# ביוסטטיסטיקה ב

# תוכן העניינים

1. הסקה סטטיסטית - הקדמה ..... 1
2. מושגי יסוד באמידה ..... 4
3. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ..... 9
4. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים ..... 17
5. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 23
6. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 41
7. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים ..... 43
8. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים ..... 47
9. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ..... 49
10. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות ..... 53
11. שאלות מסכמות בבדיקת השערות ..... 56
12. ניתוח שונות חד כיוונית ..... 71
13. מבחני חי בריבוע ..... 80
14. מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים ..... 89
15. מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים ..... 91
16. מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו ..... 102

# ביוסטטיסטיקה ב

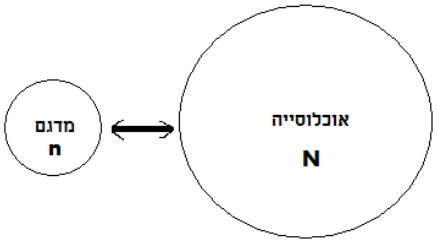
## פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# הסקה סטטיסטית – הקדמה:

## רקע:




**אוכלוסייה:**
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

**מדגם:**

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

**סטטיסטי:**

גודל המחושב על המדגם.

**פרמטר:**

גודל המתאר את האוכלוסייה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:**

| | סטטיסטי (מדגם) | פרמטר (אוכלוסייה) |
|---|---|---|
| **ממוצע** | $\overline{X}$ | $\mu$ |
| **פרופורציה (שכיחות יחסית)** | $\hat{p}$ | $P$ |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

**2)** להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את $X$ להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר המשפחות | מספר מקלטים |
|---|---|
| 50 | 0 |
| 250 | 1 |
| 350 | 2 |
| 300 | 3 |
| 50 | 4 |
| סך הכול $N=1000$ | |

**3)** נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

**1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

**2)** א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

**3)** א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 2 - מושגי יסוד באמידה

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 4

# מושגי יסוד באמידה:

## רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - $\mu$.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - $p$.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות $\theta$ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את $\theta$.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה $\mu$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $\mu$. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$.

**פרופורציה באוכלוסייה $p$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$.

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- $p$. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

**שונות האוכלוסייה $\sigma^2$:**

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן $S^2$ הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**2)** לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

**3)** נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

**4)** נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ , $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

**5)** במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

**7)** במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר $n$ קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

**8)** $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע $\mu$ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל-$\mu$ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

**9)** מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100 ג. 2342 ד. 58
3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
4) א. 8.1 ב. 3.16
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 3 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה..... 9
2. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה..... 14

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר $\mu$ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \le \mu \le B) = 1-\alpha$.
$A$ - גבול התחתון של רווח הסמך.
$B$ - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ($\mu$) במקרה ש-$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: $\mu$.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

$\sigma^2$ (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$\varepsilon$ - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות ($n$) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.

א. מי האוכלוסייה במחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?

ד. מה רווח הסמך לפרמטר?

ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?

ו. מה אורך רווח הסמך?

ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

**2)** מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

**3)** מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

**4)** דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.

ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?

ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם היינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?

ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

**6)** זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

**7)** חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

**8)** חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

**10)** איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

## תשובות סופיות:

**1)** א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. $\mu$. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

**2)** $4920.6 < \mu < 4979.4$.

**3)** א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

**4)** א. $9284 < \mu > 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- $\mu$ היא 416 ₪ בבטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

**5)** א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

**6)** א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

**7)** א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

**8)** ב'.

**9)** ג'.

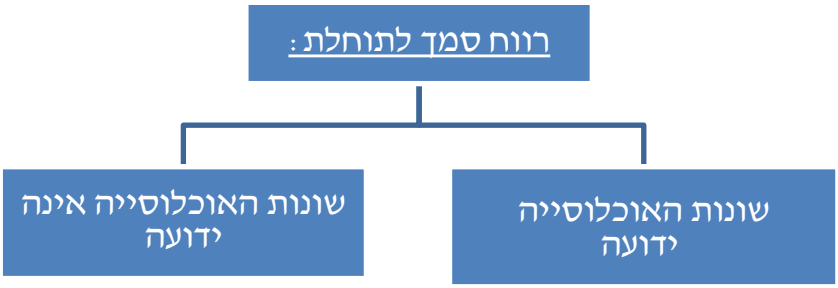
**10)** ד'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

## רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

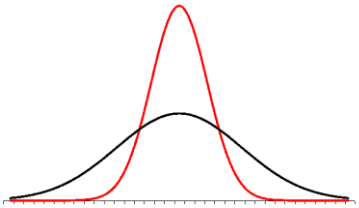



בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:** $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:** $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ .



**האומד לשונות:** $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$ .

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

**2)** במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

**4)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

**5)** נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ , $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $S=2$ , $\bar{x}=13.8$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

**7)** שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר $\mu$.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.

ב. סטטיסטיקאי ב.

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

**8)** נתון ש: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10.
אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.

**2)** ראה בסרטון.

**3)** א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

**4)** א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90< \mu <107.10$. ג. ראה בסרטון.

**5)** $3.149< \mu < 3.351$.

**6)** $13.42< \mu < 14.18$.

**7)** ב'.

**8)** 90%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 4 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

### תוכן העניינים

1. הקדמה ..... 17
2. סוגי טעויות ..... 21

# הקדמה:

## רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נזהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנות ב- $H_0$.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$.

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n=20$ , $\overline{X}=3120$ , $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:**

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

**3)** במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

**4)** בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=72 \\ H_1:\mu>72 \end{matrix}$.

**2)** א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$.

**3)** א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.25 \\ H_1:p<0.25 \end{matrix}$.

**4)** א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.08 \\ H_1:p\neq 0.08 \end{matrix}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# סוגי טעויות:

## רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| | | **הכרעה** | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ | $H_1$ |
| **מציאות** | $H_0$ | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | $H_1$ | טעות מסוג 2 | אין טעות |

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את $H_0$ למרות שבמציאות $H_0$ נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את $H_0$ למרות שבמציאות $H_1$ נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

**2)** במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

**3)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את $H_0$. ג. טעות מסוג שני.

**2)** א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

**3)** א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=2.3 \\ H_1:\mu<2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את $H_0$. ו. טעות מסוג שני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

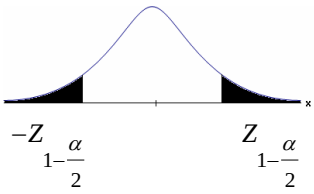
## פרק 5 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

### תוכן העניינים


1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה ..... 23
2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) ..... 27
3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה ..... 32
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) ..... 36
5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) ..... 39

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

## רקע:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu\geq\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu\leq\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>$H_0$ דוחים את | $Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$<br> <br>$-Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את | $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$<br> <br>$Z_{1-\alpha}$<br>$H_0$ דוחים את |

**סטטיסטי המבחן:** $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
|---|---|---|---|


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: $X$ = יבול העגבניות בטון לעונה.

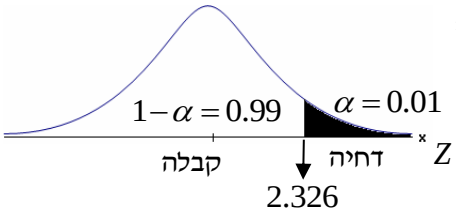
<u>הפרמטר</u>: $\mu$ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:




נדחה את $H_0$ אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $n = 4$ , $\bar{x} = 12.5$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה $H_0$ (נקבל $H_0$).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ״ק וסטיית תקן 20 סמ״ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ״ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

**3)** מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס״מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס״מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס״מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**4)** המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק״ג, עם סטיית תקן 8 ק״ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק״ג.
יש לבדוק בר״מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

**5)** לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ״מ עם סטיית תקן של 0.2 מ״מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ״מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ״מ.

**6)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של $\alpha$ והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**8)** שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0:\mu=\mu_0$ כנגד $H_1:\mu>\mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את $H_0$, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

**2)** א. נדחה $H_0$, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של $H_0$ והמסקנה לא תשתנה.

**3)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

**4)** נדחה $H_0$, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

**5)** נקבל $H_0$, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

**6)** א'.

**7)** ג'.

**8)** א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

## רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$.

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| **השערת האפס:**<br>**השערה אלטרנטיבה:** | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. $\sigma$ ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **p-value** | אם $\bar{x}>\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\ge\bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x}<\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\le\bar{x}\right)$ | $P_{H_0}(\bar{X}\le\bar{x})$ | $P_{H_0}(\bar{X}\ge\bar{x})$ |

**כאשר בהנחת השערת האפס:** $\bar{X}\sim N\left(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ , $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: $X$ = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0:\mu=65 \\ H_1:\mu>65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X\sim N$.
2. $\sigma=12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n=16$

$\bar{X}=71$

$$P_V=P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות}\\ \text{המדגם}\\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right)=P_{H_0}\left(\bar{X}\geq 71\right)=1-\phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

$$Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{71-65}{\frac{12}{\sqrt{16}}}=2$$

$\alpha_{\min}=0.0228$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** להלן השערות של מחקר: $H_1: \mu > 70$ , $H_0: \mu = 70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 74$ , $n = 100$.
מהי מובהקות התוצאה?

**2)** השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

**3)** אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**4)** מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

**5)** אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**7)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**8)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את $H_0$ .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את $H_0$ .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את $H_0$ .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** 0.0228.

**2)** עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**3)** א. $\begin{matrix} H_0:\mu=100 \\ H_1:\mu<100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**4)** א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

**5)** נכון.

**6)** א'.

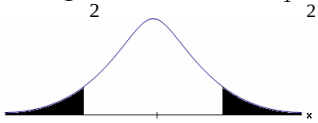
**7)** א'.

**8)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

## רקע:

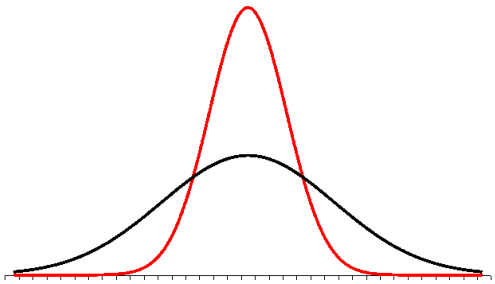
| השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu\neq\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu<\mu_0$ | $H_0:\mu=\mu_0$<br>$H_1:\mu>\mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br> <br>$-t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br> <br>$t_{1-\alpha,n-1}$<br>■ - דוחים את $H_0$ |
| חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ |

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n-1}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**התפלגות T:**



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.

כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

**2)** משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

**3)** ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

**4)** באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left( X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות $Z$.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות $t$.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

**6)** נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
$\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

## תשובות סופיות:

**1)** נדחה $H_0$.

**2)** נדחה $H_0$.

**3)** נקבל $H_0$.

**4)** נקבל $H_0$.

**5)** ב'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

## רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את $H_0$.

מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

| השערת האפס:<br>השערה אלטרנטיבה: | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu \ne \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$<br>$H_1 : \mu > \mu_0$ |
|---|---|---|---|
| תנאים: | 1. $\sigma$ אינה ידועה<br>או<br>2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$ | | |
| p-value | אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$<br>אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$ | $P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: $X$ = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: $\mu$.

א. <u>השערות</u>:
$$\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}.$$

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n=5\ ,\ \bar{X}\ \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34+40+...}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i{}^2 - n\cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = \left(\bar{X} \le 32.6\right) = P\left(t \le -3.39\right)$$

$$d.f = 5-1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את $H_0$.

<u>מסקנה</u>: ברי"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים:
997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**2)** חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- $\alpha$ המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

**3)** הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$ , $\bar{x}=176.2$ .
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $H_0:\mu=1000$ , $H_1:\mu\neq1000$ .
ב. $20\%\le P_v\le 50\%$ .
ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

**2)** 10%.

**3)** 1.01, נקבל את $H_0$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

## רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu$:

$H_1:\mu\neq\mu_0$ , $H_0:\mu=\mu_0$.

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu$:

אם $\mu_0$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$.

אם $\mu_0$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$.

**דוגמה:**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$\alpha=5\%$ , $H_1:\mu\neq80$ , $H_0:\mu=80$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79<\mu<84$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**פתרון (פתרון מלא בהקלטה):**

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 90$ , $H_0:\mu=90$.
החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

**2)** חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.

**3)** יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

**1)** נקבל השערת.

**2)** א. $112.87\le\mu\le 118.13$.

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**3)** א. $191.8\le\mu\le 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 6 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים ..... 41

# רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

## רקע:

**מדגם מזווג:** מדגם אחד שבו יש $n$ צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: $X$ ו- $Y$.
ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: $\mu_D$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $x, y \sim N$.
2. המדגם מזווג.

נוסחת רווח הסמך: $\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n-1$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

| הקובץ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| הזמן בתוכנה הראשונה | 25 | 48 | 49 | 46 | 38 |
| הזמן בתוכנה השנייה | 27 | 46 | 42 | 40 | 48 |

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מִצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **סמסטר א'** | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| **סמסטר ב'** | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

**2)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

| **חברה/ מדינה** | **ארה"ב** | **קנדה** | **הולנד** | **פולין** | **מצרים** | **סין** | **יפן** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **בזק -** $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| **קווי זהב -** $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.3 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה,
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.

**2)** $-0.013 < \mu < 0.185$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

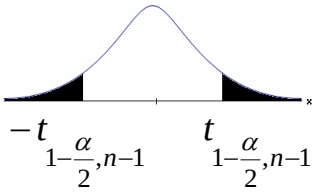
## פרק 7 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים ..... 43

# בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

## בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

| | | | |
|---|---|---|---|
| **השערת האפס:**<br>**השערה אלטרנטיבית:** | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D \neq C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D < C$ | $H_0: \mu_D = C$<br>$H_1: \mu_D > C$ |
| **תנאים:** | 1. $\sigma_D$ אינה ידועה<br>2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| **כלל ההכרעה:**<br>אזור הדחייה של $H_0$: | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>  <br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br> <br><br>■ - דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$<br> <br><br>■ - דוחים את $H_0$ |
| **חלופה לכלל הכרעה:**<br>נדחה $H_0$ אם מתקיים: | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$<br>או<br>$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ | $\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ |

**סטטיסטי המבחן:** $t_{\bar{D}} = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$ , $S_D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

| המוצר / רשת | מגה בעיר | שופרסל |
|---|---|---|
| שמפו | 17 | 18 |
| ג'ל כביסה | 48 | 57 |
| עוגת גבינה | 35 | 35 |
| לחם | 12 | 10 |
| קפה נמס | 49 | 47 |
| בקבוק יין | 113 | 142 |
| גבינה בולגרית | 20 | 26 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת $X$ לחברת $Y$ מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

| חברה/ מדינה | ארה"ב | קנדה | הולנד | פולין | מצרים | סין | יפן |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1.5 | 2.1 | 2.2 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.2 |
| $Y$ | 1.4 | 2 | 1.9 | 3.1 | 3.2 | 3.2 | 4.2 |

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

**2)** מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| לפני | 506 | 470 | 420 | 640 | 670 | 390 | 500 | 590 |
| אחרי | 570 | 540 | 430 | 610 | 680 | 510 | 520 | 580 |

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

**3)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| סטטיסטיקה א' | 74 | 68 | 90 | 75 | 82 |
| סטטיסטיקה ב' | 80 | 84 | 87 | 76 | 100 |

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

**4)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן $Z$ למדגם יחיד.

ב. מבחן $T$ למדגם יחיד.

ג. מבחן $T$ למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן $T$ למדגמים מזווגים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| משקל במכשיר 1 | 4.5 | 9.6 | 0.7 | 2.5 |
| משקל במכשיר 2 | 3.5 | 6.9 | 1.7 | 0.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**6)** כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה $H_0$.

**4)** ד'.

**5)** ד'.

**6)** ג'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 8 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות..... 47

# כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

## רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

**האומד נקודתי:** $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

**התנאים לבניית רווח הסמך:**

1. $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

**השונות המשוקללת:** כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t^{n_1+n_2-2}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S^2_p}{n_1} + \frac{S^2_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| | תל אביב | באר שבע |
|---|---|---|
| **מספר האקדמאים** | 20 | 10 |
| **ממוצע הכנסות של אקדמאים** | 11,000 | 9500 |
| **סטיית התקן של הכנסות אקדמאים** | 200 | 250 |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| **גודל המדגם** | 15 | 15 |
| **סכום הציונים** | 1560 | 1470 |
| **סכום ריבועי הציונים** | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**2)** להלן 4 תצפיות על משתנה $X$ שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה $Y$ שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## תשובות סופיות:

**1)** הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

**2)** $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

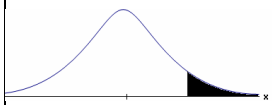
## פרק 9 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 49

# בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$ | $H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$<br>$H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$ |
|---|---|---|---|
| **תנאים:** | 1. מדגמים בלתי תלויים<br>2. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות<br>3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | | |
| **אזור הדחייה של $H_0$:** | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$<br> <br>$-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br> <br>$-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ | $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$<br>  <br>$t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$<br>דוחים את $H_0$ |

**סטטיסטי המבחן:**

$$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{S_p^{\,2}}{n_1}+\frac{S_p^{\,2}}{n_2}}}$$

**השונות המשוקללת:**

$$S_p^{\,2}=\frac{(n_1-1)S_1^{\,2}+(n_2-1)S_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

| נדחה $H_0$ אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1-\bar{x}_2 < c-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1-\bar{x}_2 > c+t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ | |

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2=260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2012** | 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 |
| **2013** | 100 | 82 | 91 | 105 | 74 | 69 | |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

**2)** נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---|---|---|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

**3)** להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| הקבוצה | 60W | 100W |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1007 | 956 |
| $S$ | 80 | 72 |
| $n$ | 13 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** נדחה את $H_0$.

**2)** הנחות:

1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את $H_0$.

**3)** א. נדחה את $H_0$. ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.

ג. לא נדחה את $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 10 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

### תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות..... 53

# הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

## רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות $\alpha$ על $\mu_1-\mu_2$ :

$H_0:\mu_1-\mu_2=C,\qquad H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$ .

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- $\mu_1-\mu_2$ :

אם $C$ נופל ברווח ← נקבל את $H_0$ .

אם $C$ לא נופל ברווח ← נדחה את $H_0$ .

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו : $\alpha=5\%$ $H_1:\mu_D\neq 80,\qquad H_0:\mu_D=80,$ .

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78<\mu_D<83$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.
להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

| סמסטר א | סמסטר ב |
|---|---|
| 74 | 80 |
| 68 | 84 |
| 90 | 87 |
| 75 | 76 |
| 82 | 100 |

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

**2)** הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה $X$ ואצל מרצה $Y$. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה $X$ ו-3 סטודנטים של מרצה $Y$, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| מרצה $X$ | 82 | 90 | 68 |
| מרצה $Y$ | 68 | 81 | 64 |

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

### שאלות רב-ברירה:

**3)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.
הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.
אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך למוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא:

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של $D$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

**2)** א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.

**3)** ג.

**4)** א.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 11 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

### תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות ..... 56
2. שאלות רב ברירה ( אמריקאיות) ..... 58

# שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

## שאלות

**1)** שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_1:\mu>520$, $H_0:\mu=520$.
כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma=20$.
חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha=0.05$.
חוקר ב' מחליט לדחות $H_0$ אם $\bar{X}>522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1=525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1=525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X}=523$. מהי מסקנתו?

**2)** ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.
דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב $-$ 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

**3)** ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

| מוצר / רשת | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 7 | 4 |

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

| סטודנטים באוניברסיטאות | 176 | 156 | 189 | 171 | 140 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| סטודנטים במכללות | 180 | 190 | 191 | 186 | 204 | 150 |

א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

**5)** נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_1: \mu > 40, \quad H_0: \mu = 40$.

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$

## תשובות סופיות

**1)** א. חוקר א' ב. 0.0122 ג. גדלה. ד. נדחה $H_0$.

**2)** א. לפחות 0.0808 ב. 0.7995.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. לא נדחה $H_0$.

**4)** א. לא נדחה $H_0$. ב. בין 5% ל-10%. ג. נדחה $H_0$.

**5)** א. 0.0062 ב. 0.9938 ג. 0.0124.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

**1)** בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

א. השערת האפס הייתה נדחית.

ב. השערת האפס לא הייתה נדחית.

ג. ההשערה המחקרית הייתה נדחית.

ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

**2)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**3)** כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| לפני הנישואין- $X$ | 69 | 93 | 82 | 68 |
| לאחר הנישואין- $Y$ | 80 | 88 | 84 | 71 |

מהן ההשערות הנבדקות?(ההפרש חושב $X-Y$)

א. $H_1: \mu_d < 0, \quad H_0: \mu_d = 0$

ב. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$

ג. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, \quad H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$

ד. $H_1: \mu_d > 0, \quad H_0: \mu_d = 0$

**4)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.
יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

א. מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
ג. מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

**6)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**7)** כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| לפני הנישואין | 69 | 93 | 82 | 68 |
| לאחר הנישואין | 80 | 88 | 84 | 71 |

באיזה התפלגות משתמשים לבדיקת ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

א. ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
ב. ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
ג. ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
ד. ההתפלגות $\chi^2$ ו-3 דרגות חופש.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0 : \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס.

סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0 : \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.

**9)** חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?

א. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ב. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

ג. הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.

ד. הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.

**10)** רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר.
נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים.
במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג.
אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחוניים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.
חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית.
מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.

ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.

ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

**12)** ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75.
מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.

ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.

ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.

ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

**13)** חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

א. החוקר דחה את השערת $H_0$ כאשר היא הייתה נכונה.

ב. החוקר דחה את השערת $H_1$ כאשר היא הייתה נכונה.

ג. החוקר לא דחה את השערת $H_0$ כאשר היא הייתה לא נכונה.

ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של $H_1$.

**14)** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

א. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.

ב. מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**15)** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות.
רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות.
יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה.
המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:

א. שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ב. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ג. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
ד. עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

**16)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%.
מה תמיד נכון?

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

**17)** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של $\alpha$ והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

**18)** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**19)** נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1: \mu < \mu_0$, $H_0: \mu = \mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. $\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**20)** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א ו-ב נכונות.

**21)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

**22)** מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

| | $\alpha$ | $1-\beta$ |
|---|---|---|
| א. | גדולה | גדולה |
| ב. | גדולה | קטנה |
| ג. | קטנה | גדולה |
| ד. | קטנה | קטנה |

**23)** נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית $H_0$ קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן $\alpha$, והן $(1-\beta)$, יקטנו.

ב. $\alpha$ יישאר ללא שינוי ואילו $(1-\beta)$ יגדל.

ג. $\alpha$ יגדל ואילו $(1-\beta)$ יקטן.

ד. הן $\alpha$ והן $(1-\beta)$ יגדלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**24)** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.
ב. טעות מסוג שני.
ג. טעות מסוג שלישי.
ד. אין טעות במסקנתו.

**25)** בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$ .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחר בתשובה הנכונה:

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

**26)** מובהקות התוצאה (PV) היא גם:

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

**27)** בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p\ value=0.0254$, לכן:

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את $H_0$ .
ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את $H_0$ .
ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את $H_0$ .
ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את $H_0$ .

**28)** רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
ד. אף תשובה לא נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**29)** נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_1: \mu < \mu_0, \quad H_0: \mu = \mu_0$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
$\sigma^2$ לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**30)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

**31)** בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| משקל במכשיר 1 | 4.5 | 9.6 | 0.7 | 2.5 |
| משקל במכשיר 2 | 3.5 | 6.9 | 1.7 | 0.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

**32)** כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**33)** סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0.
המשמעות של תוצאה זו היא:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ד. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

**34)** סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$,
ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

**35)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא:

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של $D$.

**36)** אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

א. תמיד נדחה $H_0$ כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ב. לא נדחה את $H_0$ אף פעם.

ג. לא נדחה את $H_0$ כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.

ד. כל התשובות לא נכונות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**37)** חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_1:\mu\neq 10,\quad H_0:\mu=10$.
לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_{\bar{x}}=-2.63$. לכן המסקנה היא:

א. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.

ב. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.

ג. הוא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01

ד. הוא לא ידחה $H_0$ ברמת מובהקות 0.1.

**38)** האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה.
מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

א. 0.005

ב. 0.03

ג. 0.0287

ד. 0.05

**39)** חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **<u>במציאות</u>** השערתה של החוקרת נכונה, <u>סביר</u> כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:

א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני ($\beta$).

ב. תגדל רמת הביטחון ($1-\alpha$).

ג. אף תשובה לא נכונה.

ד. כל התשובות נכונות.

**40)** איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

א. $\text{POWER}+\alpha+\beta=1$

ב. $\text{POWER}=0.5-\beta$

ג. $\text{POWER}+\alpha=1$

ד. $\beta+\alpha=1$

ה. הכול לא נכון.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**41)** מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.

ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.

ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

**42)** חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של $\alpha$. במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של $2\alpha$ על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

א. ההשערה תדחה.

ב. ההשערה לא תדחה.

ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.

ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

**43)** חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

א. אפס

ב. חיובי

ג. שלילי

ד. לא ניתן לדעת

**44)** עוצמה שווה ל-1 פרושה:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.

ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

**45)** מה מהבאים **<u>נכון</u>** לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.

ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.

ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.

ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**46)** לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0:\mu\geq 10$ , $H_1:\mu<10$ . נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058 . לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_1:\mu\neq 10$ , $H_0:\mu=10,$ אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05 :

א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.

ב. מקבלים את השערת האפס.

ג. דוחים את השערת האפס.

ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

**47)** לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_1:\mu=65$ , $H_0:\mu=55,$ נלקח מדגם מקרי בגודל $n$ מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות $\sigma^2$ . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות :

- עבור מדגם בגודל $n$ וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_1:\mu=60$ , $H_0:\mu=55,$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_1:\mu=65$ , $H_0:\mu=55,$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $n$ ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות : $H_1:\mu=65$ , $H_0:\mu=55,$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

א. שלושת הטענות אינן נכונות.

ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.

ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.

ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

| שאלה | תשובה | | שאלה | תשובה |
|---|---|---|---|---|
| 1 | א | | 25 | א |
| 2 | ד | | 26 | א |
| 3 | א | | 27 | ג |
| 4 | ג | | 28 | ד |
| 5 | ג | | 29 | א |
| 6 | א | | 30 | א |
| 7 | ב | | 31 | ד |
| 8 | ג | | 32 | ג |
| 9 | א | | 33 | א |
| 10 | א | | 34 | ג |
| 11 | א | | 35 | א |
| 12 | א | | 36 | ג |
| 13 | א | | 37 | א |
| 14 | א | | 38 | א |
| 15 | ג | | 39 | א |
| 16 | א | | 40 | ה |
| 17 | ג | | 41 | ד |
| 18 | ב | | 42 | ד |
| 19 | ג | | 43 | א |
| 20 | ד | | 44 | ד |
| 21 | ג | | 45 | ג |
| 22 | ג | | 46 | ב |
| 23 | א | | 47 | ד |
| 24 | ב | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 12 - ניתוח שונות חד כיוונית

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 71

# ניתוח שונות חד כיוונית

## רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $\left(\mu_{1..},\mu_k\right)$ של $k$ אוכלוסיות שונות.
לכן, בניתוח שונות, <u>השערות</u> המחקר הן:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1:$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

**ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:**

**1)** בכל אוכלוסייה מתוך $k$ האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

**2)** כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות $\sigma^2$.

**3)** המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם $k$ רמות (levels).
כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:
נסמן ב- $n_i$ את גודל המדגם בקבוצה $i$.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,....., $\overline{X}_k$ -ממוצע המדגם ה- $k$ -י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות: $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\overline{X}_i - \overline{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות: $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[n_i - 1\right] \bullet \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \overline{X}]^2$

$SST = SSB + SSW$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

| מקור השונות | סכום הריבועים SS | דרגות חופש $df$ | ממוצע הריבועים MS | F |
|---|---|---|---|---|
| **בין הקבוצות** - $B$ | $SSB$ | $k-1$ | $\frac{SSB}{k-1}$ | $\frac{MSB}{MSW}$ |
| **בתוך הקבוצות** - $W$ | $SSW$ | $n-k$ | $\frac{SSW}{n-k}$ | |
| **סה"כ** - $T$ | $SST$ | $n-1$ | | |

$$F=\frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}}\sim F\left(k-1,n-k\right)$$

אזור דחיית $H_0$ : $1-\alpha$ : $F>F_{(k-1,n-k)}$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.

א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?

ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.

ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

**2)** בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו:

| "המתמיד" | "רבין" | "הס" |
|---|---|---|
| 78 | 98 | 85 |
| 65 | 62 | 83 |
| 70 | 55 | 74 |
| 90 | 80 | 85 |
| 56 | | 75 |

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.

ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?

ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.

ד. מלאו את טבלת ANOVA.

ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.

ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

**3)** מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

| השיטה | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| גודל המדגם | 12 | 14 | 8 | 12 |
| הממוצע | 178 | 172 | 180 | 182 |
| סטיית התקן | 4 | 8 | 5 | 3 |

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.
האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

| האופה | ניר | מוזס | שלום |
|---|---|---|---|
| סכום הזמנים | 206 | 212 | 182 |
| סכום ריבועי הזמנים | 10644 | 11250 | 8982 |

**5)** להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

**ANOVA**

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Between Groups | 10.317 | 3 | 3.439 | 1.361 | .279 |
| Within Groups | 60.648 | 24 | 2.527 | | |
| Total | 70.964 | 27 | | | |

**6)** להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים.
השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

**ANOVA**

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Between Groups | 357.450 | ב | ג | ה | .000 |
| Within Groups | א | 17 | ד | | |
| Total | 522.950 | 19 | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה ( dosage). המינונים שניתנו הם : 10 מ״ג, 20 מ״ג ו-30 מ״ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

**ANOVA**

pulse

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Between Groups | 414.400 | 2 | 207.200 | 19.733 | .000 |
| Within Groups | 126.000 | 12 | 10.500 | | |
| Total | 540.400 | 14 | | | |

**pulse**

Tukey HSD[a]

| dosage | N | Subset for alpha = 0.05 | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| 30.00 | 5 | 71.0000 | |
| 20.00 | 5 | | 80.2000 |
| 10.00 | 5 | | 83.4000 |
| Sig. | | 1.000 | .299 |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

## Post Hoc Tests

**Multiple Comparisons**

pulse
Tukey HSD

| (I) dosage | (J) dosage | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 10.00 | 20.00 | 3.20000 | 2.04939 | .299 | -2.2675 | 8.6675 |
| | 30.00 | 12.40000* | 2.04939 | .000 | 6.9325 | 17.8675 |
| 20.00 | 10.00 | -3.20000 | 2.04939 | .299 | -8.6675 | 2.2675 |
| | 30.00 | 9.20000* | 2.04939 | .002 | 3.7325 | 14.6675 |
| 30.00 | 10.00 | -12.40000* | 2.04939 | .000 | -17.8675 | -6.9325 |
| | 20.00 | -9.20000* | 2.04939 | .002 | -14.6675 | -3.7325 |

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!

ד. לטבלת הANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת ״טוקי״. ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:

א. כמה בתי ספר יש בעיר?

ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?

ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%

ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

**Oneway**

**ANOVA**

grade

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Between Groups | 7799.600 | 4 | 1949.900 | 13.586 | .000 |
| Within Groups | 2870.400 | 20 | 143.520 | | |
| Total | 10670.000 | 24 | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## Post Hoc Tests

**Multiple Comparisons**

grade

Scheffe

| (I) school | (J) school | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 1.00 | 2.00 | 5.40000 | 7.57681 | .971 | -20.2543 | 31.0543 |
| | 3.00 | 36.80000* | 7.57681 | .003 | 11.1457 | 62.4543 |
| | 4.00 | 36.40000* | 7.57681 | .003 | 10.7457 | 62.0543 |
| | 5.00 | -2.60000 | 7.57681 | .998 | -28.2543 | 23.0543 |
| 2.00 | 1.00 | -5.40000 | 7.57681 | .971 | -31.0543 | 20.2543 |
| | 3.00 | 31.40000* | 7.57681 | .011 | 5.7457 | 57.0543 |
| | 4.00 | 31.00000* | 7.57681 | .013 | 5.3457 | 56.6543 |
| | 5.00 | -8.00000 | 7.57681 | .888 | -33.6543 | 17.6543 |
| 3.00 | 1.00 | -36.80000* | 7.57681 | .003 | -62.4543 | -11.1457 |
| | 2.00 | -31.40000* | 7.57681 | .011 | -57.0543 | -5.7457 |
| | 4.00 | -.40000 | 7.57681 | 1.000 | -26.0543 | 25.2543 |
| | 5.00 | -39.40000* | 7.57681 | .001 | -65.0543 | -13.7457 |
| 4.00 | 1.00 | -36.40000* | 7.57681 | .003 | -62.0543 | -10.7457 |
| | 2.00 | -31.00000* | 7.57681 | .013 | -56.6543 | -5.3457 |
| | 3.00 | .40000 | 7.57681 | 1.000 | -25.2543 | 26.0543 |
| | 5.00 | -39.00000* | 7.57681 | .001 | -64.6543 | -13.3457 |
| 5.00 | 1.00 | 2.60000 | 7.57681 | .998 | -23.0543 | 28.2543 |
| | 2.00 | 8.00000 | 7.57681 | .888 | -17.6543 | 33.6543 |
| | 3.00 | 39.40000* | 7.57681 | .001 | 13.7457 | 65.0543 |
| | 4.00 | 39.00000* | 7.57681 | .001 | 13.3457 | 64.6543 |

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

## Homogeneous Subsets

**grade**

Scheffe[a]

| school | N | Subset for alpha = 0.05 | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| 3.00 | 5 | 45.0000 | |
| 4.00 | 5 | 45.4000 | |
| 2.00 | 5 | | 76.4000 |
| 1.00 | 5 | | 81.8000 |
| 5.00 | 5 | | 84.4000 |
| Sig. | | 1.000 | .888 |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. משתנה בלתי תלוי: סוג התרופה.
משתנה תלוי: הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ב. ניתוח שונות חד כיווני
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

**2)** א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$
הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$ , $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$ , $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$ .

ד. להלן טבלה:

| מקור השונות | SS | df | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| B | 200.6 | 2 | 100.3 | |
| W | 1904.75 | 11 | 173.2 | |
| סה"כ | 2105.35 | 13 | | 0.58 |

ה. $F > 3.98$ .

ו. נקבל את $H_0$ .

**3)** א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

ב. נדחה את $H_0$ .

ג. כן.

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** נקבל את $H_0$ : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

**5)** $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את $H_0$ : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

**6)** להלן טבלה:

**ANOVA**

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|
| Between Groups | 357.450 ב | 2 | 178.725 ג | 18.36 ה | .000 |
| Within Groups | 165.5 א | 17 | 9.735 ד | | |
| Total | 522.950 | 19 | | | |

**7)** א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1 : otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונות.

נדחה את $H_0$ : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$ .

**8)** א. 5 ב. 25

ג. נדחה את $H_0$ : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד. $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 13 - מבחני חי בריבוע

### תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה ..... 80
2. מבחן לאי תלות ..... 85

# מבחני חי בריבוע

## מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה.
המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

**מבנה המבחן:**

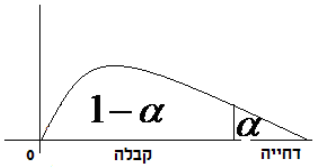
**השערות:**

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - $H_0$.

אחרת - $H_1$.

**כלל הכרעה:**

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K-1$ , כאשר $K$ - מספר הקטגוריות.




הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,K-1}$ , כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,K-1}$ , דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ .

$O_i$ - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה $i$.

$p_i$ - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה $i$ בהנחת השערת האפס.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הערה:**

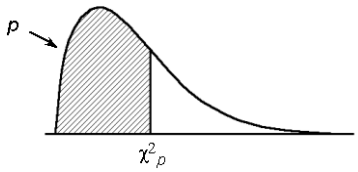
תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל $i$. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים.
בסקר התקבל ש40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה




| | p | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| df | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים.
התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**2)** מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

**3)** 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.

א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית?
בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.

ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.

ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי $\chi^2$? מה תהיה המסקנה במקרה זה?

**4)** מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

| סכום התוצאות | מספר הטלות |
|---|---|
| 2-5 | 20 |
| 6-8 | 17 |
| 9-10 | 20 |
| 11-12 | 15 |

**5)** בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

| מספר הסוללות הפגומות | 0 | 1 | 2 | 3 ומעלה |
|---|---|---|---|---|
| שכיחות | 276 | 104 | 12 | 8 |

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** להלן השערות מחקר: $H_1 : else$ , $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$.

תוצאות המדגם הן:

| $X$ | מתחת 36 | 36-40 | 40-44 | מעל 44 |
|---|---|---|---|---|
| מספר הדגימות | 3A | 50A | 45A | 2A |

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את $H_0$ ברמת מובהקות של 5%?

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** לא נדחה $H_0$.

**3)** א. לא נדחה $H_0$. ב. בין 0.95 ל-0.975 ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

**4)** נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

**5)** 0.005.

**6)** 14.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים.
שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים $H_0$.

יש תלות בין המשתנים $H_1$.

**כלל הכרעה:**

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f=(r-1)(c-1)$.

כאשר: $r$ - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

$c$ - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$.

כאשר:

$O_i$ - השכיחות נצפית במדגם בתא $i$.

$E_i$ - שכיחות צפויה במדגם בתא $i$ בהנחת השערת האפס.

$$E_i=\frac{f(x)\cdot f(y)}{n}$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל $i$. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין $E$ קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים $E$ קטן מ-5.

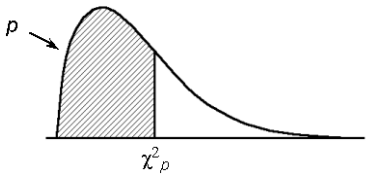
**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

| המגדר / דעה | בעד | נגד | נמנע | סה"כ |
|---|---|---|---|---|
| גברים | 50 | 40 | 10 | |
| נשים | 20 | 60 | 20 | |
| סה"כ | | | | |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$




| df | $p$ .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים.
להלן התוצאות:

| שביעות רצון<br>גודל המפעל | נמוכה | בינונית | גבוהה | סה"כ |
|---|---|---|---|---|
| גדול | 182 | 203 | 215 | 600 |
| קטן | 154 | 110 | 136 | 400 |
| סה"כ | 336 | 313 | 351 | 1000 |

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

**2)** מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

| | יום | ערב | לילה |
|---|---|---|---|
| פגומים | 50 | 60 | 70 |
| תקינים | 600 | 700 | 800 |

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות?
הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

**3)** נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא.
האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר?
בדקו ברמת בטחון של 95%.

## תשובות סופיות

**1)** נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.

**2)** נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.

**3)** נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 14 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

### תוכן העניינים

1. מבחן מקנמר ..... 89

## מבחן מקנמר – רקע

מבחן סטטיסטי זה נכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים.
המבחן רלבנטי כשהמדגם מזווג וכשהמשתנה התלוי (הנחקר) הוא דיכוטומי, כלומר מקבל שני ערכים בלבד.
מספר התצפיות שחל בהן שינוי צריך להיות לפחות 20; אם תנאי זה לא מתקיים אפשר לבצע את מבחן הסימן במקום.

**דוגמה:**

50 איש נשאלו האם הם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה. הם נשאלו בשני מצבים: פעם ראשונה לפני שצפו בסרטון ופעם שניה שבוע אחרי שצפו בסרטון.
התוצאות שהתקבלו היו:
13 אנשים טענו שהם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה גם לפני הצפייה בסרטון וגם אחרי הצפייה בסרטון.
9 אנשים טענו שלפני הצפייה בסרטון הם לא שלחו מסרונים אבל אחרי הצפייה בסרטון הם כן שלחו מסרונים בזמן הנהיגה.
20 איש טענו שהם נהגו לשלוח מסרונים לפני הסרטון אך אחרי צפייה בסרטון הם הפסיקו לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה.
ו-8 אנשים לא שלחו מסרונים בזמן הנהיגה לא לפני ולא אחרי צפייה בסרטון.
מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

**מבנה המבחן:**

סטטיסטי המבחן הוא: $Z=\frac{B-C}{\sqrt{B+C}}$ כאשר $B,C$ – שכיחויות שבהן חל שינוי ומתעלמים מהשכיחויות שלא חל בהן שינוי. הסטטיסטי מתפלג $Z\sim N(0,1)$.

**דוגמה:**

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם לסרטון השפעה על שליחת המסרונים בזמן הנהיגה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** פוליטיקאי הופיע אמש בתכנית טלוויזיה והוא מעוניין לבדוק האם התוכנית שיפרה את אמון הציבור בו. לצורך כך בוצע סקר שבו נשאל הצופה האם בעניו הפוליטיקאי נתפס כאמין לפני התוכנית והאם הוא נתפס כאמין לאחר התוכנית. להלן התוצאות שהתקבלו (המספרים מייצגים מספר צופים):
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

| | | לפני | |
|---|---|---|---|
| | | אמין | לא אמין |
| אחרי | אמין | 12 | 21 |
| | לא אמין | 7 | 17 |

**2)** חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר שבו השתתפו 50 נשאלים 30 טענו שלא שינו את הרגלי הצריכה. 15 טענו שהחלו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין ו-5 טענו שהפסיקו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה $H_0$.

**2)** א. 0.025 ב.נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 15 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

### תוכן העניינים

1. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים ..... 91
2. מבחן פישר ..... 98

## מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים.
מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.
המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר.
מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

**דוגמה:**

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת חינוך B.
פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20.
מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

| שיטה A | שיטה B |
|---|---|
| 16 | 14 |
| 17 | 14 |
| 20 | 19 |
| 10 | 9 |
| 18 | 8 |

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

**השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:**

1. נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
2. נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
3. נחשב את $W_1$ - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,

   ו-$W_2$ - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
4. נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \qquad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

5. הסטטיסטי $U$: במבחן דו צדדי $U = \min(U_1, U_2)$ במבחן חד צדדי $U$ יהיה ה-$U_i$, שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.
טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את ה- $U$ הסטטיסטי.
טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של U שנסמן ב $Uc$.

| טבלה מהסוג הראשון | טבלה מהסוג השני |
|---|---|
| $n_1$ ו- $n_2 \le 8$ | $n_1$ או $n_2 \ge 9$ |
| עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את $Pv$<br>אם $Pv \le \alpha$ דוחים את $H_0$. | נותנת את הערך הקריטי $Uc$<br>כל הכרעה: נדחה את $H_0$ אם $U \le Uc$ |

**דוגמה:**

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים

$n_2 = 3$

| u | $n_1$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.250 | 0.100 | 0.050 |
| 12 | 0.500 | 0.200 | 0.100 |
| 3 | 0.750 | 0.400 | 0.200 |
| 4 | | 0.600 | 0.350 |
| 5 | | | 0.500 |
| | | | 0.650 |

$n_2 = 4$

| u | $n_1$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0.200 | 0.067 | 0.028 | 0.014 |
| 1 | 0.400 | 0.133 | 0.057 | 0.029 |
| 2 | 0.600 | 0.267 | 0.114 | 0.057 |
| 3 | | 0.400 | 0.200 | 0.100 |
| 4 | | 0.600 | 0.314 | 0.171 |
| 5 | | | 0.429 | 0.243 |
| 6 | | | 0.571 | 0.343 |
| 7 | | | | 0.443 |
| 8 | | | | 0.557 |

$n_2 = 5$

| u | $n_1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0.167 | 0.047 | 0.018 | 0.008 | 0.004 |
| 1 | 0.333 | 0.095 | 0.036 | 0.016 | 0.008 |
| 2 | 0.500 | 0.190 | 0.071 | 0.032 | 0.016 |
| 3 | 0.667 | 0.286 | 0.125 | 0.056 | 0.028 |
| 4 | | 0.429 | 0.196 | 0.095 | 0.048 |
| 5 | | 0.571 | 0.286 | 0.143 | 0.075 |
| 6 | | | 0.393 | 0.206 | 0.111 |
| 7 | | | 0.500 | 0.278 | 0.155 |
| 8 | | | 0.607 | 0.365 | 0.210 |
| 9 | | | | 0.452 | 0.274 |
| 10 | | | | 0.548 | 0.345 |
| 11 | | | | | 0.421 |
| 12 | | | | | 0.500 |
| 13 | | | | | 0.579 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 6$

| u | $n_1$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 0.143 | 0.036 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 1 | 0.286 | 0.071 | 0.024 | 0.010 | 0.004 | 0.002 |
| 2 | 0.428 | 0.143 | 0.048 | 0.019 | 0.009 | 0.004 |
| 3 | 0.571 | 0.214 | 0.083 | 0.033 | 0.015 | 0.008 |
| 4 | | 0.321 | 0.131 | 0.057 | 0.026 | 0.013 |
| 5 | | 0.429 | 0.190 | 0.086 | 0.041 | 0.021 |
| 6 | | 0.571 | 0.274 | 0.129 | 0.063 | 0.032 |
| 7 | | | 0.357 | 0.176 | 0.089 | 0.047 |
| 8 | | | 0.452 | 0.238 | 0.123 | 0.066 |
| 9 | | | 0.548 | 0.305 | 0.165 | 0.090 |
| 10 | | | | 0.381 | 0.214 | 0.120 |
| 11 | | | | 0.457 | 0.268 | 0.155 |
| 12 | | | | 0.545 | 0.331 | 0.197 |
| 13 | | | | | 0.396 | 0.242 |
| 14 | | | | | 0.465 | 0.294 |
| 15 | | | | | 0.535 | 0.350 |
| 16 | | | | | | 0.409 |
| 17 | | | | | | 0.469 |
| 18 | | | | | | 0.531 |

$n_2 = 7$

| u | $n_1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 0.125 | 0.028 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 1 | 0.250 | 0.056 | 0.017 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 2 | 0.375 | 0.111 | 0.033 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 3 | 0.500 | 0.167 | 0.058 | 0.021 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.625 | 0.250 | 0.092 | 0.036 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | | 0.333 | 0.133 | 0.055 | 0.024 | 0.011 | 0.006 |
| 6 | | 0.444 | 0.192 | 0.082 | 0.037 | 0.017 | 0.009 |
| 7 | | 0.556 | 0.258 | 0.115 | 0.053 | 0.026 | 0.013 |
| 8 | | | 0.333 | 0.158 | 0.074 | 0.037 | 0.019 |
| 9 | | | 0.417 | 0.206 | 0.101 | 0.051 | 0.027 |
| 10 | | | 0.500 | 0.264 | 0.134 | 0.069 | 0.036 |
| 11 | | | 0.583 | 0.324 | 0.172 | 0.090 | 0.049 |
| 12 | | | | 0.394 | 0.216 | 0.117 | 0.064 |
| 13 | | | | 0.464 | 0.265 | 0.147 | 0.082 |
| 14 | | | | 0.538 | 0.319 | 0.183 | 0.104 |
| 15 | | | | | 0.378 | 0.223 | 0.130 |
| 16 | | | | | 0.438 | 0.267 | 0.159 |
| 17 | | | | | 0.500 | 0.314 | 0.191 |
| 18 | | | | | 0.562 | 0.365 | 0.228 |
| 19 | | | | | | 0.418 | 0.267 |
| 20 | | | | | | 0.473 | 0.310 |
| 21 | | | | | | 0.527 | 0.355 |
| 22 | | | | | | | 0.402 |
| 23 | | | | | | | 0.451 |
| 24 | | | | | | | 0.500 |
| 25 | | | | | | | 0.549 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

$n_2 = 8$

| u | $n_1$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0.111 | 0.022 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.222 | 0.044 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.333 | 0.089 | 0.024 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.444 | 0.133 | 0.042 | 0.014 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 4 | 0.556 | 0.200 | 0.067 | 0.024 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | | 0.267 | 0.097 | 0.036 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 6 | | 0.356 | 0.139 | 0.055 | 0.023 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 7 | | 0.444 | 0.188 | 0.077 | 0.033 | 0.015 | 0.007 | 0.003 |
| 8 | | 0.556 | 0.248 | 0.107 | 0.047 | 0.021 | 0.010 | 0.005 |
| 9 | | | 0.315 | 0.141 | 0.064 | 0.030 | 0.014 | 0.007 |
| 10 | | | 0.387 | 0.184 | 0.085 | 0.041 | 0.020 | 0.010 |
| 11 | | | 0.461 | 0.230 | 0.111 | 0.054 | 0.027 | 0.014 |
| 12 | | | 0.539 | 0.285 | 0.142 | 0.071 | 0.036 | 0.019 |
| 13 | | | | 0.341 | 0.177 | 0.091 | 0.047 | 0.025 |
| 14 | | | | 0.404 | 0.217 | 0.114 | 0.060 | 0.032 |
| 15 | | | | 0.467 | 0.262 | 0.141 | 0.076 | 0.041 |
| 16 | | | | 0.533 | 0.311 | 0.172 | 0.095 | 0.052 |
| 17 | | | | | 0.362 | 0.207 | 0.116 | 0.065 |
| 18 | | | | | 0.416 | 0.245 | 0.140 | 0.080 |
| 19 | | | | | 0.472 | 0.286 | 0.168 | 0.097 |
| 20 | | | | | 0.528 | 0.331 | 0.198 | 0.117 |
| 21 | | | | | | 0.377 | 0.232 | 0.139 |
| 22 | | | | | | 0.426 | 0.268 | 0.164 |
| 23 | | | | | | 0.475 | 0.306 | 0.101 |
| 24 | | | | | | 0.525 | 0.347 | 0.221 |
| 25 | | | | | | | 0.389 | 0.253 |
| 26 | | | | | | | 0.433 | 0.287 |
| 27 | | | | | | | 0.478 | 0.323 |
| 28 | | | | | | | 0.522 | 0.360 |
| 29 | | | | | | | | 0.399 |
| 30 | | | | | | | | 0.439 |
| 31 | | | | | | | | 0.480 |
| 32 | | | | | | | | 0.520 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## טבלה למציאת $U_c$

**ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים.**

| $n_1$ | $n_2$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

| קבוצה ב | קבוצה א |
|---|---|
| 82 | 68 |
| 74 | 82 |
| 82 | 78 |
| 64 | 94 |
| 67 | 87 |
| 65 | |

**2)** מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**3)** במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:
<u>קבוצת הטיפול</u>: 12,16, 8, 0, 4, 3, 9, 3, 1.
<u>קבוצת הביקורת</u>: 12, 23, 13, 19,7,28.
בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

## תשובות סופיות

**1)** לא נדחה את $H_0$.

**2)** נדחה את $H_0$.

**3)** לא נדחה את $H_0$.

\\


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מבחן פישר – רקע

מבחן זה הוא מבחן הנכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים.
משתמשים במבחן כאשר מתעניינים להשוות בין שתי אוכלוסיות והמשתנה התלוי הוא דיכוטומי, כלומר משתנה שיש לו שני ערכים אפשריים.
במבחן זה יוצרים מדגם אחד שמקבל טיפול כלשהו ומדגם אחר המהווה קבוצת ביקורת ואינו מקבל את הטיפול. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת שתי פרופורציות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.
במבחן הפרמטרי דורשים שבכל מדגם מספר ההצלחות וגם מספר הכישלונות יהיה לפחות 10 (הפחות מחמירים דורשים לפחות 5).
מבחן פישר, אותו נעשה בפרק זה, נקרא בספרות המקצועית:
"Fisher exact probability test".

**דוגמה:**

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים בקורס סטטיסטיקה.
נלקחו 2 כיתות הלומדות סטטיסטיקה בנות 15 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת ניתנו שיעורי עזר ובכיתה השנייה לא ניתנו שיעורי עזר. בכיתה בה ניתנו שיעורי עזר 1 נכשל בקורס ובכיתה שבה לא ניתנו שיעורי עזר 3 נכשלו בקורס.
מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן פישר היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $PV \le \alpha$.
מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס.
כדי לחשב את מובהקות התוצאה נבנה טבלת שכיחות משותפת במבנה הבא:

| | "כישלון" | "הצלחה" | סה"כ |
|---|---|---|---|
| קבוצת טיפול | A | B | A+B |
| קבוצת ביקורת | C | D | C+D |
| סה"כ | A+C | B+D | $N$ |

בנו את טבלת השכיחות המשותפת המתאימה לדוגמה:

| | | | סה"כ |
|---|---|---|---|
| קבוצת טיפול | A | B | A+B |
| קבוצת ביקורת | C | D | C+D |
| סה"כ | $A+C$ | $B+D$ | $N$ |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה:**

בהנחת השערת האפס התפלגות של $A$ הינו משתנה מקרי היפר גיאומטרי שבו יש אוכלוסייה בגודל $N$ , מתוכם $C+A$ "מיוחדים" ואנו דוגמים מתוכם מדגם בגודל $B+A$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפר גיאומטרית במקרה זה,

כאשר $X$ מייצג את השכיחות $A$ תהיה: $\frac{\binom{A+C}{x}\binom{B+D}{A+B-x}}{\binom{N}{A+B}}$.

חשבו את מובהקות התוצאה בדוגמה ומה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** פסיכיאטרים נשאלו האם תרופה אנטי דיכאונית מסוימת אכן משפיעה על מצב הרוח. נלקחו 28 אנשים שהתלוננו על דיכאון ברמה דומה והם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 16 נטלו את התרופה האנטי דיכאונית הנחקרת והיתר היוו קבוצת ביקורת ונטלו פלסיבו. כעבור 3 חודשים נבדק מצבם הנפשי של כל משתתפי המחקר. בקרב אלו שנטלו את התרופה רק 2 התלוננו על דיכאון ובקרב אלו שנטלו הפלסבו 6 התלוננו על דכאון.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

**2)** חנות פרחים מעוניינת לבדוק את הטענה שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים. נדגמו 20 פרחים מאותו סוג. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות: 10 פרחים יהיו בקבוצת הניסוי, כלומר בתאורה אולטרה סגולה והפרחים הנותרים יהיו בקבוצת הביקורת – באותם התנאים בדיוק אך ללא תאורה אולטרה סגולה.
כעבור 5 ימים נבדקו כלל הפרחים.

| תאורה / מצב הפרח לאחר 5 ימים | נבול | תקין |
|---|---|---|
| אולטרה סגולה | 1 | 9 |
| רגילה | 7 | 3 |

א. מה היא רמת המובהקות המינימלית עבורה יוסק שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים?

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם בקבוצת הביקורת היו נמצאים פחות פרחים נבולים?

**3)** משרד החינוך הזמין מחקר שמטרתו היה לבדוק האם שנת צהריים קבועה בזמן לימודי התיכון משפיעה על הזכאות לבגרות.
נדגמו בוגרי תיכון אקראיים שנשאלו שתי שאלות:
$Q1$ - האם בזמן התיכון נהגת לישון צהריים באופן קבוע?
$Q2$ - האם את/ה זכאי/ת לתעודת בגרות?
להלן התוצאות שהתקבלו.

א. רשמו את השערות המבחן. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

ב. מהי מובהקות התוצאה?

ג. בדקו את השערות המחקר ברמת מובהקות של 6%.

| שאלון/ מספר נשאל | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q1 | כן | לא | לא | לא | כן | כן | לא | לא | לא | לא | לא | כן | לא | לא |
| Q2 | כן | כן | כן | לא | לא | כן | לא | לא | כן | כן | לא | כן | כן | לא |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** נדחה את $H_0$.

**2)** א. 0.0099 ב. תקטן.

**3)** א. מבחן פישר. ב. 0.8112 ג. לא נדחה $H_0$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# ביוסטטיסטיקה ב

## פרק 16 - מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו

### תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי ( פירסון) ..... 102
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) ..... 113
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלנארי ..... 118

# מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

## מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- $Y$ הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- $X$ הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- $X$ ושיעור ה- $Y$ שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| מספר חדרים בדירה | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מספר הנפשות בדירה | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**1)** כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

**2)** כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

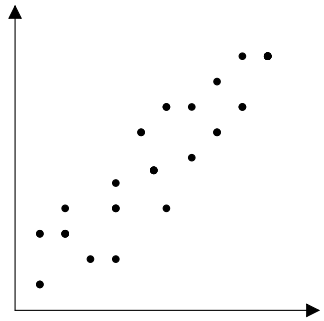
**3)** שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

**4)** מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

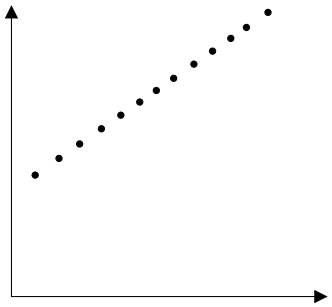

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

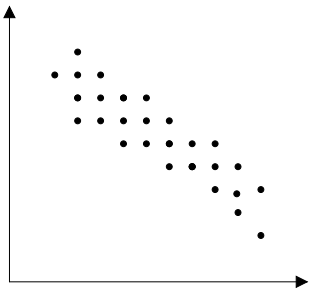
**קשר לנארי חיובי חלקי**



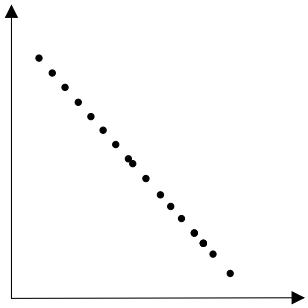
**קשר לנארי חיובי מלא**



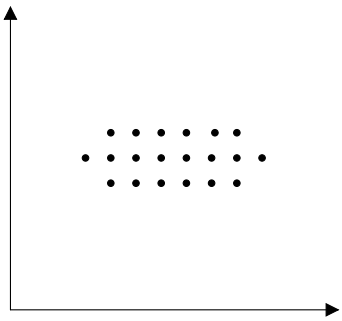
**קשר לינארי שלילי חלקי**



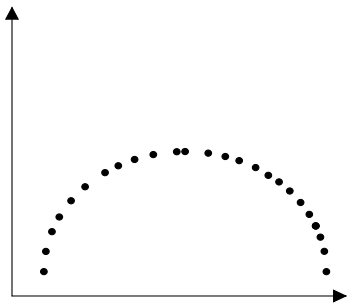
**קשר לינארי שלילי מלא**



**אין קשר**



**אין קשר לינארי**



**משמעות מקדם המתאם:**

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1 0 1


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

**מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):**

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $a$ שלילי.

**מתאם חיובי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: $\rho$ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

$r$ - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר $\rho$.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את $X$ ב- $Y$ התוצאה תהיה זהה.

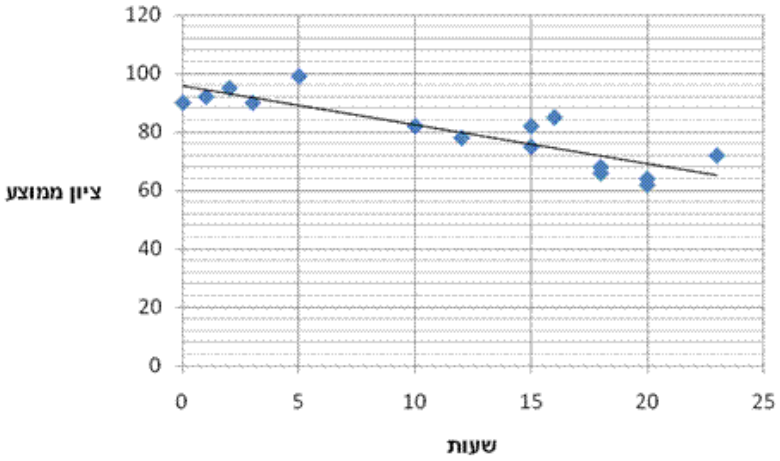
**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:




א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

**2)** להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | ? | -0.7 | ? |
| לשון | ? | ? | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | ? | ? |

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

**3)** במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

| שעות תרגול | ציון סופי |
|---|---|
| 20 | 90 |
| 25 | 90 |
| 30 | 95 |
| 15 | 60 |
| 30 | 90 |
| 20 | 85 |
| 10 | 50 |

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

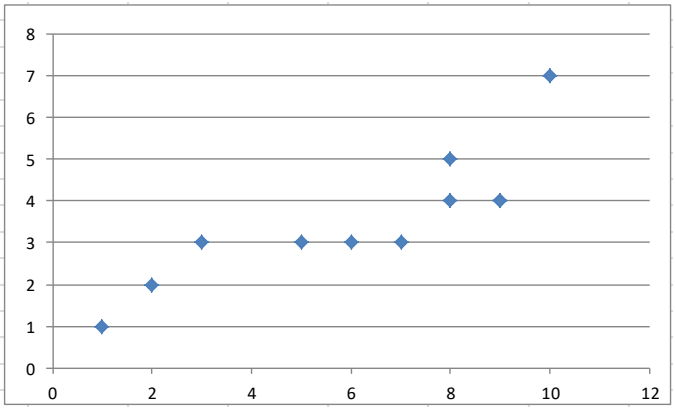

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

**5)** להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:




א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- $X$ שלה הוא 4 וערך ה- $Y$ שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

**שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):**

**6)** חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

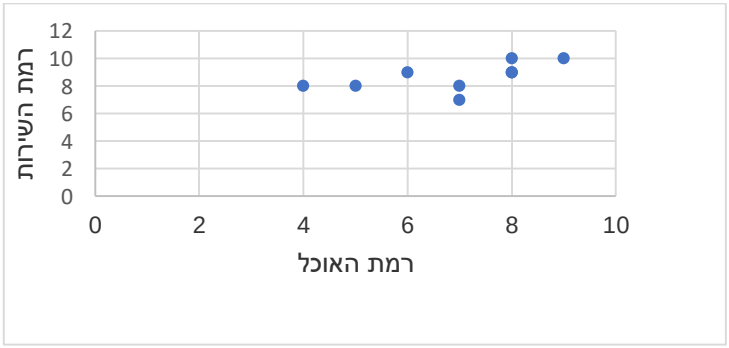
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

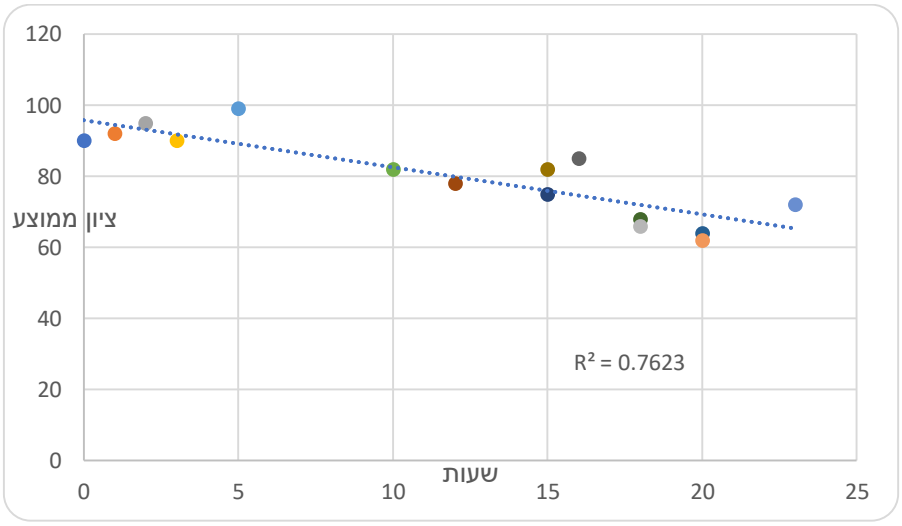
**7)** בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.




מה יהיה ערכו של מקדם המתאם ($r$)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

**8)** חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

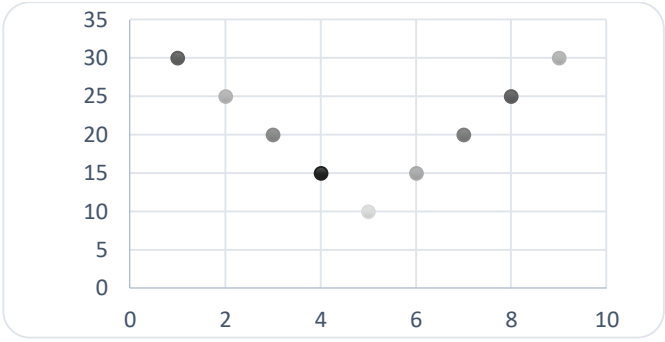



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



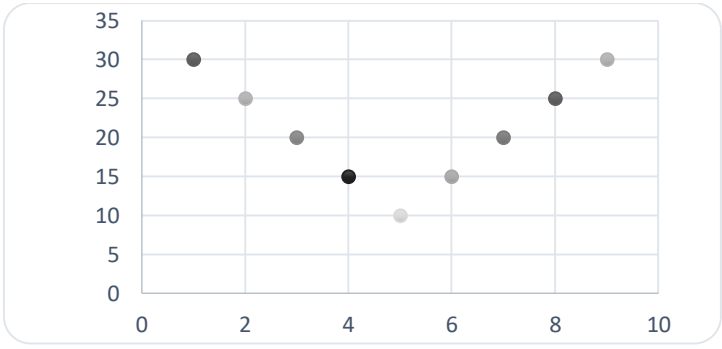

א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

**10)** התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.




איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

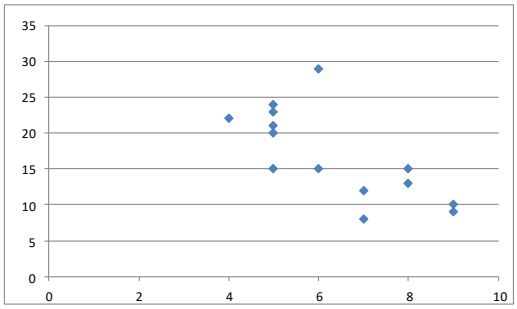
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:




$X$ - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- $Y$ (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

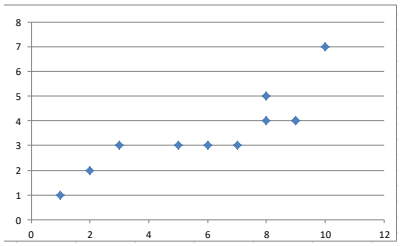
**11)** לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של $r$?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

**12)** אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

**13)** להלן דיאגרמת פיזור:




מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

**14)** בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**15)** לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

**16)** מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

| | | |
|---|---|---|
| | | 159 |
| | | 170 |
| | | 180 |
| | | 185 |
| | | 204 |
| | | 224 |
| | | 236 |
| | | 212 |
| | | 168 |
| | | 189 |
| | | 195 |
| | | 163 |
| | | 187 |
| | | 206 |
| | | 201 |
| | | 223 |
| | | 242 |
| | | 203 |
| | | 205 |
| 197.47 | AVERAGE | |
| 536.25 | VARPA | |

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

**17)** מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

**18)** אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**19)** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין $X$ – ציון בבגרות בלשון ל $Y$ – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

**20)** עבור סדרה של תצפיות מדדו את $X$ ואת $Y$. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של $Y$ ירד הערך של $X$ בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. שעות בילוי.
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

**2)** א. להלן טבלה:

| | ספורט | לשון | מתמטיקה |
|---|---|---|---|
| ספורט | 1 | -0.7 | 0.1 |
| לשון | -0.7 | 1 | 0.6 |
| מתמטיקה | -0.1 | 0.6 | 1 |

ב. ספורט ולשון.

**3)** א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

**4)** א. לעלות.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

**5)** א. חלקי, חיובי.
ב. קטן.

**6)** ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

**11)** ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

**16)** א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, $X$ הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- $Y$ הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

**דוגמה:**

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – $X$ מסבירה את ההכנסה שלו $Y$. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

**שלב ראשון:** נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

**דוגמה:**

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
$X$ -מס' חדרים בדירה. $Y$-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

| מס' דירה | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 4 |

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

**שלב שני:** מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

**מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):**

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $b$ יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע $b$ שלילי (מקדם מתאם 1-).


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

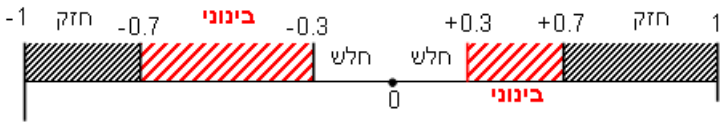
**מתאם חיובי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט.

**מתאם שלילי חלקי:**

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את $X$ ל- $Y$ באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:




מקדם המתאם יסומן באות $r$.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה $X$: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה $Y$: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

| מספר חיסורים | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ציון | 80 | 90 | 90 | 70 | 70 | 50 |

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

**2)** במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון $X$ בדם החולה לרמת ההורמון $Y$ שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

| $X$ | $Y$ |
|---|---|
| 10 | 12 |
| 14 | 15 |
| 15 | 15 |
| 18 | 17 |
| 20 | 21 |

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

**3)** נסמן ב- $X$ את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$ את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין $X$ ל- $Y$. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** נסמן ב- $X$ את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$ את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין $X$ ל- $Y$.

**5)** במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

**6)** להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ , $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של $X$ ושל $Y$ הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

**שאלות רב-ברירה:**

**7)** נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

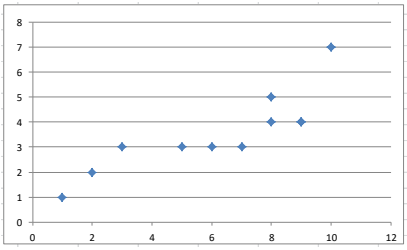
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**8)** נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

**9)** להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?




א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

## תשובות סופיות

**1)** א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. 0.9325-. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

**2)** א. $\bar{y}=16$ , $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

**3)** א. 0.8.

**4)** 0.8.

**5)** 1.

**6)** א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

**7)** ג'.

**8)** א'.

**9)** ב'.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: $\rho$ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר:
$r$ - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר $\rho$.

**השערת האפס:** תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0:\rho=0$.

ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

סטטיסטי המבחן: $t=\dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\sim t(n-2)$

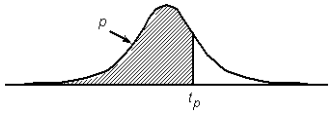
סטטיסטי זה מתפלג $t$ עם $n-2$ דרגות חופש.

| השערת האפס: | $H_0:\rho=0$ | $H_0:\rho=0$ | $H_0:\rho=0$ |
|---|---|---|---|
| השערת המחקר: | $H_1:\rho\neq 0$ | $H_1:\rho<0$ | $H_1:\rho>0$ |
| כלל ההכרעה:<br>אזור דחייה של השערת האפס | $t\geq t_{1-\alpha}$<br>או<br>$t\leq -t_{1-\alpha}$ | $t\leq -t_{1-\alpha}$ | $t\geq t_{1-\alpha}$ |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T

$P$




| דרגות חופש | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.9995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.709 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.598 |
| 3 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.941 |
| 4 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.859 |
| 6 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.405 |
| 8 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.767 |
| 24 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 120 | 0.677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| ∞ | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות

**1)** להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

| נחקר | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ -ווותק | 13 | 18 | 2 | 8 | 16 | 9 | 5 | 28 | 17 | 24 |
| $Y$ -השכלה | 12 | 14 | 17 | 8 | 11 | 12 | 13 | 8 | 12 | 15 |

מקדם המתאם חושב והתקבל: 0.31-.

א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?

ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

**2)** מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

| נחקרת | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| המוגלובין | 14.7 | 13.5 | 9.7 | 12 | 10.8 | 13 | 10.3 |
| גיל | 39 | 34 | 30 | 29 | 28 | 26 | 23 |

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7.

א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?

ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

**3)** בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8-.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?

ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

**4)** מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6.

א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות

**1)** א. לא נדחה את $H_0$ .
ב. לא תשתנה.

**2)** א. לא
ב. לא נדחה את $H_0$ .

**3)** א. נדחה את $H_0$ .
ב. לא ניתן לדעת.
ג. לפחות 0.005.

**4)** א. נדחה את $H_0$ .
ב. $0.005 < P_V < 0.01$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל