

ביוסטטיסטיקה א



תוכן העניינים

1.	סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה	1
2.	סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים	6
3.	סטטיסטיקה תיאורית- סכימה	17
4.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי	21
5.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן	30
6.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני	33
7.	סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן	35
8.	סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות	37
9.	סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה	40
10.	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית	42
11.	סטטיסטיקה תיאורית-מקדם ההשתנות	45
12.	סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא	47
13.	סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות	49
14.	סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות	56
15.	יסודות ההסתברות	63
16.	פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים	67
17.	הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד	75
18.	הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד	78
19.	הערכת כלים אבחנתיים	81
20.	תלות ואי תלות בין מאורעות	85
21.	התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית	87
22.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	94
23.	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי	97

תוכן העניינים

24.	מושגי יסוד באמידה	103
25.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע)	108
26.	רווח סמך לפרופורציה	118
27.	רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים	124
28.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים	128
29.	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים	130
30.	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)	136
31.	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	160
32.	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים	168
33.	הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות	172
34.	בדיקת השערות על פרופורציה	175
35.	מבחני חי בריבוע	186
36.	מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו	191
37.	שאלות מסכמות בבדיקת השערות	211
38.	ניתוח שונות חד גורמי (ללא ספר)	
39.	רגרסיה פשוטה	227
40.	רגרסיה מרובה	239
41.	רגרסיה לוגיסטית	247
42.	רגרסיה - שאלות ממבחנים	257

ביוסטטיסטיקה א

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

1. סולמות מדידה.....1

סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם.

בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת. באותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.

משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים : דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה.

כל ישות בקבוצה שאנו צופים בה ואוספים לגביה נתונים נקראת תצפית.

הנתונים שנאספים בדרך כלל מרוכזים במסד נתונים. במסד הנתונים כל שורה היא תצפית וכל עמודה מייצגת משתנה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

למחלקת טראומה הגיעו 5 פצועים מתאונה שקרתה בכביש החוף. אספו נתונים לגבי אותם פצועים, הנתונים מרוכזים בטבלה הבאה :

מין	גיל	מצב הפצוע	דופק
גבר	26.6	אנוש	40
גבר	24.5	קשה	38
אישה	32.1	קשה	50
גבר	34.9	בינוני	65
אישה	23.1	קל	89

ענו על השאלות הבאות :

הגדירו את הקבוצה שבדוגמה.

כמה תצפיות בקבוצה?

כמה משתנים בקבוצה?

כמה ערכים יש למשתנה "מין"?

את המשתנים במחקר אנו מסווגים ל-"סולמות מדידה" הדבר חשוב לדרך שבה ננתח את הנתונים בהמשך.

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (nominal) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות לערכים שלהם לדוגמה: צבע מועדף.
משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריים. למשל: אזרחות ישראלית: יש או אין.
2. סולם סדר (ordinal) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר מי יותר או מי פחות אבל אין משמעות לגודל.
משתנה מסולם סדר יכול לקבל ערכים מילוליים או מספריים.
למשל, דרגה בצבא.
3. סולם כמותי (scale) – משתנה שחייב להיות מספרי, לערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לערך המספרי. משתנה כמותי הוא משתנה שניתן בדרך כלל לספור או למדוד על ידי מכשיר מדידה. למשל, מספר המחשבים בדירה, שטח הדירה במ"ר.

את המשתנה הכמותי אנו מסווגים לשני סוגים:

משתנה בדיד:

משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים כמו: מספר המחשבים בדירה.

משתנה רציף:

משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. למשל, שטח הדירה במ"ר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

למחלקת טראומה הגיעו 5 פצועים מתאונה שקרתה בכביש החוף.
אספו נתונים לגבי אותם פצועים, הנתונים מרוכזים בטבלה הבאה:

מין	גיל	מצב הפצוע	דופק
גבר	26.6	אנוש	40
גבר	24.5	קשה	38
אישה	32.1	קשה	50
גבר	34.9	בינוני	65
אישה	23.1	קל	89

סווגו כל משתנה במסד הנתונים: שמי, סדר, כמותי רציף, כמותי בדיד.

שאלות:

(1) לפניכם טבלה המסכמת נתונים לגבי סקר שנעשה היום:

שם משפחה	מצב משפחתי	מידת דתיות	מספר רכבים
כהן	רווק	חילוני	0
חדד	נשוי	חילוני	1
לביא	גרוש	מסורתי	1
פיינגולד	אלמן	חילוני	2
אבו שוקרא	נשוי	דתי	1
בן חיים	נשוי	מסורתי	0
רוטשילד	רווק	חילוני	0

א. כמה תצפיות בדוגמה זו?

ב. כמה משתנים בדוגמה זו?

ג. כמה ערכים ישנם ל-"מידת דתיות"?

ד. מהם הערכים האפשריים למשתנה "מצב משפחתי"?

(2) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן: 50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף, 20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף, 5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף, 5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.

א. הגדירו את הקבוצה בדוגמה זו.

ב. כמה תצפיות בדוגמה זו?

ג. הגדירו את המשתנה בדוגמה זו. מהו סולם המדידה שלו?

(3) במחקר רפואי התעניינו לדעת כיצד מינון תרופת "קופקס" משפיע על מספר שעות השינה של אדם. במחקר השתתף אדם אחד בשם דני שבכל יום ניתן לו מינון שונה של התרופה. הטבלה שלהלן מתארת בכל יום את מינון התרופה במ"ג שקיבל האדם וכמו כן את מספר שעות השינה שלו באותו הלילה:

מספר שעות שינה	מינון התרופה	מספר היום
6	12	1
7	14	2
7.5	16	3
6.5	18	4
8	20	5

א. כמה תצפיות נאספו במחקר?

ב. סווגו את סולם המדידה של "מינון התרופה" ?

- (4) לפניכם רשימה של משתנים.
- צינו באיזה סולם מדידה מדובר (שמי, סדר, כמותי בדיד, כמותי רציף):
- א. גובה אדם בס"מ.
 - ב. מספר ילדים למשפחה.
 - ג. מידת חרדה לפני מבחן.
 - ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 כלל לא מרוצה עד 7 מרוצה מאד).
 - ה. השכלה.
 - ו. מספר אוטובוס.
 - ז. מקום מגורים.
 - ח. מין (1=גבר ו-2=אישה).
 - ט. מידת נעליים.
- (5) לפניכם רשימה של משתנים כמותיים.
- ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד:
- א. שכר עובד ב-ש.
 - ב. ציון בחינת בגרות.
 - ג. תוצאה בהטלת קובייה.
 - ד. מהירות ריצה במטר לשנייה בתחרות 100 מטר.
 - ה. שיעור התמיכה בממשלה בעיר.
- (6) גברת לוי החליטה לדגום 25 ימים של נסיעה לעבודה, כאשר בדרך לעבודתה יש 3 צמתים מרומזרים.
- ב-9 ימים הגיעה גברת לוי לעבודה מבלי לעצור באף צומת.
 - ב-9 ימים נוספים היא הצליחה לעבור בשני רמזורים ירוקים.
 - ב-5 ימים נוספים היא הצליח לעבור רק בירוק אחד.
- בשאר הימים, היא לא עברה באף רמזור ירוק.
- מעוניינים לחקור את מספר הרמזורים האדומים בהם עצרה גברת לוי.
- א. מהו המשתנה הנחקר בדוגמה זו?
 - ב. מהם הערכים האפשריים של משתנה זה?
 - ג. כמה ערכים אפשריים יש למשתנה?
 - ד. מהו סולם המדידה של המשתנה?

תשובות סופיות:

- (1) א. $n = 7$.
ג. 3.
- (2) א. לקוחות סניף 543 של בנק "רווה".
ג. $X =$ מספר הפעמים בשבוע שלקוח נכנס לסניף. כמותי בדיד.
ב. $n = 80$.
- (3) א. $n = 5$.
ב. כמותי רציף.
- (4) א. כמותי רציף.
ג. אין מספיק נתונים.
ה. אין מספיק נתונים.
ז. שמי.
ט. סדר.
- (5) א. רציף.
ג. בדיד.
ה. רציף.
- (6) א. מספר הרמזורים בהם עוצרת גברת לוי ביום בדרך לעבודה.
ב. 0, 1, 2, 3.
ד. כמותי בדיד.
ג. 4.
- ב. 4.
ד. רווק, נשוי, גרוש, אלמן.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי 6

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 3, 4, 3, 5, 4.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N} \cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N} \cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N} \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N} \cdot 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון - X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	$0.08=2/25$
6	4	6	$0.16=4/25$
7	8	14	$0.32=8/25$
8	5	19	$0.2=5/25$
9	4	23	$0.16=4/25$
10	2	25	$0.08=2/25$

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

 $\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.**טבלת שכיחויות במחלקות:**

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד
וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

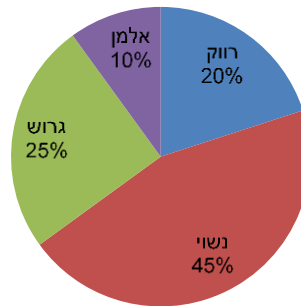
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

דיאגרמת עוגה:

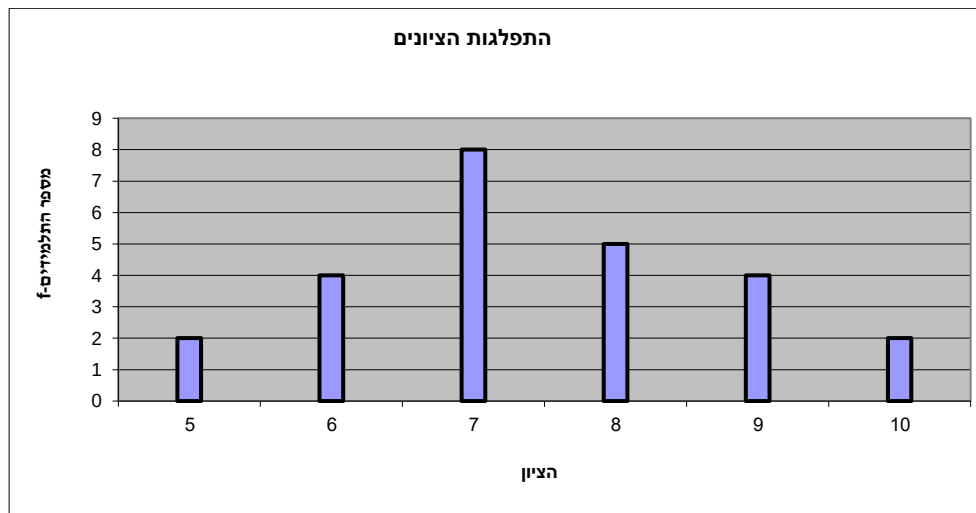
זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

התפלגות המצב המשפחתי



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

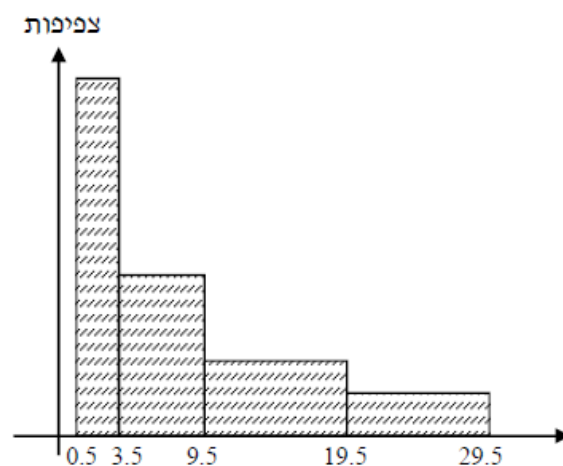


היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	X
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



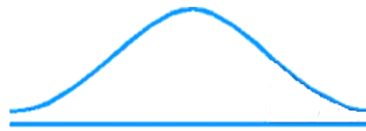
פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.

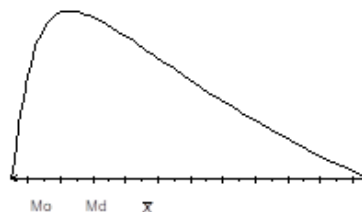


ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

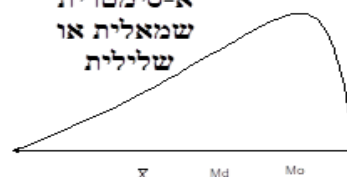
התפלגות א-סימטרית
ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

התפלגות
א-סימטרית
שמאלית או
שלילית



שאלות:

- (1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות : 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

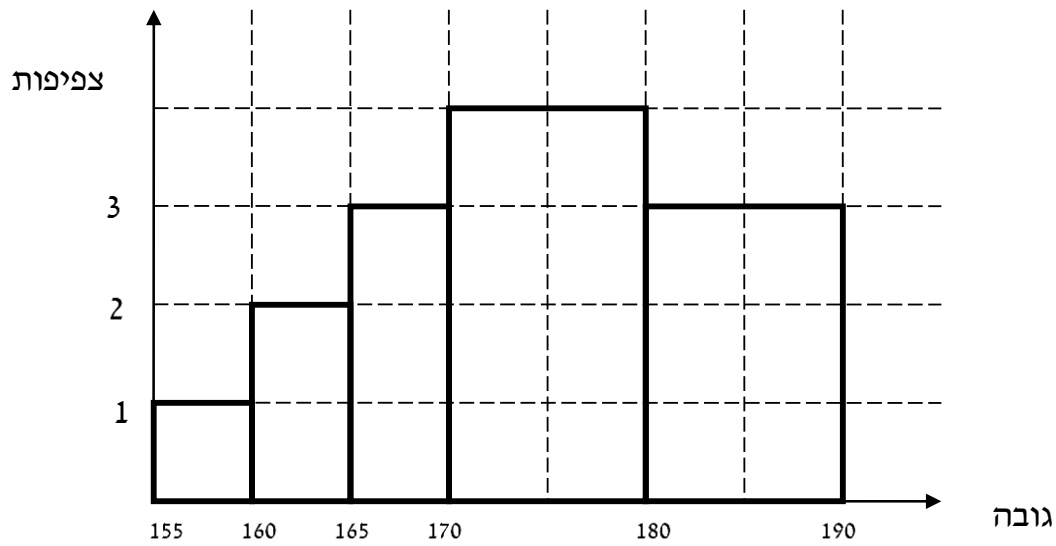
- (3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6.
- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



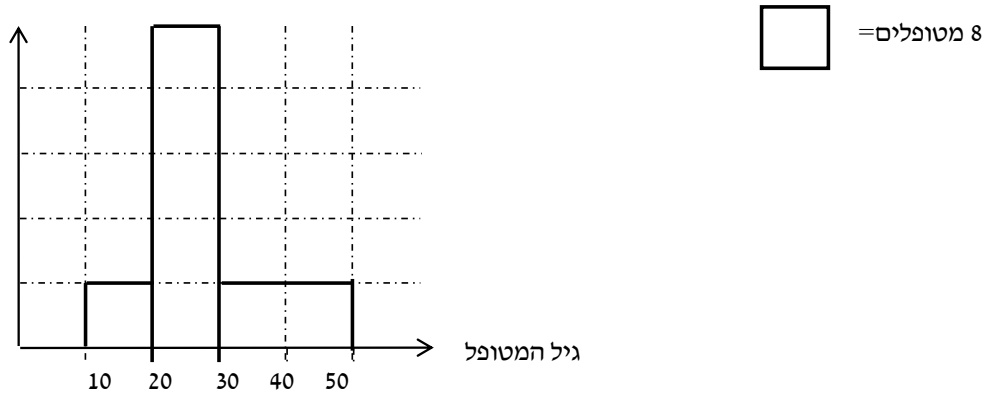
- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

- תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :
קנה מידה :



- מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- מהי הקבוצה הנחקרת?
- תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
- מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

- (2) א. מקצוע מועדף. ב. 19.6%.
- (3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר. ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

(4) א. המשתנה : ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה :

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

(5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה : ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

- 6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו. ב. סימטרית.
- 7) א. המשתנה : גיל בשנים, משתנה רציף. ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
- ד. להלן טבלה : ה. 62.5%.

$f(x)$	x
8	10-20
40	20-30
16	30-50

ביוסטטיסטיקה א

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי 17

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^n X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

שאלות:

- 1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X), ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב. $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג. $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד. $\left(\sum_{i=1}^4 X_i \right)^2$

ה. $\sum X_i$

ו. $\sum X_i Y_i$

ז. $\sum(X_i) \sum(Y_i)$

- (2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i , כאשר: $i = 1, 2, \dots, 6$, ונתונים הקבועים:
 $a = 2$, $b = 5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^4 y_i$

ב. $\sum_{i=1}^6 a$

ג. $\sum_{i=1}^6 x_i y_i$

ד. $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$

ה. $\sum_{i=1}^6 x_i + a$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

ב. $\sum_{i=1}^n a = a \cdot n$

ג. $\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

- (4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$, $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$

תשובות סופיות:

1) א. 7.	ב. 9.	ג. 11.	ד. 121.
ה. 14.	ו. 27.	ז. 126.	
2) א. 3.	ב. 12.	ג. 7.	
ד. 12.	ה. 14.		
3) א. נכונה.	ב. נכונה.	ג. לא נכונה.	
4) 1160.			

ביוסטטיסטיקה א

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

1. כללי 21

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 7, 9, 4, 8, 4, 10, 6.

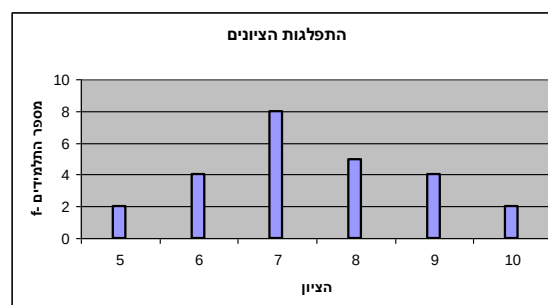
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

$f(x)$	# תוכניות החיסכון
100	0
75	1
25	2
25	3
25	4

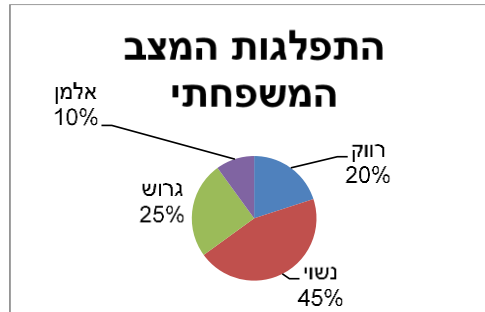
בדיאגרמת מקלות

שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



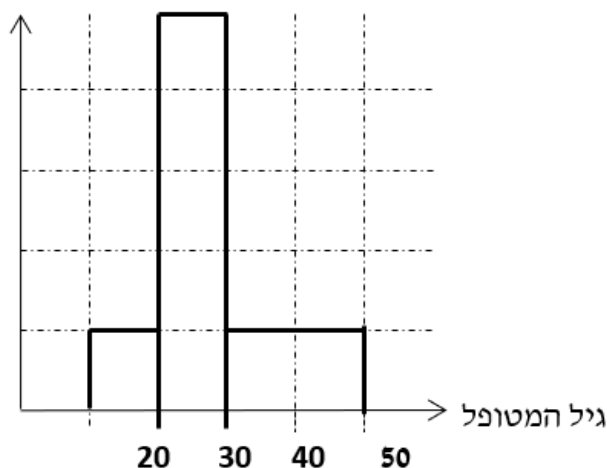
בטבלת שכיחויות במחלקות

אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה :

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.
לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :



= 8

כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.
השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.
 $f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average :

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

בטבלת שכיחויות

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$$

במחלקות

נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- X .
 הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

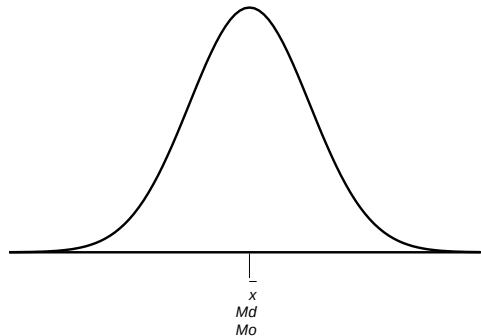
כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

התפלגות סימטרית

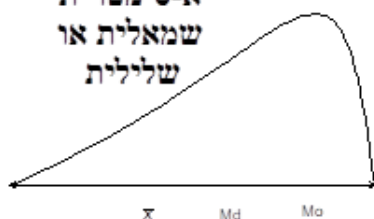


בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

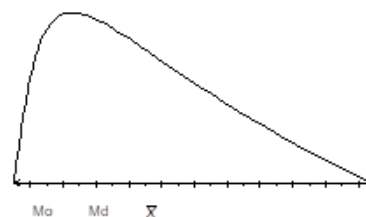
התפלגות U



התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



שאלות:

(1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

(2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 4, 3, 4, 5.
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

(3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

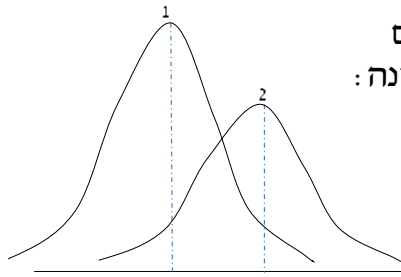
מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

(4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.
הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

- א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.
- ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.
- ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.
- ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

- א. השלימו את הטבלה.
- ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.
- ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

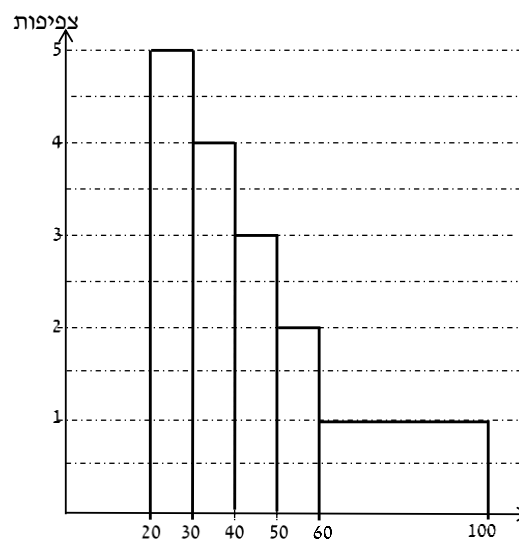
7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג. מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

- 8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

שכיחות	גובה בס"מ
30	150-160
40	160-170
60	170-175
70	175-180
40	180-190

- 9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



- א. מצאו את השכיח בהתפלגות.
 ב. מצאו את החציון בהתפלגות.
 ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
 ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

תשובות סופיות:

- (1) חציון : 7, שכיח : 6, ממוצע : 6.9.
- (2) א. 3. ב. שכיח : 3.4, חציון : 4.
- (3) א. ממוצע : 1.7, חציון : 1.5, שכיח : 1. ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.
- (4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון : 3, ממוצע : 2.952.
- (5) ב'.
- (6) א. להלן טבלה : ב. חציון : 2, שכיח : 2, אמצע טווח : 1.5.

מספר משפחות	מספר טלויזיות
28	0
62	1
92	2
18	3

ג. שכיח : לא ישתנה, אמצע הטווח : לא ישתנה, חציון : לא ישתנה, ממוצע : יקטן.

- (7) חציון וממוצע : 55.
- (8) ממוצע : 172.6, חציון : 174.17, שכיח : 177.5.
- (9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון. ד. שכיח : לא ישתנה, חציון : יגדל, ממוצע : יגדל.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי 30

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים}$$

דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות}$$

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		1430

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

שאלות:

- (1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 6, 5, 8, 7, 6, 8, 7, 6, 5, 8, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
- חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

- (2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. חשבו סטיית התקן.
- ב. חשבו את הטווח של הנתונים.
- הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.
- (3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.
- א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?
- ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?
- (4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1. חשבו את השונות של חמש התצפיות.
- (5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

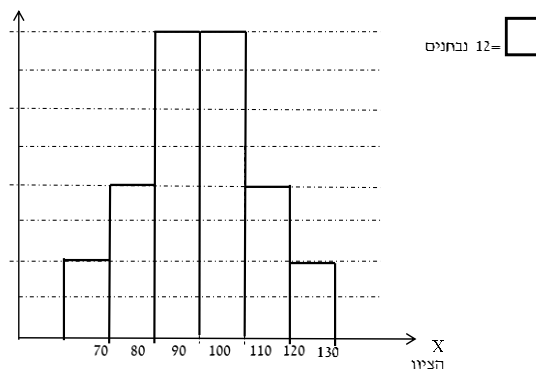
מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

- א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?
- ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.
- ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:
מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?
 ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.
 ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

תשובות סופיות:

- 1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.
 2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.
 3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
 ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.
 4) 10.8
 5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.
 6) 7.73
 7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. כללי 33

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

מספר שנות ותק	רוחב $L_1 - L_0$	מספר עובדים (שכירות) f	F
0.5 – 4.5	4	56	56
4.5 – 9.5	5	50	106
9.5 – 11.5	2	48	154
11.5 – 14.5	3	36	190
14.5 – 19.5	5	10	200

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$. מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$.

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26 \text{ שניות}$$

נחסר את הרבעונים:

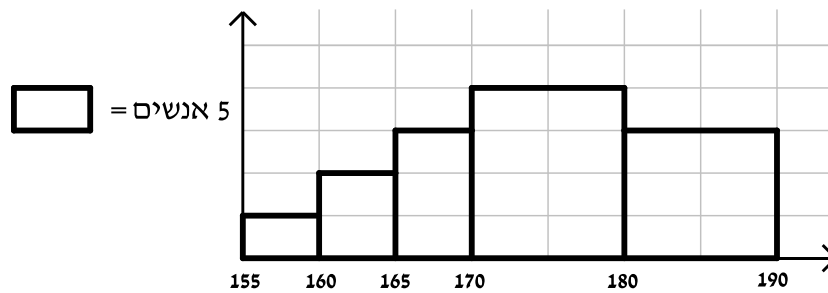
שאלות:

(1) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

(2) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

תשובות סופיות:

(1) 13.75 ק"ג.

(2) 13.33 ק"ג.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי 35

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$.

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
 - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
 - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

שאלות:

- (1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- (2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

ממוצע	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
 א. התפוקה.
 ב. כמות הפועלים.
 ג. חריגים באותה מידה.
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- (3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

- (1) א. לשון. ב. 72.
 (2) ב'.
 (3) א. משקל. ב. 70.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות

תוכן העניינים

1. כללי 37

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש $p\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p . למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון: ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$.

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה: $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $x_p = L_0 + \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$, את המשתנים:

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה

$$P_x = \left[\frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

הבאה:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר ב-₪	
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשכרים מתחת ל-5,000 ₪?

שאלות:

1) להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

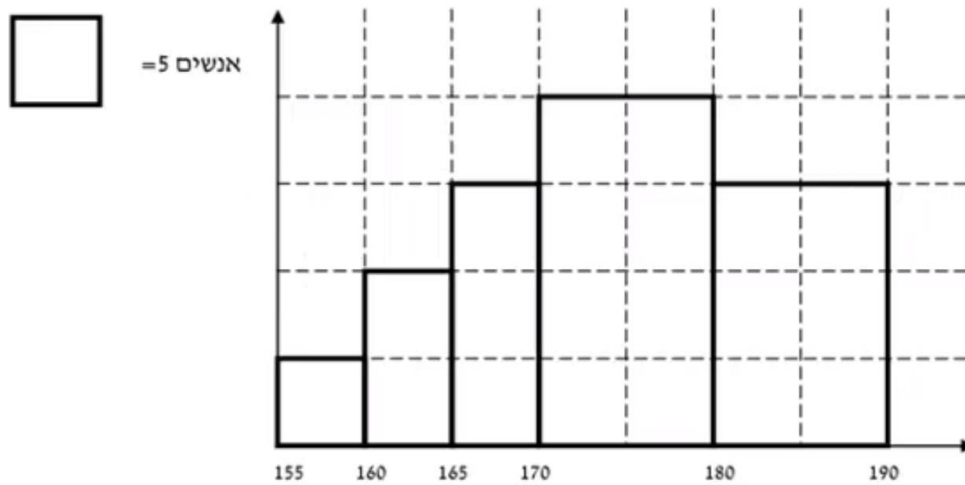
שכר - X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

- א. חשבו את המאון ה-60.
- ב. מהו העשירון העליון?
- ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?
- ד. מה אחוז האנשים שמשכרים מתחת ל-7,000 ₪?
- ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?
- ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

2) למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחויות החסרות.

ציון - X	$f(x)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

(3) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



חשבו:

- העשירון התחתון.
- האחוזון ה-30.
- הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.
- את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.
- את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

תשובות סופיות:

- (1) א. 13.23 ב. 22 ג. 17.2 ד. 8.82% ה. 7.36%

ו. 83.82%

(2) להלן טבלה:

ציון- X	$f(x)$
50-60	40
60-70	60
70-80	200
80-90	60
90-100	40

- (3) א. 162.5 ב. 170 ג. 183.33 ד. 3% ה. 15%

ו. 55%

ביוסטטיסטיקה א

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי 40

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש $p\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$F(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

$F(x)$	X
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

תשובות סופיות:

- (1) א. 2. ב. 1. ג. 3. ד. 1.
- (2) א. 1. ב. 2. ג. 4. ד. 4.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 42

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

$$\begin{aligned} MR_y &= a \cdot MR + b \\ MO_y &= a \cdot MO + b \\ \bar{y} &= a \cdot \bar{x} + b \\ Md_y &= a \cdot Md_x + b \end{aligned} \quad \text{מדדי המרכז:}$$

$$\begin{aligned} R_y &= |a| R_x \\ S_y &= |a| S_x \\ S_y^2 &= a^2 S_x^2 \end{aligned} \quad \text{מדדי הפיזור:}$$

$$\begin{aligned} Y_p &= a \cdot X_p + b \\ Z_Y &= \frac{a}{|a|} Z_x \end{aligned} \quad \text{מדדי המיקום היחסי:}$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

שאלות:

- (1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x} = 80, S = 15, MO = 70$. הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.
- (2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.
- (3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.
- (4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?
- (5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.
- (6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$, אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה: $\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

תשובות סופיות:

- (1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
- (2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
- (3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
- (4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
- (5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
- (6) $a^2 \cdot S_x^2$

ביוסטטיסטיקה א

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית-מקדם ההשתנות

תוכן העניינים

1. כללי 45

סטטיסטיקה תיאורית – מקדם ההשתנות:

רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל).
על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע הנתונים נחשב את מקדם ההשתנות –

$$CV = \frac{S(X)}{\bar{X}} : \text{Coefficient of Variation}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר, כך המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע, וככל שמקדם ההשתנות גבוה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

שאלות:

1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2) נתונות שתי קבוצות: הממוצע בקבוצה א' הוא 100 והשונות 100.

הממוצע בקבוצה ב' הוא 500 והשונות 400.

באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

3) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית

(מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	ממוצע
15	48	
2	10	סטיית תקן

לפי קריטריון CV:

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ ב. כיתה ב'.

2) קבוצה ב'.

3) ב'.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא

תוכן העניינים

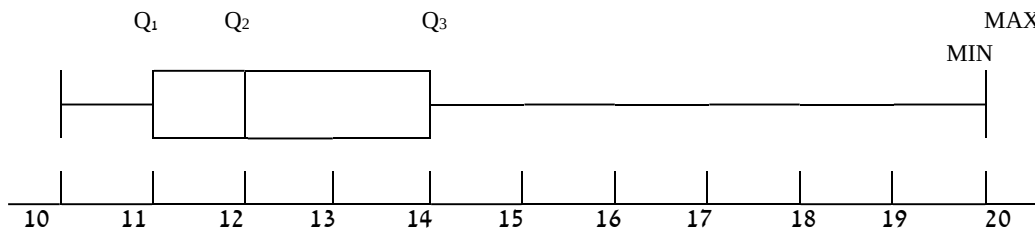
1. כללי 47

סטטיסטיקה תיאורית – תרשים קופסא (Boxplot):

רקע:

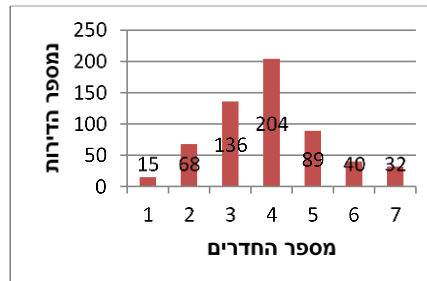
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון :

- (1) את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2).
- (2) את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני).
- (3) את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית).



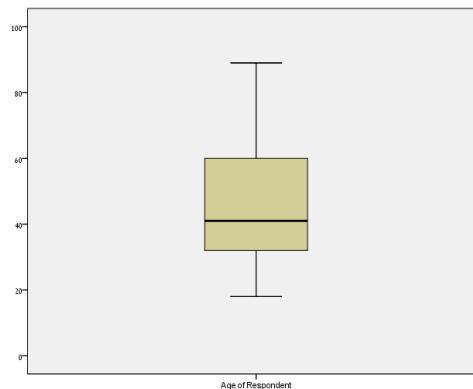
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד:



- מצאו את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
- שרטטו דיאגרמת קופסא להתפלגות.
- מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2) להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל (בשנים) באוכלוסייה מסוימת:



- מה הגיל החציוני?
- מה בערך טווח הגילאים?
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

תשובות סופיות:

- חציון: 4, רבעון תחתון: 3, רבעון עליון: 5.
 - ראה גרף מלא בסרטון וידאו.
 - כמעט סימטרית.
- חציון: 40.
 - טווח: 70.
 - התפלגות אסימטרית ימנית.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי 49

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

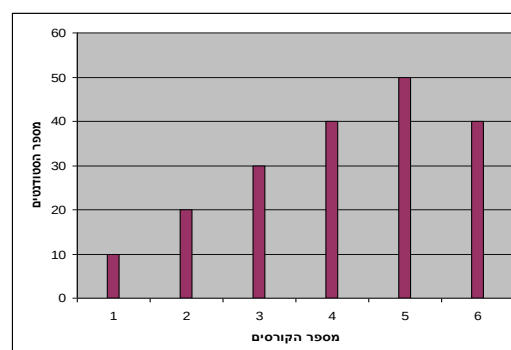
שאלות:

(1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?
- ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
- ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
- ד. לאותם תלמידים חישוב גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?
- ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

(2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



- א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?
- ב. מהי צורת ההתפלגות?
- ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.
- ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

(3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.

במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\bar{X} = 7\frac{1}{15}$.

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.

ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

(4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה). להלן ההתפלגות שהתקבלה:

שביעות רצון	מספר האנשים
1	40
2	60
3	50
4	30
5	20

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?

ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?

ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?

i. היסטוגרמה.

ii. דיאגרמת מקלות.

iii. דיאגרמת עוגה.

ד. חשבו את המדדים הבאים:

i. טווח.

ii. שכיח.

iii. חציון.

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

- השלימו את הטבלה.
- חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?
- מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?
- כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

- מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
- מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
- הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
- ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:
 - ממוצע.
 - שכיח.
 - חציון.
 - שונות.

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
- מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?
- חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.
- הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

הציון	מספר הנבחנים
50-70	
70-90	
90-100	
100-110	
110-130	
130-150	

- השלימו את הטבלה.
- מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?
- מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?
- הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

- 9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.
- א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.
 - ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.
 - ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.
 - ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.
 - ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.
 - ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.
 - ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.
 - ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

תשובות סופיות:

- (1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.
 ב. $\bar{X} = 52$, $Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$, שכיח: 58.
 ג. $R = 28$, $S = 10.12$.
 ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.
 ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.
- (2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.
 ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

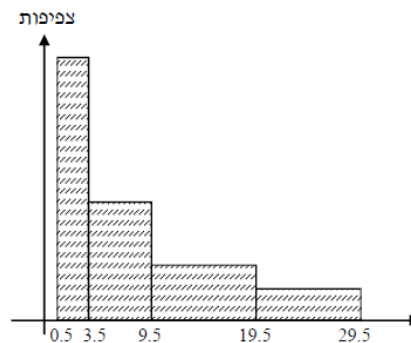
$f(x)$	x
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
40	6
190	סה"כ

- (3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.
 ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533, סטיית תקן: 1.592.
- (4) א. 20%. ב. שביעות רצון (סדר).
 ג. ii. ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.
- (5) א. להלן טבלה: ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	30
20-30	20%	40
30-40	30%	60
40-50	20%	40
50-60	15%	30

- ג. סטיית תקן: 12.65. ד. 53.333.
 ה. 25%. ו. -0.395.
 ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.
- (6) א. 38%. ב. 40%. ג. 150. ד. חציון: 100.

7) א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים: $Mo < Md < \bar{X} < MR$.

8) א. ראו טבלה:

מספר הנבחים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

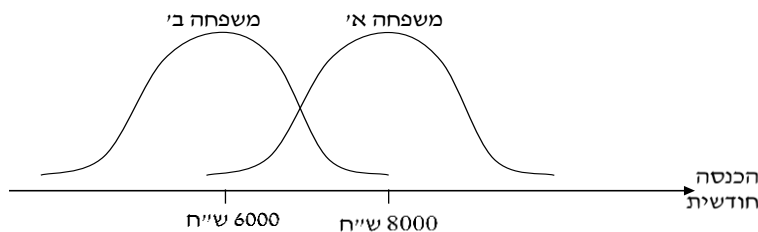
1. כללי..... 56

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

שאלות:

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



- (1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

$F(x)$	x
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

4) השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0.
- ב. 15.
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

5) חציון הנתונים הוא:

- א. 2.
- ב. 1.5.
- ג. 25.5.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

6) הטווח של הנתונים:

- א. 11.
- ב. 3.
- ג. 4.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי.
- ב. חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

- 8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה : 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות :
- א. תקטן.
 - ב. תגדל.
 - ג. לא תשתנה.
 - ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

- 9) מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?
- א. 2,300.
 - ב. 6,900.
 - ג. 4,650.
 - ד. 4,600.
 - ה. חסרים נתונים כדי לדעת.
- 10) מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?
- א. 200.
 - ב. 300.
 - ג. 675.
 - ד. לא ניתן לדעת.
- 11) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :
- א. תגדיל את סטיית התקן.
 - ב. תקטין את סטיית התקן.
 - ג. לא תשנה את סטיית התקן.
 - ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

12) התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

13) פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:

- א. 80.55.
- ב. 65.
- ג. 80.
- ד. 81.66.

14) איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר. הכיתה של:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18:

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

7	6	5	4	3	2	1	0	שוקולד פגום
8	10	11	13	12	48	63	35	מס' קופסאות

15 מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

16 מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

17 מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה:

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד.
- ד. כמותי רציף.

18 השכיח של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 63.
- ב. 1.
- ג. 200.
- ד. לא ניתן לדעת.

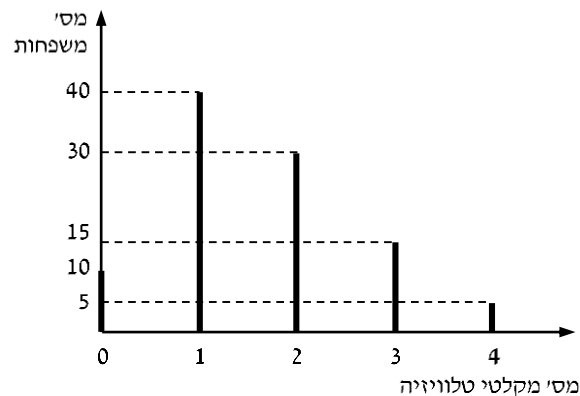
19 ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

- 20** בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת. החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:
- השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
 - השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
 - השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
 - שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
 - אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25:

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית. תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה:



21 המשתנה הנחקר כאן הוא:

- משתנה שמי.
- משתנה מסולם סדר.
- משתנה כמותי בדיד.
- משתנה כמותי רציף.

22 הטווח של ההתפלגות הוא:

- 35.
- 4.
- 3.
- 2.

(23) ממוצע מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה הוא :

- א. 1.65
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

(24) השכיח של התפלגות זו היא :

- א. 40
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

(25) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

- א. יקטין אותו.
- ב. יגדיל אותו.
- ג. לא ישנה אותו.
- ד. אין לדעת.

תשובות סופיות:

1) א'	2) ג'	3) ג'	4) ג'	5) ב'
6) ג'	7) א'	8) ג'	9) ב'	10) ב'
11) ג'	12) ה'	13) ד'	14) ג'	15) ב'
16) א'	17) ג'	18) ב'	19) ג'	20) ה'
21) ג'	22) ב'	23) א'	24) ג'	25) ב'

ביוסטטיסטיקה א

פרק 15 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 63

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A, B, C . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A = \{5, 6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B = \{2, 4, 6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega| = 6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A| = 2, |B| = 3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון x	מספר התלמידים – השכיחות f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$.

שאלות:

(1) מהאותיות E, F ו- G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E .

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

(2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

(3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

(4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה ביישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

(5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- (6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
 i. התקבל פעם אחת עץ.
 ii. התקבל לפחות פלי אחד.
 ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
 ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$
 ב. $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$, $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$
 ג. $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$
- (2) א. $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{pmatrix} \right\}$
 ב. $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$
- ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.
- (3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5
- (4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32
- (5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8
- (6) א. $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$
 ב. $A = \{PPE, PEP, EPP\}$, $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$
 ג. $\bar{D} = \{EEE\}$
 ד. $\frac{1}{8}$

ביוסטטיסטיקה א

פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

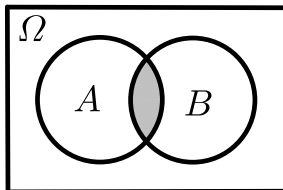
תוכן העניינים

1. כללי 67

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

פעולת חיתוך:

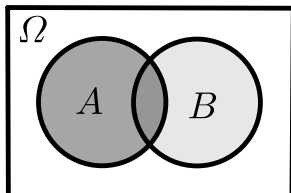


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A \cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B = \{2, 4, 6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A \cap B = \{6\}$.

פעולת איחוד:



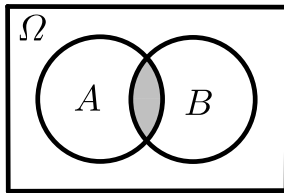
נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A \cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- A או ב- B .
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:

ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

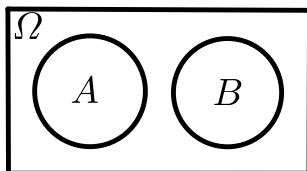
$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:

מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
 $A \cap B = \{ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

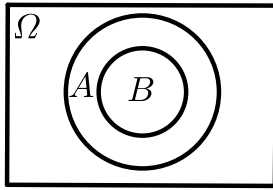
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A \cap B) = 0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$ והאפשרות לקבל 3

היא: $B = \{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A \cap B = \{ \}$.

מאורעות מוכלים:

נתונים שני מאורעות A ו- B , השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי
המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B
מוכלות בתוך מאורע A .

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6\} \\ B &= \{2, 4\} \end{aligned} \quad \text{למשל:}$$

שאלות:

- (1) מהאותיות E, F ו- G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - במילה נמצאת האות E .
 - B - במילה אותיות שונות.
- א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B .
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
- $$A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.
- נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
- להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .
- קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
- $$A \cup \bar{A}, \bar{\phi}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \phi, A \cap \phi, \bar{A}$$

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\overline{A} \cap B$

ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$

ה. $\overline{\overline{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

(9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

- א. ששתי המניות תעלנה.
- ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.
- ג. שמניה A בלבד תעלה.

(10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

- א. האם A ו-B מאורעות זרים?
- ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?
- ג. האם A ו-C מאורעות זרים?
- ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

(11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A) = 0.6$,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

- א. האם A ו-B מאורעות זרים?
- ב. חשבו את $P(\bar{A} \cap B)$.

(12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.
איזו טענה נכונה?

- א. A ו-B מאורעות זרים.
- ב. A ו-B מאורעות משלימים.
- ג. B מכיל את A.
- ד. A מכיל את B.

(13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב. שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

- א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?
- ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.49$

א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$.

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15 A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

תשובות סופיות:

- (1) א. $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$ ב. $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- (2) א. $B \cap \bar{A}$ ב. $A \cap \bar{B}$ ג. $A \cap B$ ד. $A \cup B$ ה. $\bar{A} \cap \bar{B}$ ו. $\bar{B}$
- (3) א. $\bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9, B = 0, 1, 2, 3, 4, A = 0, 2, 4, 6, 8$
 $A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, A \cap B = 0, 2, 4$
- ב. $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- (4) $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\phi} = \Omega, A \cap \bar{A} = \phi$
- (5) א. $A \cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8. ב. $A \cup B$: כל גובה אפשרי.
 ג. $\bar{A} = \bar{A} \cap B$: גובה לכל היותר 1.7. ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
 ה. $A = \bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.
- (6) א. $A \cap B \cap C$ ב. $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ג. $A \cup B \cup C$ ד. $\bar{C}$ ה. $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- (7) א. $P(A \cup B) = 0.24$ ב. $P(A \cap B) = 0.04$ ג. $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- (8) א. $P(A \cap B) = 10\%$ ב. $P(A \cup B) = 50\%$ ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- (9) א. $P(A \cap B) = 0.2$ ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$ ג. $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- (10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- (11) א. כן. ב. $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- (12) הטענה הנכונה היא ג'.
- (13) א. 0.05. ב. 0.95.
- (14) א. $P(A \cap B) = 0.06$ ב. לא. ג. $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- (15) $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- (16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 17 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחד

תוכן העניינים

1. כללי 75

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

- (1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
- (2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
- (3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
 A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
 B - מכפלת התוצאות 12.
 חשבו את $P(A|B)$.
- (4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
- (5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
- (6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
- (7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

תשובות סופיות:

(1) 0.2

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 0.5

(4) 0

(5) $\frac{1}{6}$

(6) $\frac{2}{11}$

(7) $\frac{1}{3}$

ביוסטטיסטיקה א

פרק 18 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

1. כללי 78

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

- (1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה:
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B - לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75.
חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
- התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?
- (2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.
- איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
- (3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
- מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

תשובות סופיות:

(1	א. 0.833	ב. 0.9375	ג. 0.0625	ד. 0.5	ה. 0.789
(2	א. 5%	ב. 0.0833	ג. 0.786	ד. 0.6875	
(3	א. 0.4	ב. $\frac{2}{3}$	ג. 0.25	ד. $\frac{6}{7}$	

ביוסטטיסטיקה א

פרק 19 - הערכת כלים אבחנותיים

תוכן העניינים

1. הערכת כלים אבחנותיים 81

הערכת כלים אבחנתיים:

רקע:

אנו מנסים לאבחן תכונה מסוימת באמצעות כלי מסוים (למשל, לאבחן האם לאדם יש קורונה באמצעות ערכת אבחון ביתית). נגדיר מדדים סטטיסטיים שונים שנותנים אינדיקציה לאיכות כלי האבחנה. נסמן ב-A: האדם קיבל תשובה חיובית, כלומר אובחן כבעל התכונה. נסמן ב-B: האדם הוא בעל התכונה.

רגישות – Sensitivity:

ההסתברות שאדם בעל התכונה יקבל תשובה חיובית, כלומר: $Sensitivity = P(A|B)$.

סגוליות – Specificity:

ההסתברות שאדם ללא התכונה יקבל תשובה שלילית, כלומר: $Specificity = P(\bar{A}|\bar{B})$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

5,000 נשים השתתפו במחקר שבו הן השתמשו בערכה לבדיקת היריון ביתית של חברה מסוימת ביום ה-14 של המחזור החודשי. בדעיבד מתוך 5,000 הנשים 80 היו בהיריון. 70 נשים קיבלו תשובה חיובית מערכת הבדיקה הביתית. 65 מהן אכן היו בהיריון. מה הסגוליות ומה הרגישות של בדיקת ההיריון הביתית?

הערך המנבא החיובי – Positive Predictive Value:

ההסתברות שאדם שקיבל תשובה חיובית הוא אכן בעל התכונה. הערך המנבא החיובי נקרא גם יכולת אבחון (יכולת דיאגנוסטית): $PPV = P(B|A)$.

הערך המנבא השלילי – Negative Predictive Value:

ההסתברות שאדם שקיבל תשובה שלילית אינו בעל התכונה: $NPV = P(\bar{B}|\bar{A})$.

המשך הדוגמה (פתרון בהקלטה):

מהו הערך המנבא החיובי ומהו הערך המנבא השלילי של ערכת הבדיקה הביתית?

ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה – False Positive:

ההסתברות שאדם שאינו בעל התכונה יקבל תשובה חיובית: $FP = P(A|\bar{B})$.

ההסתברות לתוצאה שלילית מדומה – False Negative:

ההסתברות שאדם בעל התכונה יקבל תשובה שלילית: $FN = P(\bar{A}|B)$.

המשך הדוגמה (פתרון בהקלטה):

מה ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה ומה ההסתברות לתוצאה שלילית מדומה בבדיקה באמצעות ערכת הבדיקה הביתית?

שאלות:

- (1) 2,000 גברים נבדקו בשיטה חדשה לגילוי סרטן המעי הגס. מתוך 150 גברים שביופסיה הוכיחה בוודאות שהם חולים 100 נמצאו חולים באמצעות הבדיקה החדשה. 80 גברים שהוכח שהם בריאים באמצעות ביופסיה קיבלו תשובה חיובית באמצעות השיטה החדשה.
מצאו את הסגוליות, הרגישות, הערך המנבא החיובי, הערך המנבא השלילי, ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה.
- (2) הסיכוי של ערכת בדיקה ביתית של חברת קאנו לגלות מחלה מסוימת הוא 98%. לאדם בריא יש סיכוי של 5% לקבל בבדיקה תשובה חיובית. 5% ממשתמשי הערכה חולים במחלה.
א. מה הרגישות של הערכה?
ב. מה הסגוליות של הערכה?
ג. מה יכולת האבחון של הערכה?
- (3) הסיכוי של תהליך אבחון של הפרעת קשב לזהות סטודנטים בעלי הפרעת קשב הוא 0.95. הסיכוי שלו לזהות בטעות גם סטודנטים ללא הפרעת קשב כבעלי הפרעת קשב הוא 0.01. ידוע ש-7% מהסטודנטים סובלים מהפרעת קשב.
א. מה ההסתברות לתשובה חיובית מדומה?
ב. מה ההסתברות לתשובה שלילית מדומה?
- (4) נערכה בדיקה בשיטה חדשה לגילוי מלנומה בקרב 800 נבדקים – 400 נבדקים עם ביופסיה מוכחת של מלנומה ויתר הנבדקים ידועים ללא מלנומה. 30 מהנבדקים נמצאו בבדיקה החדשה חולים במלנומה. מתוך ה-30 רק 10 חולים באמת.
א. מה הרגישות של הבדיקה החדשה?
ב. מה הסגוליות של הבדיקה החדשה?
ג. מה היכולת הדיאגנוסטית של הבדיקה החדשה?
- (5) קבוצה של נבדקים שידוע ש-25% מהם נשאי HIV נבדקה בבדיקה חדשה המאפשרת קבלת תוצאה באופן מיידי. בבדיקה החדשה נמצאו 20% מהנבדקים כנשאי HIV. הסגוליות של הבדיקה החדשה היא 76%.
א. מה הרגישות של הבדיקה החדשה?
ב. מה ה-PPV של הבדיקה החדשה?
ג. מה ה-NPV של הבדיקה החדשה?

תשובות סופיות:

- (1) סגוליות: 0.9568, רגישות: $\frac{2}{3}$, הערך המנבא החיובי: $\frac{5}{9}$,
 הערך המנבא השלילי: 0.9725, ההסתברות לתוצאה חיובית מדומה: 0.0043.
- (2) א. 0.98 ב. 0.95 ג. 0.5078
- (3) א. 0.01 ב. 0.05
- (4) א. 0.25 ב. 0.95 ג. $\frac{1}{3}$
- (5) א. 0.08 ב. 0.1 ג. 0.7125

ביוסטטיסטיקה א

פרק 20 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

1. כללי 85

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A .
 הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B .
 כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
 הוכחה לכך: $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1, \dots, A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

שאלות:

- (1) נתון: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.6$. האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
- (2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?
- (3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווק, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?
- (5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

תשובות סופיות:

- (1) כן.
- (2) א. 0.28 ב. 0.18
- (3) א. 0.0064 ב. 0.1536
- (4) א. 0.5904 ב. 0.9984
- (5) א. 0.08^5 ב. 0.3409

ביוסטטיסטיקה א

פרק 21 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

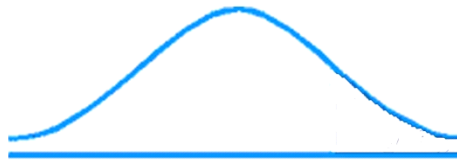
תוכן העניינים

1. כללי 87

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

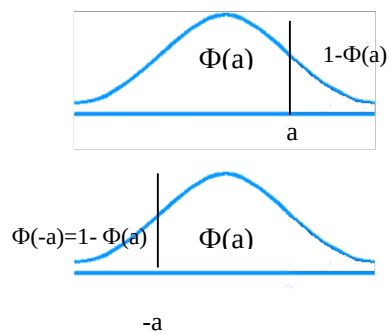
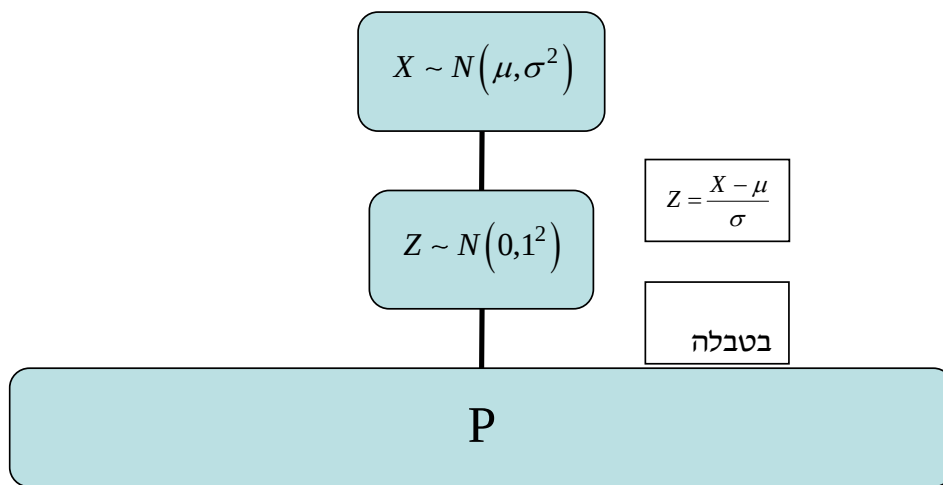
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

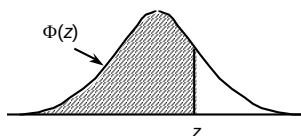
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z : $Z \sim N(0, 1^2)$.

$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

- (1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
- (2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
 - מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
 - מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
 - מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
- (3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
 - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
 - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
 - מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?
- (4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
 - מצאו את האחוזון ה-95.
 - מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225.
- א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - ד. מהו האחוזון ה-20?
 - ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 - ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 - ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
 - ד. מהו המאיון העליון של אורך חיי מכשיר?
 - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 - ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
 - i. בעשירון העליון.
 - ii. בממוצע.
 - iii. בשונויות.
 - ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
 - i. 1.
 - ii. 2.
 - iii. 3.
 - iv. אין לדעת.



- (9) הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

תשובות סופיות:

(1)	א. 89.25%	ב. 2.28%	ג. 0	ד. 50%	ה. 50%
(2)	א. 0%	ב. 3.76%	ג. 0%	ד. 68.26%	
(3)	א. 26.43%	ב. 89.44%	ג. 39.44%	ד. 0.383	
	ה. 100%				
(4)	א. 3812.8	ב. 3958	ג. 2787.2		
(5)	א. 119.2	ב. 80.8	ג. 112.6	ד. 87.4	ה. 75.3
(6)	א. 500	ב. 532.9	ג. 453.48		
(7)	א. 500	ב. 100	ג. 0.3446	ד. 733	
	ה. 267				
(8)	א. 3	ב. בממוצע.	ג. 1		
(9)	א. 0.1587	ב. 0.0228	ג. 0.8563	ד. 0.3975	

ביוסטטיסטיקה א

פרק 22 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

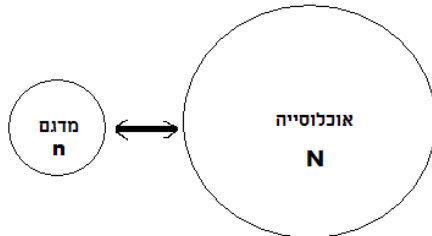
תוכן העניינים

1. כללי 94

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:



קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	ממוצע
$\bar{X}$	μ	
$\hat{p}$	P	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

- מי האוכלוסייה?
- מה המשתנה?
- מה הפרמטרים?
- מהו גודל המדגם?
- מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?
- האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"שוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מי היא האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"שוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 23 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 97

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 .

$$\text{ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\text{גדול } (n \geq 30) \text{ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: } \bar{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?
- (2) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלי עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
- (3) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

- (4) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלי.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
- ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (5) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (6) משתנה מתפלג נורמאלי עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
- ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
- הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
- (7) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
- מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

8) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

9) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם $\bar{X}$. לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

10) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

11) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.

ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.

ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.
- (2) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.
- (3) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205.
- (4) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (5) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5.
- (6) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (7) 0.0475
- (8) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271.
- (9) ב'.
- (10) ד'.
- (11) ג'.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 24 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 103

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ .
- שגיאת אמידה: $|\hat{\theta} - \theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
 - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ : $E(\hat{\theta}) = \theta$.
 - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$.

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומד חסר הטיה ל- μ . כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$

פרופורציה באוכלוסייה p :

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומד חסר הטיה ל- p . כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

שונות האוכלוסייה σ^2 :

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$.
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
 - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של המדגם.
 - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהיה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

- א. כאשר n קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל- μ היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

א. 0.25	ב. 0.019	ג. 0.24	ד. 0.01
א. אוכלוסייה : מקררים של יצרן, תוחלת : 2400, סטיית תקן : 500.			
ב. 100		ג. 2342	ד. 58
א. 177.9	ב. 64.1	ג. 0.4	
א. 8.1	ב. 3.16		
ד'			
ג'			
ד'			
ד'			
ג'			

ביוסטטיסטיקה א

פרק 25 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 108
- 2. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 113
- 3. קביעת גודל מדגם 116

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמיתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$.

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- (1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
 - מה רווח הסמך לפרמטר?
 - מהי רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רווח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- (2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- (3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- (4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- ממוצע המדגם.
 - שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- מהו ממוצע המדגם?
 - מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
 - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
 - המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
 - רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\bar{X} = 6$.

ג. $\bar{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג. μ . ד. $9200 < \mu < 9800$.

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2) $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.

ג. ראה סרטון.

(4) א. $9284 < \mu < 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א. $4.42 < \mu < 83.5$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

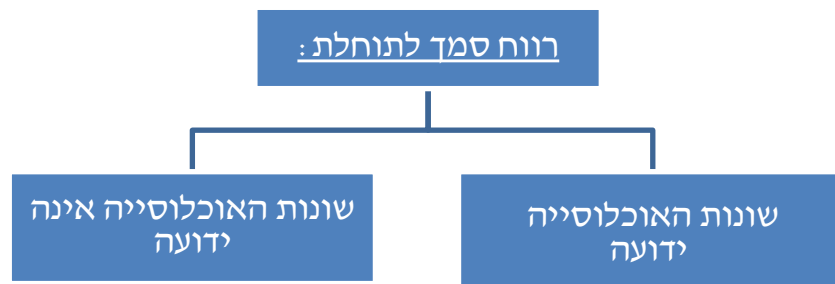
(9) ג'.

(10) ד'.

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

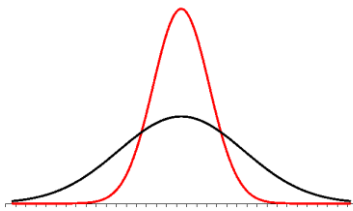


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad \text{האומד לשונות:}$$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
 - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
 - ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
 - ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S = 13$ ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
 - א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
 - ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
 - א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
 - ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
 - ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח $\sigma = 20$. סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל $S = 20$. למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
- סטטיסטיקאי א'.
 - סטטיסטיקאי ב'.
 - אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
 - תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

- (1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א. $96.63 < \mu < 107.37$ ב. $96.90 < \mu < 107.10$ ג. ראה בסרטון.
- (5) $3.149 < \mu < 3.351$
- (6) $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב

$$\text{בנוסחה הבאה: } n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
- א. כמה מתגייסים יש לדגום?
- ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ . מהו גודל המדגם הנדרש?

תשובות סופיות:

- (1) 780.
- (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.
- (3) $n = 62$.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 26 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

118	1. רווח הסמך לפרופורציה
121	2. קביעת גודל מדגם

רווח הסמך לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
 - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
 - ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
 - ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
 - א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).
 - ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
 - ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:

$$0.08 < p < 0.18$$
 - א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
 - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 - א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
 - ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

תשובות סופיות:

- (1) א. $18.1\% < p < 29.9\%$
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
 ג. $14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א. $0.545 \leq p \leq 0.655$ ב. האורך שלו היה קטן. ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 52. ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א. $30.9\% > p > 22.5\%$ ב. $60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 200

קביעת גודל מדגם:

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$.
 החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.

ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד ($\hat{p}$).

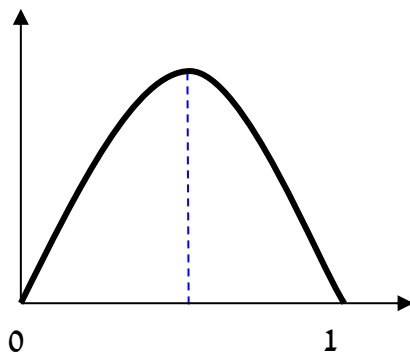
$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין אנו יודעים את $\hat{p}$.

נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על $\hat{p}$ נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p} = 0.5$.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

שאלות:

- (1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמיתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- (2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
 - א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
 - ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
- (3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמיתי לא תעלה על 4%.
 - א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
 - ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
 - ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
 - ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
- (5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
 - א. כמה מחוסנים יש לדגום?
 - ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
 - ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% מדוע הוא קטן מ-3%?

תשובות סופיות:

- (1) 1.1068
- (2) א. 0.423 ב. 0.271
- (3) א. 0.601 ב. 108,000 ₪.
- (4) א. 0.335 ב. $0.367 < p < 0.473$.
- ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.
- (5) א. 0.1509 ב. 0.15 ± 0.02 ג. ראה סרטון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 27 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששוניות האוכלוסיה ידועות.....124
2. כששוניות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שוניות.....126

כששונויות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. σ_1^2, σ_2^2 ידועות.

2. $X_1, X_2 \sim N$ או $n_1, n_2 > 30$.

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה ש"ח 9200.
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל ש"ח 8700.
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ש"ח. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

שאלות:

- (1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
- (2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99. א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ. ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
- (3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

- (1) $(-20, 90)$.
- (2) א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.
ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.
- (3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

$$2. X_1, X_2 \sim N.$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{הנוסחה הבאה:}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{דרגות החופש:}$$

$$\text{רווח סמך: } (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{n_1 + n_2 - 2}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1 - \alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

מספר האקדמאים	תל אביב	באר שבע
10	20	
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N(\mu_x, \sigma^2)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N(\mu_y, \sigma^2)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
- השונות שווה.
 - שהציונים מתפלגים נורמלית.
 - המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

ביוסטטיסטיקה א

פרק 28 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים 128

רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y .

ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \quad x, y \sim N$$

2. המדגם מזווג.

$$\text{נוסחת רווח הסמך: } \bar{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש: $df = n - 1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.

מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב' :

82	75	90	68	74	סמסטר א'
100	76	87	84	80	סמסטר ב'

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
- ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2) $-0.013 < \mu < 0.185$.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 29 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

130	1. הקדמה
134	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

	הכרעה		
		H_0	H_1
	מצאות	H_0	H_1
		אין טעות	טעות מסוג 1
		טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמצאות H_0 נכונה.
טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמצאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מה מסקנת המחקר?
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
 ב. מה המשתנה הנחקר?
 ג. מה הפרמטר הנחקר?
 ד. מה השערות המחקר?
 ה. מה מסקנת המחקר?
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.

ביוסטטיסטיקה א

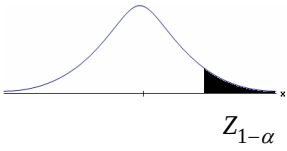
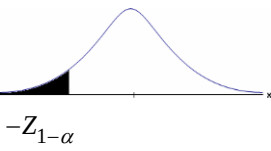
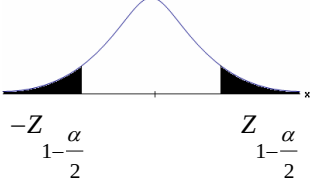
פרק 30 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה 136
2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה) 140
3. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה 145
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה) 149
5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) 152
6. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה) 154

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה H_0 אם מתקיים:

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: $X =$ יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר: $\mu =$ תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

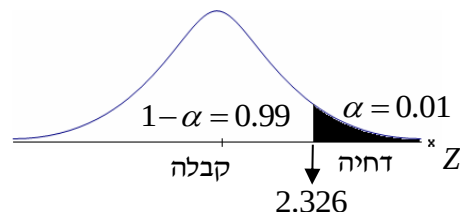
השערות:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 2.5$.

כלל הכרעה:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{X}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב: $Z_{\bar{X}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
 - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) נקבל H_0 , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל H_0 , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$, דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

שערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
1. σ ידועה		תנאים:	
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		p-value	
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

כאשר בהנחת השערת האפס: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה: X = משקל בק"ג.

פרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 65$
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 12$.

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$. המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100$, $\bar{x} = 74$. מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
 - א. רשמו את השערות המחקר.
 - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
 - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
 - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
 - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

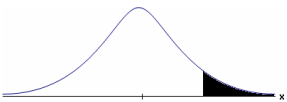
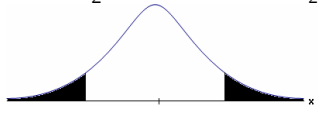
- (6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
 - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
 - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\text{ value} = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א. $H_0: \mu = 100$
 $H_1: \mu < 100$
 ב. 0.1056 ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

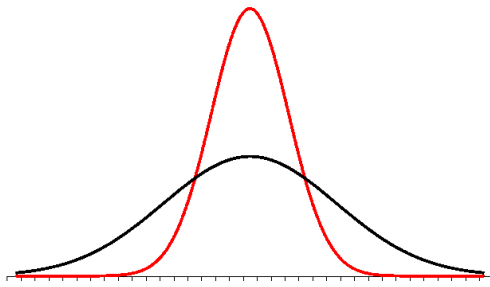
בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0
חלופה לכלל ההכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n - 1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$. $H_1: \mu < \mu_0$. חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) נקבל H_0 .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value	$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה: X = זמן נסיעה בדקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ .

א. השערות:
 $H_0: \mu = 40$
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = (\bar{X} \leq 32.6) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0 .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוהה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{א.} & H_0: \mu = 1000 \\ & H_1: \mu \neq 1000 \\ \text{ב.} & 20\% \leq P_v \leq 50\% \end{array}$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את H_0 .

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח $\leftarrow$ נקבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח $\leftarrow$ נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0: \mu = 80, H_1: \mu \neq 80, \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79 < \mu < 84$.
האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל H_0 .

שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$. החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97).
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצלין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.
(2) א. $112.87 \leq \mu \leq 118.13$.
ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
(3) א. $191.8 \leq \mu \leq 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β :	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

התקנון:

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

$$1. \mu = 200.$$

$$2. n = 36.$$

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:
 $H_0: \mu_0 = 200$
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1} \left(\overset{\text{לקבל את}}{H_0} \right) = P_{H_1} (\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

(1) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$.

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$. מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50

מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

- א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- (5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$. מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
 - ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
 - i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
 - ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- (6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - ב. העוצמה של המבחן גדלה.
 - ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.
- (7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
 - ב. השערת האפס נדחתה.
 - ג. השערת האפס לא נדחתה.
 - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- (8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	α
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- (9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- א. הן α , והן $1 - \beta$, יקטנו.
 - ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1 - \beta$ יגדל.
 - ג. α יגדל ואילו $1 - \beta$ יקטן.
 - ד. הן α והן $1 - \beta$ יגדלו.

- (10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.
ג. דחינו את H_0 , תתכן טעות מסוג ראשון.
- (2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0 ג. 1.
- (3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.
- (4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- (5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.
ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- (6) ד'.
- (7) ג'.
- (8) ג'.
- (9) א'.
- (10) ב'.

ביוסטטיסטיקה א

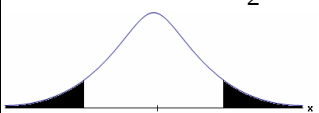
פרק 31 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות.....160
2. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות.....164

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
מדגמים בלתי תלויים σ_1, σ_2 ידועות $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים			תנאים:
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים :	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{התקנון:}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

שאלות

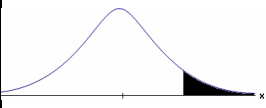
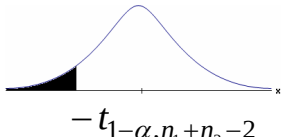
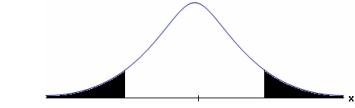
- (1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- (2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

תשובות סופיות

- (1) נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה את H_0 .

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$
1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{השונות המשוקללת:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

100W	60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{X}$
72	80	S
15	13	n

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
 2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
- נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את H_0 .

ביוסטטיסטיקה א

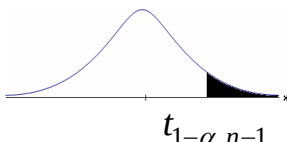
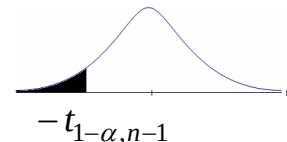
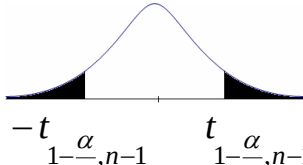
פרק 32 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים.....168

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

- (5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T למדגמים מזווגים.
- (6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. $0.25 \leq p \leq 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0 .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 33 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 172

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1 - \mu_2$:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1 - \alpha$ ל- $\mu_1 - \mu_2$:

אם C נופל ברווח $\leftarrow$ נקבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח $\leftarrow$ נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

$$H_0: \mu_D = 80, \quad H_1: \mu_D \neq 80, \quad \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78 < \mu_D < 83$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

שאלות

(1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.

להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

סמסטר א'	סמסטר ב'
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

(2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6

סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה :

(3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
 - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
 - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

תשובות סופיות

- (1) א. $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א. $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג'.
- (4) א'.

ביוסטטיסטיקה א

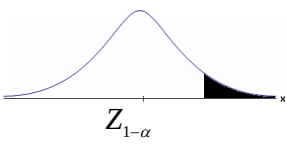
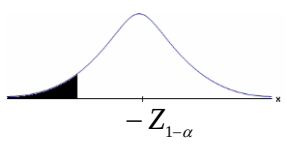
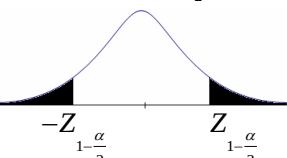
פרק 34 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

175	1. התהליך
178	2. סיכוי לטעויות ועוצמה
182	3. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית

התהליך:

רקע:

השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  דוחים את H_0	או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן:
$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0 :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
 - א. רשמו את ההשערות.
 - ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 - ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
 - א. $\alpha_1 = \alpha_2$.
 - ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.
 - ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.
 - ד. המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) א. $H_0: p = 0.2$
 ב. $H_1: p \neq 0.2$
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה H_0 .
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נדחתה} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ נדחתה})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ נקבל} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ נקבל})$$

רמת בטחון:

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ נקבל} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ נקבל})$$

עוצמה:

$$\pi = (1-\beta) = P(H_1 \text{ נדחתה} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_1 \text{ נדחתה})$$

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	טעות מסוג 1	אין טעות
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

חישוב β :
$P_{H_1} \left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$

כאשר: $\hat{p} \sim N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right)$

והתקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

- רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.
- מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

שאלות:

- (1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
 - א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.
 - ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?
 - ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?
 - ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?
- (2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
 - נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- (3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
 - א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
 - ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
- (4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
- (5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
 - א. השערת האפס נכונה.
 - ב. השערת האפס נדחתה.
 - ג. השערת האפס לא נדחתה.
 - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
- (6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0 : p = 0.1$
 ב. 0.9015 ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.
 $H_1 : p > 0.1$
- (2) 0.4404
- (3) א. 0.1446 ב. תקטן.
- (4) חוקר א'.
- (5) ג'.
- (6) נכונה.

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$		
p-value	$P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} < p_0$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
 - א. מהי מובהקות התוצאה?
 - ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.
 - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
 - ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
 - ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
 - ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
 - מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5% :
(בחרו בתשובה הנכונה)
 - א. יקבל את השערת האפס
 - ב. ידחה את השערת האפס.
 - ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה :
 "במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p\text{-value}$ של 3%,
 לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
 היינו מקבלים ערך $p\text{-value}$ של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0455.
 ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0 .
 ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0548. ב. 0.0548. ג. מעל 0.0548.
 ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3) $p_v = 0$, נדחה את H_0 .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 35 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן לאי תלות.....186

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים H_0 .

יש תלות בין המשתנים H_1 .

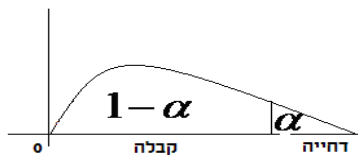
כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f = (r-1)(c-1)$. כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות. c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:



O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

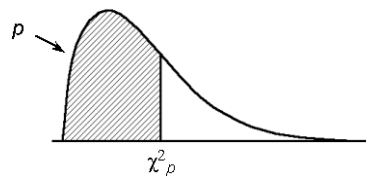
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
 תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
 יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p 

df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- (1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

- (2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

לילה	ערב	יום	
70	60	50	פגומים
800	700	600	תקינים

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

- (3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

- (4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע. להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינמלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

	מפלגה א	מפלגה ב	מפלגות אחרות	סה"כ
שבוע שעבר				
השבוע	143		253	550
סה"כ	243	314		1050

- (5) סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס. הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

- (6) להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו :

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200					X_1
200					X_2
	160	120	60	60	$f(y)$

מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

- (1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.
- (2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.
- (3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.
- (4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223, 0.297)
- (5) נכון
- (6) להלן טבלה :

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200	80	60	30	30	X_1
200	-8	60	30	30	X_2
400	160	120	60	60	$f(y)$

ביוסטטיסטיקה א

פרק 36 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 191
2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 202
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי..... 207

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

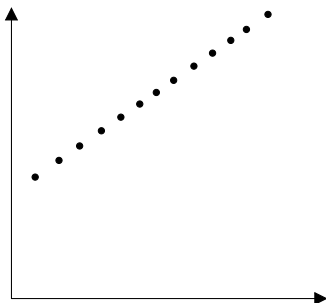
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

4	4	3	3	2	3	2	2	מספר חדרים בדירה
5	4	4	3	2	2	1	0	מספר הנפשות בדירה

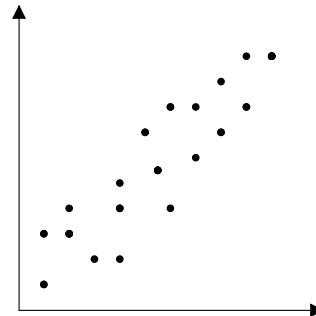
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

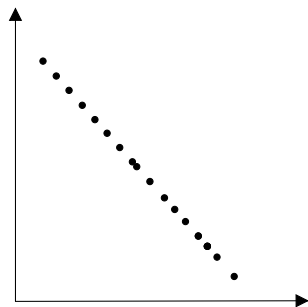
קשר לינארי חיובי מלא



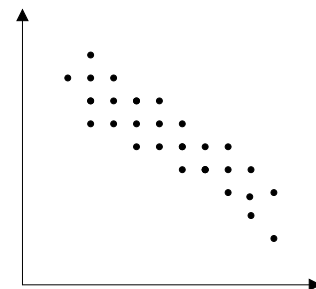
קשר לינארי חיובי חלקי



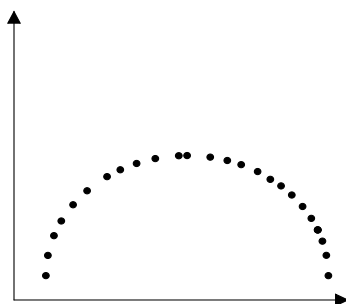
קשר לינארי שלילי מלא



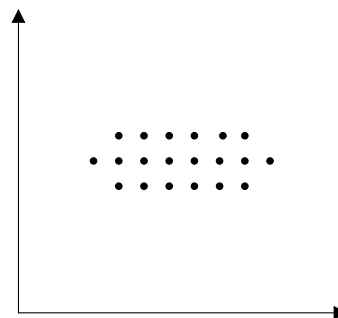
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם -1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

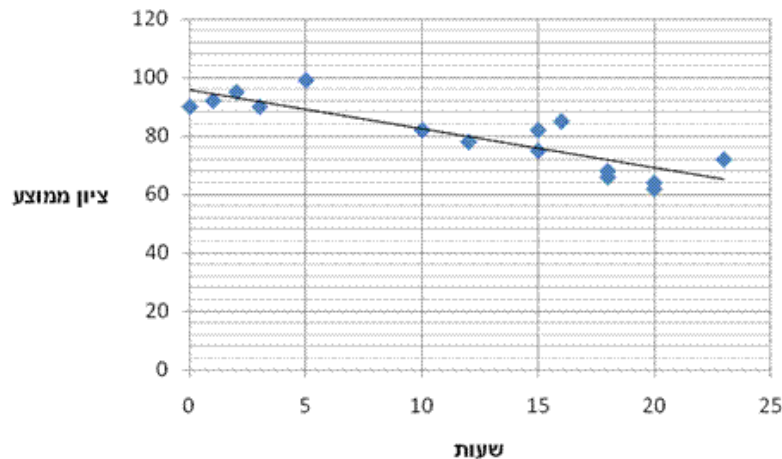
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

- (1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
 ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?
- (2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.
 ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

- (3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
 ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.
 ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
 ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:

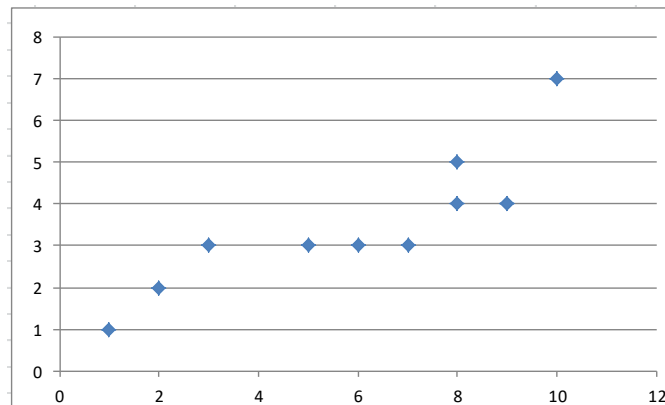
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו

להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.

כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדלו קטן/לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

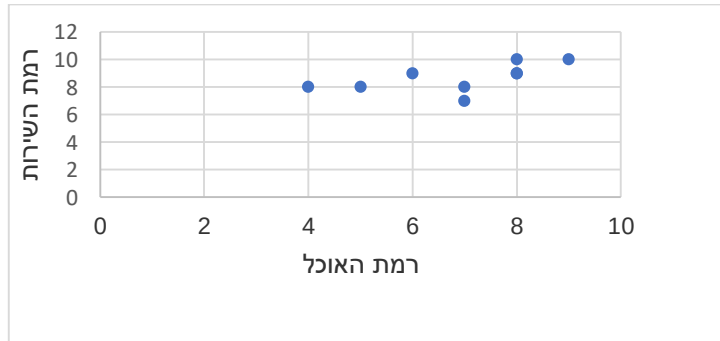
א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

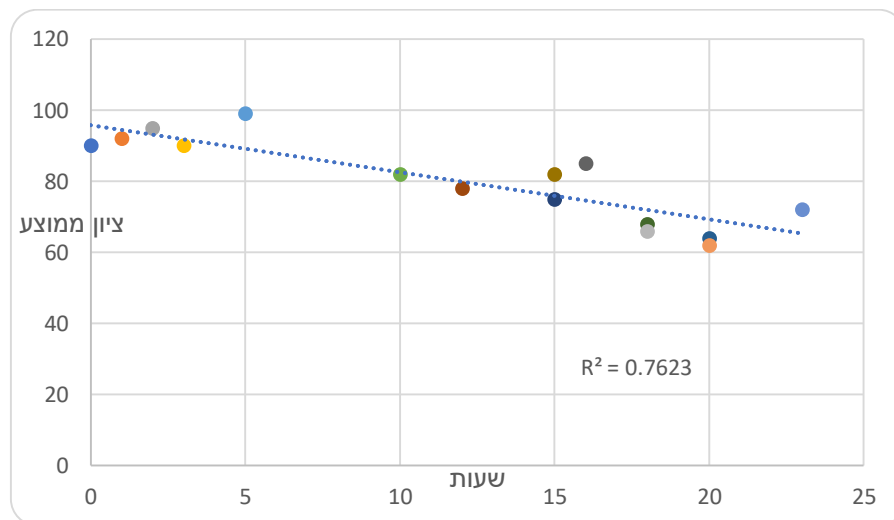
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

- א. $r = -0.3$
 ב. $r = 0$
 ג. $r = 1.125$
 ד. $r = 0.593$

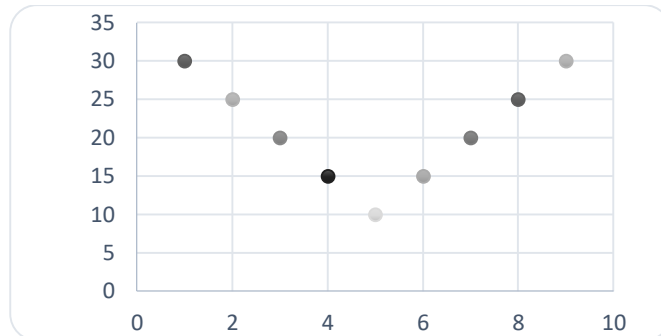
- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

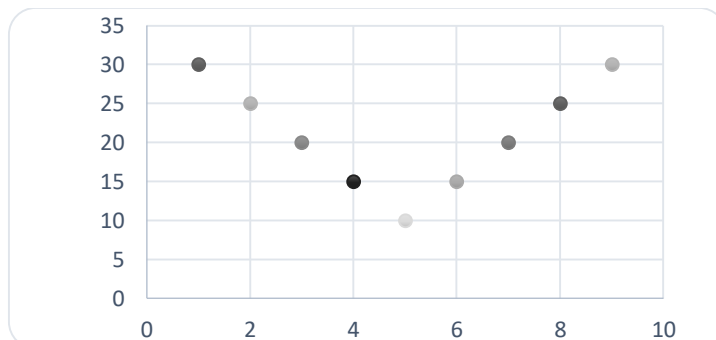
- א. ככל שמבליים יותר הציון נוטה לרדת.
 ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
 ג. ככל שמבליים פחות הציון נוטה לרדת.
 ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
 ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
 ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
 ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

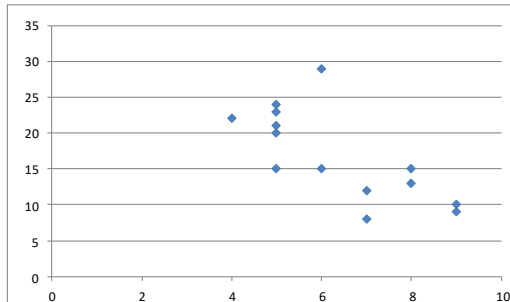
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
 ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
 ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
 ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

Y - (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

א. -0.52

ב. 0.72

ג. -0.72

ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

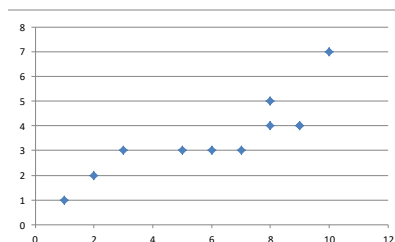
א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.

ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.

ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.

ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1

ב. 0.85

ג. 0.15

ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.

ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.

ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.

ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר _____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47	AVERAGE
536.25	VARPA

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20** עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח :

- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי.
(2) א. להלן טבלה:
ב. ספורט ולשון.

מתמטיקה	לשון	ספורט	
0.1	-0.7	1	ספורט
0.6	1	-0.7	לשון
1	0.6	-0.1	מתמטיקה

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
(4) א. לעלות.
(5) א. חלקי, חיובי.
ב. קטן.
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

(6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'

(11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'

(16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).
דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
 X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור ונתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.
מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

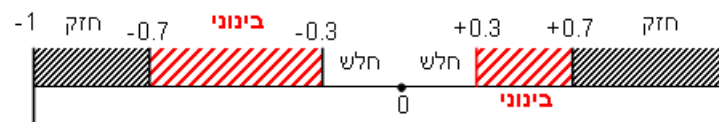
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

שאלות

- 1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

- 2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:
- א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?
- ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

- 3) נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y. מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

- (4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

- (5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

- (6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
- מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
 - לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$. לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

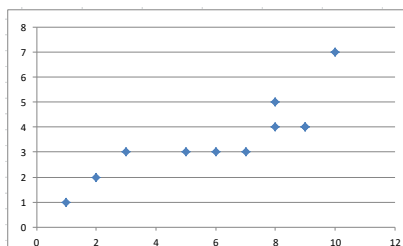
שאלות רב-ברירה:

- (7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
- הדבר מעיד שהציונים בכיתה היו שליליים.
 - ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש"ח). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
 ב. 0
 ג. 4.2
 ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור: מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



- א. 1
 ב. 0.85
 ג. 0.15
 ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
 ב. -0.9325.
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א. $\bar{y} = 16$, $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$.
- 3) א. 0.8
 4) 0.8
 5) 1
 6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
 7) ג'.
 8) א'.
 9) ב'.

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

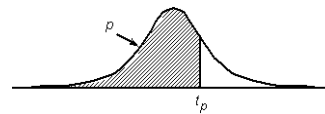
השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0: \rho = 0$.
ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי המבחן:

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	השערת האפס:
$H_1: \rho > 0$	$H_1: \rho < 0$	$H_1: \rho \neq 0$	השערת המחקר:
$t \geq t_{1-\alpha}$	$t \leq -t_{1-\alpha}$	$t \geq t_{1-\alpha}$ $\vee$ $t \leq -t_{1-\alpha}$	כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T
 P 

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

שאלות

(1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

נחקר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X - וותק	13	18	2	8	16	9	5	28	17	24
Y - השכלה	12	14	17	8	11	12	13	8	12	15

מקדם המתאם חושב והתקבל: -0.31 .

- א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?
 ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

(2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7 .

- א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?
 ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

(3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה -0.8 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.
 ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?
 ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

(4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

ב. לא תשתנה.	(1) א. לא נדחה את H_0 .
ב. לא נדחה את H_0 .	(2) א. לא
ב. לא ניתן לדעת.	(3) א. נדחה את H_0 .
	ג. לפחות 0.005.
ב. $0.005 < P_v < 0.01$.	(4) א. נדחה את H_0 .

ביוסטטיסטיקה א

פרק 37 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות.....211
2. שאלות רב ברירה (אמריקאיות).....214

שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

שאלות

- (1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 520$, $H_1: \mu > 520$. כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$. חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha = 0.05$. חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X} > 522$.

- למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?
- מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1 = 525$?
- הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu_1 = 525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'?
- חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X} = 523$. מהי מסקנתו?

- (2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5. דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב-49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.
- מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום)?
 - אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייקים" שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

מוצר / רשת	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

- (3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:
- הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.
- אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.
- בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.
 - חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

- 4) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

סטודנטים באוניברסיטאות	176	156	189	171	140	180
סטודנטים במכללות	180	190	191	186	204	150

- א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.
- ב. חשבו את p-value.
- ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

- 5) בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה היא מסקנת המחקר מובהקות של 5% אם
- ל-102 משפחות היה מדיח כלים.
- ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם. האם ניתן לדעת את הסתברותה?

גברים	2	0.9	0.7	1.2	1.1
נשים	1.4	1.1	1.9	1.8	1.2

ברמת
במדגם

- 6) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם. ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.
- א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

- 7) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

מספר הנסיעות	0	1	2	3	4
מספר המשפחות	84	102	26	20	12

- א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?
- ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

(8) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_0: \mu = 40$, $H_1: \mu > 40$.

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$.

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$.

תשובות סופיות

(1) א. חוקר א'	ב. 0.0122	ג. גדלה.	ד. נדחה H_0 .
(2) א. לפחות 0.0808	ב. 0.7995		
(3) א. לא נדחה H_0 .	ב. לא נדחה H_0 .		
(4) א. לא נדחה H_0 .	ב. בין 5% ל-10%.	ג. נדחה H_0 .	
(5) א. $H_0: p = 0.6$ $H_1: p > 0.6$	ב. נדחה H_0 .	ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05.	
(6) א. לא נדחה H_0 .	ב. 0.8643	ג. 0.8749.	
(7) א. נדחה H_0 .	ב. נדחה H_0 .		
(8) א. 0.0062	ב. 0.9938	ג. 0.0124.	

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ג. ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים. מהן ההשערות האלטרנטיביות להשערת האפס?

א. $H_1: p = 0.5$

ב. $H_1: p = 0.6$

ג. $H_1: p > 0.5$

ד. $H_1: p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $X - Y$)

68	82	93	69	לפני הנישואין - X
71	84	88	80	לאחר הנישואין - Y

א. $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$

ב. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ג. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ד. $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

(5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות

בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח

חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר

נישואיהם. הנה התוצאות :

68	82	93	69	לפני הנישואין
71	84	88	80	לאחר הנישואין

לבדיקת

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- (9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- (10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- (11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

12 בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13 שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14 ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15 חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.
- ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.
- ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .

- 16** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

- 17** בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 8,900 ₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?
- מבחן Z על פרופורציה.
 - מבחן T על תוחלת אחת.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

- 18** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:
- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

- 19** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
 - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- 20** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:
- השערת האפס הייתה נדחית.
 - השערת האפס הייתה לא נדחית.
 - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
- 21** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
- ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
 - רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
 - מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?
 - אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.
- 22** נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.
- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.
- 23** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - העוצמה של המבחן גדלה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - תשובות א ו-ב נכונות.

(24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	α
א. גדולה	א. גדולה
ב. קטנה	ב. גדולה
ג. גדולה	ג. קטנה
ד. קטנה	ד. קטנה

(26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- הן α , והן $(1 - \beta)$, יקטנו.
- α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.
- α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.
- הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

(27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- טעות מסוג ראשון.
- טעות מסוג שני.
- טעות מסוג שלישי.
- אין טעות במסקנתו.

(28) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה :

- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ידחה את השערת האפס מקרה.
- ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

(29) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(30) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p \text{ value} = 0.0254$, לכן :

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

(31) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

(32) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
- σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי :
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

- זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.
- לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא :

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0; H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

- לדחות את השערת האפס.
- לא לדחות את השערת האפס.
- שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
- שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

(38) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפללים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

(39) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- א. תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ב. לא נדחה את H_0 אף פעם.
- ג. לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ד. כל התשובות לא נכונות.

(40) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$. לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_x = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- א. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- ב. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- ג. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- ד. הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

(41) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- א. 0.005
- ב. 0.03
- ג. 0.0287
- ד. 0.05

- 42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במציאות** השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:
- א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).
 - ב. תגדל רמת הביטחון ($1 - \alpha$).
 - ג. אף תשובה לא נכונה.
 - ד. כל התשובות נכונות.

43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- א. $POWER + \alpha + \beta = 1$
- ב. $POWER = 0.5 - \beta$
- ג. $POWER + \alpha = 1$
- ד. $\beta + \alpha = 1$
- ה. הכול לא נכון.

44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

- א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
- ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
- ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

- א. ההשערה תדחה.
- ב. ההשערה לא תדחה.
- ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
- ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- א. אפס
- ב. חיובי
- ג. שלילי
- ד. לא ניתן לדעת

(47) עוצמה שווה ל-1 פרושה :

- א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

(48) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

- א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
- ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

(49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0: \mu \geq 10$, נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05 :

- א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- ב. מקבלים את השערת האפס.
- ג. דוחים את השערת האפס.
- ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

(50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$,

נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות :

- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

- א. שלושת הטענות אינן נכונות.
- ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
- ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
- ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א	26	א
2	ד	27	ב
3	ד	28	א
4	א	29	א
5	ג	30	ג
6	ג	31	ד
7	א	32	א
8	ב	33	א
9	ג	34	ד
10	א	35	ג
11	א	36	א
12	ג	37	ג
13	א	38	א
14	א	39	ג
15	א	40	א
16	א	41	א
17	א	42	א
18	ג	43	ה
19	א	44	ד
20	ג	45	ד
21	ב	46	א
22	ג	47	ד
23	ד	48	ג
24	ג	49	ב
25	ג	50	ד

ביוסטטיסטיקה א

פרק 38 - ניתוח שונות חד גורמי

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

ביוסטטיסטיקה א

פרק 39 - רגרסיה פשוטה

תוכן העניינים

1. כללי 227

הגרסיה פשוטה:

רקע:

הגרסיה ליניארית פשוטה מסתמכת על המתאם הליניארי בין המשתנה התלוי (המנובא) לב"ת (המנבא).

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}} \cdot \sqrt{S_{YY}}} : \text{מקדם המתאם}$$

המודל באוכלוסייה: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

כאשר:

β_0 הוא החותך.

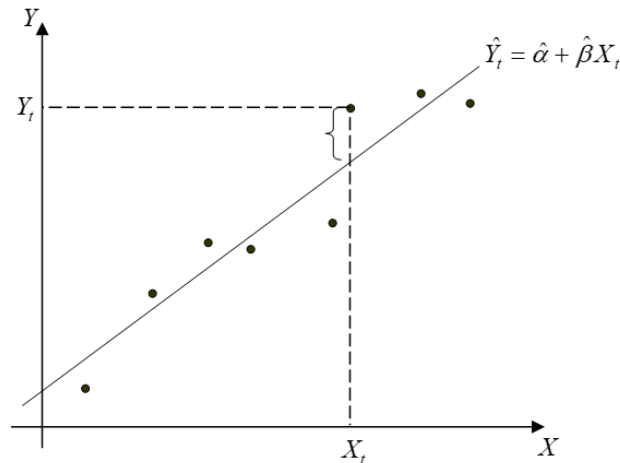
β_1 הוא שיפוע.

ε_i הינו גורם הטעות מסביב לקו הליניארי.

המודל הנאמד (על סמך מדגם): $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

לסיכום:

1. במודל $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α . $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β .
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. אומדי הריבועים הפחותים מסומנים בד"כ ע"י 'כובעי' - $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$.
4. בעוד α ו- β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים. מדוע? מפני שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ אחרים.
5. את α ו- β אי אפשר לדעת, ולכן אי אפשר לדעת מהו הקו האמיתי, וכן אי אפשר לדעת את ε .
6. אפשר לדעת את e , שהיא הסטייה מקו הרגרסיה. נגדיר זאת באופן הבא:
 - עבור X_i , הערך הצפוי של המשתנה המוסבר ($\hat{Y}_i$) המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$.
 - הסטייה של התצפית (Y_i) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה ($\hat{Y}_i$) היא: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.



האומדים של הרגרסיה $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$:

שיטת האמידה של α ושל β נקראת שיטת הריבועים הפחותים
Ordinary Least Squares (OLS).

השאלה הנשאלת בשיטת אמידה זו היא:

איזה $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ יביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה.

$$\min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum e_t^2 = \min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum \left[y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t) \right]^2 = ?$$

ובתרגום מתמטי:

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$: $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\text{COV}(X, Y)}{V(X)} = r \frac{S_Y}{S_X}$$

מבחני המובהקות:

$$\begin{aligned} H_0: \beta &= 0 \\ H_1: \beta &\neq 0 \end{aligned}$$

השערות:

ברגרסיה פשוטה בה יש לנו רק מנבא אחד: ניתן לבצע מבחן F למובהקות משוואת הרגרסיה או מבחן T למובהקות מקדם הרגרסיה (הביטא).

משמעות דחיית השערת האפס: משוואת הרגרסיה מובהקת, מקדם הרגרסיה מובהק, הקשר בין X ל- Y מובהק.

ולחיפך – אם השערת האפס לא נדחת: אין הוכחה לקשר בין המשתנים X ו- Y , משוואת הרגרסיה איננה מובהקת וכך גם מקדם הרגרסיה.

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{(1-r^2)SST}{n-2}$$

אמידת שונות הטעויות:

מבחן F:

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם משוואת הרגרסיה מובהקת.

המבחן מתבסס על פירוק סכום הריבועים: $SST = SSR + SSE$

$$S_Y^2 = r^2 S_Y^2 + (1-r^2) S_Y^2$$

טבלת ניתוח שונות (טבלת ANOVA):

מקור	סכום ריבועים SS	דרגות חופש $d.f.$	ממוצע סכום ריבועים $MS = \frac{SS}{d.f.}$	F
מודל הרגרסיה	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
שאריות	SSE	$n-2$	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
סה"כ	SST	$n-1$		

כלל הכרעה:

אם: $F_{st} > F_c \alpha(1, n-2)$ נדחה את השערת האפס.

מבחן t:

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם מקדם הרגרסיה מובהק.

$$t_{st} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{SXX}} \sim t_{c(n-2)} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$t_{stt} = \frac{r^2 \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} : \text{אם השערת האפס מתייחסת ל-} \beta_0 = \beta_0 \text{ (בדר"כ)}$$

כלל הכרעה :

השערה דו צדדית $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$	השערה חד צדדית שמאלית $H_1 : \beta_1 < \beta_{1,0}$	השערה חד צדדית ימנית $H_1 : \beta_1 > \beta_{1,0}$	
$t_{\text{statistic}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\text{s.e.}(\hat{\beta}_1)} = \frac{r^2 \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ $\text{s.e.}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SXX}}$			סטטיסטי המבחן
$ t_{\text{statistic}} \geq t_{n-2, 1-\alpha/2}$	$t_{\text{statistic}} \leq -t_{n-2, 1-\alpha}$	$t_{\text{statistic}} \geq t_{n-2, 1-\alpha}$	אזור דחייה
$2 * P(t_{n-2} > t_{\text{statistic}})$	$P(t_{n-2} > t_{\text{statistic}})$	$P(t_{n-2} > t_{\text{statistic}})$	P-VALUE

• שימו לב כי במודל של רגרסיה ליניארית פשוטה ערך ה- t סטטיסטי

שהתקבל שווה בדיוק לשורש של ערך F המחושב : $t = \sqrt{F}$
 $Pvalue = Pvalue$

רווח סמך לאמידת β :

$1 - \alpha = (\text{גבול תחתון} \leq \beta \leq \text{גבול עליון})$

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \text{s.e.}(\hat{\beta}_1)$$

מדד טיב ההתאמה R^2 :

מדד שנותן את פרופורציית השונות המוסברת. כמה מהשונות של Y מוסברת על ידי השונות של X :

$$0 \leq R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \leq 1 : (X \text{ מסביר את כל השונות של } Y)$$

מהשונות של Y).

נרצה פרופורציית שונות מוסברת קרובה ככל האפשר ל-1.

אחוז השונות המוסברת : $R^2 \cdot 100$.

רבי"ס שמטרתו לאמוד את תוחלת ערכי המשתנה התלוי (μ_0) עבור ערך מסוים של המשתנה ה"ב" (x_0). במילים אחרות אנו מתבקשים לאמוד את הניבוי באוכלוסייה עבור ערך מסוים של X .

האומד הנקודתי (הסטטיסטי) סביבו בנוי הרבי"ס הוא הניבוי במדגם עבור אותו

ה- X : $\hat{\mu}_0 = \hat{y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0$.

$$\text{נוסחת הרב"ס : } \hat{\mu}_0 \pm t_{n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{MSRES \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SSX} \right)}$$

טעות התקן/גודל הרב"ס מושפעים מ-4 גורמים :

1. $MSRES$ - האומד לשונות הטעויות. ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס גדלים ולהפך.
2. n - גודל המדגם. ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס קטנים ולהפך.
3. SSX - מונה השונות של X (קשור לתופעת קיצוץ תחום). ככל שגדל, טעות התקן/הרב"ס קטנים ולהפך.
4. $(x_0 - \bar{x})$ - הסטייה של ערך X המסוים מהממוצע של X . ככל שגדלה טעות התקן/הרב"ס גדלים ולהפך.

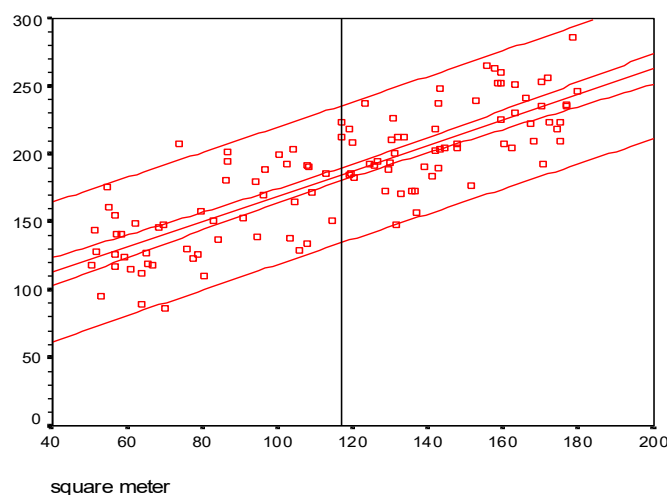
רב"ס לערכי Y עבור ערך מסוים של X :

רב"ס שמטרתו לאמוד את כל טווח ערכי Y (y_0) עבור ערך X מסוים (x_0).

$$\text{נוסחת הרב"ס : } \hat{\mu}_0 \pm t_{n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sqrt{MSRES \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SSX} \right)}$$

ניתן לראות כי גם רב"ס זה בנוי סביב האומדן הנקודתי לתוחלת ערכי Y עבור ערך ה- X המסוים ($\hat{\mu}_0$).

ההבדל בין רב"ס לערכי Y לבין הרב"ס לתוחלת ערכי Y בא לידי ביטוי בטעות התקן. ניתן לראות כי טעות התקן של הרב"ס לערכי Y גדולה יותר מטעות התקן של הרב"ס לתוחלת ערכי Y . כאשר כל יתר הפרמטרים נשארים קבועים רב"ס זה יהיה רחב יותר מן הרב"ס לתוחלת. התרשים הבא מתאר רב"ס לתוחלת ולערך המשתנה התלוי וממחיש זאת בבירור :



שאלות:

קו הרגרסיה:

(1) מתווך דירות בתל אביב רצה לבדוק איך משפיע גודלה של דירה על המחיר שבו היא נמכרת. הוא הניח 2 הנחות מקדימות:

1. רק גודל הדירה משפיע על מחיר הדירה באופן שיטתי. כל שאר הדברים המשפיעים על מחיר הדירה הם אקראיים ולא ניתנים לחיזוי.

2. ההשפעה של גודל הדירה על מחיר הדירה היא ליניארית.

גודל הדירה הינו X ומחיר הדירה הינו Y . מודל המתווך: $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon$.

המתווך אסף נתונים על 6 דירות, שנמכרו בחודש האחרון באותו אזור:

מספר הדירה	גודל הדירה במ"ר	מחיר הדירה באלפי דולרים
1	$X_1 = 70$	$Y_1 = 190$
2	$X_2 = 70$	$Y_2 = 210$
3	$X_3 = 80$	$Y_3 = 250$
4	$X_4 = 100$	$Y_4 = 290$
5	$X_5 = 120$	$Y_5 = 360$
6	$X_6 = 120$	$Y_6 = 380$

א. מקדם המתאם בין גודל הדירה למחיר הדירה. מה משמעותו?

ב. קו הרגרסיה לניבוי מחיר הדירה באמצעות גודל הדירה ופרשו את משמעות המקדמים.

ג. המחיר החזוי על פי קו הרגרסיה של דירה בגודל 100 מ"ר.

מבחן F:

(2) בצעו מבחן F לבדיקת הקשר בין גודל הדירה למחירה ברמת מובהקות של 1%.

מבחן t:

(3) בהמשך לדוגמא הנ"ל:

א. בצעו מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה ברמת מובהקות של 1%.

ב. בדקו את הטענה כי עליה במ"ר אחד תעלה את מחיר הדירה ביותר מ-\$2000.

ג. מהו ה-pvalue של מובהקות הקשר בין גודל הדירה למחירה. מה משמעותו?

קשר בין מבחן F למבחן t:

(4) חשבו את סטטיסטי המבחן F על סמך סטטיסטי המבחן t שקיבלתם. מה ה-pvalue של מבחן F?

(5) חשבו רב"ס לאמידת מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.99. השוו עם תוצאות מבחן t.

(6) חשבו את אחוז השונות המוסברת של מחיר הדירה על ידי גודלה.

רווח בר סמך לתוחלת:

(7) השאלה מבוססת על נתוני דוגמא מס' 2 (ראו סרטון) והפלטים הבאים:

Case Summaries

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
SIZE square meter	112	116.740	39.13942	50.46	179.76
PRICE thousands \$	112	185.0664	44.45345	86.20	286.56

Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
	B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1 (Constant)					.000	60.979	91.015
SIZE square meter		.062	.823	15.173	.000		

a. Dependent Variable: PRICE thousands \$

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
SIZE square meter	116.740	39.139	112
PRICE thousands \$	185.066	44.453	112
PRE_1 Unstandardized Predicted Value	185.066	36.568	112
RES_1 Unstandardized Residual	.000	25.277	112

חשב רב"ס ברמת סמך של 95% לתוחלת מחיר הדירה כאשר שטח הדירה הוא 100 מ"ר.

רווח בר סמך לערכי נעלם:

- (8) חשב רב"ס ברמת ביטחון של 95% למחיר הדירה עבור שטח דירה של 100 מ"ר. מה ההבדל בין רב"ס זה לרב"ס הקודם?

תרגול מסכם:

- (9) בפיצוציית "שלמה המלך" חושדים כי מספר הלקוחות המבקרים בפיצוצייה תלוי במחיר המכירה של הבירה במקום. לשם בדיקת הנושא ערכו ניסוי בו בכל שבוע שינו את מחיר הבירה במקום ומנו את מספר הלקוחות שהגיעו במשך אותו שבוע. משך הניסוי 7 שבועות עוקבים. להלן נתוני הניסוי:

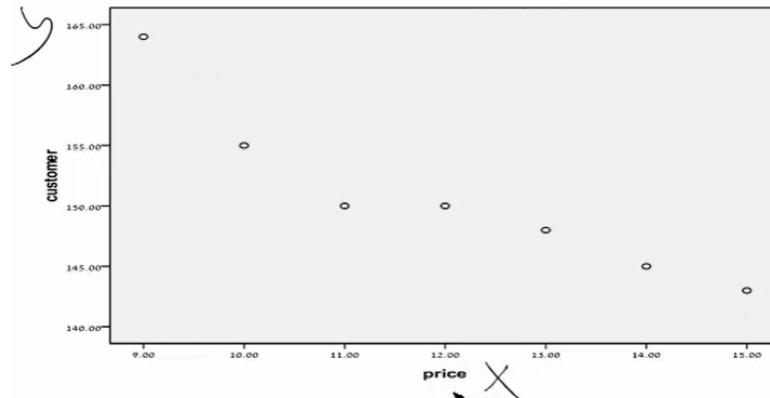
שבוע 7	שבוע 6	שבוע 5	שבוע 4	שבוע 3	שבוע 2	שבוע 1	
9	10	11	12	13	14	15	מחיר הבירה
164	155	150	150	148	145	143	כמות הלקוחות

- אמדו את מודל הרגרסיה ע"י חישוב מקדמי הרגרסיה.
- חשבו את מקדם המתאם r_{xy} .
- אמדו את השונות של שאריות המודל.
- בצעו בדיקה גראפית של אקראיות השאריות.
- חשבו את אחוז השונות המוסברת. מה משמעותה?
- בצעו חיזוי לכמות הלקוחות אם מחיר הבירה יהיה 16 ₪. האם להערכתכם ניתן להסתמך על חיזוי זה?
- בצעו מבחן F לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות.
- בצעו מבחן t לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%. השוו את התוצאות.
- אמדו את מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.95. השוו את התוצאה עם הסעיף הקודם.
- כתבו דו"ח קצר על הממצאים.

קריאת פלטים של SPSS:

10) על סמך הנתונים של השאלה הקודמת התקבלו הפלטים הבאים:

דיאגרמת הפיזור (scatter plot):



סטטיסטיקה תיאורית (descriptive statistics):

Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	N
customer	150.7143	7.01699	7
Price	12.0000	2.16025	7

פלט מקדם המתאם (correlations):

Correlations			
		customer	Price
Pearson Correlation	customer	1.000	-.935
	price	-.935	1.000
Sig. (1-tailed)	customer	.	.001
	price	.001	.
N	customer	7	7
	price	7	7

פלט model summary :

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.935 ^a	.873	.848	2.73470

a. Predictors: (Constant), price

b. Dependent Variable: customer

פלט ניתוח שונות (ANOVA) :

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	258.036	1	258.036	34.503	.002 ^a
	Residual	37.393	5	7.479		
	Total	295.429	6			

a. Predictors: (Constant), price

b. Dependent Variable: customer

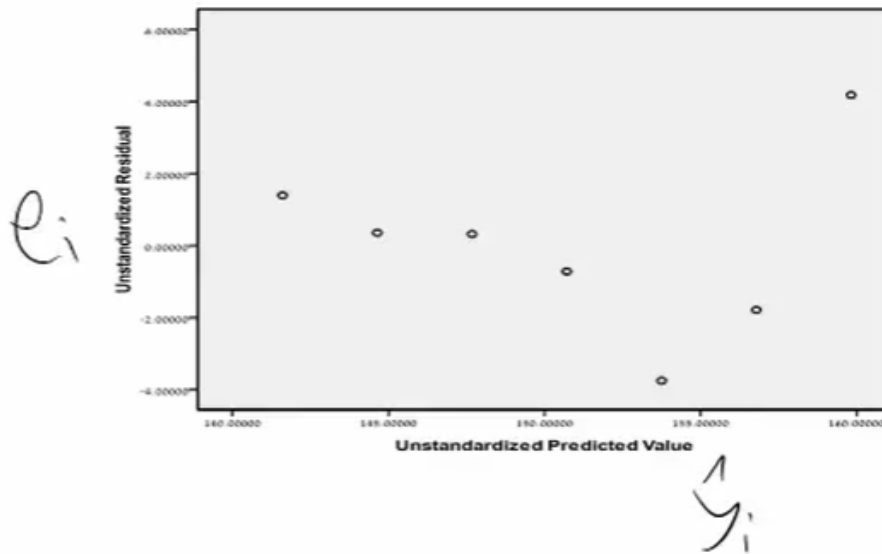
פלט מקדמי הרגרסיה (coeffitients) :

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	187.143	6.287		29.765	.000
	Price	-3.036	.517	-.935	-5.874	.002

a. Dependent Variable: customer

גרף ניתוח שאריות:



על סמך הפלטים הנתונים :

- א. מהו מודל הרגרסיה שנאמד?
- ב. מהו מקדם המתאם r_{xy} ?
- ג. מהי השונות של שארית המודל?
- ד. האם נמצא דפוס מיוחד בשאריות?
- ה. מהו אחוז השונות המוסברת?
- ו. על פי מבחן F : האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%?
- ז. על פי מבחן t : האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%? השוו את התוצאות.
- ח. מה ה-pvalue של המבחנים הסטטיסטיים? מה משמעותו?
- ט. בדקו האם קיים קשר חיובי מובהק בין המשתנים ברמת מובהקות 5%?

תשובות סופיות:

- (1) א. $r = 0.987$. ב. $\hat{Y}_t = -27.32 + 3.29X_t$. ג. 301.68 אלף דולר.
- (2) $F_{st} = 21.198$, יש עדות לקשר מובהק.
- (3) א. $t_{stt} = 4.604$. ב. יש עדות לכך. ג. $pvalue < 0.001$.
- (4) $t_{stt}^2 = 147$, $pvalue < 0.001$.
- (5) $p(2.061 \leq \beta \leq 4.519) = 0.99$.
- (6) 97.4% .
- (7) $p(163.889 \leq \mu_{100} \leq 174.24) = 0.95$.
- (8) $p(119.036 \leq Y_{100} \leq 219.09) = 0.95$, רחב יותר.
- (9) א. $\hat{y}_i = 187.143 - 3.0357x_i$. ב. $r = -0.93457$. ג. $\hat{\sigma}^2 = 7.4785$.
 ד. ראו סרטון. ה. $R^2 = 0.873$. ו. $\hat{y} = 138.5714$, כן.
 ז. $F_{stt} = 34.5 > F_c 0.05(1,5) = 6.6$, יש עדות לכך. ח. $t_{st} = -5.87395$.
 ט. $p(-4.36 \leq \beta \leq -1.709) = 0.95$. י. ראו סרטון.
- (10) א. $\hat{y}_i = 187.143 - 3.036x_i$. ב. $r_{xy} = 0.935$. ג. $MSE = 7.479$.
 ד. לא. ה. $R^2 = 0.874$. ו. $F = 34.503$.
 ז. $t = -5.874$. ח. $pvalue = 0.002$. ט. ראו סרטון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 40 - רגרסיה מרובה

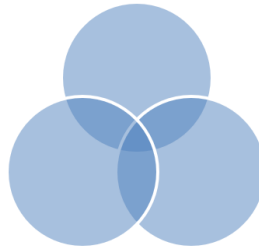
תוכן העניינים

1. כללי 239

הגרסיה מרובה:

רקע:

ניבוי המשתנה התלוי באמצעות יותר ממשתנה ב"ת אחד. המודל באוכלוסייה: $y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$. מקדמי מודל הרגרסיה המרובה: α = חותך אחד שמשמעותו: הציון המנובא כאשר כל המשתנים הב"ת = 0. $\beta_1 \dots \beta_j$ = מקדמי השיפוע. מס' הבטות = למספר המשתנים הב"ת במודל. משמעות מקדם השיפוע β_j : ההשפעה הייחודית של המשתנה הב"ת המסוים לניבוי המשתנה התלוי, בניכוי השפעתם של כל יתר המשתנים הב"ת האחרים המצויים במשוואת הרגרסיה.



אמידת מודל הרגרסיה המרובה:

ברגרסיה מרובה, כמו ברגרסיה פשוטה, שיטת האמידה הטובה ביותר היא שיטת הריבועים הפחותים. כלומר, נרצה להביא את סכום הטעויות בניבוי למינימום. מפתרון פונקציית הריבועים הפחותים נקבל את אומדי הרגרסיה: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_j$.

מבחני מובהקות:

1. מבחן F למובהקות הרגרסיה: בדיקה האם קיים קשר ליניארי בין המשתנה התלוי Y לבין לפחות אחד מהמשתנים המסבירים.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

ההשערות הן:

$$H_1: \text{Not } H_0: \text{at least one of the } \beta\text{'s is not } 0$$

טבלת ניתוח שונות (ANOVA):

מקור	סכום ריבועים SS	דרגות חופש $d.f.$	ממוצע סכום ריבועים $MS = \frac{SS}{d.f.}$	$F_{st} \sim F_{k,n-k-1}$
מודל הגרסיה	SSR	k	$MSR = \frac{SSR}{K}$	$F_{st} = \frac{MSR}{MSE}$
שאריות	SSE	$n-k-1$	$MSE = \frac{SSE}{(n-k-1)}$	
סה"כ	TSS	$n-1$		

סטטיסטי המבחן: $F_{st} = \frac{MSR}{MSE}$

כלל הכרעה: נדחה את H_0 אם: $F_{st} \geq F_{k,n-k-1}^{1-\alpha}$

חישוב סכומי הריבועים:

$$TSS = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$SSR = R^2 \cdot TSS$$

$$SSE = (1 - R^2) TSS$$

פרופורציית השונות המוסברת R^2 :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

בגרסיה מרובה אומד זה לפרופורציית השונות המוסברת הוא בעייתי שכן הוא מושפע ממספר המשתנים הב"ת במודל. אומד זה יכול רק לגדול בהוספת משתנים ב"ת למודל ולכן לא ייתן לנו אינדיקציה האם כדאי היה להוסיף אותם למודל או לא.

האומד המתוקן לפרופורציית השונות המוסברת $AdjR^2$:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-k-1} \right]$$

בניגוד ל- R^2 לוקח בחשבון את מספר המשתנים הב"ת במודל. יכול שלא לגדול ואף לקטון בהוספת משתנה ב"ת שלא תורם תרומה משמעותית לניבוי.

2. מבחן t למובהקות משתנה ב"ת יחיד:

$$\begin{aligned} H_0: \beta_j &= 0 \\ H_1: & \text{else} \end{aligned}$$

סטטיסטי המבחן וכלל הכרעת השערת האפס:

$$|t_{\hat{\beta}_j}| = \left| \frac{\hat{\beta}_j}{S_{\hat{\beta}_j}} \right| > t_{(T-k-1; 1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$\hat{\beta}_j \pm t_{n-k-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s.e.(\hat{\beta}_j) : \beta_j \text{ לא מידת ה-}$$

3. מבחן F חלקי (partial F):

בודק את ההשערה שתוספת של משתנה אחד או קבוצה של משתנים מוסיפה תוספת מובהקת לניבוי המשתנה התלוי מעבר למשתנים אחרים שקיימים כבר במודל.

$$\begin{aligned} H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p &= 0 \\ H_1: & \text{otherwise} \end{aligned}$$

ביצוע המבחן:

מריצים שתי רגרסיות:

1. UR: המודל המלא – רגרסיה עם כל המשתנים ה"ת" (K).

2. R: המודל החלקי – רגרסיה תחת H_0 (K - P).

$$F = \frac{\frac{R_{UR}^2 - \frac{R_R^2}{p}}{1 - R_{UR}^2}}{\frac{n-k-1}} = \frac{\frac{SSR_{UR} - \frac{SSR_R}{p}}{1 - SSR_{UR}}}{\frac{n-k-1}} = \frac{\frac{SSE_R - \frac{SSE_{UR}}{p}}{1 - SSE_{UR}}}{\frac{n-k-1}}$$

$$F > f_{1-\alpha}^{p, n-k-1} : \text{כלל הכרעה}$$

קשר בין מבחן F חלקי למבחן t:

קיים קשר בין מבחן F חלקי למובהקות תוספת משתנה ב"ת יחיד, למבחן t

$$F > f_{1-\alpha}^{1, n-k-1} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1}^2$$

$$pvalue = pvalue$$

מוליטיקוליניאריות:

בעיית המוליטיקוליניאריות:

מצב שבו המשתנים המסבירים הם בעלי מתאם גבוה בינם ולבין עצמם. מתאמים גבוהים אלו יוצרים קושי ביכולת להבחין בהשפעה הבודדת של כל משתנה מסביר על המשתנה המוסבר.

כיצד מזהים בעיית מוליטיקוליניאריות?

- R^2 גדול וערכי t קטנים, או שדוחים את השערת האפס במבחן F אך לא במבחני t .
- מקדמי מתאם זוגיים גבוהים בין המשתנים המסבירים (לפי טבלת קורלציות).

איתור המוליטיקוליניאריות:

נבחר לרוב להוציא את אחד מהמשתנים לפי הקריטריונים הבאים:

1. המשתנה המתואם ביותר גם עם יתר המשתנים המסבירים.
2. המשתנה הכי פחות מובהק שהתקבל בהרצה הראשונית (לפי t).

אבחון קוליניאריות – מדד VIF (Variance Inflationary Factor):

מדד זה מבטא את הגידול (האינפלציה) בשונות של מקדם הרגרסיה של משתנה ב"ת מסוים כתוצאה מהמתאם שלו עם משתנים ב"ת אחרים המצויים במשוואה:

$$X_j = \frac{1}{(1 - R_j^2)}$$

R_j^2 הוא מקדם ההסבר של X_j , כל יתר המשתנים ב"ת.

כאשר: $VIF_j > 5$ המשמעות היא ש- X_j מתואם בצורה חזקה עם יתר המשתנים הב"ת במשוואה.

חישוב מובהקות התוספת (F חלקי) של משתנה ב"ת מסוים על פני האחרים:

במקרה של מוליטיקוליניאריות במודל (מתאם חזק בין משתנים ב"ת) בכדי לדעת איזה משתנה ב"ת יש להוציא, ניתן לבחון את התוספת לניבוי של המשתנה ה"חשוד" על פני האחרים. אם היא איננה מובהקת, זוהי אינדיקציה שיש להוציאו מהמודל.

שאלות:

המודל ומבחני המובהקות:

- 1) לצורך בדיקת ההשערה שקיים קשר בין מספר המוניות בעיר באר שבע (y) לבין מספר התושבים בעיר באלפים (x_1) ומספר הרכבים הפרטיים באלפים (x_2).
הוחלט לבנות מודל רגרסיה מהצורה: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, על סמך הנתונים הבאים: $\sum_i 1673$, $\sum_i y_i^2 = 338657$, $MSE = 119.789$.
א. ע"ס הנתונים הנ"ל, השלימו את טבלת ניתוח השונות הבאה.
איזו השערה ניתן לבדוק באמצעותה? כתוב את ההשערה ובחן אותה.

SOURCE	SS	DF	MS	F
Regression				
Error				
Total		8		

- ב. חשבו את מדד טיב ההתאמה. הסבר את משמעותו.
ג. נתונה טבלת המקדמים (החלקית) הבאה:

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	-511.727	114.9476				
X 1	9.208785		3.732167			
X 2	-8.79921	4.420456				

- רשמו את האומדן למשוואת הרגרסיה ופרשו את מקדמיה.
 - בחנו את ההשערה כי קיים קשר בין מספר הרכבים הפרטיים לבין מספר המוניות ברמת מובהקות של 5%.
 - בנו רווח סמך למקדם של מספר התושבים בעיר.
 - ענה ללא חישוב (על סמך הסעיפים הקודמים).
- האם קיים קשר בין מספר התושבים לבין מספר המוניות ברמת מובהקות 5%?
- מהי תחזית מס' המוניות בבאר שבע עבור 100,000 תושבים ו-52,000 מכוניות פרטיות?
 - האם ניתן לסמוך על תחזית זאת?
 - חשב את סטטיסטי F חלקי של מס' הרכבים הפרטיים. האם מובהק? (ענה ללא חישוב).

תרגול מסכם:

(2) מעוניינים למצוא קשר בין מחיר הדירה (ב-\$) לבין ארבעה משתנים מסבירים:

1. שטח הדירה.
 2. גודל שטח האמבטיה (ב-Sqft).
 3. מרחק הדירה מהים.
 4. מהאוניברסיטה (במיילים).
- לשם כך נדגמו מספר דירות והריצו רגרסיה אשר בה המשתנה המוסבר הוא מחיר הדירה.
להלן פלט הרגרסיה שהתקבל:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.952 ^a			

a. Predictors: (Constant), Sea_Dist, Apartment, Bath

ANOVA^b

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression					.000 ^a
	Residual					
	Total	1940484.615	25			

a. Predictors: (Constant), Univ_Dist, Bath, Sea_Dist, Apartment

b. Dependent Variable: Price

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-265.514	146.673		-1.810	.085
	Apartment		.449	.722	6.572	
	Bath	4.256		.297	2.687	.014
	Sea_Dist	-32.114	11.090	-.223		.009
	Univ_Dist	11.746	9.439	.095	1.244	.227

a. Dependent Variable: Price

ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מלאו את התאים החסרים בטבלה (אם לא ניתן למלא את כל התאים החסרים באופן מלא ונמקו באופן מפורש מדוע לא ניתן).
- ב. כתבו את האומדן למשוואת מחיר הדירה בצורה מפורשת על סמך הפלט הנ"ל. פרשו את מקדמי הרגרסיה.
- ג. בדקו האם ארבעת הגורמים ביחד אכן מסבירים את מחיר הדירה. הסבירו את המסקנה שהגעתם אליה. השתמשו ברמת מובהקות 5%.

- ד. הסבירו מהו ערך ה- Pvalue ומה ניתן להסיק ממנו לגבי המשתנים המסבירים?
- ה. בנו רווח סמך למקדם גודל שטח האמבטיה. השתמשו ברמת מובהקות של 2%.
- ו. ברמת מובהקות של 5% יש לבדוק האם המרחק מהאוניברסיטה אכן משפיע על מחיר הדירה.
- ז. האם במודל הרגרסיה הנוכחי ניתן לוותר על גורם המרחק מהים? השתמשו ברמת מובהקות 1%.
- ח. בדקו את ההשערה כי קיים קשר חיובי בין גודל הדירה למחירה ברמת מובהקות של 5%.
- ט. נתונה מטריצת מקדמי המתאם הבאה:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1			
X_2	0.228579	1		
X_3	-0.22413	-0.13924	1	
X_4	-0.24545	-0.97295	0.029537	1

- מה ניתן ללמוד ממנה ומה משמעותה לגבי המודל?
- י. הניחו כי השארייות המתקבלות מניתוח הרגרסיה הן בעלות הערכים הבאים (סדר הקריאה הוא משמאל לימין) הנח כי אלו כל השארייות הקיימות במודל: -1, -12, 3, 6, -4, 5, 10, -5, 6, 12, -3, -7, -3, 9, 7.
- האם משתנים X_2 ו- X_4 מוסיפים תוספת משמעותית לניבוי? אם לא ניתן לענות על השאלה, ציין מדוע.
- יא. מה יהיו תוצאות מבחן F לבדיקת התוספת לניבוי של המרחק מהאוניברסיטה על פני המשתנים האחרים (ענה ללא חישוב).

תשובות סופיות:

(1) א.

SOURCE	SS	DF	MS	F
Regression	26945.784	2	13472.892	112.414
Error	718.733	6	119.789	
Total	27664.517	8		

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$
 נדחה את השערת האפס, $H_1: \text{at least one of the } \beta\text{'s is not } 0$

ב. 97.4% .ג. $\hat{y}_i = -511.727 + 9.208x_{1i} - 8.799x_{2i}$

ii. אין עדות לכך. iii. $p(3.17 \leq \beta_1 \leq 15.24) = 0.95$

iv. מובהק. v. 321 מוניות. vi. כן. vii. $F = 3.96$

(2) א. 1. 0.907 .א. 2. 0.89 .א. 3. 0.92 .א. 4. 0.1760019.5

א. 5. 0.180465 .א. 6. 0.4 .א. 7. 0.21 .א. 8. 0.440004.875

א. 9. 0.8593.57 .א. 10. 0.51.2 .א. 11. 0.2.95 .א. 12. $\text{sig} < 0.001$

א. 13. 1.58 .א. 14. -2.896

ב. $\hat{y}_i = -256.514 + 2.95x_{1i} + 4.256x_{2i} - 32.114x_{3i} + 11.746x_{4i}$

ג. ראו סרטון. ד. ראו סרטון. ה. $p(1.016 \leq \beta_2 \leq 7.496) = 0.98$

ו. אין עדות לכך. ז. לא. ח. יש עדות לכך.

ט. בעיית קוליניאריות. י. ראו סרטון. יא. ראו סרטון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 41 - רגרסיה לוגיסטית

תוכן העניינים

1. רגרסיה לוגיסטית..... 247

הגרסיה לוגיסטית:

רקע:

מתי נבצע רגרסיה לוגיסטית?

כאשר המשתנה המנובא הוא דיכוטומי (Binary Logistic):
 יכול לקבל ערכים של 0 או 1.
 הפונקציה הלוגיסטית מתארת את הסיכויים לקבל "1" במשתנה התלוי כתלות במשתנים הב"ת.

הלוגיקה בניתוח רגרסיה לוגיסטית:

השוואת ניבוי Y ללא המשתנים המנבאים במודל לניבוי Y במודל הכולל את המשתנים המנבאים (סטטיסטי χ^2).

טיב מודל הרגרסיה ("Goodness of fit"):

1. מובהקות המודל:

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	12.225	4	.016
	Block	12.225	4	.016
	Model	12.225	4	.016

מבחן χ^2 - תחת שורת ה-model נמצא את חי בריבוע ואת מובהקות המודל.

2. אחוז שונות מוסברת:

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	96.524	.139	.189

R^2 Nagelkerke – מקביל ל- R^2 כללי ברגרסיה. אחוז שונות Y המוסברת ע"י כל המנבאים יחד (בטווח מוכר של 0-1).

3. דיוק בניבוי :

Classification Table^a

Observed				Predicted		Percentage Correct
				whether mom believes course will help		
				no	yes	
Step 1	whether mom believes course will help	no		46	5	90.2
		yes		17	14	45.2
Overall Percentage						73.2

a. The cut value is .500

סגוליות (true negative) – ביחס ל- $Y=0$ במדגם, כמה המודל דייק בניבוי (90.2%).
 רגישות (true positive) – ביחס ל- $Y=1$ במדגם, כמה המודל דייק בניבוי (45.2%).
 אחוז הניבוי הכללי – בכמה בסה"כ המודל מדייק בניבוי (73.2%).

מושגים חשובים להבנת טבלת המקדמים :

: ODDS

"הסיכוי להתרחשות אירוע מסוים" – ההסתברות שהאירוע יקרה לעומת ההסתברות

$$ODDS = \frac{p}{1-p} \quad \text{שאותו אירוע לא יקרה :}$$

ODDS=1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש שווה לסיכוי שהוא לא יתרחש $(\frac{0.5}{0.5})$.

ODDS>1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש גבוה מהסיכוי שלא יתרחש (למשל- $(\frac{0.75}{0.25})$).

ODDS<1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש נמוך מהסיכוי שלא יתרחש (למשל- $(\frac{0.25}{0.75})$).

: ODDS RATIO (OR)

$$OR = \frac{ODDS_{(A)}}{ODDS_{(B)}} \quad \text{יחס בין סיכויים -}$$

כיצד משתנה ההסתברות במעבר מקבוצה A לקבוצה B.

OR=1 – הסיכוי להתרחשות האירוע שווה בין שתי הקבוצות- אין קשר בין המב"ת למ"ת.

OR>1 – הסיכוי להתרחשות האירוע בקבוצה A גבוה מאשר בקבוצה B – קשר חיובי.

OR<1 – הסיכוי להתרחשות האירוע בקבוצה A נמוך מאשר בקבוצה B – קשר שלילי.

טבלת המקדמים – תרומות ייחודיות של כל מנבא:

(מקביל לטבלת Coefficients בגרסיות לינאריות)

Variables in the Equation		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	EDU_YRS	-.107	.138	.603	1	.438	.898
	AGE	-.029	.020	2.078	1	.149	.971
	SATISFAC	.118	.175	.457	1	.499	1.126
	BIRTH#	.882	.321	7.530	1	.006	2.415
	Constant	.001	1.796	.000	1	.999	1.001

a. Variable(s) entered on step 1: EDU_YRS, AGE, SATISFAC, BIRTH#.

1. מבחן WALT למובהקות המשתנים:
מבטא את מובהקות המשתנה מבחינת תרומתו הייחודית לניבוי Y.
2. B – מקדמי המשתנים ב-log odds:
בטא חיובית – עלייה ב-log odds של Y כפונקציה של עליה ביחידה אחת של X.
בטא שלילית – ירידה ב-log odds של Y כפונקציה של עליה ביחידה אחת של X.
3. משוואת הרגרסיה:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \hat{\beta}_4 x_{4i}$$

$$p = \frac{1}{1+e^{-\log odds}} : (p) \text{ חישוב הניבוי במונחי הסתברות}$$

$$ODDS = e^{\log odds} : (ODDS) \text{ חישוב הניבוי במונחי סיכויים}$$

4. Exp (B) - יחס הסיכויים (Odds Ratio):
מבטא את העלייה (אם גדול מ-1) או את הירידה (אם קטן מ-1) בסיכויים להיות בעלי ערך '1' ב-Y כאשר הערך במשתנה המנבא גדל ביחידה אחת.

$$\log \text{Exp}(B) = B ; e^B = \text{Exp}(B) : \text{Exp}(B) \text{ - ל-B היחס בין } B$$

שאלות:

- 1) חוקרת בחוג למגדר ביקשה לבדוק האם מגדר משפיע על תעסוקה. היא התבססה על סקר של הלמ"ס שדגם 826 מבוגרים בגילאי העבודה המרכזיים (25-55). היא הגדירה את המשתנים באופן הבא:
 WOMEN - "1" = אישה ; "0" = גבר.
 WORKING - "1" = כן ; "0" = לא.
 מהצלבה של שני המשתנים התקבלה הטבלה הבאה :

working * women Crosstabulation				
		women		Total
		.00	1.00	
working	.00	13	130	143
	1.00	338	345	683
Total		351	475	826

- על סמך הטבלה חשבו :
- מה ההסתברות של אישה לעבוד?
 - מה הסיכוי של אישה לעבוד?
 - מה ההסתברות של גבר לעבוד?
 - מה הסיכוי של גבר לעבוד?
 - מה יחס הסיכויים (OR) של נשים לעבוד לעומת גברים?
 - מה הלוגריתם של יחס הסיכויים?
 - מה יהיה ערך מקדם השיפוע B בגרסיה הלוגיסטית לניבוי תעסוקה על פי מגדר ומה משמעותו?
 - מה יהיה ערך $\text{Exp}(B)$ בגרסיה הלוגיסטית ומה משמעותו?

(2) במחקר ביקשו לבדוק כיצד מצב משפחתי וגובה המשכורת משפיעים על בעלות על דירה.

משתני המחקר:

apartm - בעלות על דירה: "1" - כן; "0" - לא.

status - מצב משפחתי: status (0) - רווק; status (1) - בזוגיות;

status (2) - בזוגיות עם ילדים; status(3) - פרוד או גרוש.

incom - הכנסה (בעשרות אלפי שקלים).

התקבלו הממצאים הבאים:

Classification Table ^a				
Observed		Predicted		
		apartm		Percentage Correct
		.00	1.00	
Step 1	apartm .00	22	11	66.7
	1.00	10	22	68.8
Overall Percentage				67.7

a. The cut value is .500

Omnibus Tests of Model Coefficients				
		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	10.218	4	.037
	Block	10.218	4	.037
	Model	10.218	4	.037

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	79.876 ^a	.145	.194

a. Estimation terminated at iteration number 4 because parameter estimates changed by less than .001.

Variables in the Equation						
	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
Status			.682	3	.877	
Status(1)	-.498	.713	.487	1	.485	.608
Status(2)	-.520	.784	.441	1	.507	.594
Status(3)	-.180	.748	.058	1	.810	.835
income	.000	.000	8.580	1	.003	2.536
Constant	-2.734	1.079	6.417	1	.011	.065

a. Variable(s) entered on step 1: Status, income.

- א. האם ניתן לדחות את השערת האפס הטוענת כי אין קשר בין בעלות על דירה להכנסה ולסטטוס משפחתי?
- ב. כמה אחוזים מצליחים המשתנים הב"ת להסביר מהשונות של המשתנה "בעלות על דירה"?
- ג. באיזה אחוז מצליח המודל לנבא באופן מדויק בעלות על דירה מתוך כלל המקרים?
- ד. באיזה מידה מצליח המודל לנבא בהצלחה בעלות על דירה מתוך בעלי הדירה במדגם? כיצד נקרא המדד המתאים?
- ה. באיזה מידה מצליח המודל לנבא בהצלחה אי-בעלות על דירה מתוך אלו שאינם בעלי דירה במדגם? כיצד נקרא המדד המתאים?
- ו. מהי המשוואה לניבוי בעלות על דירה על סמך המשתנים הב"ת?
- ז. לאיזה מהמשתנים הב"ת יש תרומה ייחודית מובהקת לניבוי בעלות על דירה? מהי משמעות מקדם B ו- $\text{Exp}(B)$ של משתנה זה?
- ח. על כל עליה ב-10,000 ₪ בהכנסה, בכמה אחוזים יעלה הסיכוי לבעלות על דירה?
- 53.6%
 - 253.6%
 - 153.6%
 - 93%
- ט. על כל עליה של 20,000 ₪ בהכנסה, בכמה אחוזים יעלה הסיכוי לבעלות על דירה?
- 307%
 - 423%
 - 542%
 - 642%
- י. מה ההסתברות של רווק המשתכר 20,000 ₪ להיות בעלים של דירה?
- יא. האם ההסתברות של אותו רווק להיות בעל דירה גבוהה / שווה / קטנה מההסתברות שלו לא להיות בעל דירה?
- יב. מהם הסיכויים (ODDS) שלו להיות בעל דירה?
- יג. עבור איזה משכורת הסיכוי (ההסתברות) של רווק להיות בעל דירה עולה על הסיכוי שלו לא להיות בעל דירה?
- יד. במידה ומשתנה ההכנסה היה נמדד באלפי שקלים (ולא בעשרות אלפי שקלים), כיצד הדבר היה משפיע על ההשפעה השולית של מקדם ההכנסה, אם בכלל?

- (3) חוקרים בחנו את המאפיינים שעשויים לנבא את הביצוע של חניכים במבחן הסיום של קורס פקחי טיסה. הביצוע במבחן נמדד על סולם של הצלחה/כשלון והמשתנים הבלתי תלויים כללו מין (1-זכר 0-נקבה), השכלה קודמת (0-ריאלית, 1-לא ריאלית) וביצוע במהלך הקורס (1-7).
להלן תוצאות ניתוח הרגרסיה:

Omnibus Tests of Model Coefficients				
		Chi-square	Df	Sig.
Step 1	Step	20.982	3	.000
	Block	20.982	3	.000
	Model	20.982	3	.000

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	17.209 ^a	.503	.699

a. Estimation terminated at iteration number 7 because parameter estimates changed by less than .001.

Variables in the Equation						
	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a מין	4.445	2.611	2.897	1	.089	85.161
השכלה קודמת	-.146	2.054	.005	1	.943	.864
ביצוע במהלך הקורס	2.283	.944	5.846	1	.016	9.810
Constant	-19.284	8.056	5.731	1	.017	.000

a. Variable(s) entered on step 1: מין, השכלה, הקורס, הביצוע במהלך הקורס.

- האם למודל הכולל את שלושת המנבאים יכולת הסבר משמעותית?
- כמה אחוזים מתוך השונות של Y מצליח המודל להסביר?
- מהי משוואת הניבוי?
- לאיזה מן המשתנים הב"ת תרומה מובהקת לניבוי?
- הסבירו את משמעות המקדמים (b) שהתקבלו עבור המשתנים הב"ת: מגדר, השכלה קודמת והביצוע במהלך הקורס.
- בטאו את המקדמים במונחי הסיכויים להצלחה בקורס (odds) והסבירו אותם.
- הועלתה הטענה כי ההסתברות ההצלחה של נשים בקורס היא נמוכה ביותר, גם אם הן בעלות השכלה ריאלית ושביצוען במהלך הקורס מקסימאלי. אנא בדקו את הטענה.
- עבור זכר, בעל השכלה ריאלית, מהי ההשפעה השולית של עליה ביחידה אחת בדירוג הביצוע במהלך הקורס על הסיכוי להצליח בקורס?

(4) לפי מדגם של 20 זוגות נשואים, נאספו נתונים על המשתנה Y השווה ל-1 אם הזוג נוהג לצאת למסעדה לפחות פעם בשבוע ו-0 אחרת.

$$\text{נאמד המודל: } p = \frac{1}{1+e^{-z}} \text{ כאשר } p = P(Y=1).$$

התקבלו התוצאות הבאות: $z = -9.456 + 0.368INCOM - 1.207BABY$.
 $INCOM$ - ההכנסה של שני בני הזוג (באלפים). ההכנסה במדגם נעה בין 17 אלף ל-44 אלף.

$BABY$ - משתנה דמי המקבל את הערך '1' אם הזוג צריך להיעזר בשמרטפית ו-'0' אחרת.

ענה נכון/לא נכון:

- א. זוג הנעזר בשמרטפית ומשתכר 30.5 אלף, יוצא למסעדה לפחות פעם בשבוע בהסתברות גבוהה מ-0.5.
- ב. עבור זוג שאינו נעזר בשמרטפית, עליה של אלף שח בהכנסה, מעלה את ההסתברות לצאת למסעדה ב-0.368.
- ג. כל אחד מערכי P הנאמדים כאן איננו גבוה יותר מ-0.99.
- ד. הסיכוי של זוג, שהכנסתו עלתה ב-3000 שח, לצאת למסעדה יעלה ב-200% בערך.
- ה. המשכורת שצריך להרוויח זוג, אשר אינו נעזר בשמרטפית, כדי שהסיכוי שלו לצאת למסעדה יהיה שווה לסיכוי שלא לצאת למסעדה הוא 27,000.
- ו. זוג, שלא נעזר בשמרטפית, צריך להרוויח יותר מ-28,000 שח כדי שהסיכוי שלו לצאת למסעדה יהיה גבוה פי 3 מהסיכוי שלו לא לצאת למסעדה.
- ז. עבור odds ratio של משתנה "שמרטפות" התקבל רווח בר סמך הבא:
 $[0.123; 1.01]$ ברמת ביטחון של 95%.
- לפיכך ניתן לומר כי למשתנה "שמרטפות" תרומה מובהקת לניבוי הסיכוי לצאת למסעדה.

(5) בשנה מסוימת הוגשו 750 בקשות לקבלת משכנתא ורק חלק מהן אושר. המשתנה התלוי $Y=1$ אם הבקשה למשכנתא אושרה ול-0 אם נדחתה. המנבאים:

S משתנה דמי השווה ל-1 אם מבקש המשכנתא הוא רווק ול-0 אחרת.
 AGE = גיל בשנים.

$$\text{המודל הנאמד הינו: } p = \frac{1}{1+e^{-z}} \text{ כאשר } p = P(Y=1).$$

$$z = \alpha + \beta_1 age + \beta_2 age^2 + \beta_3 S$$

$$\text{תוצאות אמידת המודל: } z = -9.3 + 0.52age - 0.006age^2 - 0.314S$$

א. הסבירו את השפעת הגיל והמצב המשפחתי על ההסתברות לאישור המשכנתא.

ב. מה ההסתברות שתאושר משכנתא לרווק בן 30?

ג. עבור איזה גיל ההסתברות של אדם נשוי לקבל משכנתא היא מקסימאלית?

- 6) משרד הקבלה של האוניברסיטה רצה לבדוק באיזה מידה ניתן לחזות את ההצלחה של הסטודנט בקורס בסטטיסטיקה על סמך נתונים של מבחן פסיכומטרי, ציון ממוצע של תעודת בגרות וסוג תעודת הבגרות: ריאלית או לא ריאלית.
- במדגם של 50 סטודנטים נאספו נתונים על המשתנה Y השווה ל-1 אם הסטודנט הצליח במבחן בסטטיסטיקה ו-0 אם נכשל.
- כמו כן נרשמו עבור כל סטודנט ציון הפסיכומטרי, ממוצע הבגרות וסוג הבגרות (1 - בגרות ריאלית, 0 - לא ריאלית).
- להלן התוצאות שהתקבלו:

	B	S.E.	Wald	df	Sig.
פסיכומטרי	.090	.046	3.723	1	.054
ציון בגרות		2.070	1.089	1	.297
בגרות ריאלית	4.535	2.519	3.241	1	.072
Constant	-84.892	42.858	3.923	1	.048

- באיזה שיטת ניתוח הייתם ממליצים להשתמש ומדוע?
- נתון כי ההסתברות להצליח בקורס בסטטיסטיקה עבור סטודנט שעשה בגרות הומנית, קיבל 690 בפסיכומטרי וציון 9 בבגרות הינה: 0.034. ההסתברות של סטודנט שקיבל אותו ציון בפסיכומטרי, עם בגרות הומנית אבל ציונו בבגרות הוא 10 הינה: 0.233. על סמך הנתונים הללו השלם את הערך החסר בפלט המקדמים.
- לאיזה משתנים השפעה מובהקת על הסיכוי להצליח במבחן לסטטיסטיקה? (אלפא 10%)
- מה ההסתברות של סטודנט להצליח במבחן אם קיבל 680 בפסיכומטרי, ציון 10 בבגרות ולמד במגמה ריאלית?
- מהו השינוי בסיכויים (odds) להצליח במבחן בסטטיסטיקה כפונקציה של שינוי ביחידה אחת בפסיכומטרי?
- מהי ההשפעה השולית של נקודה נוספת בציון הבגרות על הסיכוי להצליח במבחן בסטטיסטיקה עבור סטודנט שקיבל 640 בפסיכומטרי ולמד במגמה ריאלית?
- רותי שיפרה את הפסיכומטרי שלה ב-20 נקודות. בכמה יעלה הסיכוי שלה להצליח בקורס בסטטיסטיקה?
- אם החוקר היה מחליט לקודד בגרות שאינה ריאלית כ-1 ובגרות ריאלית כ-0, האם הדבר היה משפיע על ערכו של $\text{Exp}(b)$ של סוג בגרות ועל המשמעות שלו?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.73 ב. 2.7 ג. 0.96 ד. 0.24 ה. 0.11
 ו. -2.207 ז. $B = -2.207$ ח. $\text{Exp}(B) = 0.11$
- (2) א. כן. ב. 19.4% ג. 67.7% ד. רגישות = 68.8%
 ה. סגוליות = 66.7%
- ו. $\ln(odds) = -2.734 - 0.498\text{status}(1) - 0.52\text{status}(2) - 0.18\text{status}(3) + 0.93 \cdot incom$
 ז. משתנה "הכנסה"
 ח. 3 ט. 3 י. 0.3
 יא. קטנה. יב. 0.42 יג. 29,400 יד. 0.093
- (3) א. כן. ב. 69.9% ג. $\log(odds) = -19.284 + 4.445x_{1i} - 0.146x_{2i} + 2.283x_{3i}$
 ד. המשתנה – "ביצוע במהלך הקורס". ה. ראו סרטון.
 ו. מגדר - $\text{Exp}(b) = 85.19$, השכלה קודמת - $\text{Exp}(b) = 0.864$
 ז. הטענה נכונה ($p = 0.035$).
 ח. $\text{Exp}(b) = 9.81$
- (4) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון. ה. לא נכון.
 ו. נכון. ז. לא נכון.
- (5) א. ראו סרטון. ב. 0.533 ג. 40
- (6) א. רגרסיה לוגיסטית. ב. $B = 2.16$ ג. "פסיכומטרי" ו-"בגרות ריאלית".
 ד. 0.914 ה. 1.09 ו. 8.67 ז. 504% ח. ראו סרטון.

ביוסטטיסטיקה א

פרק 42 - רגרסיה - שאלות ממבחנים

תוכן העניינים

257	1. מבחן 1
261	2. מבחן 2

מבחן 1:

שאלות:

1) להלן תוצאות הרצת רגרסיה של Y בתלות ב-X עבור 10 תצפיות (חלק מהנתונים הושמטו בכוונה מהפלט, אך ניתנים לחישוב על ידך).

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 1475.6 \quad \text{נתון כי:}$$

מקור	סכום ריבועים SS
רגרסיה	SSR = 2148.6
שאריות	SSE = ?
סה"כ	SST = ?

משתנה	מקדם	טעות תקן	ערך סטטיסטי (מתוקנן)	p-value מובהקות
	b_i	S_{b_i}	t	
קבוע (חותך)	-24.7	11.3	?	?
X	1.20	?	10.5	

א. מהו SST?

i. לא ניתן לקבוע.

ii. 1994.42

iii. 2304.1

iv. 1629.78

ב. האם הרגרסיה מובהקת? בדוק לפי p value.

i. הרגרסיה מובהקת.

ii. הרגרסיה אינה מובהקת.

(2) לפניך פלט רגרסיה פשוטה (ממנו הושמטו נתונים שבאפשרותך להשלים), המתאר את ציון המבחן כפונקציה של מספר התרגילים שהגיש הסטודנט במהלך הסמסטר, ידוע כי כל הנחות המודל תקפות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.842105598
R Square	0.709141839
Adjusted R Square	0.688366256
Standard Error	5.315523758
Observations	16

ANOVA

	Df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	964.4329004	964.4329004	34.13343	4.28E-05
Residual	14	395.5670996	28.25479283		
Total	15	1360			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	50.99134199	4.318918368	11.80650747	1.15E-08
מספר התרגילים	4.086580087	0.699471573	5.842381939	4.28E-05

א. ע"פ הנתונים, אחוז השונות של ציוני המבחן המוסברת ע"י מספר התרגילים שהגיש הסטודנט, היא _____. אם נוסף משתנים נוספים, אחוז השונות המוסברת _____, ו-Adjusted R _____.

i. 84%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.

ii. 84%, יקטן, יגדל.

iii. 70.9%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.

iv. 70.9%, יגדל, יקטן.

v. 68.8%, יגדל, יגדל.

vi. 68.8%, יקטן, יקטן.

ב. מהו הרב"ס של שיפוע הרגרסיה β_1 ? (בר"מ של 1%).

i. $2.58 < \beta < 5.58$

ii. $2 < \beta < 6.17$

iii. $1.74 < \beta < 6.88$

iv. $2.86 < \beta < 5.3$

במטרה לנבא בצורה טובה יותר את הצלחת הסטודנטים בבחינה, החליט החוקר להוסיף 2 משתנים נוספים לניתוח הרגרסיה. מספר השיעורים בהם נכח הסטודנט, ומספר השעות שלמד לבחינה. לפניכם הפלט החסר:

SUMMARY OUTPUT				
Regression Statistics				
Multiple R	0.880163577			
R Square	0.774687922			
Adjusted R Square	0.718359902			
Standard Error	5.053253294			
Observations	16			
ANOVA				
	df	SS	MS	F
Regression	3	?	351.1918579	13.75315
Residual	12	306.4244263	25.53536886	
Total	15	?		

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	37.08959571	8.726136945	4.250402663	0.001127
מספר השיעורים	2.610000755	1.429904588	1.82529714	0.092932
מספר התרגילים	3.198068014	1.239162836	2.58082951	0.024061
שעות לימוד לבחינה	-0.108373802	1.021202927	-0.106123669	0.917238

ג. בדוק את ההשערה כי הרגרסיה מובהקת לכל אחד מהמשתנים המסבירים בר"מ של 1%.

- i. הרגרסיה אינה מובהקת לכל המשתנים שנבדקו.
- ii. לא ניתן לקבוע מהנתונים האם הרגרסיה מובהקת.
- iii. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים, אך אינה מובהקת למשתנים מספר השיעורים ומספר שעות הלימוד לבחינה.
- iv. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים ומספר השיעורים, אך אינה מובהקת למשתנה שעות הלימוד לבחינה.

ד. מהו SSR של הרגרסיה המרובה?

- i. $SSR = 964.4$
- ii. $SSR = 1053.57$
- iii. $SSR = 694.57$
- iv. $SSR = 853.57$
- v. לא ניתן לחשב את SSR מהנתונים שהתקבלו.

תשובות סופיות:

- (1) א. iii. ב. i.
- (2) א. iii. ב. ii. ג. i. ד. ii.

מבחן 2:

שאלות:

- 1) הועלתה השערה שהוצאות האחזקה של מערכת לעיבוד נתונים קשורות למספר שעות השימוש השבועיות במערכת. להלן תוצאות חלקיות של פלט EXCEL של ניתוח רגרסיה בין Y הוצאות אחזקה שנתיות (במאות \$) ו-X מספר שעות השימוש השבועיות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics					
Multiple R					
R Square					
Adjusted R Square					
Standard Error					
Observations 10					
ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression		860.051			0.00012
Residual					
Total		1004.525			
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	
Intercept	10.528	3.745		0.023	
שעות שימוש	0.953		6.901		

א. לאור התוצאות ה-p-value בבדיקת ההשערה: $H_0: \beta_1 \leq 0.5$.
 $H_1: \beta_1 > 0.5$

- i. $P_v < 0.005$
- ii. $0.005 < P_v < 0.01$
- iii. $0.01 < p_v < 0.025$
- iv. $0.025 < p_v < 0.05$
- v. $P_v > 0.05$

ב. אם היינו מריצים רגרסיה בה Y מספר שעות השימוש השבועיות ואילו המשתנה המסביר X , הוצאות אחזקה שנתיות (במאות \$), אזי השיפוע של קו הרגרסיה יהיה:

- i. 0.953
- ii. 1.049
- iii. 10.528
- iv. 0.095
- v. 0.898

2) הועלתה השערה שמספר התקלות ברכב Y קשורה לגיל הנהג X . לשם כך נלקח מדגם של 10 נהגים.

כמו כן חושבו הסכומים הבאים:

$$\sum X_i^2 = 14,227, \sum X_i = 363, \sum Y_i = 13, \sum Y_i^2 = 29, \sum X_i Y_i = 366$$

$$\hat{Y} = 4.96 - 0.1X_i \quad \text{על ידי:}$$

א. ערכו של מקדם המתאם הליניארי בין מספר התקלות לבין גיל הנהג הוא:

- i. -10.59
- ii. -0.9395
- iii. 0.8826
- iv. -0.1

החוקר לא היה מרוצה מעוצמת הקשר ולכן החליט להוסיף לרגרסיה את המשתנים הבאים: מספר הק"מ שהמכונית נסעה (באלפי ק"מ) וסוג הרכב. במדגם נכללו 2 סוגי רכבים: A ו-B כאשר סוג B קודד כערך 0 וסוג רכב A קודד כערך 1. להלן פלט הרגרסיה המרובה. שימו לב כי חלק מהערכים בפלט חסרים:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	
R Square	
Adjusted R Square	
Standard Error	0.204047
Observations	10

ANOVA				
	df	SS	MS	F
Regression	3			0.00002
Residual	6	0.249811		
Total	9			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.407943	0.71094		
X1 גיל הנהג	-0.03094	0.014611		
X2 סוג הרכב	0.239574	0.152994		
X3 ק"מ באלפים	0.027666	0.005329		

- ב. להלן מספר טענות לגבי מובהקות הרגרסיה ומובהקות המשתנה סוג הרכב ברמת מובהקות 0.1 :
- הרגרסיה מובהקת והמשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב אינו מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה אינה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה והמשתנה סוג הרכב אינם מובהקים ברמת מובהקות 0.1.
- ג. SST בפלט הרגרסיה המרובה שווה ל :
- 12.1
 - 16.0
 - 20.0
 - אין מספיק נתונים לחשב.
- ד. לאור התוצאות, רב"ס למקדם המשתנה מספר הקילומטרים, בר"מ 5% :
- (0.015, 0.04)
 - (0.017, 0.038)
 - (0.02, 0.035)
 - אין מספיק נתונים לחשב.

ה. אם היינו מקודדים את סוג רכב B כערך 1 וסוג רכב A קודד בערך 0 משוואת הרגרסיה הייתה:

i. נשאר ללא שינוי.

$$\hat{Y} = 1.4079 - 0.0309X_{1i} - 0.2395X_{2i} + 0.0276X_{3i} \quad \text{ii.}$$

$$\hat{Y} = 1.6475 - 0.0309X_{1i} - 0.2395X_{2i} + 0.0276X_{3i} \quad \text{iii.}$$

iv. לא ניתן לדעת ללא הרצה מחדש.

ו. החוקר רצה להוסיף משתנה מסביר נוסף X_4 מספר השנים שחלפו מאז קבלת רישיון הנהיגה. להלן פלט הרגרסיה (חלק מהנתונים חסרים) עם 4 המשתנים המסבירים:

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.5	0.71		
X1 גיל הנהג	5.1	14.1		
X2 סוג הרכב	0.25	0.2		
X3 ק"מ באלפים	0.02	0.008		
מס' השנים שחלפו מאז	-5.13094			
X4 קבלת רישיון		0.8		

על סמך נתונים אלו:

- חשש סביר למולטיקוליניאריות.
- התחזית הנקודתית של מספר התקלות תהיה דומה לזו של הרגרסיה (הקודמת) עם 3 המשתנים המסבירים.
- קיימת קורלציה גבוהה בין חלק מהמשתנים המסבירים.
- כל התשובות נכונות.

3 במפעל מסוים הורץ מודל של רגרסיה ליניארית פשוטה על 8 עובדים כאשר Y תפוקת העובד ו- X גיל העובד. נמצא שהחלק המוסבר על ידי הרגרסיה הוא 74. הטעויות שהתקבלו מופיעות בחלקן בטבלה שלהלן:

e_8	e_7	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1
0	2	-2	2	?	2	-3	0

אחת מהטענות שלהלן נכונה:

- מקדם ההסבר בין X ל- Y הוא 0.74.
- לא ניתן לחשב את מקדם המתאם המרובה.
- $SSR = 18$.
- $SSE = 74$.
- אף אחת מהטענות איננה נכונה.

תשובות סופיות:

- (1) א. ii. ב. v.
(2) א. ii. ב. i. ג. i. ד. i. ה. ii. ו. iv.
(3) א'.