאו את הביטויים עבור הגל המוחזר ועבור הגל העובר במקרים הבאים:

i. $\omega > \frac{mc^2}{\hbar}$

ii. $\omega < \frac{mc^2}{\hbar}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

ג. חשבו את מקדמי ההחזרה וההעברה של ההספק: $R_p=\left\langle\frac{P_r}{P_i}\right\rangle$

ו- $T_p=\left\langle\frac{P_t}{P_i}\right\rangle$ בשני המקרים שבסעיף הקודם.

רמז: העזרו בשימור אנרגיה.

תשובות סופיות

1) $\omega(k)=2\omega_0\sin\left(\frac{kl}{2}\right)$, $k\left(4_{n+1}-24_n+4_{n-1}\right)=m\ddot{\psi}_n$

2) א. $\omega_0^2=\frac{k_0}{m}$, $\omega_1^2=\frac{k_1}{m}$, $\omega^2(k)=4\omega_1^2\sin^2(kl)+4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{kl}{2}\right)$

ב. $\frac{1}{\omega}\left(2\omega_1^2 l\cdot\sin(2kl)+\omega_0^2 l\sin(kl)\right)$

3) א. $\omega^2=c^2k^2+\omega_s^2$, $\omega_s^2=\frac{m^2c^4}{\hbar^2}$

ב. i. $\psi_t(x,t)=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_s^2}}{c}x-\omega t\right)}$, $\psi_r(x,t)=\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$

ii. $\psi_t(x,t)=\frac{2A}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}e^{-\frac{\sqrt{\omega_s^2-\omega^2}}{c}x}e^{-i\omega t}$, $\psi_r(x,t)=\frac{1-i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$

ג. i. $T_p=1-\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2$, $R_p=\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2$

ii. $T_p=0$, $R_p=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 8 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

1. גלים דו מימדיים 47
2. מנחה גלים 50

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים:

$$\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x,y,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y-\omega t)}$$
$$\vec{k}=(k_x,k_y)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל:

$$\lambda=\frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2=\frac{T}{\rho}(k_x^2+k_y^2)=v^2\cdot|\vec{k}|^2$$

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos(\omega_{m,n}t+\varphi_{m,n})$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כך ש: $0 \le x,y \le L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ. מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x,y,0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , \ 0 \le q \le \frac{L}{2} \\ L-q & , \ \frac{L}{2} \le q \le L \end{cases}$$

א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.

ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.

ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{A_{11}}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

נתון תוף ריבועי בגודל L_xL_y, התפוס בקצוותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y.

א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.

ב. מהו יחס הנפיצה?

ג. מהם אופני התנודה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

$$A_{m,n}=\frac{16L^2}{\pi^2m^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n}=\frac{T}{\rho}\cdot\frac{\pi^2}{L^2}\left(n^2+m^2\right)$$

ב. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\left(x+\frac{L}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}\left(y+\frac{L}{2}\right)\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

ג. 10

2) א. $$\frac{T_x}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{T_y}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ב. $$w^2=\frac{T_x}{\rho}k_x^2+\frac{T_y}{\rho}k_y^2$$

ג. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos\left(w_{m,n}t+\varphi_{m,n}\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x,y,t)=A\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x-\omega t)}$$

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g=\frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g\cdot v_\varphi=v^2$$

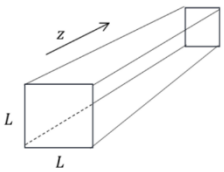
חסם תחתון:

$$\omega>\frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L. שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z.
משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x,y,z,t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $\psi\left(x,y,z,t\right)=\left(Ae^{ik_x x}+Be^{-ik_x x}\right)\left(Ce^{ik_y y}+Dc^{-ik_y y}\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

ב. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

$$w^2=v^2\left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+k_z^2\right)$$

ג. $w_{m,n}=\frac{v\pi}{L}\sqrt{2}$

ד. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 9 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 52

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ובריק: $u=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=3\cdot10^8\,{}^{m}/_{s}$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n=\frac{c}{u}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

$$\mathrm{k}=\frac{2\pi}{\lambda},\ \ \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx-\omega t)=Re\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]$.

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב-$t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph}=\frac{\omega}{k}\ ,u_g=\frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

כאשר:

וקטור הגל - $\vec{k}=k_x\hat{x}+k_y\hat{y}+k_z\hat{z}$

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_xx+k_yy+k_z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega=u|k|=u\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$.

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E}\perp\hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדר"כ ב-$\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:
כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי.
(אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B}=\frac{1}{u}\hat{k}\times\vec{E}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$$

העכבה של התווך: $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

בריק: $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\eta_0=120\pi$

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E},$$

$$\vec{E}=-\eta\hat{k}\times\vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).

הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם **העוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*}{2} \right\}$$

$\tilde{\vec{E}}$ ו- $\tilde{\vec{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$$

$$\vec{\nabla} \to \mathrm{i}\vec{k}$$

שאלות:

1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**

השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי הבא: $\vec{E} = 4\pi \cos(10^9 t - 6x)\hat{y}\frac{mV}{m}$.

א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?

ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?

ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים**

השדה: $\frac{3\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{10}} \cdot H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.

מצאו את:

א. וקטור הגל ואורך הגל.

ב. תדר הגל.

ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.

ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.

ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

1) א. $\lambda = \frac{\pi}{3} m$, $f = 1.59 \cdot 10^8 Hz$. ב. $\varepsilon_r = 3.24$, $n = 1.8$.

ג. $\vec{S}_{AVg} = 12\pi \cdot 10^{-8} \hat{x}$, $\vec{H} = 6 \cdot 10^{-5} \cos\left(6x - 10^9 t\right) z \frac{A}{m}$.

2) א. $\lambda = \frac{1}{\sqrt{10}} m$, $\vec{K} = 2\pi(1, -3, 0)$. ב. $f = 5 \cdot 10^7 Hz$.

ג. $n = 18.97$, $u = 5 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^6 \frac{m}{\sec}$. ד. $\eta = 2\pi \cdot \sqrt{10}$, $\varepsilon_r = 360$.

ה. $\vec{E}(x, y, t) = -2\pi \cdot \sqrt{10} \cdot H_0 e^{i\left(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t\right)} \hat{z}$.

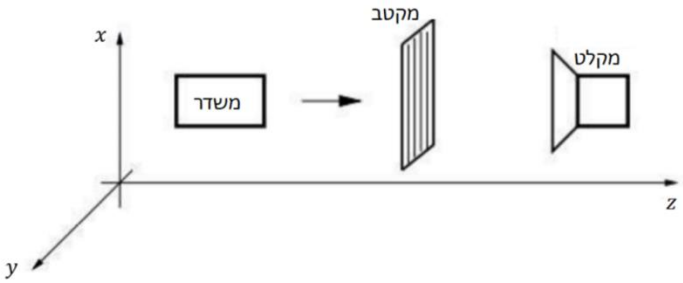
קיטוב מעגלי ואליפטי

רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב-$90°$.
כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z.
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב-$90°$.
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z).
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של $90°$ והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ-$90°$.

שאלות:

1) **דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים**
נתונה המערכת הבאה:



במערכת ,המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.

א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.
רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.

ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x.
מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.

עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} + 3E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ב. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ג. $\vec{E} = E_0 \cos(kz + \omega t)\,\hat{x} + E_0 \cos\left(kz + \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

ד. $\vec{H} = H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}(z,t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$.

2) א. קיטוב ליניארי, $\theta = 72°$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta = -45°$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \qquad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$$

$$H_{2||} - H_{1||} = k_{\text{free}} \qquad E_{2||} = E_{1||}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = \mathrm{k}_{free} = 0$

הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{\text{to}}}{E_{\text{io}}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{\text{ro}}}{E_{\text{io}}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

<u>השוויון השני נכון רק אם</u>: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).

לא לבלבל בין n ל-η.

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

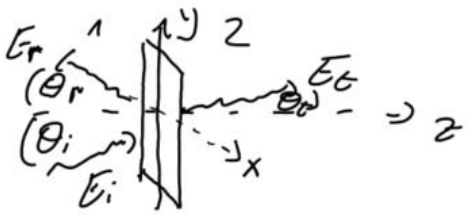
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

חוק סנל: $$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \text{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

משוואות פרנל:
עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{\perp} = \frac{E_{r_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{n_1\cos\theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{\perp} = \frac{E_{t_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\perp} = \tau^{\perp}$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{||} = \frac{E_{r_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{||} = \frac{E_{t_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos\theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{||} = \tau^{||} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2\theta_B{}^{||} = \frac{1 - \frac{\mu_t \varepsilon_i}{\mu_i \varepsilon_t}}{1 - \left(\varepsilon_t/\varepsilon_i\right)^2}$$

אם: $\mu_2 \approx \mu_1$ אז:

$$\sin\theta_B{}^{||} = \frac{1}{1 + \varepsilon_i/\varepsilon_t}$$

$$\tan\theta_B{}^{||} = \frac{n_t}{n_i}$$

בקיטוב אנכי:

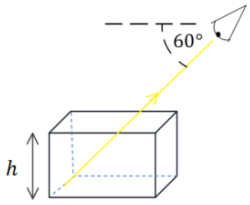
$$\sin^2\theta_B{}^{\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_i \varepsilon_t}{\mu_t \varepsilon_i}}{1 - \left(\mu_i/\mu_t\right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

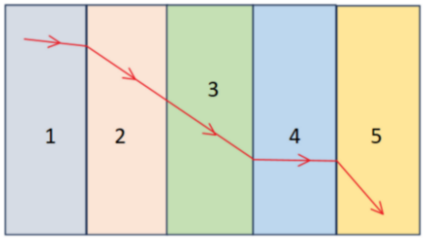
לתיבת זכוכית ריקה גובה של $h = 6cm$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$.
איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה?
(מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



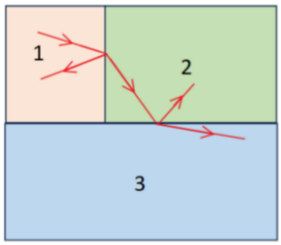
2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים.
גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות.
דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).

תמונה ב:



תמונה א:



3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני הים.
הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.

גל המקוטב אנכית פוגע בפני הים בזווית שחישבתם בסעיף א.

ב. מהי זווית ההעברה של הגל?

ג. מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

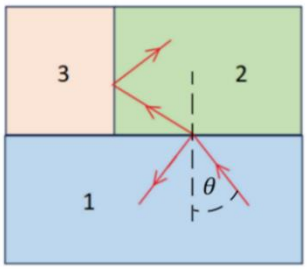
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5,\ n_2 = 1.3,\ n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש-θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמביליות זהה).



5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z.

הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x. בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6) תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוספקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר , כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוויר) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל , הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).

ב. מצאו את זווית ההעברה , האם היא תלויה בקיטוב?

ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.

ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב ($\tau^{\perp}$, $\tau^{\parallel}$) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן הבא: $T = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}|\tau|^2$.
מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית.
ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^{\parallel}}{T^{\perp}}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

1) 1.4cm.

2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$.

3) א. $\theta_B = 84°$. ב. $\theta_t = 6.4°$.

ג. $\tau^{\perp} = 0.025$, $\Gamma^{\perp} = -0.975$.

4) א. $\theta \approx 27.5°$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.

5) א. $E_0 \cos(20°)$ בכיוון: $\cos(20°)\hat{x} + \sin(20°)\hat{y}$.

ב. $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(20°)\cos(40°)\left(\cos(60°)\hat{x} + \sin(60°)\hat{y}\right)\cos(kz - \omega t)$.

ג. $E_0 \cos(20°)\sin(40°)$ בכיוון: $\cos(30°)\hat{x} - \sin(30°)\hat{y}$.

6) א. $\theta_B \approx 55.6°$ ב. $\theta_t \approx 34.4°$ לא תלויה בקיטוב.

ג. $\tau^{\perp} = 1.36$ $\tau^{"} = 0.685$ ד. $\tau^{\perp} = 0.754$ $\tau^{"} = 1$ ה. 33

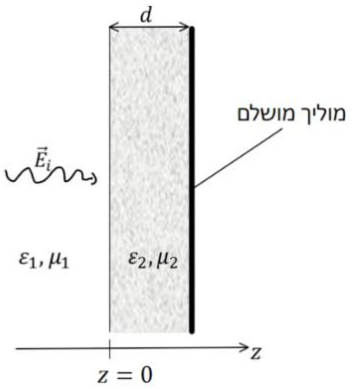
מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:

1) שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם



גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ε_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ε_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z,t) = E_{i0}\,\hat{x}\cos\omega\left(\frac{z}{u} - t\right)$.

מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z,t)$.

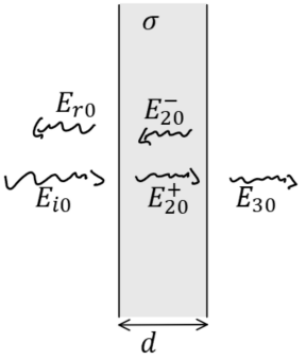
ב. $\vec{E}_1(z,t)$.

ג. $\langle s_1 \rangle$.

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.

2) גל עובר דרך פיסת נחושת

גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות $10\ MHz$ עם אמפליטודה E_{i0} פוגע בניצב לפיסת נחושת ($\sigma = 5.80 \cdot 10^7\ \frac{S}{m}$) דקה מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.



הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:

א. האמפליטודות של כל שאר הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב-E_{i0}.

ב. $\frac{\langle s_3 \rangle}{\langle s_{1i} \rangle}$.

3) חישוב כל הגדלים

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t)\hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

ג. מהו אורך הגל?

בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.

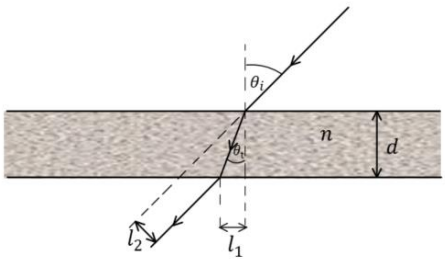
רשמו ביטוי ל-$\vec{H}$.

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E} = (5\mathrm{i}\hat{x} - \hat{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi z + \omega t)}$.

5) חישוב הזזה לטרלית (חוק סנל)



קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדיקס שבירה n.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1.

ג. מצאו את ההזזה הלטרלית (המרחק l_2 באיור).

6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30 מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא 12cm. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu\mathrm{m}, 0.8\mu\mathrm{m}]$ הוא:

מתנול: $\mathrm{n}(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7$

אתנול: $\mathrm{n}(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב- $\mu\mathrm{m}$.

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

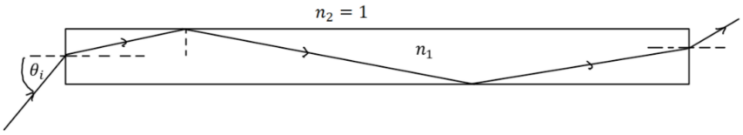
א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $\mathrm{n}(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ.
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

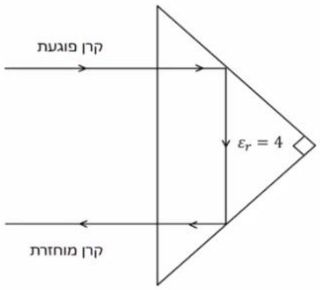
ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1.
גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות.
מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i.



8) אור מוחזר מפריזמה משולשת



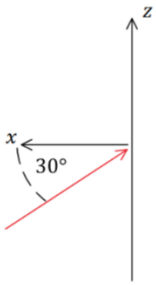
אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית.
מסלול קרן האור מתואר באיור.
מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת.
הניחו $\varepsilon_r = 4$ עבור זכוכית.
הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

9) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y. הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה.

א. כתבו את $\hat{\mathrm{k}}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר.

ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}_r(z,t)=E_{i0}\cos(K_1z+\omega t-2\theta)\hat{x}$ כאשר $\tan\theta=\frac{\eta_2}{\eta_1}\tan(K_2d)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)=E_{i0}\hat{x}\left[\cos(K_1z-\omega t)+\cos(K_1z+\omega t-2\theta)\right]$.

ג. $\langle S_1\rangle=0$.

ד. $d=\frac{\pi n}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$.

2) א. $\frac{E_{20}^{-}}{E_{i0}}\approx(-2.49+4.53i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{20}^{+}}{E_{i0}}\approx(1.90+0.140i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\approx-1+4.67\cdot10^{-6}i$,

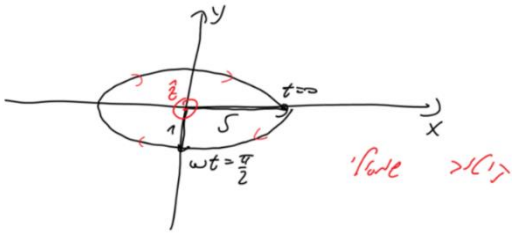
$\frac{E_{30}}{E_{i0}}\approx(-2.70+4.90i)\cdot10^{-6}$.

ב. $\frac{\langle S_3\rangle}{\langle S_1\rangle}=3.13\cdot10^{-11}$.

3) א. $f=10^7\,Hz$. ב. בכיוון $-\hat{z}$. ג. $\lambda=2\pi m$. ד. $\varepsilon_r=22.8$.

ה. $\vec{H}(z,t)=\frac{1}{8\pi^2}\cos(z+2\pi\cdot10^7t)\hat{x}$. ו. $\vec{S}_{AVg}=-\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$.

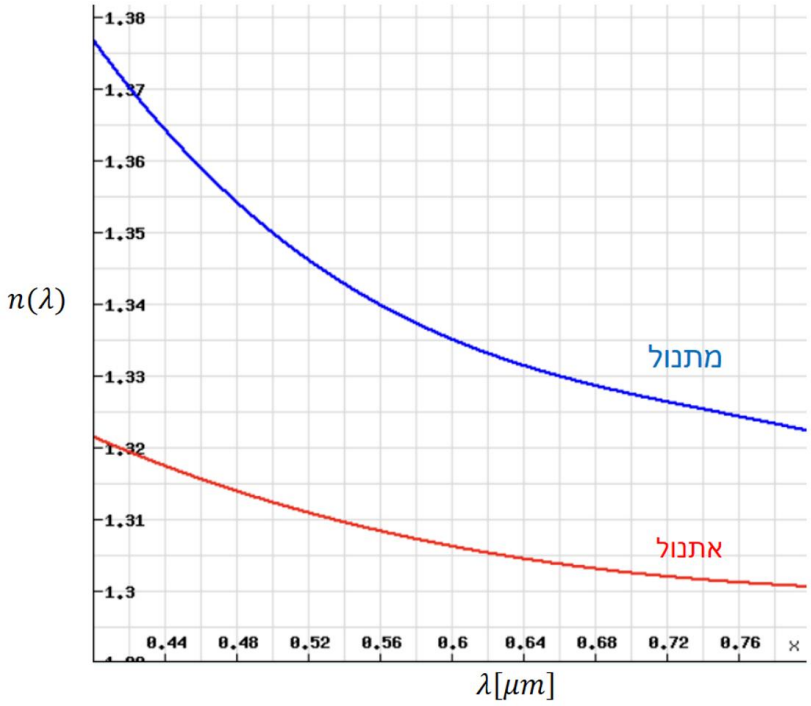
4) שרטוט:



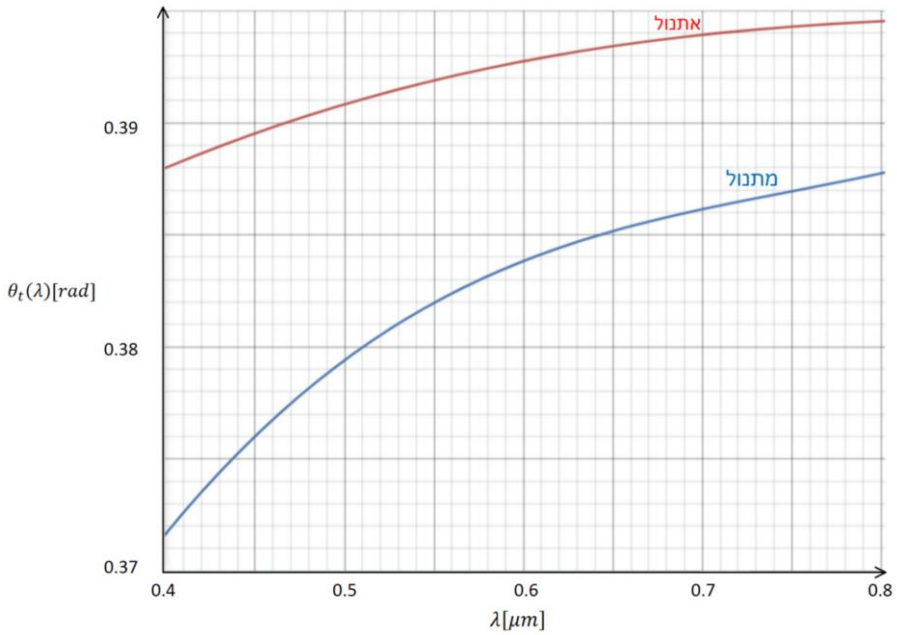
5) א. $\sin\theta_t=\frac{1}{n}\sin\theta_i$. ב. $l_1=\frac{d\sin\theta_i}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}$.

ג. $l_2=d\sin\theta_i\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right)$.

6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

7) $\sqrt{2}$.

8) 79%.

9) א. $\hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$, $\hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$ ב. $\hat{E} = -\hat{y}$ ג. $\hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{x}$

גלים ואופטיקה 7321410

פרק 10 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

1. התאבכות בשני סדקים 70
2. התאבכות ב N סדקים 72
3. עקיפה 76
4. הקשר לפורייה 77
5. התאבכות ועקיפה ביחד 79
6. אינטרפרומטריה 80
7. תרגילים נוספים 85

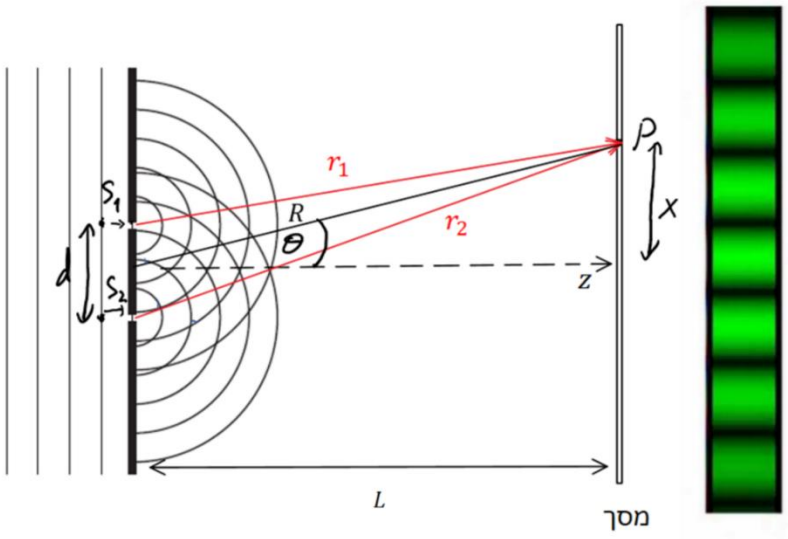
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הוייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק far field limit : $L \gg d$

1. $A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r << r$
2. $\Delta r = d \sin\theta \leftarrow r_1 \parallel r_2$

העוצמה היחסית:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{k\, d \sin\theta}{2}\right)$$

קירוב זוויות קטנות:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים.
התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.
בדר"כ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל

קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.

א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?

ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4\mu m$?

2) תחנת רדיו

תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200Hz$ באמצעות שתי אנטנות הנמצאות במרחק של $300m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס ל**ישר המחבר בין שתי האנטנות.**

תשובות סופיות

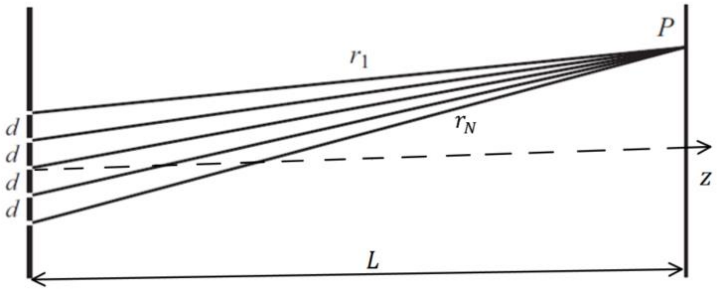
1) א. $16°$ ב. $0.33\mu m$

2) $\cos\alpha_{\max n} = 9.5\cdot10^{-4}n$, $\cos\alpha_{\min n} = 9.5\cdot10^{-4}\left(n+\frac{1}{2}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r << r$$

$$\Delta r = d\sin\theta \leftarrow r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \parallel r_4$$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2$$

$$\alpha = kd\sin\theta$$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$ ו- $n \neq mN$.

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך.
האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים.
הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפעים עליה.

2) סטייה בזווית פגיעה

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0. הניחו קירוב זוויות קטנות.

3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של: $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס״מ ופוגע במסך.
מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי).
הניחו שהחריצים נקודתיים.

4) מרחק בין צבעים

מקרינים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס״מ.

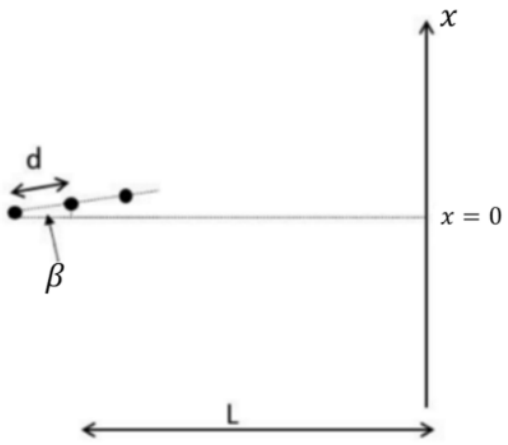
א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.

ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו-$420nm$ בהתאמה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה

המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L.



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\theta > \beta$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ"ל יביא לשינוי התבנית.

2) ראו סרטון.

3) $\theta_1 \approx 0.0186°$

$\theta_2 \approx 0.0373°$

$\theta_3 \approx 0.0560°$

4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.

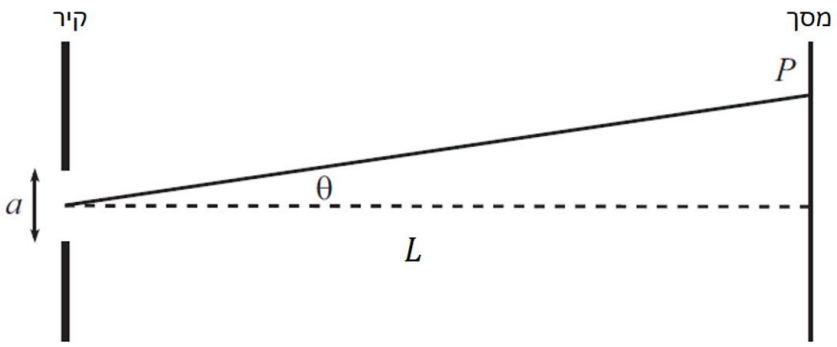
ב. 70 ס"מ.

5) $$\alpha = kd\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\left[1+\beta\frac{x}{L}\right] \quad , \quad \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka\sin\theta$$

נק' התאפסות : $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נק' התאפסות וזה אומר שהסדק מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k\sin\theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.

ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4?
לאן נעלם שימור האנרגיה?

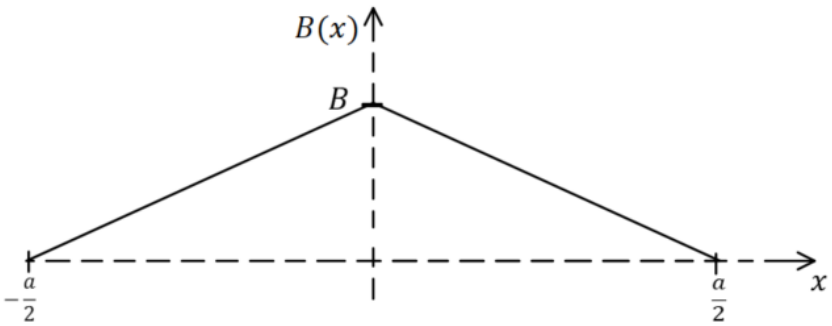
2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח?
שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסויימת קטנה.
השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x = 0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)}\right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.

2) העוצמה לא תשתנה.

3) $\frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \sin c^4\left(\frac{1}{4}ka\sin\theta\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\sin c \left(\frac{ka \sin\theta}{2} \right) \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin\theta}{2} \right)}{N \sin\left(\frac{kd \sin\theta}{2} \right)} \right)^2$$

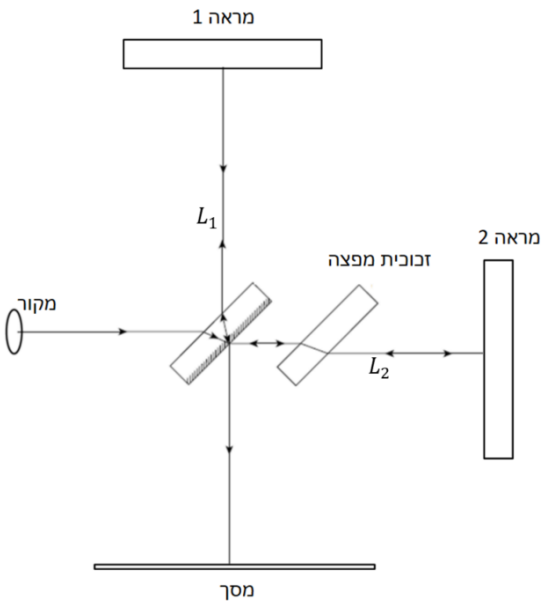
כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה:

$$\delta = \lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

התאבכות הורסת:

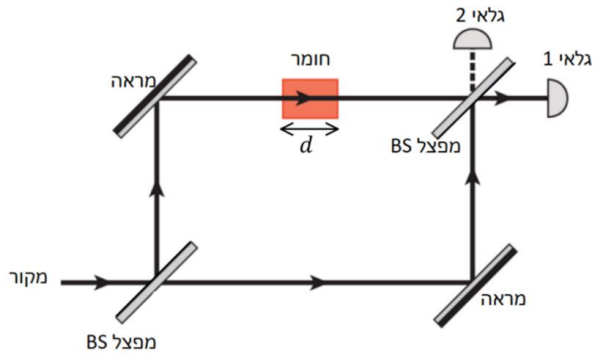
$$\delta = \lambda \mathrm{m}$$

עוצמה:

$$\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



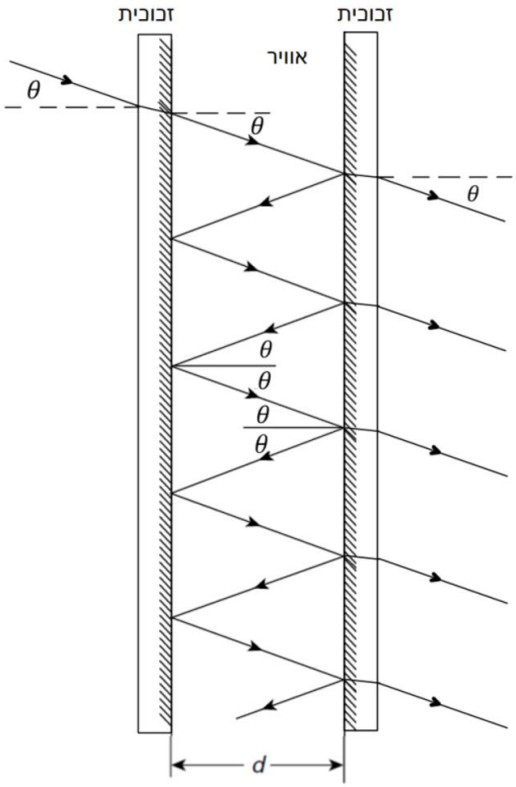
$$\delta = \mathrm{d}(n-1)$$

גלאי 1: $\Delta\varphi = k\delta$

גלאי 2: $\Delta\varphi = k\delta + \pi$

עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d\cos\theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

שאלות

1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2. זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?
ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?
ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.
הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1-n_2)\right)}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים) יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.
מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתייקם שימור אנרגיה (ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

3) מפצל לא סימטרי

נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם ההעברה שלו ($\left|\frac{A_t}{A_{in}}\right|$) הוא t ומקדם ההחזרה ($\left|\frac{A_r}{A_{in}}\right|$) הוא r.

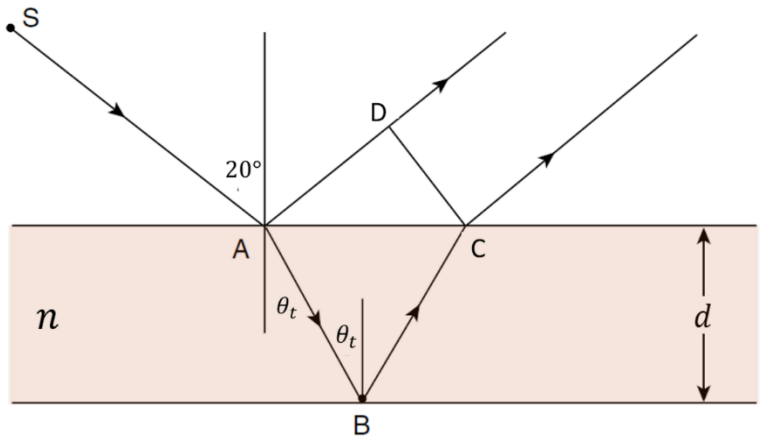
א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20 מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640nm$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$. מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.



5) טווחים של מספר גל

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2mm$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k, כלומר מהו Δk בין שני פיקים?

ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?

ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
$k_r \in \left[10^3 cm^{-1}, 1.15 \cdot 10^3 cm^{-1}\right]$.
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d.
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $\delta = 2\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t\left(1-n_2\right)\right)$ ב. הוכחה. ג. $\Delta\varphi = 2k\left(L_2 - L_1\right)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta + \pi$$

2) א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_1 + d\left(n-1\right) + 2c$

$$\varphi_3 = k\left(L_1 + d\left(n-1\right) + 2c\right) + \pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_2 + 2c$

$$\varphi_4 = k\left(L_2 + 2c\right)$$

ב. $$\frac{I}{I_{\max}} = \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$$

$$\delta = L_1 - L_2 + d\left(n-1\right)$$

3) א. $\left|A_1\right| = trE_0, \left|A_2\right| = rtE_0, \left|A_3\right| = r^2E_0, \left|A_4\right| = t^2E_0,$ ב. $\begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$

4) $128mm$

5) א. $\lambda_m = \frac{2d}{m}$, $k_m = \frac{\pi m}{d}$, $\Delta k = \frac{\pi}{d}$

ב. $\mathrm{FWHM}_{[F]} = 2.44\cdot 10^{10HZ}$, $\mathrm{FWHM}_{[K]} = 512\cdot\frac{1}{m}$

ג. $N = 6$

ד. $\Delta d = 28\mu m$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית $\sin c^2(x)$ הוא $2.8rad$?

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת.
מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון לפי: $\vec{E}_1 = E_0\hat{x}$ ו- $\vec{E}_2 = E_0(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})$.
הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L וש- $L \gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גליליים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב φ.
הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi = \pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{I(x)}{I(0)}=\sin c^2\left(\frac{kax}{2L}\right)\cos^2\left(\frac{kd}{2L}x\right)$

פונקציית המעטפת היא ה-$\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים.
הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין הסדקים.

ב. $5.6\frac{L}{ka}$ ג. $0.89\frac{d}{a}$ ד. $d\approx 2.24a$

2) א. $A_1=A_2=\frac{E_0}{\sqrt{L}}$

ב. $E_{tot}=\left(\left(1+\cos\varphi\right)\hat{x}+\sin\varphi\hat{y}\right)$, $I\alpha\frac{E_0^{\ 2}}{L}4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

ב-$\varphi=0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב
ב-$\varphi=\frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום העוצמות.
ב-$\varphi=\pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – מני גבאי ©