

אקונומטריקה ב



תוכן העניינים

1.	מבחן ML	1
2.	בעיות ספציפיקציה	5
3.	תיאוריה מולטיקוליניאריות	6
4.	סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות	9
5.	משתנה דמי	14
6.	תיאוריה הפרת ההנחות קלאסיות	31
7.	הטרוסקדסטיות	32
8.	מתאם סדרתי	40
9.	סיכום מתאם סדרתי והטרוסקדסטיות	51
10.	מודלים דינאמיים	52
11.	רגרסיה לוגיסטית	58
12.	משוואות סימולטניות	68
13.	סיכום תכונות ארפ	84
14.	הדרכה בקריאת פלטים רלוונטיים בתוכנת LTRG	85
15.	מבחן לדוגמה - אריאל	94
16.	מבחן לדוגמה - המכללה למנהל	100

אקונומטריקה ב

פרק 1 - מבחן LM

תוכן העניינים

1. כללי 1

מבחן LM:

רקע:

במבחן כופלי לגרנג' (LM) אנו בודקים האם משתנה או משתנים מסבירים מסוימים רלוונטיים למודל.

לדוגמא:

נניח שיש לנו מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$$

לגבי השניים הראשונים אנו בטוחים כי הם רלוונטיים וחייבים להופיע במודל. לגבי השניים האחרונים אנחנו לא בטוחים.

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$H_1 : \text{OTHERWISE}$$

השערות:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} : \text{(RESTRICTED)}$$

במבחן LM אומדים את המודל המוגבל ומקבלים עבור כל תצפית את הסטייה מקו

$$Y_t - \hat{Y}_t = \hat{u}_t : \text{הרגרסיה}$$

כעת אומדים את רגרסיית העזר שבה מנסים לנבא את הסטייה מקו הרגרסיה עבור

$$\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + \delta_2 x_{2t} + \delta_3 x_{3t} + \delta_4 x_{4t} + \omega_t$$

$$\text{חישוב הסטטיסטי: } (R^2 \text{ של רגרסיית העזר} * \text{מספר התצפיות}) \cdot T = LM_{stat} = R^2$$

$$\text{כלל הכרעה: אם } LM_{stat} > \chi_m^2 \text{ נדחה את } H_0 \text{ (מס' ההגבלות ב- } H_0 \text{).}$$

• שימו לב כי:

עבור המשתנים הנוספים למודל – כל המדדים (הבטות, ערכי t ו- P value) ברגרסיית העזר שווים לאלו של הרגרסיה הלא מוגבלת.
עבור המשתנים הקיימים במודל – המדדים אינם שווים בין שתי הרגרסיות.

שאלות:

(1) נניח מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$$

UNRESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	-----	646169.84	-----	-----	0.0000
Error	-----	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	-----	R-square	-----
Dep Mean	----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X1	1	0.975726	0.042711	22.84485	0.0000
X2	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

RESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	-----	646001.81			
Error	-----	788.2			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	-----	R-square	-----
Dep Mean	-----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	7.067731	0.656604	10.76406	0.0000
X1	1	26.36455	0.756627	34.84485	0.0000
X2	1	29.58626	0.076993	384.2721	0.0000

רגרסיית עזר

Dependent variable :RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	-----	646169.84	-----	-----	0.0000
Error	-----	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	-----	R-square	0.213
Dep Mean	-----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter	Standard	T for H0:	
		Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	5.9608892	0.776604	7.675584	0.0000
X1	1	1.2077723	0.978845	1.233875	0.8455
X2	1	0.4840697	0.886754	0.545889	0.9976
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

א. בדוק את הטענה כי לפחות אחד מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל בשתי דרכים.

ב. איזה מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל?

ג. הסבירו את הקשרים בין שלוש המשוואות: U , R ועזר ואת הקשר בין מבחן WALD ומבחן LM.

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\beta}_3 x_{3t} + \hat{\beta}_4 x_{4t} + \hat{v}_t : U$$

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{1t} + \hat{\alpha}_2 x_{2t} + \hat{u}_t : R$$

$$\hat{u}_t = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1t} + \hat{\delta}_2 x_{2t} + \hat{\delta}_3 x_{3t} + \hat{\delta}_4 x_{4t} + \hat{w}_t : \text{עזר}$$

ד. שחזרו בעזרת שתי המשוואות הראשונות (R ו- U) את LM_{stat} .

ה. שחזרו בעזרת המשוואה האחרונה (רגרסיית העזר) את $WALD_{stat}$.

תשובות סופיות:

1) א. מבחן LM ומבחן WALD, יש עדות לכך.

ב. $pt_{\hat{\beta}_3} = pt_{\hat{\beta}_4} = 0.00$

ג. i. $U=R+\text{עזר}$

ii. $ESS_U = ESS_y$

iii. $ESS_R = TSS_y$

iv. $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{ESS_U}{ESS_R} = \frac{ESS_R - ESS_U}{ESS_R}$

ד. $LM_{stat} = 43.489$

ה. $WALD_{stat} = 26.962$

אקונומטריקה ב

פרק 2 - בעיות ספציפיקציה

תוכן העניינים

1. תיאוריה 5

בעיות ספציפיקציה:

רקע:

טעויות ספציפיקציה הן טעויות בניסוח משוואת הרגרסיה.

1. הוספת משתנה לא רלוונטי:

$$\text{למשל, המודל האמיתי: } Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$$

$$\text{המודל הנאמד (הטעות): } Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \varepsilon$$

אם נקבל את H_0 במבחן t למובהקות β_3 נסיק כי המשתנה איננו רלוונטי ונאמוד את המודל מחדש הפעם ללא המשתנה השלישי. אולם, גם אם לא נוכל לאמוד מחדש, הימצאותו של משתנה שאיננו רלוונטי במודל הרגרסיה איננה פוגמת ברלוונטיות של המשתנים האחרים במודל ולא בתכונות החיוניות למבחני המובהקות שלהם.

2. השמטת משתנה רלוונטי:

$$\text{למשל, המודל האמיתי: } Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$$

$$\text{המודל הנאמד (הטעות): } Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$$

בהיעדר x_2 , בדיקות ההשערות לפרמטרים של המודל הטעותי אינן תקפות:

אומד לשונות הפרמטרים	אומד ל- α	אומד ל- β_1	
מוטה (כלפי מעלה)	מוטה אלא אם: $\bar{x}_2 = 0$	חסר הטיה	$S_{12} = 0$
	מוטה	מוטה <u>כיוון ההטיה:</u> חיובי: S_{12} ו- β_2 שווי סימן שלילי: S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן	$S_{12} \neq 0$

אקונומטריקה ב

פרק 3 - תיאוריה מולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

1. כללי 6

מולטיקוליניאריות:

רקע:

מולטיקוליניאריות היא תופעה סטטיסטית בעייתית המתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל.

נבחין בין מולטיקוליניאריות מלאה לחלקית.

מולטיקוליניאריות מלאה:

מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.

הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של

המשתנה המסביר השני: $x_1 = a + bx_2$ (x_1 הוא קומבינציה ליניארית מלאה של x_2)

מכאן ש: $r_{12} = 1$.

- שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת

(למשל: $x_1 = x_2^2$), אז בהכרח: $r_{12} \neq 1$.

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני. מדוע זה בעייתי?

כיוון שלא ניתן לאמוד את המודל שכן אר"פ אינם מוגדרים.

פתרון: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

מולטיקוליניאריות חלקית:

כאשר יש מתאם גבוה מאוד בין משתנים מסבירים במודל (אך לא מושלם) עלולה להיווצר בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית.

מכיוון שיש מתאם גבוה בין המשתנים הב"ת לא נוכל לבדוד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני המשתנה התלוי.

כל אחד מהמשתנים הב"ת "יגזול" מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב"ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב"ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב"ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

זיהוי מולטיקוליניאריות חלקית :

1. כאשר קיימת סתירה בין התוצאה במבחן F למובהקות המודל (המודל מובהק) לבין מבחני t למובהקות השיפועים (אף אחד מן השיפועים אינו מובהק).

הסתירה נוצרת כתוצאה מהגדלת השונות של כל אחד מהשיפועים בשל המתאם הגבוה בין ה"ב", באופן שלא מאפשר לדחות את השערת האפס

$$\text{למובהקות השיפועים: } t = \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}}, \quad S_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{MSE}{SSX_1(1-r_{12})}$$

2. רגישות לספציפיקציה – הורדת משתנה ב"ת שאיננו מובהק תהפוך משתנים ב"ת אחרים במודל למובהקים. אם אין בעיה של מולטיקוליניאריות, הורדת משתנים ב"ת שאינם רלוונטיים מהמודל, לא אמורה להשפיע על מובהקותם של המשתנים הב"ת האחרים.

3. סימנים הפוכים – כאשר השיפועים של המשתנים הב"ת מקבלים סימנים הפוכים מכיוון ההשפעה שלהם על המשתנה התלוי. אם למשל, x_1 משפיע חיובית על Y ואילו x_2 משפיע שלילית על Y אבל הם יופיעו במשוואת הרגרסיה עם סימנים הפוכים ($\hat{\beta}_1$ שלילית ואילו $\hat{\beta}_2$ חיובית), יש לחשוד שקיימת בעיה.

השלכות של מולטיקוליניאריות חלקית :

מולטיקוליניאריות חלקית איננה פוגעת בתכונות של אר"פ (הם נותרים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים) ולא באומד השונות של האומדים (שנותר חסר הטיה) כך שבדיקת השערות תוך שימוש באומדים הללו תהיה תקפה (זאת בניגוד למולטיקוליניאריות מלאה).
במובן הזה, בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית דומה לבעיה של הוספת משתנה ב"ת שאיננו רלוונטי.

פתרונות למולטיקוליניאריות חלקית :

1. ברוב המקרים נשקול להוריד את אחד המשתנים.
יחד עם זאת, כאשר המובהקות של המשתנים היא גבולית: $1 < t_{\hat{\beta}} < 2$, יתכן ונותר את שניהם בתוך המודל כיוון שבסך הכל יש עליה ב- $AdjR^2$ (לפי חוק חיטובסקי).
2. ניתן לעיתים לאחד את שני המשתנים למשתנה אחד.

שלבי בדירת ההשערות :

1. מבצעים מבחן F לבדיקת מובהקות המודל.
2. במידה והמודל מובהק, מבצעים מבחן t למובהקות כל אחד מהשיפועים.
3. ביצוע מבחן WALD לבדיקת כל השיפועים שלא יצאו מובהקים :
 - א. אם מקבלים את H_0 : אין סתירה בין מבחן WALD למבחני t - אין בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, נוריד את קבוצת המשתנים הלא רלוונטיים מהמודל.
 - ב. אם דוחים את H_0 : יש סתירה בין מבחן WALD למבחני t - קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, יש להוריד מן המודל כל פעם משתנה אחד ולבצע מבחן WALD בלעדיו, עד שמזהים את המשתנה / משתנים שיש להוריד מהמודל.

אקונומטריקה ב

פרק 4 - סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

1. כללי 9

סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות:

רקע:

הבעיה	הגדרה	זיהוי	השלכות	פתרון												
הוספת משתנה לא רלוונטי	המודל האמיתי : $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$ המודל הנאמד (הטעות) : $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$	קבלת H_0 במבחן t למובהקות β_2	ניתן לבצע בדיקת השערות אר"פ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ חסרי הטיה אומדי השונות $(S_{\hat{\alpha}}^2, S_{\hat{\beta}_1}^2, S_{\hat{\beta}_2}^2)$ חסרי הטיה	הורדת* המשתנה												
השמטת משתנה רלוונטי	המודל האמיתי : $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$ המודל הנאמד (הטעות) : $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$	דחיית H_0 במבחן t למובהקות β_2	<table><tr><th>בהיעדר : x_2</th><th>אומד ל- β_1</th><th>אומד ל- α</th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr><tr><td>$S_{12} = 0$</td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה אלא אם : $\bar{x}_2 = 0$</td><td>מוטה חיובית</td></tr><tr><td>$S_{12} \neq 0$</td><td>מוטה חיובית : S_{12} ו- β_2 שויי סימן מוטה שלילית : S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td><td>מוטה חיובית</td></tr></table> לא ניתן לבצע בדיקת השערות	בהיעדר : x_2	אומד ל- β_1	אומד ל- α	אומד לשונות הפרמטרים	$S_{12} = 0$	חסר הטיה	מוטה אלא אם : $\bar{x}_2 = 0$	מוטה חיובית	$S_{12} \neq 0$	מוטה חיובית : S_{12} ו- β_2 שויי סימן מוטה שלילית : S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן	מוטה	מוטה חיובית	הוספת המשתנה
בהיעדר : x_2	אומד ל- β_1	אומד ל- α	אומד לשונות הפרמטרים													
$S_{12} = 0$	חסר הטיה	מוטה אלא אם : $\bar{x}_2 = 0$	מוטה חיובית													
$S_{12} \neq 0$	מוטה חיובית : S_{12} ו- β_2 שויי סימן מוטה שלילית : S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן	מוטה	מוטה חיובית													
מולטיקוליניאריות מלאה	מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$ כאשר : $r_{12} = \pm 1$	אם : $x_1 = a + bx_2$ אז : $r_{12} = 1$	לא ניתן לבצע בדיקת השערות אר"פ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ בלתי מוגדרים.	הורדת אחד המשתנים												
מולטיקוליניאריות חלקית	מתאם חזק בין המשתנים המסבירים במודל $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$ כאשר : $0.7 < r_{12} < 1$	א. סתירה בין מבחן F ל- t ב. רגישות לספציפיקציה ג. סימנים הפוכים	ניתן לבצע בדיקת השערות אין פגיעה בתכונות אר"פ ושונותם	הורדת** אחד המשתנים או איחודם												

- * במידה והמובהקות גבולית ($1 < t_{\hat{\beta}} < 2$) נשקול להשאיר משתנה לא רלוונטי כי מעלה את $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).
- ** במידה ומובהקותם גבולית ($1 < t_{\hat{\beta}} < 2$) נשקול להשאיר את שניהם בשל העלייה ב- $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).

שאלות:

(1) להלן מודל של שכר W_t , כפונקציה של שנות לימוד S_t :

$$1. W_t = \alpha + \beta \cdot S_t + u_t$$

להלן מודל של שכר W_t , כפונקציה של שנות לימוד S_t ושל גיל A_t :

$$2. W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + v_t$$

כל האומדים חיוביים ומובהקים וקיים קשר שלילי בין גיל להשכלה.

א. $\hat{\beta}_1$ במשוואה (1) הוא:

i. אומד חסר הטיה.

ii. אומד מוטה שלילית.

iii. אומד מוטה חיובית.

iv. אומד מוטה, אך לא ניתן לדעת את כיוון ההטיה.

ב. ניתן להשתמש במבחן t לבדיקת מובהקות

השיפוע במשוואה (1). נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ג. בנוסף למשתנים במשוואה השנייה, החליט החוקר להוסיף גם את

משתנה הוותק, EXP_t . מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט

החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים

(מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 3:

$$3. W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + \beta_3 \cdot EXP_t + w_t$$

חוזה דעתך על המשוואה השלישית.

(2) נתונות ארבע משוואות הרגרסיה הבאות (כאשר הסטיות במודל האמיתי

מקיימות את הנחות הרגרסיה הקלאסיות):

$$1. X_{2t} = \lambda + \delta \cdot X_{1t} + V_t \quad \text{כאשר התקבל: } \sum \hat{V}_t^2 = \sum (X_{2t} - \bar{X}_{2t})^2$$

$$2. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t \quad (10.3) \quad (19.8)$$

$$3. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + W_t \quad (9.9) \quad (17.3) \quad (0.37)$$

$$4. Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \sum_t \quad (6.3)$$

(המספרים בסוגריים הם ערכי t של אומדני המקדמים).

לגבי הטענות הבאות, קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא, והסבירו:

א. האומד של β_1 במשוואה (2) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.

ב. האומד של β_1 במשוואה (3) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.

- ג. האומד של β_1 במשוואה (4) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.
- ד. האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה ל- $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2).
- ה. השונות התיאורטית של האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה לשונות התיאורטית של $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2), אך אומדני השונות שונים.
- ו. האומד ל- α במשוואה (4) הינו חסר הטיה.
- ז. האומד ל- α במשוואה (3) הינו חסר הטיה.
- ח. R^2 של משוואה (2) גדול מ- R^2 של משוואה (3).
- ט. $\bar{R}^2$ של משוואה (2) גדול מ- $\bar{R}^2$ של משוואה (3).

$$(3) \quad Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t$$

חו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

$$R^2 = 0.92 \quad Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t \quad (0.5) \quad (0.3)$$

- הערכים בסוגריים הם ערכי t .
למובהקות הבטות יש טעות במודל
כי המודל מובהק והמקדמים לא :
א. בהנחה כי מתקיים : $X_{1t} - 2X_{2t} = 1$ לא ניתן לאמוד
ב. את המודל בשיטת הריבועים הפחותים :
ג. בהנחה כי מתקיים : $X_{1t} = X_{2t}^2$ לא ניתן לאמוד
ד. את המודל בשיטת הריבועים הפחותים :
ה. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב'.
ה. בהנחה כי מתקיים : $r_{12} = 0.98$
i. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים :
ii. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.
iii. בהנחה שהמודל יצא מובהק אולם הבטות אינן מובהקות וערכי t למובהקות הבטות הן כדלקמן : $t_{\hat{\beta}_1} = 1.31$, $t_{\hat{\beta}_2} = 1.45$, מה יהיה הפתרון הטוב ביותר, לדעתכם, לבעיה במודל (אליה התייחסתם בסעיף ii)?
1. להוריד את x_1 .
2. להוריד את x_2 .
3. להוריד את שני המשתנים.
4. להותיר את שני המשתנים.

תשובות סופיות:

- (1) א. ii. ב. לא נכון. ג. קיימת בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.
 (2) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון.
 (3) א. לא נכון. ב. נכון. ג. לא נכון. ד. הוכחה. ה. i. לא נכון.
 ii. מולטיקוליניאריות חלקית. iii. 4.

אקונומטריקה ב

פרק 5 - משתנה דמי

תוכן העניינים

1. כללי 14

משתנה דמי:

רקע:

הכנסת משתנים ב"ת איכותיים למודל הרגרסיה.

למשל, נתונה משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$.

W_t = השכר (התלוי).

S_t = שנות לימוד (הב"ת) שניהם כמותיים.

נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר (משתנה איכותי) משפיע על השכר.

כדי להכניסו למשוואת הרגרסיה יש להגדיר משתני דמי (dummy variable):

נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב"אישה" ואת הערך 1 אם מדובר ב"גבר". ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

1. משתנה דמי לחותך – המגדר משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
2. משתנה דמי לשיפוע – המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.
3. משתנה דמי לכל הפונקציה – המגדר משפיע גם על החותך וגם על השיפוע.

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.

שכר ההתחלתי של אישה: α_0 .

שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0: \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$.

החותך מייצג כאן את השכר הממוצע עבור כל קטגוריה:

שכר הממוצע של אישה: α_0 .

שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t : $H_0: \alpha_1 = 0$ (מבחן זה למבחן t להבדל בין ממוצעים).

משתנה דמי לשיפוע:

- המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.
 השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.
 אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0 .
 אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
 הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).
 בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0: \beta_1 = 0$.
 • החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

- המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.
 המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.
 השכר ההתחלתי של אישה: α_0 .
 השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
 הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).
 אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0 .
 אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
 הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
 באמצעות מבחן WALT יש לבדוק: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$.
 לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1 .
 אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים
 בנפרד: $H_0: \alpha_1 = 0$ ו- $H_0: \beta_1 = 0$.
2. מבחן CHOW:
 דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
 חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
 מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
 עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
 נשים: $W_t = \alpha_f + \beta_f X_t + u_t$.
 גברים: $W_t = \alpha_m + \beta_m X_t + u_t$.
 השערות: $H_0: \alpha_f = \alpha_m; \beta_f = \beta_m$.

לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALT) :
המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכול להיות
המדגם המאוחד : $W_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם :
 $ESS_U = ESS_f + ESS_m$
 $DF_U = DF_f + DF_m$

$$CHOW_{stat} = \frac{\frac{ESS_R - (ESS_f + ESS_m)}{DF_R - (DF_f + DF_m)}}{\frac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = WALT_{stat}$$

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה :

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי גרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

סיכום ביניים :

משתנה דמי לכל הפונקציה	משתנה דמי לשיפוע	משתנה דמי לחותך	
$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot X_t + u_t$	המודל
קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחיתוך ושיפוע).	קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל-Y בגין X (בשיפוע).	קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחיתוך).	ההשערה במילים
מבחן WALT להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים) : $H_0 : \alpha_1 = \beta_1 = 0$ **ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW. אם דוחים את H_0 יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב-WALT) : $H_0 : \alpha_1 = 0$ $H_0 : \beta_1 = 0$	מבחן t להפרש השיפועים : $H_0 : \beta_1 = 0$	מבחן t להפרש החותכים : $H_0 : \alpha_1 = 0$	בדיקת ההשערה

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים:

כאשר המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.

D_2 יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.

D_3 יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס. נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

$$V_t = \text{מדד מחירי הירקות.}$$

$$p_t = \text{מדד המחירים לצרכן.}$$

1. משתני דמי לחותך:

הטענה: יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות.

$$\text{המודל: } V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$$

כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות

ב- β . למחיר זה יתווסף α_0 בחורף, $\alpha_0 + \alpha_1$ באביב, $\alpha_0 + \alpha_2$ בקיץ ו- $\alpha_0 + \alpha_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי: α_0 - החותך בקטגוריה שהושמטה, $\alpha_0 + \alpha_1$ - החותך בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

השערות:

$$H_1: \text{OTHERWISE}$$

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

$$(U) \quad V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$$

$$(R) \quad V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$$

- שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t :

1. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף:
 $H_0: \alpha_1 = 0$

2. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף:
 $H_0: \alpha_2 = 0$

3. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף:
 $H_0: \alpha_3 = 0$

2. משתני דמי לשיפוע:
 הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן. המודל: $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1t} P_t) + \beta_2 (D_{2t} P_t) + \beta_3 (D_{3t} P_t) + u_t$. המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב: β_0 בחורף, $\beta_0 + \beta_1$ באביב, $\beta_0 + \beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0 + \beta_3$ בסתיו. ניתן לראות כי- β_0 : השיפוע בקטגוריה שהושמטה $\beta_0 + \beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

השערות:

$$H_1: \text{OTHERWISE}$$

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

$$V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1t} P_t) + \beta_2 (D_{2t} P_t) + \beta_3 (D_{3t} P_t) + u_t \quad (U)$$

$$V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t \quad (R)$$

- שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t .

3. משתני דמי לכל הפונקציה :

הטענה : יש הבדל בין עונות השנה בפונקציית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.
המודל :

$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1t} P_t) + \beta_2 (D_{2t} P_t) + \beta_3 (D_{3t} P_t) + u_t$$

בדיקת השערות :

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

המבחן הסטטיסטי - מבחן Wald :

(U) :

$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1t} P_t) + \beta_2 (D_{2t} P_t) + \beta_3 (D_{3t} P_t) + u_t$$

$$V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t \quad (R)$$

אם דוחים את H_0 , יש לבדוק במבחני Wald האם ההבדל הוא בין החותכים

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0, H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

אם דוחים את H_0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t :

$$H_0 : \beta_j = 0, H_0 : \alpha_j = 0$$

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים :

לדוגמא – שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקציית השכר :

מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).

נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).

נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).

נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי

גם בשנות לימוד (S_t) .

1. הבדל בחותך ללא אינטראקציה :

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$$

המודל זה – אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד :

$$1. \text{ הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים : } H_0 : \alpha_1 = 0$$

$$2. \text{ הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים : } H_0 : \alpha_2 = 0$$

2. הבדל בחותך עם אינטראקציה :

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$$

המודל : $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$.
 במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
 במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי :

$$H_0 : \alpha_3 = 0$$

3. דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה :

הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא :

D_1 יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת.

D_2 יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת.

D_3 יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת.

הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

$$W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$$

נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה :

הפרש	אישה	גבר	
$\gamma_1 - \gamma_3$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_0 + \gamma_1$	לבן
γ_2	γ_0	$\gamma_0 + \gamma_2$	שחור
	γ_3	$\gamma_1 - \gamma_2$	הפרש

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה : $H_0 : \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ או $H_0 : \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך

$$WALD = t^2$$

הקודמת :

$$PF = Pt$$

שאלות:**משתנה דמי לחותך:**

(1) על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:

$$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t$$

$$(S.E) \quad (134) \quad (56) \quad (24)$$

המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?

ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?

ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסייה?

ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ-500 ₪ מזה של נשים.

ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

(2) על אותו המדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת ביקש החוקר לבדוק

האם יש הבדל בשכר הממוצע בין גברים לנשים.

$$W_t = 5200 + 1120 \cdot D$$

$$S_{\hat{\alpha}_1} = 63$$

בדקו האם קיים הבדל מובהק בשכר הממוצע בין נשים וגברים?

משתנה דמי לשיפוע:

(3) על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים

לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד.

תוצאות האמידה נתונות להלן:

$$W_t = 5000 + 110 \cdot S_t + 120 \cdot D \cdot S_t + u_t$$

$$(68) \quad (23) \quad (25)$$

בדוק את ההשערה.

משתנה דמי לכל פונקציה:

(4) חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס' תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה. החוקר בדק האם הפונקציה של מס' התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אמד החוקר את ארבע המשוואות הבאות:

$$1. \quad NUM_t = \gamma_1 + \delta_1 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{1t} \quad \text{כבישים מהירים בלבד.}$$

$$2. \quad NUM_t = \gamma_2 + \delta_2 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{2t} \quad \text{כבישים לא מהירים בלבד.}$$

$$3. \quad NUM_t = \gamma_3 + \delta_3 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{3t} \quad \text{שני סוגי הכביש (כל המדגם).}$$

$$4. \quad NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_2 \cdot AVGD_t + \beta_3 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t + U_t$$

כאשר:

NUM_t - מס' תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה.

$AVGD_t$ - נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים.

$TYPE_t$ - משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר, ו-0 כאשר הכביש לא מהיר.

תוצאות אמידת המשוואות מופיעות בהמשך השאלה.

א. בדקו את טענת החוקר בשתי דרכים שונות. ציינו איזה מן המשוואות רלוונטיות עבור כל דרך.

ב. חשבו את הערכים המספריים עבור אומדני משוואה (4).

ג. מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על ארבעת מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא-מהירות.

ד. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה (במונחי משוואה (4))?

ה. מהי הרגרסיה "תחת" H_0 למבחן WALT?

משוואה (1) - כבישים מהירים בלבד:

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read 344

Number of Observations Used 344

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	4700.81174	4700.81174	89.12	<.0001
Error	342	18039	52.74684		
Corrected Total	343	22740			

Root MSE	7.26270	R-Square	0.2067
Dependent Mean	5.10465	Adj R-Sq	0.2044
Coeff Var	142.27617		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	1.55289	0.54303	2.86	0.0045
avgd	1	0.02098	0.00222	9.44	<.0001

משוואה (2) - כבישים לא מהירים בלבד:

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read 410

Number of Observations Used 410

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of	Mean	F Value	Pr > F
		Squares	Square		
Model	1	971.99073	971.99073	145.83	<.0001
Error	408	2719.34830	6.66507		
Corrected Total	409	3691.33902			
Root MSE					
			2.58168	R-Square	0.2633
Dependent Mean					
			1.38780	Adj R-Sq	0.2615
Coeff Var					
			186.02612		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter	Standard	t Value	Pr > t
		Estimate	Error		
Intercept	1	0.14978	0.16360	0.92	0.3605
avgd	1	0.02877	0.00238	12.08	<.0001

משוואה (3) - שני סוגי הכביש (כל המדגם):

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read 754

Number of Observations Used 754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	8052.00804	8052.00804	288.84	<.0001
Error	752	20964	27.87730		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE 5.27990 R-Square 0.2775

Dependent Mean 3.08355 Adj R-Sq 0.2765

Coeff Var 171.22758

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	0.73903	0.23665	3.12	0.0019
avgd	1	0.02330	0.00137	17.00	<.0001

משוואה (4):

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read 754

Number of Observations Used 754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	8256.966	2752.322	99.44	<.0001
Error	750	20759	27.678		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.26102	R-Square	0.2846
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2817
Coeff Var	170.61553		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	0.14978	0.33340	0.45	0.6534
type	1				0.0067
avgd	1				<.0001
avgdtype	1				0.1283

משתנה איכותי עם יותר משתי קטגוריות:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.
 i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
 ii. פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.
- ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ + אביב, חורף + סתיו.
 i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
 ii. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.

משתנה דמי עבור שני משתנים איכותיים:

(6) חוקר בדק השפעות של השכלה, גזע (שחור, לבן) וניסיון (EXP) על לוג השכר ($\ln(Y)$) במדגם בן 306 תצפיות:

$$\ln(Y)_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 EXP_t + \beta_2 EXP_t^2 + u_t$$

$\ln(Y)$ - לוג השכר.

EXP - שנות ניסיון.

D_1 - מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת).

D_2 - מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה נמוכה (ו-0 אחרת).

D_3 - מקבל את הערך 1 עבור לבנים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת).

תוצאות אמידת משוואת הרגרסיה מוצגות בפרט להלן:

Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	-----	-----	-----	-----
Error	300	140	-----		
Corrected Total	305	210			
Root MSE		-----	R-Square	-----	
Dependent Mean		-----	Adj R-Sq	-----	
Coeff Var		-----			

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter	Standard	t Value	Pr > t
		Estimate	Error		
Intercept	1	-----	-----	60.84	0.00
D1	1	-----	-----	-3.20	0.00
D2	1	-----	-----	-5.56	0.00
D3	1	-----	-----	7.23	0.00
EXP	1	-----	-----	8.11	0.00
EXP ²	1	-----	-----	-7.45	0.00

- א. לפי המשוואה הניסיון זהה עבור שחורים ולבנים :
- ב. בדוק את הטענה כי בקרב אנשים בעלי השכלה נמוכה אין השפעה לגזע.
- ג. בדוק את הטענה כי אין השפעות השכלה בקרב לבנים.
- ד. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה כי אין אינטראקציה בין גזע להשכלה?
- ה. לבדיקת ההשערה של הסעיף הקודם בוצע מבחן WALT. הרגרסיה המוגבלת תחת השערת האפס הינה :
- $$Z_0 = \gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4 + v$$
- מהם ה-Zים?
- ו. בדוק את ההשערה אם ידוע שבמודל המוגבל $R^2 = 0.33$.
- ז. החוקר החליט לאמוד במקום את המשוואה המקורית את המשוואה :
- $$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \lambda_3 (S \cdot E) + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$
- כאשר :
- S מקבל את הערך 1 עבור שחורים ו-0 אחרת (לבנים).
- E מקבל את הערך 1 עבור השכלה גבוהה ו-0 אחרת (השכלה נמוכה).
- מה הקשר בין המקדמים של שני המודלים?
- ח. אם יאמוד החוקר את המשוואה :
- $$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$
- ספציפיקציה של השמטת משתנה רלוונטי (היעזר בסעיפים ד', ו' ו-ז').

(7) חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה :

$$\ln(MWAGE) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot S + \alpha_2 \cdot E + \alpha_3 \cdot (S \cdot E) + \beta_0 \cdot EXP + \beta_1 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_2 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_3 \cdot (EXP \cdot S \cdot E) + U$$

כאשר :

S משתנה דמי : 1 = עבור נשים, 0 = גברים.

E משתנה דמי : 1 = עבור השכלה גבוהה ($scl > 12$), 0 = השכלה נמוכה.

א. רשמו את הפונקציה לחישוב :

- i. תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.
- ii. תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.
- iii. לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות :

- i. אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.
- ii. השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.
- iii. אין השפעות השכלה אצל גברים.
- iv. אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.

תשובות סופיות:

(1) א. $W_t = 7971$. ב. 1,043 ₪. ג. כן. ד. יש עדות לכך.

ה. יש עדות לכך.

(2) יש עדות לכך.

(3) יש עדות לכך.

(4) א. יש עדות לכך, מבחן CHOW : 1, 2 ו-3, משתנה דמי : 3 ו-4.

ב. $\hat{\alpha} = 0.14978$, $\hat{\beta}_1 = 1.40311$, $\hat{\beta}_2 = 0.002877$, $\hat{\beta}_3 = -0.008$.

ג. $NUM_t = 1.532398$. ד. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2 \cdot \beta_2$.

ה. $H_0 : \beta_3 = \beta_2$.

ה. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_3 \cdot (AVGD_t + AVGD \cdot TYPE_t) + U_t$.

(5) א. i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$. ii. WALT t- $\alpha_1 = \alpha_2$. ב. i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$.

ii. WALT .

(6) א. נכון. ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך.

ד. $H_0 : \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ או $H_0 : \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3$.

ה. $Z_0 = \ln(Y)_t$, $Z_1 = D_1 + D_3$, $Z_2 = D_2 - D_3$, $Z_3 = EXP_t$, $Z_4 = EXP_t^2$.

ו. אין עדות לכך. ז. $\lambda_0 = \alpha_0$, $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_3$, $\lambda_3 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.

ח. לא.

(7) א. i. $\ln(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_0 \cdot 10$.

ii. $\ln(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3$. iii. $EXP_t = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_3)}{\beta_1 + \beta_3}$.

ב. i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. ii. $H_0 : \alpha_3 = \beta_3 = 0$.

iii. $H_0 : \alpha_2 = \beta_2 = 0$. iv. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 0$.

אקונומטריקה ב

פרק 6 - תיאוריה הפרת ההנחות קלאסיות

תוכן העניינים

1. כללי 31

הפרת ההנחות הקלאסיות:

רקע:

ארבעת הנושאים הבאים עוסקים במצב של הפרת אחת ההנחות הקלאסיות
הדרושות לאמידת הפרמטרים בשיטת OLS :

- הטרוסקדסטיות (הפרת הנחה מס' 5) – שונות קבועה ויחידה לאורך קו
הרגרסיה : $V(u_t) = \sigma^2$.
- מתאם סידרתי (הפרת הנחה מס' 6) – אי תלות בין הטעויות : $\text{cov}(u_t, u_s) = 0$.
- מודלים דינמיים ו-משוואות סימולטניות (הפרת הנחה מס' 4) – אי תלות בין
המשתנים הב"ת לטעויות : $\text{cov}(x, u) = 0$.

בכל אחד מן הנושאים נלמד :

- מהן ההשלכות של הפרת ההנחות הללו על אומדי הריבועים הפחותים.
- מהם המבחנים הסטטיסטיים המשמשים לזיהוי קיומה של ההפרה.
- כיצד נתקן את משוואת הרגרסיה כך שניתן יהיה לאמוד את הפרמטרים
בשיטת OLS.

אקונומטריקה ב

פרק 7 - הטרוסקדסטיות

תוכן העניינים

1. כללי 32

הטרוסקדסטיות:

רקע:

הטרוסקדסטיות הוא מצב שבו מופרת הנחת ההומוסקדסטיות, הגורסת כי שונות הטעויות היא אותה שונות עבור כל תצפית ותצפית: $V(u_t) = \sigma^2$ לכל t , כלומר התצפיות מפוזרות באופן אחיד סביב קו הרגרסיה. במצב של הטרוסקדסטיות שונות הטעויות של כל תצפית היא שונה: $V(u_t) = \sigma_t^2$.

ההשלכות של הטרוסקדסטיות על אומדי OLS:

בהינתן הטרוסקדסטיות מופרת תכונת היעילות של אומדי הריבועים הפחותים שכן בכדי לחשב שונות יעילה של האומדים השתמשנו בהנחה של שונות קבועה.

מבחנים לזיהוי הטרוסקדסטיות:

החשד לקיומה של בעיית הטרוסקדסטיות בנתונים צריך להתעורר כאשר אנו בוחנים את גרף השאריות – באיזה אופן השונות של הטעויות משתנה בין תצפית לתצפית. שיטות לזיהוי הטרוסקדסטיות: מבחן GQ (Goldfeld-Qauandt) ומבחן White. מבחן GQ מניח כי במקום שונות אחת אחידה של הטעויות לכל התצפיות, קיימות שתי שונות שונות בלבד. ואילו מבחן White מניח כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות.

1. מבחן GQ:

ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה היא כי קיימות שתי שונות שונות של טעויות. ביצוע המבחן:

- מחלקים את המדגם לשני חלקים:
 1. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות גבוהה יותר.
 2. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות נמוכה יותר.
 מקובל להשמיט מס' תצפיות (בין 1/6 ל-1/3) במרכז המדגם.
- אומדים כל אחד מהחלקים בנפרד ומקבלים את ה-ESS של כל חלק.
- מחשבים את הסטטיסטי: $F_{stat} = \frac{ESS_1 / T_1 - K - 1}{ESS_2 / T_2 - K - 1}$ (תמיד השונות הגבוהה חלקי הקטנה).

- סטטיסטי זה מתפלג: $F_{(\alpha; T_1-K-1, T_2-K-1)}$
- כלל ההכרעה: אם $F_{stat} > F_C$ אז דוחים את H_0 .

- ההשערות: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

2. מבחן White:

ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות. הביטוי המתמטי של הנחה זו היא היותה של השונות פונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים:

$$\sigma_t^2 = f(x_j, x_j^2, x_j x_j)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 x_k^2 + \dots + \beta_k x_k^2 + \gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_{13} x_1 x_3 \dots$$

האומד ל- σ_t^2 הוא $\hat{u}_t^2$.

המבחן הוא מבחן LM:

- אומדים את המודל המקורי ומקבלים את הסטיות מקו הרגרסיה $\hat{u}_t$ (המכונה בתוכנה הסטטיסטית RES-SAS).
- אומדים את $\hat{u}_t^2$ כפונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים: $\hat{u}_t^2 / x_j, x_j^2, x_j x_j$ זוהי רגרסיית העזר.
- נחשב את סטטיסטי LM: $LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2$.
- אם $LM_{stat} > \chi_m^2$ כאשר $m =$ מס' המשתנים ברגרסיית העזר.

- השערות: $H_0: \alpha_j = \beta_j = \gamma_{jj} = 0$
 $H_1: OTHERWISE$

פיתרון בעיית ההטרוסקדסטיות – ריבועים פחותים משוקללים (WLS):

נניח שאנו רוצים לאמוד את המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ וידוע כי לכל קריזה שונות אחרת. ההנחה שעומדת בבסיס שיטת ה-WLS היא כי השונות המשתנה כוללת בתוכה מרכיב קבוע ומרכיב משתנה: $\sigma_t^2 = Z_t \cdot \sigma^2$ את המרכיב המשתנה בשונות (Z_t) יש לנטרל. לשם כך ניצור משתנה חדש W_t שיהווה השורש ההופכי

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{Z_t}}$$

נכפיל כל תצפית במשתנה החדש W_t וניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

המשוואה המקורית: $Y_t W_t = \alpha \cdot W_t + \beta (X_t W_t) + u_t W_t$

בצורתה המפורשת המשוואה החדשה נראית כך: $\frac{Y_t}{\sqrt{Z_t}} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_t}} + \beta \cdot \frac{X_t}{\sqrt{Z_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}$

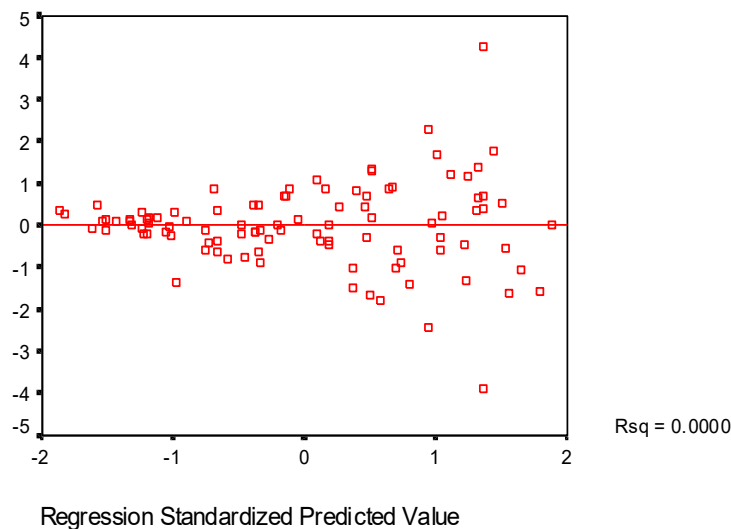
שאלות:

מבחן GQ:

(1) נאמד הקשר שבין הכנסה לתצורות: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
גרף השאריות של הרגרסיה הנ"ל נתון להלן:

Scatterplot

Dependent Variable: Y



מגרף זה אנו למדים כי השונות איננה אחידה סביב קו הרגרסיה אלא תלויה ברמת ההכנסה – זהו מצב של הטרוסקדסטיות.
בכדי לבצע מבחן GQ:

- התצפיות של משתנה ההכנסה סודרו מהגדול לקטן והמדגם חולק לשלוש קבוצות שוות.
- רגרסיה נפרדת הורצה על השליש הראשון ועל השליש האחרון.

התוצאות של אמידת הקשר בין הכנסה לתצרוכת מוצג בפלטים 1 ו-2 בהתאמה:

משוואה (1)

The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: y

Number of Observations Read 16
Number of Observations Used 16

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model					
Error	14	166452.9			
Corrected Total					

משוואה (2)

The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: y

Number of Observations Read 16
Number of Observations Used 16

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model					
Error	14	2934638			
Corrected Total					

האם יש עדות לקיום הטרוסקדסטיות בנתונים? (בצעו את המבחן המתאים: רשמו השערות, חשבו סטטיסטי מבחן, רשמו כלל הכרעה והגיעו למסקנה).

(2) על מנת לבחון את פונקציית הייצור בענף מסוים נאספו נתונים על 150 פירמות. נסמן:

Q - תפוקה שנתית באלפי שקלים.

L - מספר עובדים.

המודל הנאמד: $\ln(Q) = \alpha + \beta \cdot \ln(L)$.

החוקר חשש שההפרעה המקרית איננה הומוסקדסטית. לשם כך הוא מיון את

התצפיות בסדר עולה של מספר העובדים, השמיט $\frac{1}{3}$ מהתצפיות האמצעיות

והריץ שתי גרסיות נפרדות עם מספר שווה של תצפיות:

ברגרסיה הכוללת את הערכים הנמוכים יחסית של תשומת העבודה הוא

קיבל: $R^2 = 0.403$, $ESS = 279.3$.

ברגרסיה הכוללת את הערכים הגבוהים יחסית של תשומת העבודה הוא

קיבל: $R^2 = 0.238$, $ESS = 493.8$.

האם יש עדות לקיום הטרוסקדסטיות בנתונים? (בצעו את המבחן המתאים: רשמו השערות, חשבו סטטיסטי מבחן, רשמו כלל הכרעה והגיעו למסקנה).

מבחן WHITE:

(3) על אותו הקשר שבין הכנסה לתצרוכת: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

שאנו חושדים על פי גרף השאריות כי קיים בו מצב של הטרוסקדסטיות. בכדי לבצע את מבחן WHITE:

- נחשב את השאריות של הרגרסיה: $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- נעלה את השאריות בריבוע: $\hat{u}_t^2$.
- נאמוד את המשוואה: $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \beta_1 X_t^2 + \nu_t$.

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

The REG Procedure					
Model: MODEL1					
Dependent Variable: RES^2					
Number of Observations Read				48	
Number of Observations Used				48	
Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model					
Error					
Corrected Total					
Root MSE			R-Square	0.390763	
Dependent Mean			Adj R-Sq		

בצעו מבחן White (השערות, סטטיסטי המבחן, כלל הכרעה ומסקנה).

(4) חוקר מניח כי מכירות של חנות הן פונקציה של שיטחה, דמי שכירות והאפשרות של מכירת עיתונים.

נסמן:

Y_SALES - מכירות חודשיות (ש).

$X1_SQUARES$ - שטח החנות (מ"ר).

$X2_RENT$ - דמי שכירות (\$).

$PAPERS$ - משתנה איכותי המקבל 1 אם החנות מוכרת גם עיתונים ו-0 אם לא. החוקר חשד כי קיימת בעיה של הטרוסקדסטיות בנתונים.

החוקר ביצע מבחן לזיהוי הטרוסקדסטיות שתוצאותיו נתונות להלן:

Dependent Variable:					
Number of Observations Read				20	
Number of Observations Used				20	
Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model					
Error					
Corrected Total					
		Root MSE	R-Square	0.086942	
		Dependent Mean	Adj R-Sq		
Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept					
X1_SQUARE					
X1_SQUARE^2					
X1_SQUARE*X2_RENT					
X2_RENT					
X2_RENT^2					
X2_RENT*PAPERS					
PAPERS					

הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת: _____.

על ידי מבחן: _____.

המשתנה התלוי הינו: _____.

המשתנים הב"ת: _____.

ההשערות הינן: _____.

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): _____.

המסקנה המתקבלת היא: _____.

שיטת WLS:

(5) נתון המודל:

$$1. Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + U_t.$$

ונתון כי: $VAR(U_t) = \frac{\sigma^2}{Z_t^2}$ (משתנה ידוע).

א. מהי הבעיה שנוצרת באמידת משוואה (1)?

ב. מהן תכונות אומדי הריבועים הפחותים של משוואה (1)?

כדי לפתור את הבעיה שנוצרה, נאמדה המשוואה הבאה:

$$2. Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + U_t \cdot W_t.$$

ג. מהו W_t שבעזרתו ניתן לאמוד את α ו- β בצורה יעילה?ד. מהו האומד היעיל של σ^2 ?ה. האם ניתן להשוות בין המודלים על בסיס R^2 ? אם לא, האם ניתן

להחליט בכל זאת איזה מודל טוב יותר?

ו. חוו דעתכם על הטענות הבאות, ונמקו:

i. אם נתון כי: $Z_t = a + b \cdot \bar{X}$, התשובות לסעיפים א' ו-ב' נשארות

ללא שינוי.

ii. המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$ (כאשר: $\varepsilon_t = U_t \cdot W_t$) היא

אחת המשוואות הנורמאליות לאמידת משוואה (2).

(6) ענו על השאלה הקודמת, כאשר נתון כי: $VAR(U_t) = \sigma^2 \cdot X_t^2$.(7) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$. וקיים מדגם של 100 תצפיות כאשר נתוןכי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} X_t \sigma^2 & \Leftrightarrow t \geq 50 \\ X_t^2 \sigma^2 & \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$. (שאר ההנחות הקלאסיות מתקיימות).

א. במשוואה מס' 1 יש בעיה של: _____.

ב. אמידת משוואה (1) תניב אומדים

בלתי מוטים ועקיבים: נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. פתרון הבעיה הקיימת במשוואה (1) ייתכן על ידי אמידת המשוואה

הבאה: $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + u_t$ כאשר: $W_t =$ _____.ד. אם נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} 3\sigma^2 & \Leftrightarrow t \geq 50 \\ \sigma^2 & \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$

האם ישתנו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב': כן/לא/לא ניתן לדעת

תשובות סופיות:

(1) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, חישוב סטטיסטי: 17.62, כלל הכרעה: 2.48.
 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

(2) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, חישוב סטטיסטי: 1.77, כלל הכרעה: 1.69.
 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

(3) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$, חישוב סטטיסטי: 18.75,
 $H_1: OTHERWISE$

כלל הכרעה: 5.991.

(4) קיום הטרוסקדסטיות בנתונים.

$(LM)_{WHITE}$.

RES^2 .

$X1_SQUARE$, $X1_SQUARE^2$, $X1_SQUARE * X2_RENT$,

$X2_RENT$, $X2_RENT^2$, $X2_RENT * PAPERS$, $PAPERS$

$LM_{stat} = 1.73$.

אין עדות לכך.

(5) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Z_t^2}}} = Z_t$.

ד. $\sigma^2 = \frac{ESS}{T-K}$. ה. לא, המודל השני. ו. i. לא נכון. ii. לא נכון.

(6) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{X_t}$.

ד. $S^2 = \frac{ESS}{T-k-1}$. ה. ראו סרטון. ו. ראו סרטון.

(7) א. הטרוסקדסטיות. ב. נכון.

ג. $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t^2}}$ $t \leq 50$, $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t}}$ $t \geq 50$. ד. לא.

אקונומטריקה ב

פרק 8 - מתאם סדרתי

תוכן העניינים

1. כללי 40

מתאם סדרתי:

רקע:

מתאם סדרתי עוסק במצב שבו מופרת ההנחה (מס' 6) של אי תלות בין הטעויות:
 $cov(u_t, u_s) = 0$ ונוצרת תלות סטטיסטית בין הטעויות במודל: $cov(u_t, u_s) \neq 0$.
 תלות כזו בין הטעויות קיימת בדרך כלל כאשר הנתונים הנאספים הם נתוני סדרות
 עיתיות ולא נתוני חתך בהם עסקנו עד כה. בנתוני סדרות עיתיות, מאחר ומדובר
 באותו הפרט הנמדד בזמנים שונים סביר שהטעויות בניבוי שלו תהיינה תלויות אחת
 בשנייה.

השלכות על אומדי הריבועים הפחותים (OLS):

מבין התכונות של אר"פ (ליניאריות, חוסר הטיה, עקיבות ויעילות) היחידה שמופרת
 כאשר קיים מתאם סדרתי היא: תכונת היעילות.
 משום שתכונת היעילות היא היחידה מבין תכונות אר"פ התלויה להוכחתה בקיומה
 של הנחת אי התלות בין הטעויות. משום הפגיעה בתכונת היעילות, בדיקת ההשערות
 לא תהיה תקפה.

- שימו לב: כי במידה וקיים מתאם סדרתי חיובי בין הטעויות ולמשתנים יש
 מגמת זמן (X עולה או יורד עם הזמן) אומד השונות (ESS) יהיה מוטה כלפי מטה
 ואז נקבל: F ו- t מוטים כלפי מעלה.

מבנה המתאם הסדרתי:

מתאם סדרתי מסדר ראשון:

ההנחה היא כי יש מתאם בין הטעויות במרחק אחד, כלומר u_t תלוי ישירות רק

$$u_t - u_{t-1} : cov(u_t, u_{t-1}) \neq 0$$

את המתאם בין הטעויות מסדר ראשון ניתן לנסח באופן הבא: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$

כך ש:

- $\rho \neq 0$ (כי אם $\rho = 0$ אין מתאם סדרתי).
- $-1 < \rho < 1$ (כי אם חורג מ-1 הטעות הולכת וגדלה עם הזמן).
- ρ חיובי פירושו מתאם סדרתי חיובי ואילו ρ שלילי פירושו מתאם סדרתי
 שלילי (לא נפוץ).

4. ε_t מקיים את ההנחות הקלאסיות מאחר ומהווה סטייה מקרית לחלוטין

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{בניגוד ל-}(u_t) \text{ כך ש:}$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$$

המודל יכול שתי משוואות-המשוואה העיקרית והגדרת המתאם הסדרתי (מסדר

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad \text{ראשון):}$$

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

מלבד α ו- β נרצה לאמוד גם את ρ .

מתאם סדרתי מסדר שני:

$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + \varepsilon_t$$

הן u_{t-1} והן u_{t-2} משפיעים ישירות על u_t .

מתאם סדרתי מסדר P:

$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + \dots + \rho_p \cdot u_{t-p} + \varepsilon_t$$

u_t מושפע מתקופות שונות בעבר.

תכונות המתאם הסדרתי:

מכיוון שכל טעות בזמן מסוים מתואמת עם הטעות הסמוכה לה בזמן: $r_{(u_t, u_{t-s})} = \rho^s$

המתאם של u_t הולך ופוחת עם הזמן: $\rho_{u_t, u_{t-1}} > \rho_{u_t, u_{t-2}}^2 > \rho_{u_t, u_{t-3}}^3 > \dots > \rho_{u_t, u_{t-s}}^s$
בנוסף לכך, התוחלת, השונות והשונות המשותפת של הטעויות:

$$E(u_t) = 0$$

$$V(u_t) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

$$\text{COV}(u_t, u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2 = \rho^s \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

מבחנים לזיהוי מתאם סדרתי:

מבחן DW (דרבין ווטסון) לקיום מתאם סדרתי מסדר ראשון:

- נניח תחילה כי אין מתאם סדרתי ונאמוד את המשוואה הראשית בשיטת OLS.
- כחלק מתוצאות האמידה נקבל ציון DW (יכול לקבל ערכים בין 0 ל-4 בלבד).
- נתבונן בטבלת DW ולפי $K = \text{מס' המשתנים ה"ת במודל}$ ו- $T = \text{מס' התצפיות במדגם}$ נשלוף שני ערכים: d_U ו- d_L .
- נחלק את הטווח שבין 0 ל-4 באופן הבא:

$$0 \text{ --- } \rho > 0 \text{ --- } d_L \text{ --- } d_U \text{ --- } \rho = 0 \text{ --- } 4 - d_U \text{ --- } 4 - d_L \text{ --- } \rho < 0 \text{ --- } 4$$

- נראה היכן נופל ציון ה-DW שהתקבל כחלק מתוצאות האמידה. ניתן לדעת אם יש מתאם ואיזה סוג של מתאם רק אם ציון ה-DW ייפול בחלקים המודגשים באדום.

$$\begin{aligned} H_0: \rho &= 0 \\ H_1: \rho &> 0, \rho < 0 \end{aligned} \quad \text{השערות:}$$

$$\text{חישוב הסטטיסטי: } DW_{stat} \cong 2 \cdot (1 - \hat{\rho})$$

אם אנו מקבלים ציון $\hat{\rho}$ ניתן להציב בנוסחה ולקבל DW_{stat} .

למבחן DW יש שתי בעיות עיקריות:

1. מתאים רק למתאם סדרתי מסדר ראשון.
2. יש אזורים "מתים" בטווח בהם לא ניתן לדעת האם יש מתאם סדרתי.

בנוסף לכך על מספר תנאים להתקיים כדי שאפשר יהיה להשתמש במבחן DW:

1. הרגרסיה כוללת חותך.
2. ה-Xים קבועים ולא משתנים.
3. אין משתנים מסבירים שהם פיגור של המשתנה המוסבר.
4. אין תצפיות חסרות באמצע.
5. אם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון אז הוא מהצורה: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

מבחן LM :

לעומת מבחן DW מבחן LM מתאים גם לבחינת קיומו של מתאם סדרתי מסדרים

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \beta \cdot X_t + u_t \\ u_t &= \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

המודל הלא מוגבל :

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (U)$$

ניתן להתייחס לבחינת קיומו של מתאם סדרתי כהוספת משתנה מסביר : $\hat{u}_{t-1}$.
השלבים לביצוע המבחן :

- נאמוד את המודל המקורי ונחשב $\hat{u}_t$ ו- $\hat{u}_{t-1}$.
- נאמוד את רגרסיית העזר : $\hat{u}_t / x_1, x_2, \dots, x_k; \hat{u}_{t-1}$.
- נחשב סטטיסטי LM : $LM_{stat} = T \cdot R^2$.
- נדחה את H_0 כאשר : $LM_{stat} > \chi_m^2$ כאשר $m = \text{סדר המתאם הסדרתי}$.
אם נדחה את H_0 נדע את סימנו של המתאם הסדרתי לפי המקדם של $\hat{u}_{t-1}$
ברגרסיית העזר ששווה ל- $\hat{\rho}$.
שימו לב כי אם נרצה לבדוק מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר :

$$\begin{aligned} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_s = 0 \\ H_1 : \text{OTHERWISE} \end{aligned}$$

$$\text{גרסיית העזר : } \hat{u}_t / x_1, x_2, \dots, x_k; \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \dots, \hat{u}_{t-s}$$

פתרון בעיית המתאם הסדרתי – רגרסיית הפרשים (שיטת קוקרן-אורקט):

ניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית שבה לא יהיה מתאם סדרתי ולכן ניתן יהיה לאמוד אותה בשיטת הריבועים הפחותים, האומדים יהיו יעילים וניתן יהיה לבצע בדיקת השערות.

$$\text{משוואה (1): המודל בזמן } t : Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$\text{משוואה (2): המודל בזמן } t-1 \text{ מוכפל ב- } \rho : \rho \cdot Y_{t-1} = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot X_{t-1} + \rho \cdot u_t$$

החסרת משוואה (2) ממשוואה (1) :

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$$

כדי לאמוד את הפרמטרים של רגרסיית הפרשים נגדיר :

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$

$$\alpha^* = \alpha(1 - \rho)$$

$$\beta^* = \beta$$

$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

$$\text{כך "נטרלנו" את המתאם הסדרתי : } \varepsilon_t = u_t - \rho \cdot u_{t-1}, u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

ε_t מקיים את כל ההנחות הקלאסיות ולכן שונות הרגרסיה וכן שונות הפרמטרים הנאמדים לא תהיה תלויה במקדם המתאם הסדרתי.
 המשוואה "המתוקנת" אותה נאמוד: $Y^* = \alpha^* + \beta^* X_t^* + \varepsilon_t$.
 לאחר אמידת משוואה זו ניתן לחלץ את האומדים של הפרמטרים המקוריים: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.
 מאחר ש- ρ איננו ידוע יש צורך לאמוד אותו.

אמידת ρ בשיטת קוקרן אורקוט:
 שיטת קוקרן אורקוט לאמידת ρ היא שיטה איטראטיבית – מבוססת על חזרות של תהליך מסוים עד להתכנסות.
 התהליך הממוחשב נקרא אוטורגרסיה (AUTOREGRESION) מסדר ראשון, שני, שלישי וכו' (תלוי בסדר המתאם הסדרתי). התיקון למתאם הסדרתי יתבצע על ידי הרצת רגרסיה עם משתנה AR(1) (אוטו רגרסיה מסדר ראשון), AR(1) ו-AR(2) (אם מניחים קיום אוטורגרסיה מסדר שני) וכו'. אם משתנה AR מובהק זו אינדיקציה שפתרנו את הבעיה של המודל המקורי.

שאלות:

תכונות המתאם הסדרתי:

$$(1) \quad \text{נתון מתאם סדרתי מסדר ראשון: } u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{נתון כי: } \rho = 0.9 \text{ וכי: } V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 1$$

מצאו את:

א. המתאם בין u_t ל- u_{t-1} .ב. המתאם בין u_t ל- u_{t-4} . הסבר את ההבדל בין המתאמים (סעיף א' ו-ב').ג. השונות σ_u^2 .ד. חזרו על סעיפים א' עד ג' עבור $\rho = 0.4$. הסבירו את ההבדל בין התוצאות.

מבחן DW:

(2) חוקר רצה לאמוד את מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן שעובר:

$$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME_t + u_t$$

כאשר:

 $CLOSE_t$ = מחיר סגירה של מניה ב-\$-ביום t . $TIME_t$ = משתנה זמן שמקבל את הערכים: $1, 2, 3, \dots$.

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: CLOSE

Analysis of Variance					
F Value	Prob>F	Mean Square	Sum of Squares	DF	Source
	55.78		-----	1	Model
			-----	151	Error
			-----	152	C Total
		0.181	R-square	----	Root MSE
		-----	Adj R-sq	----	Dep Mean
				----	C.V.
Parameter Estimates					
T for H0:		Standard Error	Parameter Estimate	DF	Variable
Parameter=0	Prob> T				
91.047	0.0000	0.0148	1.3474	1	INTERCEP
0.0000	-7.468	0.0001	-0.00075	1	TIME
Durbin-Watson D	0.150				

האם קיים מתאם סדרתי?

TABLE 12 Cutoff Points for the Distribution of the Durbin-Watson Test Statistic

Let d_α be the number such that $P(d < d_\alpha) = \alpha$, where the random variable d has the distribution of the Durbin-Watson statistic under the null hypothesis of no autocorrelation in the regression errors. For probabilities $\alpha = .05$ and $\alpha = .01$, the tables show, for numbers of independent variables, K , values d_L and d_U such that $d_L \leq d_\alpha \leq d_U$ for numbers n of observations.

$\alpha = .05$										
n	K									
	1		2		3		4		5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \quad (3) \quad \text{המודל הינו:}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

u_t - הפרעה מקרית קלאסית.

$T = 100$ וידוע כי:

$$u_t = 0.9u_{t-1}$$

$$d_L = 1.57$$

$$d_U = 1.65$$

האם קיים מתאם סדרתי ברמת מובהקות של 5%?

מבחן LM:

(4) עבור הדוגמא הקודמת – ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:

$$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME_t + u_t$$

נבחן את קיומו של מתאם סדרתי מסדר ראשון באמצעות מבחן LM.

$$u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot TIME_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{נאמוד את רגרסיית העזר:}$$

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: RES

		Analysis of Variance			Source
F Value	Prob>F	Mean Square	Sum of Squares	DF	
			-----	2	Model
			-----	150	Error
			-----	152	C Total
		0.855	R-square	-----	Root MSE
		-----	Adj R-sq	-----	Dep Mean
				-----	C.V.

Parameter Estimates

Parameter	Estimate	DF	Variable
	-.000096	1	INTERCEP
	1.16331E-05	1	TIME
	0.927172	1	RES1

א. האם קיים מתאם סדרתי?

ב. מהו ערכו של המתאם הסדרתי הנאמד?

ג. מהו כיוונו של המתאם הסדרתי באוכלוסייה?

תיקון המתאם הסדרתי:

(5) סטודנט הניח כי במודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בשאריות כך שמתקיים: $u_t = 0.7u_{t-1} + \varepsilon_t$ ולכן במקום לאמוד את המודל המקורי אמד את המודל: $Y_t - 0.7Y_{t-1} = \alpha(1-0.7) + \beta(X_t - 0.7X_{t-1}) + u_t$. הסטודנט טען כי במודל החדש לא קיים מתאם סדרתי. טענת הסטודנט: נכונה / לא נכונה / לא ניתן לדעת

(6) נמשיך עם הדוגמא של ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:

$$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME + u_t$$

נניח כי קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בנתונים. תוצאות האמידה בשיטת אוטורגרסיה מסדר ראשון מוצגות להלן:

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	1.333			
TIME	1	-0.0006			
(1)AR	1	0.927			
Durbin-Watson D				2.235	0.000

א. בדקו האם נפתרה בעיית המתאם הסדרתי.

ב. מהי המשוואה לאמידת מחיר הסגירה הצפוי ביום המסחר הבא?

תרגול מסכם:

(7) נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת לתקופה ינואר 1994 עד דצמבר 1997 (T=48).

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

בניסיון לבדוק האם מתקיים קשר מהסוג הבא: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$.

$$\hat{u}_t = \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 \hat{u}_{t-3} + \gamma_4 Y_t + \omega_t$$

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable: RES

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	-54.709	710.85	-0.076	0.939
RESID1	1	0.705	0.152	4.631	0.000
RESID2	1	-0.0066	0.188	-0.035	0.972
RESID3	1	-0.337	0.167	-2.012	0.051
Y	1	0.0027	0.032	0.085	0.932
Durbin-Watson D		1.954			

נתון בנוסף כי: $R^2 = 0.479$.

- א. הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת: _____
 על ידי מבחן: _____
 ההשערות הינן: _____
 גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): _____
 המסקנה המתקבלת היא: _____

בהנחה כי קיים מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים נאמד מחדש הקשר שבין ההכנסה לתצרוכת בהתאם לשיטתם של קוקרן ואורקוט.
 תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable:C

Parameter Estimates						
	Error	:T for H0 Parameter=0	Standard Error	Parameter Estimate	Prob> T	Variable
	1128.38	-1.864		0.069 -2103.53	1	INTERCEP
	0.0510	14.086		0.000 0.71944	1	Y
AR(1)	1	0.7070	0.1525	4.634	0.000	
AR(2)	1	-0.0064	0.1889	-0.034	0.972	
AR(3)	1	-0.3282	0.1669	-1.966	0.0562	
Durbin-Watson D	1.954					

ב. רשמו את המשוואה המתוקנת המשמשת לעריכת תחזיות.

(8) חוקר רצה לאמוד את עקומת הביקוש לטיסות לאירופה.
 לרשותו נתונים שבועיים לאורך 3 שנים (52 שבועות).
 נסמן:

Y_t - מספר כרטיסי הטיסה לאירופה שנמכרו בשבוע t .

p_t - מחיר ממוצע ב-\$ של הכרטיסים שנמכרו בשבוע t .

החוקר אמד את המודל: $Y_t = e^\alpha \cdot P_t^{\beta_1} \cdot P_{t-1}^{\beta_2} \cdot e^{u_t}$.

וקיבל לאחר הטרנספורמציה הלוגריתמית: $R^2 = 0.81$.

לבדיקת ההשערה כי קיים מתאם סדרתי בנתונים מסדר ראשון הוא חישב את

ערכי $\hat{u}_t$ ולאחר מכן חישב את הרגרסיה: $u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln P_t + \gamma_2 \ln P_{t-1} + \gamma_3 u_{t-1} + v_t$.

מקדם ההסבר המרובה ברגרסיה זו הוא 0.282.

א. נסח את ההשערה ובחן אותה בר"מ של 0.05.

החוקר מניח שיש מתאם סדרתי מסדר ראשון.

לאחר תיקון Cochrane-Orcutt התקבל: $\ln \hat{Y}_t = 7.3 - 0.2 \ln P_t + 0.4 \ln P_{t-1}$, $\hat{\rho} = 0.2$.

הניחו שהשבוע ובשבוע שעבר מחיר ממוצע של כרטיס היה \$500.

השבוע נמכרו 6,185 כרטיסים. בשבוע הבא צפוי מחיר של \$400.

ב. כמה כרטיסים יימכרו?

החוקר גם מנסה לקבוע האם בנתונים אלה קיים מתאם מסדר שני.

ג. רשמו את המשוואה הנוספת שעליו לאמוד.

במשוואה הנוספת התקבל מתאם מרובה השווה ל-0.12.

ד. מהי המסקנה בר"מ של 0.05?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } r_{(u_t, u_{t-1})} = 0.9 \quad \text{ב. } r_{(u_t, u_{t-4})} = 0.6561 \quad \text{ג. } \sigma_u^2 = 5.263$$

$$\text{ד. } \sigma_u^2 = 1.19, r_{(u_t, u_{t-4})} = 0.0256, r_{(u_t, u_{t-1})} = 0.4$$

(2) יש עדות לכך.

(3) יש עדות לכך.

$$(4) \quad \text{א. יש עדות לכך.} \quad \text{ב. } \hat{\rho} = 0.927 \quad \text{ג. חיובי.}$$

(5) לא נכונה.

(6) ראו סרטון.

(7) א. קיומו של מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים.

LM

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$$

$$H_1 : OTHERWISE$$

$$LM_{stat} = 22.99$$

יש עדות לכך.

$$\text{ב. } \hat{C}_t = -2103.53 + 0.719 \cdot Y_t + 0.707 \cdot \hat{u}_{t-1} - 0.0064 \cdot \hat{u}_{t-2} - 0.328 \cdot \hat{u}_{t-3}$$

$$(8) \quad \text{א. } H_0 : \rho = 0, \text{ יש עדות לכך.} \quad \text{ב. } Y_{t+1} = 5,568 \quad H_1 : \rho \neq 0$$

$$\text{ג. } u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln P_t + \gamma_2 \ln P_{t-1} + \gamma_3 u_{t-1} + \gamma_4 u_{t-2} + \omega_t \quad \text{ד. אין עדות לכך.}$$

אקונומטריקה ב

פרק 9 - סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות

תוכן העניינים

1. כללי 51

סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות:

רקע:

הטרוקדסטיות	מתאם סדרתי	
	למשל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	המשוואה העיקרית של המודל
$V(u_t) = \sigma^2$	$\text{cov}(u_t, u_{t-s}) = 0$	ההנחה הקלאסית המופרת
$V(u_t) = \sigma_t^2$	$\text{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$	המצב לאחר ההפרה
$V(u_t) = W_t \sigma^2$	$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$	המשוואה המאפיינת את ההפרה
מתקבלים אומדים חסרי הטיה ועקיבים, אך תכונת היעילות נפגעת.		מה קורה אם אומדים OLS-ב
מבחן GQ מבחן White	מבחן DW מבחן LM	זיהוי הבעיה
שיטת WLS	שיטת קוקרן – אורקוט (רגרסיית ההפרשים) הכנסת משתנה מוסבר בפיגור (מודל דינמי)	פתרון הבעיה

אקונומטריקה ב

פרק 10 - מודלים דינאמיים

תוכן העניינים

1. כללי 52

מודלים דינאמיים:

רקע:

מודל דינמי הוא מודל שיש בו משתנה מוסבר בפיגור, כלומר Y היום מושפע מ- Y של אתמול: $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$.

המכפילים הדינמיים:

שלוש סוגים של השפעות בהקשר של המודל הדינמי (מכפילים):

1. מכפל לטווח קצר (מידי):

$$\text{איך } X \text{ היום משפיע על } Y \text{ היום: } \frac{\partial Y_t}{\partial X_t}$$

2. מכפל ביניים מסדר j (מכפיל דינמי):

$$\text{איך } X \text{ מלפני } j \text{ תקופות משפיע על } Y \text{ היום: } \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}$$

3. מכפל טווח ארוך (מצב עמיד):

$$\text{איך } X \text{ משפיע על } Y \text{ לאורך } P \text{ תקופות: } \frac{\partial Y^*}{\partial X^*}$$

כאשר X ו- Y נותרים קבועים על פני הזמן (מצב עמיד):

$$Y_t = Y_{t-1} = \dots = Y_{t-p} = Y^*$$

$$X_t = X_{t-1} = \dots = X_{t-p} = X^*$$

הקשר בין מתאם סדרתי למודלים דינמיים

המתאם הסדרתי נובע מהשמטה של דינמיות מבנית במודל. המודל המקורי היה צריך להיות מודל דינמי אך נאמד בטעות מודל סטטי. הדינמיות תבוא אז לידי ביטוי בטעויות, כלומר במתאם הסדרתי. גרסיית ההפרשים, המהווה פתרון למתאם הסדרתי, היא למעשה מודל דינמי.

לסיכום:

בכדי לפתור את בעיית המתאם הסדרתי יש לאמוד מלבד את המשתנה המוסבר בזמן t גם את המשתנה המוסבר והמסביר בזמן $t-1$.

המשתנה בפיגור Y_{t-1} נועד לפתור מתאם סדרתי מסדר ראשון, Y_{t-2} משמש

לפתירת מתאם סדרתי מסדר שני וכך הלאה.

בכדי לבדוק קיומו של מתאם סדרתי במודל דינמי לא נוכל לבצע מבחן DW אלא רק מבחן LM.

השלכות על אר"פ של משתנה מוסבר בפיגור כמשתנה מסביר:

בניגוד למשתנה מסביר רגיל (X) , Y_{t-1} הינו משתנה מקרי. משום כך אר"פ ברגרסיה הכוללת משתנים כאלה הם מוטים (להזכירכם בהוכחת חוסר הטיה של האומדים השתמשנו בהנחה מס' 4 הגורסת כי המשתנים המסבירים אינם משתנים מקריים). בנוסף לכך העקיבות של האומדים תלויה בקיום מתאם סדרתי:

$$\hat{\beta} \rightarrow \beta + \frac{COV(Y_{t-1}, u_t)}{V(Y_{t-1})}$$

אם אין מתאם סדרתי: $COV(Y_{t-1}, u_t) = 0 \Leftarrow$ האומד עקיב.

אם יש מתאם סדרתי: $COV(Y_{t-1}, u_t) \neq 0 \Leftarrow$ האומד איננו עקיב.

לסיכום – ההשלכות על אר"פ:

1. האומדים מוטים ולכן ניתן לבצע בדיקת השערות רק במדגמים גדולים $(T > 30)$.
2. אם אין מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים עקיבים ויעילים (ניתן לבצע בדיקת השערות במדגמים גדולים).
- אם יש מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים אינם עקיבים ואינם יעילים (לא ניתן לבצע בדיקת השערות גם במדגמים גדולים).

שאלות:

חישוב מכפלים:

(1) חשבו את שלושת סוגי המכפלים של המודלים הדינמיים הבאים:

א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

ב. $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

תרגול מסכם:

(2) המודל הבא הורץ ב-SAS עם מדגם בעל 100 תצפיות: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

א. מהפלט עולה $DW=0.195$ לפיכך:

i. לא קיים מתאם סדרתי.

ii. קיים מתאם סדרתי והוא: _____.

iii. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. לפי תשובתך לסעיף א' חווה דעתך על תכונות האומדים:

i. מוטים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ii. ליניאריים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iii. יעילים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iv. עקיבים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. אמידה של איזו משוואה תפתור באופן מלא את הבעיה שנוצרה במודל:

i. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$

ii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + u_t$

iii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

ד. בדוק את ההשערה כי לפי מודל (3) השפעת X על Y הולכת ופוחתת עם הזמן. מצורף החלק הרלוונטי מהפלט:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter	Standard	T for H0:	
		Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	0.42	0.06	7.00	0.000
X	1	0.25	0.03	8.33	0.000
Y1	1	0.85	0.05	17.00	0.000

ה. מהו המכפיל הדינמי בתקופה t-8?

(3) הקשר בין כמות הכסף לבין רמת האינפלציה במשק נאמד בסדרה עתית על ידי המשוואה הבאה:

$$1. \quad M_t = \alpha + \beta \cdot P_t + U_t$$

כאשר:

M_t - כמות הכסף במשק בחודש t .

P_t - מדד המחירים לצרכן במשק בחודש t .

משוואה (1) נאמדה בפלט מס' 1.

א. לפי מבחן על הסטטיסטי DW, נראה כי ב- U_t :

i. לא ניתן לחשב את הסטטיסטי DW מהנתונים הקיימים.

ii. קיים מתאם סדרתי שלילי.

iii. קיים מתאם סדרתי חיובי.

iv. לא קיים מתאם סדרתי.

v. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. סמנו את התשובה הנכונה בהכרח:

i. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים.

ii. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.

iii. האומדים מוטים אך עקיבים.

iv. האומדים חסרי הטיה, אך לא עקיבים.

v. כל התשובות אינן נכונות.

ג. אומד השונות מוטה ובדיקת השערות

לא תקפה: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

חוקר טען כי הבעיה שנוצרה במשוואה (1) תיפתר ע"י אמידת המשוואה הבאה:

$$2. \quad M_t = \alpha_1 + \beta_1 \cdot P_t + \beta_2 \cdot M_{t-1} + \varepsilon_t$$

כאשר:

M_{t-1} - כמות הכסף בשנה הקודמת.

משוואה (2) נאמדה בפלט מס' 2, כמו כן נאמדה על ידי החוקר המשוואה

המופיעה בפלט מס' 3.

ד. הרגרסיה המופיעה בפלט מס' 3 נועדה לבדיקת: _____.

במשוואה: _____.

על ידי מבחן: _____.

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשום תוצאה מספרית): _____.

ה. לאור תשובתך לסעיף ד' טענת החוקר: נכונה/לא נכונה/אי אפשר לדעת

ו. האומד ל- β_1 במשוואה (2) הוא מוטה

אך עקיב: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ז. ניתן להשתמש בסטטיסטי DW לבדיקת

מתאם סדרתי במשוואה (2): נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת.

ח. חשבו את המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$.

ט. בדקו את הטענה כי המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$ $\left(\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-1}}\right)$

הינו 90% מהמכפיל המיידי בטווח הקצר.

י. רשמו את השערת האפס עבור הטענה כי המכפיל בט"א שווה ל-1.

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבחינת ההשערה?

פלט מס' 1 – משוואה (1):

Dependent Variable: m

Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	44.03828	44.03828	5145.80	<.0001
Error	103	0.88148	0.00856		
Corrected Total	104	44.91976			

Root MSE	0.09251	R-Square	0.9804
Dependent Mean	8.53854	Adj R-Sq	0.9802
Coeff Var	1.08344		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	1.49372	0.09862	15.15	<.0001
p	1	1.69267	0.02360	71.73	<.0001

Durbin-Watson D 0.208

פלט מס' 2 – משוואה (2):

Dependent Variable: m

Analysis of Variance					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	42.19946	21.09973	15988.1	<.0001
Error	101	0.13329	0.00132		
Corrected Total	103	42.33275			

Root MSE	0.03633	R-Square	0.9969
Dependent Mean	8.55393	Adj R-Sq	0.9968
Coeff Var	0.42469		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	1	0.40374	0.06790	5.95	<.0001
m1	1	0.81811	0.03857	21.21	<.0001
p	1	0.28127	0.06633	4.24	<.0001

$$M_t = M_{t-1}$$

פלט מס' 3:

Dependent Variable: res Residual

$$RES = \hat{\varepsilon}_t = (2) \text{ מודל נוסף } \text{מ/ס}$$

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	0.00032896	0.00010965	0.08	0.9695
Error	99	0.13173	0.00133		
Corrected Total	102	0.13206			

Root MSE	0.03648	R-Square	0.0025
Dependent Mean	0.00033853	Adj R-Sq	-0.0277
Coeff Var	10775		

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > t
Intercept	Intercept	1	0.03298	0.08192	0.40	0.6881
p		1	0.02640	0.07979	0.33	0.7415
m1		1	-0.01672	0.04705	-0.36	0.7230
res1		1	-0.01304	0.11039	-0.12	0.9062

$$RES1 = \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

תשובות סופיות:

1. א. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = 0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = \beta_1 \beta_2^{j-1}$, מכפיל של

$$\frac{\partial Y^*}{\partial X^*} = \beta_1 \cdot \frac{1}{1 - \beta_2} \quad \text{הטווח הארוך:}$$

ב. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = \beta_0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = \beta_2^{j-1} (\beta_1 + \beta_0 \beta_2)$,

$$\frac{\partial Y^*}{\partial X^*} = \frac{\beta_1 + \beta_0 \beta_2}{1 - \beta_2} \quad \text{מכפיל של הטווח הארוך:}$$

2. א. ii, חיובי. ב. i, לא נכון. ג. ii, לא נכון. ד. יש עדות לכך. ה. iv, נכון.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = 0.068 \quad \text{ה.}$$

3. א. iii. ב. i. ג. נכון. ד. קיום מתאם סדרתי במשוואה (2).

מבחן LM.

$$LM_{stat} = 0.2575$$

ה. נכונה. ו. נכון. ז. לא נכון. ח. $\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-i}} = \beta_1 \beta_2^i$.

ט. יש עדות לכך. י. WALT, $H_0: \beta_1 = 1 - \beta_2$.

אקונומטריקה ב

פרק 11 - רגרסיה לוגיסטית

תוכן העניינים

1. רגרסיה לוגיסטית.....58

הגרסה לוגיסטית:

רקע:

מתי נבצע רגרסיה לוגיסטית?

כאשר המשתנה המנובא הוא דיכוטומי (Binary Logistic):
 יכול לקבל ערכים של 0 או 1.
 הפונקציה הלוגיסטית מתארת את הסיכויים לקבל "1" במשתנה התלוי כתלות במשתנים הב"ת.

הלוגיקה בניתוח רגרסיה לוגיסטית:

השוואת ניבוי Y ללא המשתנים המנבאים במודל לניבוי Y במודל הכולל את המשתנים המנבאים (סטטיסטי χ^2).

טיב מודל הרגרסיה ("Goodness of fit"):

1. מובהקות המודל:

Omnibus Tests of Model Coefficients

	Chi-square	df	Sig.
Step 1 Step	12.225	4	.016
Block	12.225	4	.016
Model	12.225	4	.016

מבחן χ^2 - תחת שורת ה-model נמצא את חי בריבוע ואת מובהקות המודל.

2. אחוז שונות מוסברת:

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	96.524	.139	.189

R^2 Nagelkerke – מקביל ל- R^2 כללי ברגרסיה. אחוז שונות Y המוסברת ע"י כל המנבאים יחד (בטווח מוכר של 0-1).

3. דיוק בניבוי :

Classification Table^a

Observed				Predicted		Percentage Correct
				whether mom believes course will help		
				no	yes	
Step 1	whether mom believes	no		46	5	90.2
	course will help	yes		17	14	45.2
Overall Percentage						73.2

a. The cut value is .500

סגוליות (true negative) – ביחס ל- $Y=0$ במדגם, כמה המודל דייק בניבוי (90.2%).
 רגישות (true positive) – ביחס ל- $Y=1$ במדגם, כמה המודל דייק בניבוי (45.2%).
 אחוז הניבוי הכללי – בכמה בסה"כ המודל מדייק בניבוי (73.2%).

מושגים חשובים להבנת טבלת המקדמים :

: ODDS

"הסיכוי להתרחשות אירוע מסוים" – ההסתברות שהאירוע יקרה לעומת ההסתברות

$$ODDS = \frac{p}{1-p} \quad \text{שאותו אירוע לא יקרה :}$$

ODDS=1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש שווה לסיכוי שהוא לא יתרחש $(\frac{0.5}{0.5})$.

ODDS>1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש גבוה מהסיכוי שלא יתרחש (למשל- $(\frac{0.75}{0.25})$).

ODDS<1 – הסיכוי שהאירוע יתרחש נמוך מהסיכוי שלא יתרחש (למשל- $(\frac{0.25}{0.75})$).

: ODDS RATIO (OR)

$$OR = \frac{ODDS(A)}{ODDS(B)} \quad \text{יחס בין סיכויים -}$$

כיצד משתנה ההסתברות במעבר מקבוצה A לקבוצה B.

OR=1 – הסיכוי להתרחשות האירוע שווה בין שתי הקבוצות- אין קשר בין המב"ת למ"ת.

OR>1 – הסיכוי להתרחשות האירוע בקבוצה A גבוה מאשר בקבוצה B – קשר חיובי.

OR<1 – הסיכוי להתרחשות האירוע בקבוצה A נמוך מאשר בקבוצה B – קשר שלילי.

טבלת המקדמים – תרומות ייחודיות של כל מנבא:

(מקביל לטבלת Coefficients בגרסיות לינאריות)

Variables in the Equation		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a	EDU_YRS	-.107	.138	.603	1	.438	.898
	AGE	-.029	.020	2.078	1	.149	.971
	SATISFAC	.118	.175	.457	1	.499	1.126
	BIRTH#	.882	.321	7.530	1	.006	2.415
	Constant	.001	1.796	.000	1	.999	1.001

a. Variable(s) entered on step 1: EDU_YRS, AGE, SATISFAC, BIRTH#.

1. מבחן WALS למובהקות המשתנים:
מבטא את מובהקות המשתנה מבחינת תרומתו הייחודית לניבוי Y.
2. B – מקדמי המשתנים ב-log odds:
בטא חיובית – עלייה ב-log odds של Y כפונקציה של עליה ביחידה אחת של X.
בטא שלילית – ירידה ב-log odds של Y כפונקציה של עליה ביחידה אחת של X.
3. משוואת הרגרסיה:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \hat{\beta}_4 x_{4i}$$

$$p = \frac{1}{1+e^{-\log odds}} : (p) \text{ חישוב הניבוי במונחי הסתברות}$$

$$ODDS = e^{\log odds} : (ODDS) \text{ חישוב הניבוי במונחי סיכויים}$$

4. Exp(B) – יחס הסיכויים (Odds Ratio):
מבטא את העלייה (אם גדול מ-1) או את הירידה (אם קטן מ-1) בסיכויים להיות בעלי ערך '1' ב-Y כאשר הערך במשתנה המנבא גדל ביחידה אחת.

$$\log \text{Exp}(B) = B ; e^B = \text{Exp}(B) : \text{היחס בין } B \text{ ל-Exp}(B)$$

שאלות:

- 1) חוקרת בחוג למגדר ביקשה לבדוק האם מגדר משפיע על תעסוקה. היא התבססה על סקר של הלמ"ס שדגם 826 מבוגרים בגילאי העבודה המרכזיים (25-55). היא הגדירה את המשתנים באופן הבא:
 WOMEN - "1" = אישה ; "0" = גבר.
 WORKING - "1" = כן ; "0" = לא.
 מהצלבה של שני המשתנים התקבלה הטבלה הבאה :

working * women Crosstabulation				
		women		Total
		.00	1.00	
working	.00	13	130	143
	1.00	338	345	683
Total		351	475	826

- על סמך הטבלה חשבו :
- מה ההסתברות של אישה לעבוד?
 - מה הסיכוי של אישה לעבוד?
 - מה ההסתברות של גבר לעבוד?
 - מה הסיכוי של גבר לעבוד?
 - מה יחס הסיכויים (OR) של נשים לעבוד לעומת גברים?
 - מה הלוגריתם של יחס הסיכויים?
 - מה יהיה ערך מקדם השיפוע B בגרסיה הלוגיסטית לניבוי תעסוקה על פי מגדר ומה משמעותו?
 - מה יהיה ערך $\text{Exp}(B)$ בגרסיה הלוגיסטית ומה משמעותו?

(2) במחקר ביקשו לבדוק כיצד מצב משפחתי וגובה המשכורת משפיעים על בעלות על דירה.

משתני המחקר:

apartm - בעלות על דירה: "1" - כן; "0" - לא.

status - מצב משפחתי: status (0) - רווק; status (1) - בזוגיות;

status (2) - בזוגיות עם ילדים; status(3) - פרוד או גרוש.

incom - הכנסה (בעשרות אלפי שקלים).

התקבלו הממצאים הבאים:

Classification Table ^a				
Observed		Predicted		
		apartm		Percentage Correct
		.00	1.00	
Step 1	apartm .00	22	11	66.7
	1.00	10	22	68.8
Overall Percentage				67.7

a. The cut value is .500

Omnibus Tests of Model Coefficients				
		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	10.218	4	.037
	Block	10.218	4	.037
	Model	10.218	4	.037

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	79.876 ^a	.145	.194

a. Estimation terminated at iteration number 4 because parameter estimates changed by less than .001.

Variables in the Equation						
	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a						
Status			.682	3	.877	
Status(1)	-.498	.713	.487	1	.485	.608
Status(2)	-.520	.784	.441	1	.507	.594
Status(3)	-.180	.748	.058	1	.810	.835
income	.000	.000	8.580	1	.003	2.536
Constant	-2.734	1.079	6.417	1	.011	.065

a. Variable(s) entered on step 1: Status, income.

- א. האם ניתן לדחות את השערת האפס הטוענת כי אין קשר בין בעלות על דירה להכנסה ולסטטוס משפחתי?
- ב. כמה אחוזים מצליחים המשתנים הב"ת להסביר מהשונות של המשתנה "בעלות על דירה"?
- ג. באיזה אחוז מצליח המודל לנבא באופן מדויק בעלות על דירה מתוך כלל המקרים?
- ד. באיזה מידה מצליח המודל לנבא בהצלחה בעלות על דירה מתוך בעלי הדירה במדגם? כיצד נקרא המדד המתאים?
- ה. באיזה מידה מצליח המודל לנבא בהצלחה אי-בעלות על דירה מתוך אלו שאינם בעלי דירה במדגם? כיצד נקרא המדד המתאים?
- ו. מהי המשוואה לניבוי בעלות על דירה על סמך המשתנים הב"ת?
- ז. לאיזה מהמשתנים הב"ת יש תרומה ייחודית מובהקת לניבוי בעלות על דירה? מהי משמעות מקדם B ו- $\text{Exp}(B)$ של משתנה זה?
- ח. על כל עליה ב-10,000 ₪ בהכנסה, בכמה אחוזים יעלה הסיכוי לבעלות על דירה?
- 53.6%
 - 253.6%
 - 153.6%
 - 93%
- ט. על כל עליה של 20,000 ₪ בהכנסה, בכמה אחוזים יעלה הסיכוי לבעלות על דירה?
- 307%
 - 423%
 - 542%
 - 642%
- י. מה ההסתברות של רווק המשתכר 20,000 ₪ להיות בעלים של דירה?
- יא. האם ההסתברות של אותו רווק להיות בעל דירה גבוהה / שווה / קטנה מההסתברות שלו לא להיות בעל דירה?
- יב. מהם הסיכויים (ODDS) שלו להיות בעל דירה?
- יג. עבור איזה משכורת הסיכוי (ההסתברות) של רווק להיות בעל דירה עולה על הסיכוי שלו לא להיות בעל דירה?
- יד. במידה ומשתנה ההכנסה היה נמדד באלפי שקלים (ולא בעשרות אלפי שקלים), כיצד הדבר היה משפיע על ההשפעה השולית של מקדם ההכנסה, אם בכלל?

- (3) חוקרים בחנו את המאפיינים שעשויים לנבא את הביצוע של חניכים במבחן הסיום של קורס פקחי טיסה.
- הביצוע במבחן נמדד על סולם של הצלחה/כשלון והמשתנים הבלתי תלויים כללו מין (1-זכר 0-נקבה), השכלה קודמת (0-ריאלית, 1-לא ריאלית) וביצוע במהלך הקורס (1-7).
- להלן תוצאות ניתוח הרגרסיה:

Omnibus Tests of Model Coefficients				
		Chi-square	Df	Sig.
Step 1	Step	20.982	3	.000
	Block	20.982	3	.000
	Model	20.982	3	.000

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	17.209 ^a	.503	.699

a. Estimation terminated at iteration number 7 because parameter estimates changed by less than .001.

Variables in the Equation						
	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1 ^a מין	4.445	2.611	2.897	1	.089	85.161
השכלה קודמת	-.146	2.054	.005	1	.943	.864
ביצוע במהלך הקורס	2.283	.944	5.846	1	.016	9.810
Constant	-19.284	8.056	5.731	1	.017	.000

a. Variable(s) entered on step 1: מין, השכלה, הקורס, הביצוע במהלך הקורס.

- האם למודל הכולל את שלושת המנבאים יכולת הסבר משמעותית?
- כמה אחוזים מתוך השונות של Y מצליח המודל להסביר?
- מהי משוואת הניבוי?
- לאיזה מן המשתנים הב"ת תרומה מובהקת לניבוי?
- הסבירו את משמעות המקדמים (b) שהתקבלו עבור המשתנים הב"ת: מגדר, השכלה קודמת והביצוע במהלך הקורס.
- בטאו את המקדמים במונחי הסיכויים להצלחה בקורס (odds) והסבירו אותם.
- הועלתה הטענה כי ההסתברות ההצלחה של נשים בקורס היא נמוכה ביותר, גם אם הן בעלות השכלה ריאלית ושביצוען במהלך הקורס מקסימאלי. אנא בדקו את הטענה.
- עבור זכר, בעל השכלה ריאלית, מהי ההשפעה השולית של עליה ביחידה אחת בדירוג הביצוע במהלך הקורס על הסיכוי להצליח בקורס?

(4) לפי מדגם של 20 זוגות נשואים, נאספו נתונים על המשתנה Y השווה ל-1 אם הזוג נוהג לצאת למסעדה לפחות פעם בשבוע ו-0 אחרת.

$$\text{נאמד המודל: } p = \frac{1}{1+e^{-z}} \text{ כאשר } p = P(Y=1).$$

התקבלו התוצאות הבאות: $z = -9.456 + 0.368INCOM - 1.207BABY$.
 $INCOM$ - ההכנסה של שני בני הזוג (באלפים). ההכנסה במדגם נעה בין 17 אלף ל-44 אלף.

$BABY$ - משתנה דמי המקבל את הערך '1' אם הזוג צריך להיעזר בשמרטפית ו-'0' אחרת.

ענה נכון/לא נכון:

- א. זוג הנעזר בשמרטפית ומשתכר 30.5 אלף, יוצא למסעדה לפחות פעם בשבוע בהסתברות גבוהה מ-0.5.
 - ב. עבור זוג שאינו נעזר בשמרטפית, עליה של אלף שח בהכנסה, מעלה את ההסתברות לצאת למסעדה ב-0.368.
 - ג. כל אחד מערכי P הנאמדים כאן איננו גבוה יותר מ-0.99.
 - ד. הסיכוי של זוג, שהכנסתו עלתה ב-3000 שח, לצאת למסעדה יעלה ב-200% בערך.
 - ה. המשכורת שצריך להרוויח זוג, אשר אינו נעזר בשמרטפית, כדי שהסיכוי שלו לצאת למסעדה יהיה שווה לסיכוי שלא לצאת למסעדה הוא 27,000.
 - ו. זוג, שלא נעזר בשמרטפית, צריך להרוויח יותר מ-28,000 שח כדי שהסיכוי שלו לצאת למסעדה יהיה גבוה פי 3 מהסיכוי שלו לא לצאת למסעדה.
 - ז. עבור odds ratio של משתנה "שמרטפות" התקבל רווח בר סמך הבא:
 $[0.123; 1.01]$ ברמת ביטחון של 95%.
- לפיכך ניתן לומר כי למשתנה "שמרטפות" תרומה מובהקת לניבוי הסיכוי לצאת למסעדה.

(5) בשנה מסוימת הוגשו 750 בקשות לקבלת משכנתא ורק חלק מהן אושר. המשתנה התלוי $Y=1$ אם הבקשה למשכנתא אושרה ול-0 אם נדחתה. המנבאים:

S משתנה דמי השווה ל-1 אם מבקש המשכנתא הוא רווק ול-0 אחרת.
 AGE = גיל בשנים.

$$\text{המודל הנאמד הינו: } p = \frac{1}{1+e^{-z}} \text{ כאשר } p = P(Y=1).$$

$$z = \alpha + \beta_1 age + \beta_2 age^2 + \beta_3 S$$

$$\text{תוצאות אמידת המודל: } z = -9.3 + 0.52age - 0.006age^2 - 0.314S$$

א. הסבירו את השפעת הגיל והמצב המשפחתי על ההסתברות לאישור המשכנתא.

ב. מה ההסתברות שתאושר משכנתא לרווק בן 30?

ג. עבור איזה גיל ההסתברות של אדם נשוי לקבל משכנתא היא מקסימאלית?

- 6) משרד הקבלה של האוניברסיטה רצה לבדוק באיזה מידה ניתן לחזות את ההצלחה של הסטודנט בקורס בסטטיסטיקה על סמך נתונים של מבחן פסיכומטרי, ציון ממוצע של תעודת בגרות וסוג תעודת הבגרות: ריאלית או לא ריאלית.
- במדגם של 50 סטודנטים נאספו נתונים על המשתנה Y השווה ל-1 אם הסטודנט הצליח במבחן בסטטיסטיקה ו-0 אם נכשל.
- כמו כן נרשמו עבור כל סטודנט ציון הפסיכומטרי, ממוצע הבגרות וסוג הבגרות (1 - בגרות ריאלית, 0 - לא ריאלית).
- להלן התוצאות שהתקבלו:

	B	S.E.	Wald	df	Sig.
פסיכומטרי	.090	.046	3.723	1	.054
ציון בגרות		2.070	1.089	1	.297
בגרות ריאלית	4.535	2.519	3.241	1	.072
Constant	-84.892	42.858	3.923	1	.048

- באיזה שיטת ניתוח הייתם ממליצים להשתמש ומדוע?
- נתון כי ההסתברות להצליח בקורס בסטטיסטיקה עבור סטודנט שעשה בגרות הומנית, קיבל 690 בפסיכומטרי וציון 9 בבגרות הינה: 0.034. ההסתברות של סטודנט שקיבל אותו ציון בפסיכומטרי, עם בגרות הומנית אבל ציונו בבגרות הוא 10 הינה: 0.233. על סמך הנתונים הללו השלם את הערך החסר בפלט המקדמים.
- לאיזה משתנים השפעה מובהקת על הסיכוי להצליח במבחן לסטטיסטיקה? (אלפא 10%)
- מה ההסתברות של סטודנט להצליח במבחן אם קיבל 680 בפסיכומטרי, ציון 10 בבגרות ולמד במגמה ריאלית?
- מהו השינוי בסיכויים (odds) להצליח במבחן בסטטיסטיקה כפונקציה של שינוי ביחידה אחת בפסיכומטרי?
- מהי ההשפעה השולית של נקודה נוספת בציון הבגרות על הסיכוי להצליח במבחן בסטטיסטיקה עבור סטודנט שקיבל 640 בפסיכומטרי ולמד במגמה ריאלית?
- רותי שיפרה את הפסיכומטרי שלה ב-20 נקודות. בכמה יעלה הסיכוי שלה להצליח בקורס בסטטיסטיקה?
- אם החוקר היה מחליט לקודד בגרות שאינה ריאלית כ-1 ובגרות ריאלית כ-0, האם הדבר היה משפיע על ערכו של $\text{Exp}(b)$ של סוג בגרות ועל המשמעות שלו?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.73 ב. 2.7 ג. 0.96 ד. 0.24 ה. 0.11
ו. -2.207 ז. $B = -2.207$ ח. $\text{Exp}(B) = 0.11$
- (2) א. כן. ב. 19.4% ג. 67.7% ד. רגישות = 68.8%
ה. סגוליות = 66.7%
- ו. $\ln(odds) = -2.734 - 0.498\text{status}(1) - 0.52\text{status}(2) - 0.18\text{status}(3) + 0.93 \cdot incom$
ז. משתנה "הכנסה"
ח. 3 י. 0.3
יא. קטנה. יב. 0.42 יג. 29,400 יד. 0.093
- (3) א. כן. ב. 69.9% ג. $\log(odds) = -19.284 + 4.445x_{1i} - 0.146x_{2i} + 2.283x_{3i}$
ד. המשתנה – "ביצוע במהלך הקורס". ה. ראו סרטון.
ו. מגדר - $\text{Exp}(b) = 85.19$, השכלה קודמת - $\text{Exp}(b) = 0.864$
ז. הטענה נכונה ($p = 0.035$).
ח. $\text{Exp}(b) = 9.81$
- (4) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון. ז. לא נכון.
- (5) א. ראו סרטון. ב. 0.533 ג. 40
- (6) א. רגרסיה לוגיסטית. ב. $B = 2.16$ ג. "פסיכומטרי" ו-"בגרות ריאלית".
ד. 0.914 ה. 1.09 ו. 8.67 ז. 504% ח. ראו סרטון.

אקונומטריקה ב

פרק 12 - משוואות סימולטניות

תוכן העניינים

1. כללי 68

משוואות סימולטניות:

רקע:

עוסקות בהפרת ההנחה של אי תלות בין המב"ת לטעויות בניבוי: $\text{cov}(x, u) = 0$.
ה- X ים במשוואה נחשבו משתנים אקסוגניים – משפיעים על Y אך לא מושפעים
ממנו בחזרה לעומת זאת משתנים אנדוגניים – משפיעים על Y אך גם מושפעים
ממנו בחזרה. מאחר ומשתנים אלו הם גם מסבירים וגם מוסברים, הם נחשבים
כמשתנים מקריים, המתואמים עם הטעויות במודל: $\text{cov}(x, u) \neq 0$.

משוואות המבנה (משוואות סימולטניות):

מערכת משוואות הכוללות משתנים מסבירים אנדוגניים ואקסוגניים.
בד"כ מדובר בשתי משוואות אשר המשתנה המוסבר בראשונה הוא משתנה מסביר
בשנייה והמשתנה המוסבר בשנייה הוא משתנה מסביר בראשונה.
משתנים המופיעים באחת המשוואות כמוסברים ובאחרת כמסבירים הם משתנים
אנדוגניים. יתר המשתנים במשוואות הם אקסוגניים.
המטרה היא לאמוד בצורה יעילה את הפרמטרים (אלפות ובטות) ולבצע בדיקת
השערות.

השלכות על אר"פ:

הנחת אי תלות בין המשתנה הב"ת והטעויות שימשה אותנו להוכחת ליניאריות,
חוסר הטיה ועקיבות.
לכן הפרתה משמעה פגיעה בכל תכונות אר"פ.
האומדים לא ליניאריים, מוטים לא עקיבים ולכן גם לא יעילים (לפי גאוס מרקוב).
אומד השונות מוטה גם הוא ובדיקת ההשערות לא תקפה (ללא תלות בגודל המדגם).

הצורה המצומצמת של מודל עם משוואות סימולטניות:

משוואות הצורה המצומצמת הן פתרון עבור המשתנים האנדוגניים במערכת:
הגדרת המשתנים האנדוגניים כפונקציה של המשתנים האקסוגניים במערכת בלבד.
מספר המשוואות המצומצמות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת
(במקרה זה שניים).

תכונות המשוואות מהצורה המצומצמת :

- מס' המשוואות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת $(Y \text{ ו- } X)$.
- המשתנה המוסבר הוא אנדוגני וכל המסבירים אקסוגניים.
- המשתנים המסבירים הם זהים בכל המשוואות (ה- Z ים).
- מכיוון שכל המשתנים המסבירים הם אקסוגניים ניתן לאמוד את הפרמטרים (ה- λ ות ו- μ ים) ב-OLS ולקבל אומדים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים עם יכולת לבצע בדיקת השערות.

אמידת הפרמטרים של משוואות המבנה באמצעות משוואות הצורה המצומצמת :
משוואות הצורה המצומצמת מאפשרות לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS אבל אנחנו מעוניינים למעשה לאמוד את הפרמטרים של המשוואות המקוריות – משוואות המבנה. מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת נחלץ את הפרמטרים של משוואות המבנה.

בתהליך החילוץ של הפרמטרים המבניים ייתכנו 3 מצבים :

1. אין זיהוי : לא ניתן לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.
2. זיהוי מדויק : יש רק דרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מהפרמטרים של הצורה המצומצמת.
3. זיהוי יתר : יש יותר מדרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.

בכדי להקל על בעיית הזיהוי מומלץ לאמץ את הכלל הבא :
עבור כל אחת מהמשוואות המבניות יש לחשב :

1. $g - 1$: מס' אנדוגניים במשוואה הספציפית פחות 1 ולהשוות עם :
 2. $K - k$: מספר אקסוגניים סה"כ בשתי המשוואות כולל חותך (K) פחות מספר אקסוגניים במשוואה הספציפית כולל חותך (k) .
- אם $2 = 1$ זיהוי מדויק ; $2 > 1$ זיהוי יתר ; $2 < 1$ אין זיהוי.

שיטות לפתרון משוואות סימולטניות:

1. שיטת ריבועים פחותים עקיפה (ILS):

- א. יש להציג את מערכת משוואות המבנה בצורתה המצומצמת.
- ב. יש לאמוד בשיטת OLS את הפרמטרים של המשוואות בצורה המצומצמת.
- ג. יש לחלץ מן הפרמטרים של המערכת המצומצמת את הפרמטרים של הצורה המבנית.

משום שתהליך החילוץ איננו ליניארי האומדים המבניים המתקבלים הם מוטים אך עקיבים.
 כאשר הזיהוי מדויק: האומדים יהיו גם אסימפטוטית יעילים (במדגמים גדולים).
 כאשר הזיהוי הוא יתר: האומדים לא יהיו יעילים.

2. שיטת ריבועים פחותים בשני שלבים (2SLS):

- א. אמידת משוואות הצורה המצומצמת בשיטת OLS ושימוש בתוצאות האמידה כדי לחשב את המשתנים האנדוגניים (המסבירים).
- ב. הצבת המשתנים האנדוגניים שהתקבלו במשוואות המבנה ואומדתם ב-OLS.

אם משוואות המבנה מזוהות בדיוק או ביתר – האומדים שיתקבלו יהיו אמנם מוטים אבל עקיבים ויעילים אסימפטוטית. האומדים שיתקבלו יהיו זהים לאומדים שהתקבלו בשיטת הריבועים הפחותים העקיפה.
 כאשר אין זיהוי: אין אקסוגניים ולכן אין משתנים מסבירים בצורה המצומצמת או שכל האקסוגניים בצורה המצומצמת כבר קיימים במשוואה המקורית ולכן החלפת x ב- $\hat{x}$ תיצור בעיה של מולטיקוליניאריות מלאה.

3. שיטת משתני העזר (IV):

משתנה עזר הוא משתנה שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני במשוואת המבנה ויעזור לאמוד את הקשר בינו לבין התלוי.
 משתנה העזר צריך להיות:

- א. משתנה אקזוגני או פונקציה ליניארית של משתנים אקזוגניים: $\text{cov}(Z, u) = 0$.
- ב. מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף: $\text{cov}(Z, X) \neq 0$.

ככל שהמתאם גבוה יותר, האומד שיתקבל באמצעותו יהיה טוב יותר.
 הבעיה: אומדני OLS שיתקבלו יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.
 הפתרון בשיטת IV: אמידת ההשפעה של Y על X עם משתנה אקסוגני שלא קיים במערכת שמתואם עם Y (אותו הוא מחליף) אך לא עם u .

אם יש יותר ממשתנה עזר אחד המקיימים את התנאים הנ"ל, האומדים שיתקבלו יהיו כולם מוטים אך עקיבים (ניתן להשתמש בהם במדגמים גדולים). משתנה העזר היחיד שיניב אומד יעיל יהיה בעל המתאם הגבוה ביותר עם המשתנה האנדוגני אותו הוא בא להחליף. משתנה עזר זה יהיה אומדן לאנדוגני שהתקבל מאמידת משוואת הצורה המצומצמת בשלב הראשון של 2SLS.

משתנה לא יוכל לשמש כמשתנה עזר :
אם נוסחתו מכילה רק משתנים אקזוגניים המצויים במשוואת המבנה בה הוא משמש כמשתנה עזר, שכן אז תיווצר בעיית מולטיקוליניאריות מלאה. במילים אחרות, נוסחת משתנה העזר צריכה להיות מורכבת מלפחות משתנה אקזוגני אחד שלא מופיע במשוואה כדי שהמשתנה יוכל לשמש כמשתנה עזר.

משתני עזר שונים יכולים להניב את אותם האומדים לפרמטרים :
נבדוק זאת בצורה הבאה : נמחק מהנוסחאות של משתני העזר את המשתנים האקסוגניים המופיעים במשוואה. אם נשארנו עם שני ביטויים שהם מכפלה אחד של השני, יתקבלו אותם האומדים.

סיכום תוצאות אמידה של משוואות סימולטניות:

מס' האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות ותכונותיהם תלויים בזיהוי של המשוואה :
אם המשוואה לא מזוהה : לא ניתן להשתמש באף אחת מהשיטות.
כאשר המשוואה מזוהה (בדיוק או ביתר) : האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות יהיו תמיד מוטים אך עקיבים.

תכונת היעילות ומס' האומדים האפשרי מסוכמים בטבלה הבאה :

מזוהה בדיוק	מזוהה ביתר	
אומד אחד לפרמטר יעיל	יתכן יותר מאומד אחד לפרמטר לא יעילים	שיטת ILS
אומדן אחד למשתנה האנדוגני יעיל		שיטת 2SLS
אינסוף משתני עזר אם משתנה העזר זהה לאומדן לאנדוגני המתקבל בשלב הראשון בשיטת – 2SLS הוא יהיה גם יעיל		שיטת IV

כאשר הזיהוי מדויק יתקבל אותו אומד מוטה אך עקיב ויעיל בשלושת השיטות :
ILS, 2SLS ו-IV (במידה ומשתנה העזר הוא $\hat{X}_i$ מהשלב הראשון של 2SLS).

משתנים בפיגור ומשוואות סימולטניות:

אם X_t אקסוגני אז גם המשתנים בפיגור X_{t-p} בוודאות אקסוגניים.
 אם Y_t אנדוגני אז מעמדם של המשתנים בפיגור תלוי בקיומו של מתאם סדרתי:
 אם יש מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) \neq 0$, אז Y_{t-1} אנדוגני.
 אם אין מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) = 0$, אז Y_{t-1} אקסוגני.

מבחנים סטטיסטיים לבחינת אנדוגניות ולחזק משתנה עזר:

מבחן האוזמן (Hausman Test):

מבחן המשמש אותנו לבחינת אנדוגניות של משתנה מסוים.

- השלב הראשון לביצוע מבחן האוזמן הוא הרצת המשוואה המצומצמת – כלומר, המשתנה שחושדים שהוא אנדוגני כתלוי על כל האקסוגניים.
- מאמידה זו נשמור את סידרת השאריות הנאמדות ($\hat{v}$).
- כעת נאמוד את המודל המקורי (משוואת המבנה) ונוסיף לו את $\hat{v}$ כמשתנה מסביר חדש.
- לפי תוצאות האמידה – אם המקדם של $\hat{v}$ מובהק נסיק כי המשתנה הוא אכן משתנה אנדוגני במודל.

מבחן לחוזק IV:

מבחן שמתבצע על המשוואה המצומצמת שבה נעשה שימוש במשתני העזר. בודקים:

- האם משתנה העזר לניבוי המשתנה התלוי מובהק באוכ' באמצעות מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה. אם כן- ניתן להסיק כי המשתנה האקסוגני, המשמש כמשתנה עזר, מתואם עם האנדוגני אותו הוא אמור להחליף.
- אולם בכדי לבדוק האם משתני העזר חזקים מספיק נבצע מבחן F למובהקות כל משתני העזר המוצעים במשוואה המצומצמת. כלל אצבע-רק אם:
 $F_{stat} > 10$ נוכל להסיק כי משתני העזר חזקים מספיק בכדי שנוכל לקבל תוצאות אמינות כאשר אנו משתמשים בהם.

שאלות:

זיהוי משוואות המבנה:

- (1) חוקר רצה לאמוד את פונקציית הביקוש ואת פונקציית ההיצע לתות שדה. הוא אסף נתונים עבור 30 תקופות:
- P_t - מחיר קופסא בש"ח בתקופה t .
 - Q_t - כמות נקנית בק"ג בתקופה t .
 - Z_t - מחיר פרי תחליפי ב-ש בתקופה t .
 - $INCOME_t$ - הכנסת הצרכנים באלפי ש בתקופה t .
 - L_t - מחיר שעת עבודה ב-ש בתקופה t .
- א. החוקר מניח שהכמות המבוקשת היא פונקציה של מחיר התות שדה, של מחיר הפרי התחלפי ושל הכנסת הצרכנים, והכמות המוצעת היא פונקציה של מחיר התות שדה ושל מחיר העבודה.
- נסחו את המודל הסימולטני, תחת ההנחה שהגמישויות קבועות. הציגו גם את תנאי הסדר וקבעו עבור כל משוואה אם היא מזוהה במדויק, ביתר או בחסר.
- ב. עיינו במודל 1 שבדפי הפלט (ראו סרטון) והשיבו: איזו פונקציה נאמדה, והאם תוצאות האמידה שהתקבלו מתיישבות עם התיאוריה הכלכלית? נמקו.
- ג. עיינו בדפי הפלט המתאימים (ראו סרטון) והשיבו: אם העלות של שעת עבודה תעלה באחוז אחד, מהם השינויים הצפויים בכמות ובמחיר של שווי משקל?
- ד. בתקופה מסוימת אנו צופים שמחיר המוצר התחלפי יהיה 10 ש, ההכנסה תהיה 50 אלף ש, מחיר שעת עבודה 25 ש. מה יהיה מחיר שווי המשקל של תות השדה? האם ניתן גם לאמוד את כמות שווי המשקל?

להלן הפלטים:

Model 1: TSLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_Q Instruments: I_L

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.83485	1.14385	-1.604	0.10869
I_P	-1.34898	0.645690	-2.089	0.03669 **
I_Z	1.72145	0.467875	3.679	0.00023 ***
I_income	0.984145	0.483543	2.035	0.04182 **

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 2.67757

Standard error of residuals = 0.32091

Unadjusted R-squared = 0.222881

Adjusted R-squared = 0.133214

F-statistic (3, 26) = 2.48564 (p-value = 0.0829)

Model 3: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	0.499595	0.630065	0.793	0.43500
I_L	-0.611731	0.163450	-3.743	0.00091 ***
I_income	0.395076	0.142590	2.771	0.01019 **
I_Z	0.937441	0.197381	4.749	0.00007 ***

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 0.834357

Standard error of residuals = 0.179139

Unadjusted R-squared = 0.681008

Adjusted R-squared = 0.644201

F-statistic (3, 26) = 18.5023 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 11.1662

(Log-likelihood for Q = -75.1618)

Model 4: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_P

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.73053	0.419481	-4.125	0.00034 ***
I_L	0.453478	0.108821	4.167	0.00030 ***
I_income	0.436678	0.0949326	4.600	0.00010 ***
I_Z	0.581185	0.131411	4.423	0.00015 ***

Mean of dependent variable = 2.99427

Standard deviation of dep. var. = 0.314761

Sum of squared residuals = 0.369832

Standard error of residuals = 0.119266

Unadjusted R-squared = 0.871281

Adjusted R-squared = 0.856428

F-statistic (3, 26) = 58.6632 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 23.3704

(Log-likelihood for P = -66.4576)

שיטת ILS:

(2) נניח שאנו מתכוונים לאמוד את המשוואות:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

 C_t - הוצאות לתצרוכת פרטית. Y_t - הכנסה לאומית. u_t - הפרעה אקראית.

א. מהי הבעיה באמידת המשוואות בשיטת הריבועים הפחותים?

מהן תכונות אר"פ?

ב. האם המשוואות מזוהות?

ג. אמדו את מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת באופן ידני.

ד. מהו הפתרון של המשוואות המצומצמות בשיטת ILS?

להלן תוצאות אמידת מערכת המשוואות בצורה המצומצמת:

Dependent Variable: C

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter	Standard	T for H0:	
		Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.000
Z	1	-0.087066	0.3036	-0.2867	0.776

Dependent Variable: Y

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter	Standard	T for H0:	
		Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.0000
Z	1	0.912934	0.3036	3.00699	0.0049

ה. חשבו את האומדים המבניים.

שיטת 2SLS:

(3) תאר את תהליך האמידה בשני שלבים (2SLS) של משוואות המבנה:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

C_t - הוצאות לתצרוכת פרטית.

Y_t - הכנסה לאומית.

u_t - הפרעה אקראית.

א. מה ניתן יהיה לומר על האומדים שהתקבלו בשיטה זו?

ב. מה יהיה ערכם של האומדים $\hat{\beta}$ ו- $\hat{\alpha}$?

להלן תוצאות האמידה בשיטת 2 השלבים:

Dependent variable: C

Parameter Estimates					
		Parameter	Standard	T for H0:	
Variable	DF	Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	16264.47	8221.233	1.978349	0.0520
y	1	-0.095370	0.364274	-0.261808	0.7943

Dependent variable: Y

Parameter Estimates					
		Parameter	Standard	T for H0:	
Variable	DF	Estimate	Error	Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	-9.95E-09	3.52E-09	-2.828212	0.0062
C	1	1.00000	2.08E-13	4.80E+12	0.0000
Z	1	1.00000	1.99E-13	5.04E+12	0.0000

(4) לפניך המודל הסימולטני הבא :

$$Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Z_t + u_t \quad \text{משוואת הביקוש}$$

$$Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 P_t + v_t \quad \text{משוואת ההיצע}$$

$$P_t \quad \text{- מחיר המוצר בתקופה } t$$

$$Q_t^D \quad \text{- כמות מבוקשת בתקופה } t$$

$$Q_t^S \quad \text{- כמות מוצעת בתקופה } t$$

$$Z_t \quad \text{- מחיר המוצר התחלפי בתקופה } t$$

$$Z_t \quad \text{הוא משתנה אקסוגני.}$$

א. רשום את המשוואות המצומצמות וקבע את התכונות של אומדי OLS למשוואות אלה.

ב. היעזר בשיטת ILS לאמידת הפרמטרים של המשוואה שניתן לזהות, אם התקבלו המשוואות המצומצמות הבאות :

$$\hat{Q}_t = 2 + 3Z_t$$

$$\hat{P}_t = 1 + 4Z_t$$

ג. באם ננסה לאמוד את משוואת הביקוש בשיטת TSLS :

האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב הראשון? נמק.

האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב השני? נמק.

ד. החוקר מנסה לאמוד את משוואת ההיצע בשיטת TSLS.

למה שווה האומדן שיתקבל ל- β_1 ?

שיטת IV:

(5) נתונות המשוואות הבאות :

$$1. Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \varepsilon_t$$

$$2. X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \omega_t$$

נתון כי : T_t , X_t משתנים אנדוגניים ו- Z_{1t} , Z_{2t} משתנים אקסוגניים.

חוו דעתכם על כל אחת מהטענות הבאות, והסבירו :

א. ניתן להשתמש ב- Z_{1t} כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 1.

ב. ניתן להשתמש ב- $\frac{Z_{1t} + Z_{2t}}{2}$ כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2.

ג. יתכנו מספר אומדים עקיבים שונים זה מזה ל- β_2 במשוואה מס' 2.

ד. שימוש ב- Z_2 כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2 יניב אומדים עקיבים וגם יעילים.

ה. משתנה העזר $Z_{1t} + Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

ו. משתנה העזר $3Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אותם אומדים כמו משתנה העזר בסעיף ד'.

ז. משתנה העזר $7Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

מבחן האוזמן:

- (6) נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי. לכל מדינה i נסמן ב- Y_i את הרמה הנאמדת של ההכנסה, נסמן ב- s_i את שיעור החיסכון במדינה i וב- D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה ושיעור החיסכון על איתנות הממשל דמוקרטי: $D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 s_i + \varepsilon_i$. אבל אתם חוששים ש- $\text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$. הסבירו כיצד תשתמשו ב- $Hausman Test$ כדי לבחון את ההשערה: $H_0 : \text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) = 0$?

מבחן לחוזק IV:

- (7) נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאות:
- $$Y_{1i} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$
- $$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + v_i$$
- כאשר: X_1, X_2, X_3 הינם משתנים אקסוגנים. להלן מערכת המשוואות של הצורה המצומצמת:
- $$Y_{1i} = \pi_{11} X_{1i} + \pi_{12} X_{2i} + \pi_{13} X_{3i} + \tilde{u}_i$$
- $$Y_{2i} = \pi_{21} X_{1i} + \pi_{22} X_{2i} + \pi_{23} X_{3i} + \tilde{v}_i$$
- תארו כיצד בודקים ש- X_{1i} ו- X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?

תרגילים מסכמים:

(1) נתונות המשוואות הבאות:

$$1. Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \alpha_4 Z_{3t} + \alpha_5 Z_{4t} + u_t$$

$$2. X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \beta_4 Z_{5t} + v_t$$

נתון כי: $\text{cov}(Z_j, u_t) = 0$ עבור $j = 1, \dots, 5$ (כלומר ה-Z ים אקסגוניים).

א. אמידת כל אחת מהמשוואות תניב אומדים:

i. מוטים נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ii. עקיבים נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ב. משוואה 1 מזוהה בדיוק/ מזוהה ביתר/בלתי מזוהה

משוואה 2 מזוהה בדיוק/ מזוהה ביתר/ בלתי מזוהה

ג. חווה דעתך על הטענות הבאות:

i. תוך שימוש בשיטת ILS

ניתן לאמוד את משוואה 1

באופן עקיב וחד ערכי: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ii. תוך שימוש בשיטת ILS

ניתן לאמוד את משוואה 2

באופן עקיב וחד ערכי: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ד. משוואות הצורה המצומצמת הן:

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \lambda_3 Z_{3t} + \lambda_4 Z_{4t} + \lambda_5 Z_{5t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = \mu_0 + \mu_1 Y_t + \mu_2 Z_{2t} + \mu_3 Z_{3t} + \mu_4 Z_{4t} + \mu_5 Z_{5t} + \varepsilon_{2t}$$

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ה. אמידת משוואות הצורה המצומצמת

ב-OLS תניב אומדים חסרי הטיה,

עקיבים ועילים: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ו. להלן רשימה של משתני עזר פוטנציאליים:

$$i. Z_5$$

$$ii. \frac{Z_1 + Z_5}{2}$$

$$iii. 2Z_1 + 3Z_2 + Z_3$$

$$iv. Z_3 + Z_4$$

$$v. 3Z_3 + 4Z_4$$

$$vi. 3Z_3 + 3Z_4$$

$$vii. Z_1$$

עבור כל משתנה רשום באיזה משוואה ניתן להשתמש בו אם בכלל.

ז. איזה מבין משתני העזר הבאים יניבו את אותם האומדים עבור אותה המשוואה (תתכן יותר מתשובה אחת נכונה):

i. i-ii.

ii. iv-vi.

iii. v-vi.

iv. iv-v.

ח. האם משתנה עזר (Z_5) יניב אומדים יעילים?

ט. אם ידוע כי אין מתאם סדרתי, האם X_{t-1} , Y_{t-1} הם אנדוגניים או אקסוגניים?

י. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשוואה 1 תשנה את הזיהוי של משוואה 2?

יא. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשוואה 2 תשנה את הזיהוי של משוואה 1?

יב. הנח כי הוטלו המגבלות הבאות על הפרמטרים המבניים: $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. האם ניתן כעת לזהות את יתר הפרמטרים במודל?

(2) היצע העבודה של נשים נשואות היה נושא מרכזי במחקר הכלכלי.

לצורך אמידת היצע זה נבחר המודל הבא:

$$HOURS = \beta_1 + \beta_2 WAGE + \beta_3 EDUC + \beta_4 AGE + \beta_5 KIDSL6 + \beta_6 KIDS618 + \beta_7 NWIFEINC + \varepsilon$$

כאשר:

$HOURS$ - היצע העבודה בשעות.

$WAGE$ - שכר לשעה.

$EDUC$ - מספר שנות הלימוד.

AGE - גיל.

$KIDSL6$ - מספר הילדים בבית מתחת לגיל 6.

$KIDS618$ - מספר הילדים בגיל 6-18.

$NWIFEINC$ - הכנסת משק הבית ממקורות שאינם בעבודתה של האישה.

א. מהם הסימנים שתצפו לקבל בכל אחד מהמקדמים?

ב. הסבירו מדוע לא ניתן לאמוד את משוואת ההיצע הנ"ל בשיטת הריבועים הפחותים.

ג. הניחו כי אנחנו משתמשים בניסיון של האישה בשוק העבודה ($EXPER$) ובריבועו ($EXPER^2$) כמשתני עזר למשתנה $WAGE$. הסבירו מדוע משתני העזר הללו עונים על הדרישות שלנו ממשתני עזר.

ד. תארו את השלבים (לא בפקודות מחשב) שתבצעו כדי לקבל את האומדים בשיטת TSLS.

(3) נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאה :

$$Y_{1i} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

$$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + v_i$$

כאשר X_1, X_2, X_3 הינם משתנים אקסוגניים.

- א. חלצו את מערכת המשוואות המצומצמת (Reduced Form Equations) של Y_1 ו- Y_2 (ז"א פתרו את המערכת המבנית עבור שני המשתנים האנדוגניים Y_1 ו- Y_2 על מנת לקבל את הצורה המצומצמת. כתבו את המקדמים והשאריות במערכת המצומצמת למטה כפונקציות של הפרמטרים והשאריות במערכת המבנית).
- ב. הראו שבהינתן אומדים עקיבים ל- $\pi_{11}, \dots, \pi_{23}$ ניתן למצוא אומד עקיב ל- γ .
- ג. האם γ ניתן לזיהוי כאשר $\beta_3 = 0$?
- ד. אילו תנאים צריכים X_{1i} ו- X_{2i} לקיים בכדי להיות משתני עזר ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?
- ה. תארו כיצד בודקים ש- X_{1i} ו- X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?

- (4) נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי. לכל מדינה i נסמן ב- Y_i את הרמה הנאמדת של ההכנסה וב- D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה על ממשל דמוקרטי: $D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \varepsilon_i$, אבל אתם חוששים ש- $\text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$.
- א. הסבירו מדוע החשש שההכנסה מתואמת עם השגיאה במשוואה הנ"ל הגיוני?
- ב. האם אומד הריבועים הפחותים של β_2 הינו חסר הטיה?
- ג. נסמן ב- S_i את שיעור החיסכון במדינה i . הסבירו אלו תנאים צריך משתנה עזר (iv) לקיים. נמקו מדוע S_i מתאים או לא מתאים לשמש כמשתנה עזר.
- ד. הסבירו כיצד תשתמשו בשיטת 2SLS כדי לאמוד את β_2 . האם האומד המתקבל עקיב?
- ה. הסבירו כיצד תשתמשו ב- $Hausman Test$ כדי לבחון את ההשערה: $H_0 : \text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) = 0$.

תשובות סופיות:

$$\ln Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 \ln P_t + \alpha_2 \ln Z_t + \alpha_3 \ln INCOME_t + u_t \quad (1)$$

$$\ln Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln L_t + v_t$$

$$Q_t^D = Q_t^S$$

משוואת הביקוש מזוהה במדויק.

משוואת ההיצע מזוהה ביתר.

ב. פונקציית הביקוש, התוצאות מתיישבות.

ג. הכמות תרד ב-0.61173%, המחיר יעלה ב-0.453478%.

$$\hat{P} = 16.05, \hat{Q} = 9.34 \quad \text{ד.}$$

$$\hat{C}_t = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_t, \hat{Y}_t = \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4 Z_t \quad \text{ג.} \quad \text{א. ראו סרטון. ב. מזוהות בדיוק.} \quad (2)$$

$$\hat{\alpha} = 16,264.46, \hat{\beta} = -0.09537 \quad \text{ה.} \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_4} = \frac{\hat{\gamma}_3}{\hat{\gamma}_4}, \hat{\beta} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_4} \quad \text{ד.}$$

א. מוטים אך עקיבים ויעילים במדגמים גדולים. (3)

$$\hat{\beta} = -0.09537, \hat{\alpha} = 16,264.47 \quad \text{ב.}$$

$$\text{BLUE}, Q_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} - \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \cdot Z_t + \frac{\beta_1 (u_t - v_t)}{\alpha_1 - \beta_1} + v_t \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\hat{\beta}_0 = 1.25, \hat{\beta}_1 = 0.75 \quad \text{ב.} \quad \text{ג. שלב ראשון: ניתן, שלב שני: לא ניתן.}$$

$$0.75 \quad \text{ד.}$$

$$\text{א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.} \quad (5)$$

$$\text{ו. נכון. ז. לא נכון.}$$

$$\text{ראו סרטון.} \quad (6)$$

$$\text{ראו סרטון.} \quad (7)$$

תרגילים מסכמים:

$$\text{א. i. נכון. ii. לא נכון.} \quad (1)$$

ב. משוואה 1: מזוהה בדיוק, משוואה 2: מזוהה ביתר.

ג. i. נכון. ii. לא נכון. ד. נכון. ה. נכון.

$$\text{ו. i. 1. ii. 1. iii. 2. iv. 2. v. 2.} \quad (2)$$

$$\text{vii. 2. i. נכון. ii. נכון. iii. לא נכון. iv. לא נכון.} \quad (3)$$

$$\text{ח. כן. ט. אקסוגניים. י. לא. יא. כן.}$$

יב. משוואה 1 מזוהה בדיוק ומשוואה 2 מזוהה ביתר.

א. מקדם wage חיובי, מקדם educ לא ניתן לדעת, מקדם age יכול להיות חיובי (2)

או שלילי, מקדם kidsl6 שלילי, מקדם kids618 חיובי, מקדם nwifeinc שלילי.

ב. ראו סרטון. ג. ראו סרטון. ד. ראו סרטון.

$$\pi_{11} = \frac{\beta_1}{1 - \delta\gamma}, \pi_{12} = \frac{\beta_2}{1 - \delta\gamma}, \pi_{13} = \frac{\beta_3\gamma}{1 - \delta\gamma} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\pi_{21} = \frac{\beta_1\delta}{1 - \delta\gamma}, \pi_{22} = \frac{\beta_2\delta}{1 - \delta\gamma}, \pi_{23} = \frac{\beta_3}{1 - \delta\gamma}$$

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i + \gamma v_i}{1 - \delta\gamma}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i + \delta u_i}{1 - \delta\gamma}$$

ב. מכיוון ש- $\gamma = \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}}$, ניתן לקבל אומד עקיב ל- γ ע"י $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\pi}_{13}}{\hat{\pi}_{23}}$.

ג. לא. ד. צריכים להיות מתואמים עם y_{1i} ובלתי מתואמים עם v_i .

ה. ראו סרטון.

4 א. טעות מדידה במשתנה המוסבר, משתנה מושמט, משוואות סימולטניות.

ב. לא. ג. ראו סרטון. ד. עקיב. ה. ראו סרטון.

אקונומטריקה ב

פרק 13 - סיכום תכונות ארפ

תוכן העניינים

1. כללי 84

סיכום תכונות אר"פ:

רקע:

אם המודל שאותו אנו אומדים מנסח נכון את הקשר המתמטי בין המשתנים וכולל את כל המשתנים הרלוונטיים להסבר התופעה ורק אותם ולא קיים קשר חזק או מלא בין המשתנים הבלתי תלויים במודל וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות, אזי האומדים שאותם נקבל הם א.ח.ה, הם BLUE (יעילים) והם עקיבים.

הבעיה במודל	כולל את כל המשתנים הרלוונטיים	לא כולל משתנים שאינם רלוונטיים	אין קשר חזק או מלא בין ה"ב"	כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות	פגיעה בתכונות אר"פ
אין בעיה	✓	✓	✓	✓	אין פגיעה
השמטת משתנים רלוונטיים	×	✓	✓	✓	פגיעה בכל התכונות - מוטים, לא יעילים ולא עקיבים
הוספת משתנים לא רלוונטיים	✓	×	✓	✓	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות חלקית	✓	✓	×	✓	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות מלאה	✓	✓	×	✓	אר"פ אינם מוגדרים
הטרוסקדסטיות	✓	✓	✓	×	יעילות
מתאם סדרתי	✓	✓	✓	×	יעילות
מודלים דינמיים	✓	✓	✓	×	מוטים היעילות והעקיבות תלויים בקיום מתאם סדרתי
משוואות סימולטניות	✓	✓	✓	×	**אומדים מוטים אך עקיבים. היעילות תלויה בשיטה.

*אלא אם אין מתאם בין המשתנה ה"ב" שהושמט לאלו המצויים במודל.
**בהנחה שהמשוואות מזוהות.

אקונומטריקה ב

פרק 14 - הדרכה בקריאת פלטים רלוונטיים בתוכנת GRTL

תוכן העניינים

1. כללי 85

קריאת פלטים רלוונטיים בתוכנת GRTL:

שאלות:

גרסיה מרובה:

- (1) המחקר עוסק בחקירת פונקציית הצריכה של סיגריות בתורכיה, בשנים 1960-1988. המחקר גם מתייחס לכך שבשנת 1982 חלה עלייה משמעותית בתל"ג לנפש ובמחירי הסיגריות, ולכן סביר להניח שלאורך התקופה הנחקרת חלו שינויים בפונקציית הצריכה. המודלים נאמדו לפי המשתנים הבאים:
- Q - צריכת סיגריות ממוצעת, בק"ג.
 - Y - תל"ג לנפש במחירים של 1982, בלירות תורכיות.
 - P - מחיר ריאלי של סיגריות, בלירות תורכיות לק"ג.
 - D82 - משתנה דמי השווה ל-1 החל משנת 1982, ואחרת -אפס.

בשל טרנספורמציות לוגריתמיות הוגדרו גם המשתנים:

Q_1 - הלוג של Q.

Y_1 - הלוג של Y.

P_1 - הלוג של P.

המשתנה D82_1_Y : כפול המשתנה D82.

המשתנה D82_1_P : כפול המשתנה D82.

להלן תוצאות האמידה:

Model 1: OLS estimates using the 29 observations 1960-1988

Dependent variable: L_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-4.58987	0.724913	-6.332	<0.00001
L_Y	0.688498	0.0947276	7.268	<0.00001
L_P	-0.485683	0.101394	-4.790	0.00006

Mean of dependent variable = 0.784827

Standard deviation of dep. var. = 0.108499

Sum of squared residuals = 0.0949108

Standard error of residuals = 0.0604187

Unadjusted R-squared = 0.712058

Adjusted R-squared = 0.689908

(F-statistic (2, 26) = 32.148 (p-value < 0.00001

Durbin-Watson statistic = 1.00057

First-order autocorrelation coeff. = 0.489867

Log-likelihood = 41.8214

(Log-likelihood for Q = 19.0615)

Akaike information criterion (AIC) = -77.6429

Schwarz Bayesian criterion (BIC) = -73.541

Hannan-Quinn criterion (HQC) = -76.3582

Model 2: OLS estimates using the 29 observations 1960-1988

Dependent variable: L_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-5.02489	0.541262	-9.284	<0.00001
D82	13.8623	2.85197	4.861	0.00007
L_Y	0.735837	0.0726077	10.134	<0.00001
D82L_Y	-1.68927	0.345466	-4.890	0.00006
L_P	-0.381857	0.103289	-3.697	0.00119
D82L_P	0.490526	0.153989	3.185	0.00412

Mean of dependent variable = 0.784827

Standard deviation of dep. var. = 0.108499

Sum of squared residuals = 0.0261724

Standard error of residuals = 0.0337332

Unadjusted R-squared = 0.920598

Adjusted R-squared = 0.903336

(F-statistic (5, 23) = 53.3328 (p-value < 0.00001

Durbin-Watson statistic = 2.02153

First-order autocorrelation coeff. = -0.0136939

Log-likelihood = 60.5008

(Log-likelihood for Q = 37.7408)

Akaike information criterion (AIC) = -109.002

Schwarz Bayesian criterion (BIC) = -100.798

Hannan-Quinn criterion (HQC) = -106.432

- א. לפי תוצאות האמידה של מודל (1) ושל מודל (2), האם האבחנה בין השנים שלפני ואחרי 1982 תורמת הסבר משמעותי לשונות צריכת הסיגריות? נסחו ובחנו השערה זו בר"מ 0.05.
- ב. חשבו, לפי מודל (2), המבחין בין השנים שלפני ואחרי 1982, רווח סמך לגמישות הביקוש לסיגריות לפי המחיר, ברמת בטחון 95%, ועבור השנים 1960-1981 בלבד.
- ג. התייחסו למודל (2) בלבד והשיבו: מהי גמישות הביקוש ביחס למחיר לפני 1982? ומהי גמישות הביקוש ביחס למחיר אחרי 1982. כמו כן, בחנו את השערה, בר"מ 0.05, שההבדל בין גמישויות אלה שווה ל-0.4.
- ד. האם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון לפי מודל (1), והאם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון לפי מודל (2)? בחנו השערות אלה בר"מ 0.05. האם האבחנה בין השנים שלפני ואחרי 1982 גורמת למתאם סדרתי בהפרעה המקרית?

מבחן וילד:

(2) המחקר התמקד במתכנתים אקדמאים בעלי תואר ראשון ושני. לאמידת התשואה של כל שנת ותק לשכר נאספו הנתונים על ההכנסה (INCOME) ושנות הוותק (VETEK). כמו כן נעשתה אבחנה בין התארים האקדמיים בעזרת משתני הדמי M כאשר M מקבל את הערך 1 אם לנבדק יש תואר שני – MA, ואחרת את הערך 0. מצורף הפלט הבא:

LS // Dependent Variable is INCOME

Included observations: 26

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
M	335.3201	213.8745	1.567835	0.1312
VETEK	31.50026	6.113796	5.152324	0
M*VETEK	10.78545	13.80593	0.781219	0.443
C	3459.347	92.51852	37.39085	0
R-squared	0.752005	Mean dependent var		3990.769
Adjusted R-squared	0.718187	S.D. dependent var		390.1787
S.E. of regression	207.1305	Akaike info criterion		10.80734
Sum squared resid	943867	Schwarz criterion		11.00089
Log likelihood	-173.3878	F-statistic		22.2371
Durbin-Watson stat	1.945103	Prob(F-statistic)		0.000001

$$INCOME = C(1)*M + C(2)*VETEK + C(3)*(M*VETEK) + C(4)$$

Wald Test:

Equation: Untitled

Null Hypothesis:

C(1)=0

C(3)=0

F-statistic	12.89398	Probability	0.000197
Chi-square	25.78797	Probability	0.000003

מהי השערת האפס שנבחנה ומהן תוצאות המבחן הסטטיסטי שנעשה?

הטרוסקדסטיות:

- (3) חוקר ביקש לאמוד מודל המקשר בין מחירי בתים חד משפחתיים המוסברים על ידי המשתנים המסבירים: שטח המגורים בבית ספר ומספר חדרי המגורים והאמבטיה. להלן המשתנים:
- Prices - מחירי הבתים באלפי דולרים.
 - Sqft - שטח המגורים בפיט רבוע.
 - Bedrm - מספר חדרים בבית.
 - Baths - מספר חדרי אמבטיה בבית.
- החוקר חשד כי יש בעיית הטרוסקדסטיות בנתונים וביצע מבחן White. תוצאות המבחן נתונות בפלט הבא:

```
White's test for heteroskedasticity
OLS using observations 1-14
Dependent variable: uhat^2
Omitted due to exact collinearity : sq_bdrms
      Coefficients      std.error      t-ratio      p-value
-----
Const
Sqft
Bedrms
Baths
Sq_sqft
X2_X3
X2_X4
X3_X4
Sq_baths

Unadjusted R-squared=0.736608
Test statistic: TR^2=10.312512
With p-value=p(chi-square(8)>10.312512)=0.243773
```

רשמו את המשוואה שנאמדה ואת השערת האפס.
על סמך הפלט המצורף, האם יש בעיה של הטרוסקדסטיות בנתונים?

מתאם סדרתי:

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. האם במודל 1 קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון?
בחנו את ההשערה לפי מבחן דרבין ווטסון.

DATA7-19: Data on demand for cigarette consumption in Turkey
Source: "Cigarette demand, health scares, and education in Turkey,"
by Aysit Tansel, APPLIED ECONOMICS, 1993, pp. 521-529.
Q Cigarette consumption per adult (kg), Range 1.86 - 2.723.
Y Per capita real GNP in 1968 prices (in Turkish liras), Range 2560 - 5723
P Real price of cigarettes in Turkey liras per kg, Range 1.361 - 3.968

Model 1: OLS, using observations 1960-1988 (T = 29)
Dependent variable: Q

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	1.656542	0.123678	13.39398	3.53E-13
Y	0.000344	5.28E-05	6.517848	6.56E-07
P	-0.4233	0.096944	-4.36639	0.000179

Mean dependent var	2.204655	S.D. dependent var	0.24319
Sum squared resid	0.595167	S.E. of regression	0.151298
R-squared	0.640589	Adjusted R-squared	0.612942
F(2, 26)	23.17031	P-value(F)	1.67E-06
Log-likelihood	15.20081	Akaike criterion	-24.4016
Schwarz criterion	-20.2997	Hannan-Quinn	-23.117
rho	0.536727	Durbin-Watson	0.911596

ב. הסבירו את מבחן ההשערה שבפלט הבא:

Performing iterative calculation of rho...

ITER	RHO	ESS
1	0.53673	0.34981
2	0.70446	0.324784
3	0.74270	0.323411
4	0.75026	0.323356
5	0.75173	0.323354
6	0.75201	0.323354

Model 2: Cochrane-Orcutt, using observations 1961-1988 (T = 28)
Dependent variable: Q

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	1.82344	0.392439	4.646	9.32e-05 ***
Y	0.000181935	9.82015e-05	1.853	0.0758 *
P	-0.171091	0.0826337	-2.070	0.0489 **

Statistics based on the rho-differenced data:

Mean dependent var	2.216964	S.D. dependent var	0.238275
Sum squared resid	0.323354	S.E. of regression	0.113728
R-squared	0.789097	Adjusted R-squared	0.772225
F(2, 25)	2.577408	P-value(F)	0.096004
rho	-0.087820	Durbin-Watson	2.171288

ג. הסבירו כיצד ניתן היה לאמוד את ערכו של Q בשנת 1989.

(5) נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת לתקופה: ינואר 1994 עד דצמבר 1997

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t \quad (T=48) \text{ המודל הינו:}$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t \quad \text{בניסיון לבדוק האם מתקיים קשר מהסוג הבא:}$$

$$u_t = \gamma_1 u_{t-1} + \gamma_2 u_{t-2} + \gamma_3 u_{t-3} + \gamma_4 Y_t + \omega_t \quad \text{נאמדה המשוואה הבאה:}$$

Dependent variable: uhat

	Coefficients	std.error	t-ratio	p-value
--	--------------	-----------	---------	---------

Const

Uhat1

Uhat2

Uhat3

Y

Unadjusted R-squared=0.45002

Test statistic: $TR^2=22.99$

With p-value= $p(\text{chi-square}(3)<22.99)=0.0432$

הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת: _____

על ידי מבחן: _____

ההשערות הינן: _____

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): _____

המסקנה המתקבלת היא: _____

משוואות סימולטניות:

(6) חוקר רצה לאמוד את פונקציית הביקוש ואת פונקציית ההיצע לתות שדה.

הוא אסף נתונים עבור 30 תקופות:

P_t - מחיר קופסא ב- t בתקופה t .

Q_t - כמות נקנית בק"ג בתקופה t .

Z_t - מחיר פרי תחליפי ב- t בתקופה t .

$INCOME_t$ - הכנסת הצרכנים באלפי t בתקופה t .

L_t - מחיר שעת עבודה ב- t בתקופה t .

משוואות הביקוש וההיצע שנאמדו הינן:

$$\ln Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 \ln P_t + \alpha_2 \ln Z_t + \alpha_3 \ln INCOME_t + u_t$$

$$\ln Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln L_t + v_t$$

$$Q_t^D = Q_t^S$$

מצורפים הפלטים הבאים שמתארים ארבעה מודלים:

Model 1: TSLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_Q

Instruments: I_L

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.83485	1.14385	-1.604	0.10869
I_P	-1.34898	0.645690	-2.089	0.03669 **
I_Z	1.72145	0.467875	3.679	0.00023 ***
I_income	0.984145	0.483543	2.035	0.04182 **

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 2.67757

Standard error of residuals = 0.32091

Unadjusted R-squared = 0.222881

Adjusted R-squared = 0.133214

F-statistic (3, 26) = 2.48564 (p-value = 0.0829)

Model 2: TSLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_Q

Instruments: I_Z I_income

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	3.07410	0.263717	11.657	<0.00001 ***
I_P	1.24927	0.115149	10.849	<0.00001 ***
I_L	-1.27242	0.129253	-9.844	<0.00001 ***

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 0.377808

Standard error of residuals = 0.118291

Unadjusted R-squared = 0.855763

Adjusted R-squared = 0.845079

F-statistic (2, 27) = 80.096 (p-value < 0.00001)

Model 3: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	0.499595	0.630065	0.793	0.43500
I_L	-0.611731	0.163450	-3.743	0.00091 ***
I_income	0.395076	0.142590	2.771	0.01019 **
I_Z	0.937441	0.197381	4.749	0.00007 ***

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 0.834357

Standard error of residuals = 0.179139

Unadjusted R-squared = 0.681008

Adjusted R-squared = 0.644201

F-statistic (3, 26) = 18.5023 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 11.1662

(Log-likelihood for Q = -75.1618)

Model 4: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: I_P

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.73053	0.419481	-4.125	0.00034 ***
I_L	0.453478	0.108821	4.167	0.00030 ***
I_income	0.436678	0.0949326	4.600	0.00010 ***
I_Z	0.581185	0.131411	4.423	0.00015 ***

Mean of dependent variable = 2.99427

Standard deviation of dep. var. = 0.314761

Sum of squared residuals = 0.369832

Standard error of residuals = 0.119266

Unadjusted R-squared = 0.871281

Adjusted R-squared = 0.856428

F-statistic (3, 26) = 58.6632 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 23.3704

(Log-likelihood for P = -66.4576)

על סמך הפלטים הנ"ל, איזה פונקציה נאמדה בכל מודל?

תשובות סופיות:

- (1) א. כן. ב. $[-0.5955, -0.168]$. ג. לפני: $-0.381857, 0.108669$.
 ד. מודל (1): יש - חיובי, מודל (2): אין. אין בעיה של מתאם סדרתי.
- (2) השערת האפס: $H_0: \beta_M = \beta_{M.Vetek} = 0$.
 תוצאות מבחן WALT: $P.V = 0.000197 < \alpha = 0.001$.
- (3) המשוואה שנאמדה: $e_i^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 sqft_i + \hat{\gamma}_2 bedrms_i + \hat{\gamma}_3 baths_i + \hat{\gamma}_4 sqft_i^2 + \hat{\gamma}_5 bedrms_i^2 + \hat{\gamma}_6 baths_i^2 + \hat{\gamma}_7 sq * bed + \hat{\gamma}_8 sq * bath + \hat{\gamma}_9 bed * bath$
 השערת האפס: $H_0: \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = \dots = \hat{\gamma}_9$.
 תוצאות מבחן White: $p - value = 0.243773 > \alpha = 0.005$.
- (4) א. כן. ב. ראו סרטון. ג. ראו סרטון.
- (5) קיומו של מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים.
 מבחן LM.
 $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$
 $H_1: OTHERWISE$
 $LM_{stat} = T \cdot R^2 = 22.99$
 יש עדות לכך, $pvalue < \alpha$.
- (6) מודל 1: $\ln Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 \ln P_t + \alpha_2 \ln Z_t + \alpha_3 \ln INCOME_t + u_t$
 מודל 2: $\ln Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln L_t + v_t$
 מודל 3: $\ln Q_t = \pi_0 + \pi_1 \ln L_t + \pi_2 \ln INCOME_t + \pi_3 \ln Z_t + \varepsilon_t$
 מודל 4: $\ln P_t = \lambda_0 + \lambda_1 \ln L_t + \lambda_2 \ln INCOME_t + \lambda_3 \ln Z_t + \varpi_t$

אקונומטריקה ב

פרק 15 - מבחן לדוגמה - אריאל

תוכן העניינים

1. כללי 94

מבחן לדוגמה מס' 1:

שאלות:

לשם החישובים כשצריך הנח כי (אם לא נאמר אחרת): $\chi^2_{(5)} = 11.05$, $\chi^2_{(2)} = 3.0$, $t = 2$, $F = 4$.

- 1** חוקר בדק את השפעת השכר ההתחלתי של עובד, עמדה ניהולית ומגדר על השכר הנוכחי של העובד. לכן אמד את המודל הבא בשיטת הריבועים הפחותים (OLS):
- $$y_t = \beta_0 + \beta_1 G_t + \beta_2 M_t + \beta_3 (G_t M_t) + \beta_5 (X_t, G_t) + \beta_6 (X_t M_t) + \beta_7 (X_t G_t M_t) + \varepsilon_t$$
- Y - השכר הנוכחי של העובד (באלפי שקלים).
 G - משתנה דמי למגדר. $G = 1$ עבור גברים ו- $G = 0$ עבור נשים.
 M - משתנה דמי לעמדה ניהולית. $M = 1$ מחזיק בעמדה ניהולית ו- $M = 0$ לא מחזיק בעמדה ניהולית.
 X - משתנה המתאר את השכר ההתחלתי של העובד (באלפי שקלים).
- א. מהי ההשערה שבוחנת כי השכר ההתחלתי של העובד משפיע באופן זהה עבור גברים ונשים (כלומר, השפעת השכר ההתחלתי אצל גבר המחזיק בעמדה ניהולית שווה לזה של אישה המחזיקה בעמדה ניהולית והשפעת השכר ההתחלתי אצל גבר שאינו מחזיק בעמדה ניהולית זהה לזה של אישה שאינה מחזיקה בעמדה ניהולית):
- $H_0 : \beta_3 = \beta_5 = 0$
 - $H_0 : \beta_5 = \beta_7 = 0$
 - $H_0 : \beta_5 = 0$
 - $H_0 : \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_7 = 0$
 - כל התשובות לעיל אינן נכונות.
- ב. מהי ההשערה אשר בוחנת כי שכרו הנוכחי של גבר שלא מחזיק בעמדה ניהולית זהה לו של אישה המחזיקה בעמדה ניהולית כאשר לשניהם יש שכר התחלתי של 1000 ₪.
- $H_0 : \beta_5 = \beta_6$
 - $H_0 : \beta_1 = \beta_5 = \beta_2 = \beta_6$
 - $H_0 : \beta_1 = \beta_2$
 - $H_0 : \beta_1 + \beta_5 = \beta_2 + \beta_6$
 - כל התשובות לעיל אינן נכונות.

(2) נתון המודל הבא: $y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + u_t$ המקיים את כל ההנחות

הקלאסיות פרט להומוסקדסטיות. ידוע כי מתקיים: $\text{var}(u_t) = \frac{x_t^4}{2}$.

חוקר זיהה שקיימת בעיה של הומוסקדסטיות במודל זה במודל וביצע תיקון למודל כך שכעת לא קיימת הבעיה.

א. מי מבין האפשרויות הבאות יכול להיות החותך במודל המתוקן:

i. β_0 .

ii. β_1 .

iii. x_t .

iv. 2.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. מהי השונות במודל החדש:

i. 2.

ii. $\frac{1}{2}$.

iii. x_t^4 .

iv. $\frac{x_t^2}{2}$.

v. לא ניתן לדעת שכן יש בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.

(3) חוקר מעוניין לאמוד את המודל הבא: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 z_t + u_t$.

עקב חשש להטרוסקדסטיות חילק החוקר את המדגם לשלושה חלקים כאשר:

חלק ראשון בן 60 תצפיות כאשר התוצאות שהתקבלו: $ESS_1 = 1400$.

חלק שני בן 40 תצפיות כאשר התוצאות שהתקבלו: $ESS_2 = 900$.

סך כל התצפיות במדגם היו 120.

א. תוצאות הסטטיסטי F=GQ (Goldfeld-Quandt) ותוצאת בדיקת

הטרוסקדסטיות היא (הניחו כי F קריטי במבחן זה הוא 2):

i. $GQ = 1$ קיימת הטרוסקדסטיות.

ii. $GQ = 1.55$ לא קיימת הטרוסקדסטיות.

iii. $GQ = 1$ לא קיימת הטרוסקדסטיות.

iv. $GQ = 1.55$ קיימת הטרוסקדסטיות.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. אם החוקר היה מבצע את מבחן WHITE לבדיקת קיום הטרוסקדסטיות בנתונים, מספר דרגות החופש של המבחן הוא:

- i. 2.
- ii. 4.
- iii. 5.
- iv. 6.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

4) נתון המודל הבא: $y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + u_t$ שנאמד על סמך מדגם של 100 נבדקים. נתון בנוסף כי סטטיסטי המבחן של DW שווה ל-1.5. חוקר חשד שיש מתאם סידרתי מסדר ראשון במודל.

א. איזה מבין האפשרויות הנ"ל נכונה:

- i. יש מתאם סידרתי שלילי מובהק בנתונים.
- ii. יש מתאם סידרתי חיובי מובהק בנתונים.
- iii. אין עדות למתאם סידרתי בנתונים.
- iv. לא ניתן לדעת האם יש מתאם סידרתי מובהק בנתונים.
- v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. בהנחה כי קיים מתאם סידרתי מובהק בנתונים מהצורה

הבאה: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$. האומד ל- ρ הוא:

- i. -0.25.
- ii. 1.5.
- iii. -1.5.
- iv. 0.25.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ג. ידוע כי: $\text{var}(u_t) = 2$. מהו האומד ל- σ_ε^2 :

- i. 2.133.
- ii. 1.875.
- iii. 1.5.
- iv. 2.66.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ד. בשל החשש ממתאם סידרתי מסדר שני ($u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$) הוצע

לבצע את מבחן LM. רגרסיית העזר לביצוע המבחן הינה:

- i. $\hat{u}_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$
- ii. $\hat{u}_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \beta_3 \hat{u}_{t-1} + \beta_4 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$
- iii. $\hat{u}_t^2 = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \beta_3 \hat{u}_{t-1} + \beta_4 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$
- iv. $\hat{u}_t^2 = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$

v. אף אחת מהתשובות לעיל אינה נכונה.

ה. אם ידוע כי קיים מתאם סדרתי בנתונים ואומדים אותו בשיטת

הריבועים הפחותים (OLS) ללא ביצוע תיקון אזי:

i. האומדים יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.

ii. האומדים יהיו חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.

iii. האומדים יהיו חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים.

iv. האומדים יהיו מוטים אך עקיבים.

v. אף אחת מהתשובות לעיל אינה נכונה.

(5) מאמן כושר אמד את הרגרסיה הבאה: $y_t = 1 + 3x_t + 0.7y_{t-1} + \hat{u}_t$. כאשר:

y_t - סך ק"ג ירידה במשקל בחודש t.

x_t - סך שעות האימונים של אדם בחודש t.

א. מהן תכונות האומדים של המשוואה:

i. האומדים מוטים אך עקיבים.

ii. האומדים חסרי הטיה, עקיבים אך אינם יעילים.

iii. האומדים מוטים ואינם עקיבים.

iv. האומדים חסרי הטיה אך אינם עקיבים.

v. אף אחת מהתשובות לעיל אינה נכונה.

ב. אם רמת אימוני הכושר לפני ארבעה חודשים עלו ב-3 שעות, כיצד צפויה

להשתנות רמת הירידה במשקל היום:

i. 2.16

ii. 3.15

iii. 0.2401

iv. 3.087

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ג. אילו אדם זה מעולם לא התעמל, מה צפויה להיות רמת הירידה במשקל

שלו היום:

i. 1.4

ii. 10

iii. 3.3

iv. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ד. אם רמת האימונים עלתה היום בשעה, מהי סך ההשפעה הצפויה על רמת

הירידה במשקל?

i. 10

ii. 3

iii. 2.1

iv. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

6) נתונה מערכת המשוואות הנ"ל:

$$1. y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 z_i + u_i$$

$$2. x_i = \beta_0 + \beta_1 s_i + \beta_2 z_i + v_i$$

$$3. z_i = \delta_0 + \delta_1 y_i + \delta_2 k_i + \varepsilon_i$$

א. מה ניתן לומר על תכונות אומדי הריבועים הפחותים של שלושת המשוואות הנתונות:

- i. אומדי OLS של המשוואות הם חסרי הטיה עקיבים אך אינם יעילים.
- ii. אומדי OLS של המשוואות הם חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.
- iii. אומדי OLS של המשוואות הם מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.
- iv. אומדי OLS של המשוואה הראשונה בלבד הם חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ב. איזה משיטות האמידה: ILS (שיטת הריבועים הפחותים העקיפה), TSLS (שיטת הריבועים הפחותים בשני שלבים) ו-IV (שיטת משתני העזר) מתאימה לכל אחת משלושת המשוואות הנתונות:

- i. שלושת המשוואות ניתנות לאמידה בכל שלושת השיטות.
- ii. רק המשוואה הראשונה ניתנת לאמידה בכל שלושת השיטות. המשוואות השנייה והשלישית ניתנות לאמידה בשיטת ILS ו-IV בלבד.
- iii. שלושת המשוואות אינן ניתנות לאמידה באף אחת מהשיטות.
- iv. שלושת המשוואות ניתנות לאמידה בשיטת ILS ו-IV בלבד.
- v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ג. לשם אמידת הפרמטרים של המשוואות המבניות על פי שיטת ILS נאמדו המשוואות המצומצמות עבור Y ו-Z והתקבל ש:

$$y_i = 2 + 3k_i$$

$$z_i = 4 - 2k_i$$

- i. האומד ל- α_0 שווה ל-2 ואילו האומד ל- δ_0 שווה ל-4.
- ii. האומד ל- α_0 שווה ל-8 ואילו האומד ל- α_2 שווה ל-1.5.
- iii. האומד ל- α_0 שווה לאומד ל- β_0 .
- iv. לא ניתן לאמוד את α_0 ואת α_2 .
- v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|---------|--------|---------|---------|---------|----|
| | | | ב. iv. | א. ii. | (1 |
| | | | ב. ii. | א. ii. | (2 |
| | | | ב. iii. | א. iii. | (3 |
| ה. iii. | ד. ii. | ג. ii. | ב. iv. | א. ii. | (4 |
| | ד. i. | ג. iii. | ב. i. | א. v. | (5 |
| | | ג. ii. | ב. i. | א. iii. | (6 |

אקונומטריקה ב

פרק 16 - מבחן לדוגמה - המכללה למנהל

תוכן העניינים

1. כללי 100

מבחן לדוגמה מס' 2:

שאלות:

לשם חישובים הנח כי ערך t הינו 2 וערך F הינו 4.

(1) הנח כי הקשר באוכל' בין X ל- Y נתון על ידי המשוואה הבאה: $Y_t = \beta \cdot X_t + U_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\text{נתון האומד: } \tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{S_{XX}}.$$

- א. האם האומד ליניארי?
- ב. האם האומד חסר הטיה?
- ג. אומד זה יעיל פחות מאומד הריבועים הפחותים:
- ד. האם אומד זה הוא blue?
- ה. אומד $\tilde{\beta}$ מוגדר רק כאשר: $S_X^2 \neq 0$: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת
- ו. חשבו את השונות של β עבור מודל שבו $\alpha \neq 0$.
- ז. שונות האומד (שחושבה בסעיף הקודם) הינה גדולה משונות המודל הנתון: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

(2) על סמך מדגם של 60 משפחות שלכל אחת 3 ילדים נאמדו המשוואות הבאות:

$$1. \hat{y}_i = 15 + 0.7x_{1i} + 0.35x_{2i} + 0.20x_{3i} \quad R^2 = 0.85$$

$$2. y_i = 2 + 0.1z_i \quad R^2 = 0.25$$

$$3. z_i = x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i}$$

כאשר y_i הינן הוצאות משק הבית על חינוך הילדים ואילו x_{ji} הינו גילו של הילד j .

א. ההשערה שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות הינה:

$$i. H_0: \beta_1 = \beta_2; \beta_1 = 2\beta_3$$

$$ii. H_0: \beta_1 = -\beta_2 = 2\beta_3$$

$$iii. H_0: \beta_2 = -\beta_1; \beta_3 = 2\beta_1$$

iv. לא ניתן לדעת.

ב. סטטיסטי המבחן שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות שווה בקירוב ל:

$$i. 56$$

$$ii. 57$$

$$iii. 112$$

$$iv. 74.66$$

(3) כלכלן הציע את המודלים הבאים :

$$1. y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(0.5x_i) + u_i$$

$$2. y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(x_i^{0.5}) + u_i$$

האם ניתן לאמוד את המודלים בשיטת OLS?

א. אין בעיה לאמוד את שני המודלים.

ב. לא ניתן לאמוד את המודל הראשון בלבד.

ג. לא ניתן לאמוד את המודל השני בלבד.

ד. לא ניתן לאמוד את שני המודלים.

(4) כלכלן אמד את המודל הבא : $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x_i) + u_i$ וקיבל את האומדנים :

$$\hat{\alpha}_0 = 10 \text{ ו- } \hat{\alpha}_1 = 6$$

על אותו המדגם אמד חברו את המודל הבא : $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i^2) + u_i$. מכאן ש :

$$א. \hat{\beta}_0 = 5 \text{ ו- } \hat{\beta}_1 = 3$$

$$ב. \hat{\beta}_0 = 10 \text{ ו- } \hat{\beta}_1 = 3$$

$$ג. \hat{\beta}_0 = 5 \text{ ו- } \hat{\beta}_1 = 6$$

ד. כל התשובות שגויות.

(5) על סמך מדגם של 95 תצפיות נאמד המודל הבא : $y_i = 2 + 0.5x_{1i} + 0.3x_{2i}$ $R^2 = 0.73$

(1) (2)

הערכים שבסוגריים הם סטיות התקן של המקדמים.

א. בדוק האם המודל מובהק.

ב. בדוק האם מקדמי השיפוע מובהקים.

ג. מה תוכל להסיק מסעיפים א' ו-ב'?

(6) על סמך מדגם של 52 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות :

$$1. \hat{y}_i = 4 + 0.1x_{1i} + 0.8x_{2i} \quad R^2 = 0.84$$

$$2. \hat{y}_i = 2 + 0.8x_{1i} \quad R^2 = 0.7$$

$$3. \hat{y}_i = 7 + 0.23x_{2i} \quad R^2 = 0.25$$

$$4. \hat{y}_i = 3 + 0.23z_i \quad R^2 = 0.55$$

כאשר x_{1i} ו- x_{2i} הם השכלת הבעל והאישה בהתאמה במשפחה i ו- y_i הכנסת משק בית i .

כמו כן נתון כי : $z_i = x_{1i} + 2.2x_{2i}$

א. בדוק את ההשערה כי להשכלה אין השפעה על הכנסות המשפחה.

ב. איזה השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (1) ו-(4)? בדוק אותה.

ג. חשב את סטית התקן של המקדם x_{1i} ברגרסיה (1).

(7) חוקר מעוניין לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + u_i$.

- א. חשב את נוסחת אומד הריבועים הפחותים ל- α על ידי פיתרון בעיית המינימיזציה של סכום ריבועי הסטיות.
 ב. חשב את נוסחת שונותו של האומד.

(8) על סמך מדגם של 45 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:

1. $R^2 = 0.75 \quad y_i = 5.4 + 1.2x_{2i} + 4.4x_{3i} + u_i$
2. $R^2 = 0.65 \quad y_i = 6.3 + 5.8x_{3i} + u_i$
3. $R^2 = 0.70 \quad y_i = 5.7 + 1.2x_{2i} + u_i$
4. $R^2 = 0.56 \quad y_i = 3.9 + 3.4\ln(x_{2i}) + u_i$
5. $\ln(y_i) = 2.4 + 1.8x_{2i} + 2.7x_{3i}^2 + 4.2x_{4i}^2 + u_i$
6. $y_i = 1.3 + 3.1x_{2i} + 0.5x_{3i} + 4.8x_{4i}^2 + 1.5x_{5i}^2 + u_i$

- א. דרג את הרגרסיות על פי מדד ההסבר (מהנמוך לגבוה).
 ב. בדוק את ההשערות של משתנים X_2 ו- X_3 ביחד אין השפעה על Y במודל (1).
 ג. בדוק בהסתמך על מודל (2) האם המשתנה X_2 מובהק ברגרסיה (1).
 ד. ברגרסיה (1) נתונים כעת אומדי הטעויות הסטנדרטיות (סטיות התקן) של מקדמי X_2 ו- X_3 0.5 ו-2.5 בהתאמה. בדוק עבור כל אחד מהמקדמים הנ"ל האם מובהק ומה אפשר ללמוד מרגרסיה (1).
 ה. איזו השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (6) ו-(3)?

(9) על מנת לאמוד השפעת מגדר ומצב משפחתי על השכר, נאמדה המשוואה הבאה:

$$WAGE = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot GENDER + \alpha_2 \cdot FS + \alpha_3 \cdot (GENDER \cdot FS) + \beta_1 \cdot EDUC + \beta_2 \cdot AGE + U$$

כאשר:

- $GENDER$ = מגדר: 1=גבר, 0=אישה.
 FS = מצב משפחתי: 1=נשואים, 0=לא נשואים.
 $EDUC$ = מס' שנות לימוד של העובד.
 AGE = גיל העובד.
 $WAGE$ = שכר העובד.

- משוואה (1) נאמדה בפלט מס' 1.
 בנוסף נאמד גם פלט מס' 2.

- א. החוקרת הניחה כי פערי השכר, באים לידי ביטוי בשכר ההתחלתי בלבד:
 נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת.
 ב. החוקרת הניחה כי הפערים בין נשים לגברים בשכר אינם תלויים בגיל:
 נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת.
 ג. השערת האפס לבדיקת הטענה היא: _____.

- ד. המשתנה המוסבר ברגרסיה מס' 2 הינו: _____
 (כתבו את המודל שבו מחושב המשתנה המוסבר).
 ה. הסטטיסטי של LM לבדיקת הטענה:
 i. לא ניתן לחשב את הסטטיסטי בעזרת הנתונים הקיימים.
 ii. ניתן לחשבו וערכו הוא: _____.
 ו. המקדם של GENDER בפלט מס' 2 הינו: _____.

הועלתה הטענה כי הפערים בין גברים לנשים בקרב העובדים הנשואים גבוהים ביותר מ-1500 ₪ מאשר הפערים בקרב העובדים שאינם נשואים.

- ז. ההשערות לבדיקת הטענה הינן: _____.
 ח. הסטטיסטי לבדיקת הטענה:
 i. לא ניתן לחשב את הסטטיסטי בעזרת הנתונים הקיימים.
 ii. ניתן לחשבו וערכו הוא: _____.
 ט. ההשערות לבדיקת הטענה הן: _____.
 י. המודל המוגבל לבדיקת הטענה הוא: _____.
 יא. הסטטיסטי לבדיקת הטענה:
 i. לא ניתן לחשבו בעזרת הנתונים הקיימים.
 ii. ניתן לחישוב וערכו הוא: _____.

פלט מס' 1 - משוואה 1:

Dependent variable: WAGE

Number of observations used: 17495

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	5	1.504815E11	30096294654	646.42	<.0001
Error	17489	8.142567E11	46556220		
C Total	17494	9.647382E11			

Root MSE	6823.35843	R-square	0.1560
Dep Mean	7286.58004	Adj R-sq	0.1557
C.V.	93.64281		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	-3642.10108	260.72351	-13.97	<.0001
GENDER	1	2006.13583	187.64224	10.69	<.0001
FS	1	899.68055	159.19316	5.65	<.0001
GENDER*FS	1	1964.31810	227.43348	8.64	<.0001
EDUC	1	428.20041	12.45434	34.38	<.0001
AGE	1	64.72379	4.43948	14.58	<.0001

פלט מס' 2 - מבחן LM:

Dependent variable :

Number of observations used: 17495

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	5	66653745252	13330749050	286.32	<.0001
Error	17489	8.142567E11	46558220		
C Total	17494	8.809105E11			

Root MSE	6823.35843	R-square	0.0757
Dep Mean	2.29222E-12	Adj R-sq	0.0754
C.V.	2.97675E17		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
INTERCEP	1	-1244.40187	260.72351	-4.77	<.0001
GENDER	1				
FS	1	899.68055	159.19316	5.65	<.0001
GENDER*FS	1	1964.31810	227.43348	8.64	<.0001
EDUC	1	23.18457	12.45434	1.86	0.0627
AGE	1	-38.13257	4.43948	-8.59	<.0001

10) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. במודל דינאמי עם מתאם סדרתי האומדים מוטים אך עקיבים :
נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ב. בהשמטת משתנה רלוונטי, אם נתון שהמתאם בין המשתנים המסבירים חיובי, והשפעת המשתנה שהושמט שלילית, אזי האומד ל- β במודל הנאמד בעל הטיה חיובית :
נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ג. המודל הבא נאמד במדגם של 1000 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות :

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + U_t$$

(0.2) (0.8) (0.6)

$$R^2 = 0.4$$

(המספרים בסוגריים הם ערכי t של המקדמים).
לאור הנתונים שהתקבלו נראה כי במשוואה :

- i. אין כל בעיה סטטיסטית ולכן האומדים המתקבלים הם חסרי הטיה.
- ii. יש בעיה של : _____, אך האומדים המתקבלים עדיין חסרי הטיה.
- iii. יש בעיה של : _____ והאומדים המתקבלים מוטים.

ד. המודל הבא נאמד במדגם של 1000 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + U_t$$

$$(7.8) \quad (0.2) \quad (-6.3)$$

לאור הנתונים שהתקבלו נראה כי במשוואה:

- i. אין כל בעיה סטטיסטית ולכן האומדים המתקבלים הם חסרי הטיה.
- ii. יש בעיה של: _____, אך האומדים המתקבלים עדיין חסרי הטיה.
- iii. יש בעיה של: _____ והאומדים המתקבלים מוטים.

(11) נתון המודל: $Y = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + U_t$

- א. אם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון, אומדי הריבועים הפחותים חסרי הטיה ועקיבים אך לא יעילים:
נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ב. הוספת המשתנה Y_{t-1} למשוואה, יכולה לפתור את בעיית המתאם הסדרתי מסדר ראשון:
נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת
- ג. רגרסיית עזר למתאם סדרתי שלישי הינה: _____.
- ד. דרגות החופש של הערך הקריטי לבדיקת ההשערה בסעיף ג' הינן: _____.

(12) נתון המודל:

$$1. Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + U_t$$

- א. האומדים המתקבלים בשיטת הריבועים הפחותים הם מוטים, אך עקיבים:
נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

פתרון הבעיה הקיימת במשוואה (1) ייתכן על ידי אמידת המשוואה

$$\text{הבאה: } (Y_t \cdot W_t) = \delta_0 \cdot W_t + \delta_1 \cdot (X_{1t} \cdot W_t) + \delta_2 \cdot (X_{2t} \cdot W_t) + V_t$$

- ב. כאשר W_t הינו: _____.
- ג. משוואה (2) בצורתה המפורשת הינה:
_____ = $\delta_0 \cdot$ _____ + $\delta_1 \cdot$ _____ + $\delta_2 \cdot$ _____ + _____
- ד. האומד היעיל ל- σ^2 הינו: _____.

תשובות סופיות:

- (1) א. כן. ב. מוטע. ג. אי אפשר לדעת. ד. לא.
- ה. נכון. ו. $V(\tilde{\beta}) = \frac{n\sigma^2}{S_{xx}^2}$. ז. לא נכון.
- (2) א. iii. ב. iii.
- (3) ד'.
- (4) ב'.
- (5) א. מובהק. ב. אינם מובהקים. ג. ראו סרטון.
- (6) א. מובהק. ב. $H_0: \beta_2 = 2.2\beta_1$. ג. $S.E = 0.00743$.
- (7) א. $\hat{\alpha} = \bar{y}$. ב. $V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma_e^2}{n}$.
- (8) א. $6 > 1 > 3 > 2 > 4$. ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך.
- ד. X_2 מובהק, X_3 אינו מובהק. ה. $H_0: \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$.
- (9) א. נכון. ב. נכון. ג. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
- ד. ראו סרטון. ה. ראו סרטון. ו. ראו סרטון.
- ז. $H_0: \alpha_3 = 1500$. ח. ii, $t_{stat} = 2.04$. ט. $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$.
- י. $H_1: \alpha_3 > 1500$. יא. i.
- יב. $H_1: \alpha_1 \neq \alpha_2$.
- (10) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. ii, בעיה של מולטיקולינאריות חלקית.
- ד. ii, בעיה של הוספת משתנה לא רלוונטית.
- (11) א. נכון. ב. נכון. ג. $\hat{u}_t / X_{1t}, X_{2t}; \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \hat{u}_{t-3}$.
- ד. 3.
- (12) א. לא נכון. ב. $W_t = \frac{X_{2t}}{X_{1t}}$.
- ג. $\frac{Y_t \cdot X_{2t}}{X_{1t}} = \delta_0 \cdot \frac{X_{2t}}{X_{1t}} + \delta_1 \cdot X_{2t} + \delta_2 \cdot \frac{X_{2t}^2}{X_{1t}} + \frac{u_t X_{2t}}{X_{1t}}$.
- ד. $S^2 = \frac{ESS}{T-k}$.