אקונומטריקה ב

תוכן העניינים

אקונומטריקה ב

פרק 1 - מבחן LM

תוכן העניינים

מבחן LM:

רקע:

במבחן כופלי לגרנג' (LM) אנו בודקים האם משתנה או משתנים מסבירים מסוימים רלוונטיים למודל.

לדוגמא:
נניח שיש לנו מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED):
$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$.
לגבי השניים הראשונים אנו בטוחים כי הם רלוונטיים וחייבים להופיע במודל. לגבי השניים האחרונים אנחנו לא בטוחים.

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{matrix}$.

המודל המוגבל (RESTRICTED): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t}$.
במבחן LM אומדים את המודל המוגבל ומקבלים עבור כל תצפית את הסטייה מקו הרגרסיה: $Y_t - \hat{Y}_t = \hat{u}_t$.
כעת אומדים את רגרסיית העזר שבה מנסים לנבא את הסטייה מקו הרגרסיה עבור כל תצפית: $\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + \delta_2 x_{2t} + \delta_3 x_{3t} + \delta_4 x_{4t} + \omega_t$.
חישוב הסטטיסטי: (R^2 של רגרסיית העזר * מספר התצפיות) $LM_{stat} = R^2 \cdot T$.
כלל הכרעה: אם $LM_{stat} > \chi^2_m$ נדחה את H_0 (m = מס' ההגבלות ב- H_0).

- שימו לב כי:

עבור המשתנים הנוספים למודל – כל המדדים (הבטות, ערכי t וה- $Pvalu$) ברגרסיית העזר שווים לאלו של הרגרסיה הלא מוגבלת.
עבור המשתנים הקיימים במודל – המדדים אינם שווים בין שתי הרגרסיות.

מבחן LM:

שאלות:

1) נניח מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED) :

$.Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$

UNRESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	------------	-----------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	------	R-square	-----
Dep Mean	----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X1	1	0.975726	0.042711	22.84485	0.0000
X2	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

RESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646001.81			
Error	------	788.2			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	-----
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-----
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	7.067731	0.656604	10.76406	0.0000
X1	1	26.36455	0.756627	34.84485	0.0000
X2	1	29.58626	0.076993	384.2721	0.0000

רגרסיית עזר

Dependent variable :RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	--------	-------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	0.213
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-------
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.9608892	0.776604	7.675584	0.0000
X1	1	1.2077723	0.978845	1.233875	0.8455
X2	1	0.4840697	0.886754	0.545889	0.9976
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

א. בדוק את הטענה כי לפחות אחד מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל בשתי דרכים.

ב. איזה מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל?

ג. הסבירו את הקשרים בין שלוש המשוואות: R, U ועזר ואת הקשר בין מבחן WALD ומבחן LM.

U: $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\beta}_3 x_{3t} + \hat{\beta}_4 x_{4t} + \hat{v}_t$.

R: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{1t} + \hat{\alpha}_2 x_{2t} + \hat{u}_t$.

עזר: $\hat{u}_t = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1t} + \hat{\delta}_2 x_{2t} + \hat{\delta}_3 x_{3t} + \hat{\delta}_4 x_{4t} + \hat{\omega}_t$.

ד. שחזרו בעזרת שתי המשוואות הראשונות (U ו-R) את LM_{stat}.

ה. שחזרו בעזרת המשוואה האחרונה (רגרסיית העזר) את $WALD_{stat}$.

תשובות סופיות:

1) א. מבחן LM ומבחן WALD, יש עדות לכך.

ב. $pt_{\hat{\beta}_3} = pt_{\hat{\beta}_4} = 0.00$.

ג. i. U=R+עזר.

ii. $ESS_U = ESS_{ע}$.

iii. $ESS_R = TSS_{ע}$.

iv. $\frac{ESS_R - ESS_U}{ESS_R} = 1 - \frac{ESS_U}{ESS_R} = 1 - \frac{ESS}{TSS} = R^2$.

ד. $LM_{stat} = 43.489$.

ה. $WALD_{stat} = 26.962$.

אקונומטריקה ב

פרק 2 - בעיות ספציפיקציה

תוכן העניינים

בעיות ספציפיקציה:

רקע:

טעויות ספציפיקציה הן טעויות בניסוח משוואת הרגרסיה.

1. הוספת משתנה לא רלוונטי:
   למשל, המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$.
   המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \varepsilon$.
   אם נקבל את H_0 במבחן t למובהקות β_3 נסיק כי המשתנה איננו רלוונטי ונאמוד את המודל מחדש הפעם ללא המשתנה השלישי. אולם, גם אם לא נוכל לאמוד מחדש, הימצאותו של משתנה שאיננו רלוונטי במודל הרגרסיה איננה פוגמת ברלוונטיות של המשתנים האחרים במודל ולא בתכונות החיוניות למבחני המובהקות שלהם.

2. השמטת משתנה רלוונטי:
   למשל, המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$.
   המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$.
   בהיעדר x_2, בדיקות ההשערות לפרמטרים של המודל הטעותי אינן תקפות:

<table dir="rtl">
<tr><th></th><th>אומד ל- β_1</th><th>אומד ל- α</th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr>
<tr><td>$S_{12} = 0$</td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה
אלא אם:
$\bar{x}_2 = 0$</td><td rowspan="2">מוטה (כלפי מעלה)</td></tr>
<tr><td>$S_{12} \neq 0$</td><td>מוטה
<u>כיוון ההטיה:</u>
חיובי: S_{12} ו- β_2 שווי סימן
שלילי: S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td></tr>
</table>

בעיות ספציפיקציה:

שאלות:

1) להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t: 1. $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t + u_t$.
להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t ושל גיל A_t:
2. $W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + v_t$.
כל האומדים חיוביים ומובהקים וקיים קשר שלילי בין גיל להשכלה.

א. $\hat{\beta}_1$ במשוואה (1) הוא:
   i. אומד חסר הטיה.
   ii. אומד מוטה שלילית.
   iii. אומד מוטה חיובית.
   iv. אומד מוטה, אך לא ניתן לדעת את כיוון ההטיה.

ב. ניתן להשתמש במבחן t לבדיקת מובהקות השיפוע במשוואה (1): נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

2) נתונות ארבע משוואות הרגרסיה הבאות (כאשר הסטיות במודל האמיתי מקיימות את הנחות הרגרסיה הקלאסיות):

1. $X_{2t} = \lambda + \delta \cdot X_{1t} + V_t$ כאשר התקבל: $\sum \hat{V}_t^2 = \sum \left(X_{2t} - \bar{X}_{2t}\right)^2$.

2. $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t$.
(10.3) (19.8)

3. $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + W_t$.
(9.9) (17.3) (0.37)

(המספרים בסוגריים הם ערכי t של אומדני המקדמים).
לגבי הטענות הבאות, קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא והסבירו:

א. האומד של β_1 במשוואה (2) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.
ב. האומד של β_1 במשוואה (3) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.
ג. האומד של β_1 במשוואה (4) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.
ד. האומד $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה ל- $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2).
ה. השונות התיאורטית של האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה לשונות התיאורטית של $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2), אך אומדני השונויות שונים.
ו. האומד ל- α במשוואה (4) הינו חסר הטיה.
ז. האומד ל- α במשוואה (3) הינו חסר הטיה.
ח. R^2 של משוואה (2) גדול מ- R^2 של משוואה (3).
ט. $\bar{R}^2$ של משוואה (2) גדול מ- $\bar{R}^2$ של משוואה (3).

תשובות סופיות:

1) א. ii. ב. לא נכון.
2) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון.

אקונומטריקה ב

פרק 3 - משתנה דמי

תוכן העניינים

תאוריה ותרגול:

רקע:

הכנסת משתנים ב״ת איכותיים למודל הרגרסיה.
למשל, נתונה משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$.
W_t = השכר (התלוי), S_t = שנות לימוד (הב״ת) שניהם כמותיים.
נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר (משתנה איכותי) משפיע על השכר.
כדי להכניסו למשוואת הרגרסיה יש להגדיר משתני דמי (dummy variable):
נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב״אישה״ ואת הערך 1 אם מדובר ב״גבר״.
ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

1. משתנה דמי לחותך – המגדר משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
2. משתנה דמי לשיפוע – המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.
3. משתנה דמי לכל הפונקציה – המגדר משפיע גם על החותך וגם על השיפוע.

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.
שכר ההתחלתי של אישה: α_0.
שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

משתנה דמי לשיפוע:

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$.
השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.
אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0.
אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0 : \beta_1 = 0$.

- החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t=\alpha_0+\alpha_1 D+\beta_0 S_t+\beta_1 DS_t+u_t$.

השכר ההתחלתי של אישה: α_0.

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0+\alpha_1$.

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0+\beta_1$.

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
   באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H_0:\alpha_1=\beta_1=0$.
   לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1.
   אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד: $H_0:\alpha_1=0$ ו- $H_0:\beta_1=0$.

2. מבחן CHOW:
   דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
   חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
   מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
   עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
   נשים: $W_t=\alpha_f+\beta_f X_t+u_t$.
   גברים: $W_t=\alpha_m+\beta_m X_t+u_t$.
   השערות: $H_0:\alpha_f=\alpha_m;\beta_f=\beta_m$.
   לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD):
   המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכלול את המדגם המאוחד: $W_t=\alpha+\beta X_t+u_t$.
   המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם: $ESS_U=ESS_f+ESS_m$, $DF_U=DF_f+DF_m$.
   סטטיסטי המבחן: $$WALD_{stat}=\frac{\dfrac{ESS_R-\left(ESS_f+ESS_m\right)}{DF_R-\left(DF_f+DF_m\right)}}{\dfrac{ESS_f+ESS_m}{DF_f+DF_m}}=CHOW_{stat}.$$

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

שאלות:

משתנה דמי לחותך:

1) על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:
$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t$.
(S.E) (134) (56) (24)
המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?
ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?
ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסייה?
ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ-500 ₪ מזה של נשים.
ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

משתנה דמי לשיפוע:

2) על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד.
תוצאות האמידה נתונות להלן:
$W_t = 5000 + 110 \cdot S_t + 120 \cdot D \cdot S_t + u_t$
(68) (23) (25)
בדוק את ההשערה.

3) חברה מסוימת מתמרצת עובדים ונותנת להם תגמול לפי מספר השעות הנוספות שעבדו בחודש. נגדיר Y – סה"כ התגמול שמקבל עובד שעבד X שעות נוספות בחודש. $D = 1$ אם $10 < X$ ו-$D = 0$ אחרת.
איזו משוואת רגרסיה יש להריץ בכדי לאמוד את סה"כ התגמול בתנאים הבאים:

א. מי שעבד עד וכולל 10 שעות נוספות בחודש תגמולו יהיה קבוע וזהה לכל השעות הנוספות ואילו מי שעבד מעבר ל-10 שעות נוספות מקבל תגמול שונה לכל שעה נוספת ל-10 הראשונות.
ב. עובדים שעבדו יותר מ-10 שעות נוספות בחודש מקבלים סכום קבוע ללא תלות במספר השעות הנוספות שעבדו.

משתנה דמי לכל פונקציה:

4) חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס' תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה.

כאשר:

NUM_t - מס' תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה.

$AVGD_t$ - נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים.

$TYPE_t$ - משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר, ו-0 כאשר הכביש לא מהיר.

החוקר בדק האם הפונקציה של מס' התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אסף החוקר 754 תצפיות ואמד את המשוואות הבאות:

1. $NUM_t = \gamma_3 + \delta_3 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{3t}$.

2. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_2 \cdot AVGD_t + \beta_3 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t + U_t$.

תוצאות אמידת המשוואות מוצגות להלן:

1. $NUM_t = 0.739 + 0.0233 \cdot AVGD_t$.

2. $NUM_t = 0.14978 + 1.40311 \cdot TYPE_t + 0.002877 \cdot AVGD_t - 0.008 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t$.

1. $ESS = 20963$, $Pt_{\hat{\alpha}} = 0.0019$, $Pt_{\hat{\beta}} = 0.0001$.

2. $ESS = 20759$, $Pt_{\hat{\alpha}} = 0.6534$, $Pt_{\hat{\beta}_1} = 0.0067$, $Pt_{\hat{\beta}_2} = 0.0001$, $Pt_{\hat{\beta}_3} = 0.1283$.

א. בדקו את טענת החוקר.

ב. מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על 4 אלפי מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא מהירות.

ג. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?

ד. מהי הרגרסיה "תחת H_0" למבחן WALD?

תשובות סופיות:

1) א. $W_t = 7971$.   ב. 1,043 ש"ח.   ג. כן.   ד. יש עדות לכך.
ה. יש עדות לכך.

2) יש עדות לכך.

3) א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 D_t\left(X_t - 10\right) + u_t$.   ב. $Y_t = \alpha + \beta_1 D_t + \beta_2 X_t + u_t$.

4) א. יש עדות לכך.   ב. $NUM_t = 1.532398$.

ג. $\begin{array}{l} H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2 \cdot \beta_2 \\ H_0 : \beta_3 = \beta_2 \end{array}$.

ד. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_3 \cdot \left(AVGD_t + AVGD \cdot TYPE\right)_t + U_t$.

סיכום ביניים:

רקע:

	משתנה דמי לחותך	משתנה דמי לשיפוע	משתנה דמי לכל הפונקציה
המודל	$Y_t=\alpha_0+\alpha_1 D+\beta\cdot X_t+u_t$	$Y_t=\alpha+\beta_0 X_t+\beta_1 DX_t+u_t$	$Y_t=\alpha_0+\alpha_1 D+\beta_0 X_t+\beta_1 DX_t+u_t$
השערה במילים	קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחותך).	קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל- Y בגין X (בשיפוע).	קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחותך ובשיפוע).
בדיקת ההשערה	מבחן t להפרש החותכים: $H_0:\alpha_1=0$	מבחן t להפרש השיפועים: $H_0:\beta_1=0$	מבחן WALD להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים): $H_0:\alpha_1=\beta_1=0$ **ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW. אם דוחים את H_0 יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב- WALD): $H_0:\alpha_1=0$ $H_0:\beta_1=0$

משתנה איכותי עם יותר משתי קטגוריות:

רקע:

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.

שכר ההתחלתי של אישה: α_0.

שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$.

החותך מייצג כאן את השכר הממוצע עבור כל קטגוריה:

שכר הממוצע של אישה: α_0.

שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t: $H_0 : \alpha_1 = 0$ (מבחן זהה למבחן t להבדל בין ממוצעים).

משתנה דמי לשיפוע:

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$.

השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.

הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0 : \beta_1 = 0$.

- החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.

השכר ההתחלתי של אישה: α_0.

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0.

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$.

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
   באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$.
   לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1.
   אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד: $H_0: \alpha_1 = 0$ ו- $H_0: \beta_1 = 0$.

2. מבחן CHOW:
   דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
   חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
   מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
   עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
   נשים: $W_t = \alpha_f + \beta_f X_t + u_t$.
   גברים: $W_t = \alpha_m + \beta_m X_t + u_t$.
   השערות: $H_0: \alpha_f = \alpha_m; \beta_f = \beta_m$.
   לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD):
   המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכלול את המדגם המאוחד: $W_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
   המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם: $ESS_U = ESS_f + ESS_m$, $DF_U = DF_f + DF_m$.
   סטטיסטי המבחן: $$WALD_{stat} = \frac{\dfrac{ESS_R - (ESS_f + ESS_m)}{DF_R - (DF_f + DF_m)}}{\dfrac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = CHOW_{stat}.$$

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים:

כאשר המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.

D_2 יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.

D_3 יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס.
נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

$V_t=$ מדד מחירי הירקות.

$p_t=$ מדד המחירים לצרכן.

1. משתני דמי לחותך:
הטענה: יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות.
המודל: $V_t=\alpha_0+\alpha_1D_{1t}+\alpha_2D_{2t}+\alpha_3D_{3t}+\beta\cdot P_t+u_t$.
כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב-β. למחיר זה יתווסף α_0 בחורף, $\alpha_0+\alpha_1$ באביב, $\alpha_0+\alpha_2$ בקיץ ו-$\alpha_0+\alpha_3$ בסתיו.
ניתן לראות כי: α_0 - החותך בקטגוריה שהושמטה, $\alpha_0+\alpha_i$ - החותך בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

השערות: $\begin{matrix} H_0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \\ H_1:OTHERWISE \end{matrix}$.

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

(U): $V_t=\alpha_0+\alpha_1D_{1t}+\alpha_2D_{2t}+\alpha_3D_{3t}+\beta\cdot P_t+u_t$.

(R): $V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$.

- שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t:

1. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף: $H_0:\alpha_1=0$.
2. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף: $H_0:\alpha_2=0$.
3. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף: $H_0:\alpha_3=0$.

2. משתני דמי לשיפוע:

הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן.

המודל: $V_t=\alpha+\beta_0P_t+\beta_1\left(D_{1i}P_t\right)+\beta_2\left(D_{2i}P_t\right)+\beta_3\left(D_{3i}P_t\right)+u_t$.

המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב: β_0 בחורף, $\beta_0+\beta_1$ באביב, $\beta_0+\beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0+\beta_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי- β_0: השיפוע בקטגוריה שהושמטה $\beta_0+\beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

השערות: $\begin{matrix} H_0:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0 \\ H_1:OTHERWISE \end{matrix}$.

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

(U): $V_t=\alpha+\beta_0P_t+\beta_1\left(D_{1i}P_t\right)+\beta_2\left(D_{2i}P_t\right)+\beta_3\left(D_{3i}P_t\right)+u_t$.

(R): $V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$.

- שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t.

3. משתני דמי לכל הפונקציה:
הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בפונקציית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.
המודל:

$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t.$$

בדיקת השערות:
השערות: $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
המבחן הסטטיסטי - מבחן WALD:
(U):

$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t.$$

(R): $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$.

אם דוחים את H_0, יש לבדוק במבחני WALD האם ההבדל הוא בין החותכים או בין השיפועים: $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
אם דוחים את H_0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t:
$H_0: \alpha_j = 0$, $H_0: \beta_j = 0$.

שאלות:

משתנה דמי לחותך:

1) ענה על הסעיפים הבאים:
א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.
i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
ii. פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.
ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ + אביב, חורף + סתיו.
i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?
ii. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.

2) כלכלן הציע לאמוד את המודל הבא: $ta25_t = \alpha_0 + \alpha_1 Q1_t + \alpha_2 Q2_t + \alpha_3 Q3_t + +\alpha_4 Q4_t + u_t$
כאשר: $Ta25$ - תשואת מדד המניות ת"א 25, Q_i - משתנה דמי המקבל ערך 1 עבור רבעון i ו-0 אחרת. מי מהטענות הבאות נכונה (יש רק אחת):
א. לא ניתן לאמוד את המודל כיוון שאין שום משתנה מסביר אלא רק משתני דמי.
ב. לא ניתן לאמוד את המודל יש בעיית מולטיקולינאריות מלאה.
ג. אין שום בעיה לאמוד את המודל.
ד. כל התשובות האחרות שגויות.

משתנה דמי לשיפוע ולכל הפונקציה:

3) ידוע כי התוצר בישראל תלוי בתוצר בארה״ב, על כן הוצע לבחון את המודל: $gdp_i = \alpha + \beta \cdot gdp\_usa_i + u_i$.

כאשר gdp הוא אחוז הצמיחה בתוצר בישראל ו-gdp_usa הוא אחוז הצמיחה בתוצר בארה״ב.

הועלתה הטענה שיש עונתיות לפי רבעונים לשם כך הוגדר משתנה הדמי q = רבעון.

רשמו את השערות האפס עבור הטענות הבאות:

א. הרבעונים משפיעים על אחוז הצמיחה בתוצר בישראל באופן כללי וכתלות בהשפעת התוצר האמריקאי.

ב. השפעת הרבעון השלישי על התוצר בישראל זהה להשפעת הרבעון הרביעי.

ג. השפעת התוצר האמריקאי על התוצר בישראל ברבעון השני זהה לרבעון הראשון.

ד. הרבעונים השלישי והראשון משפיעים באופן זהה על התוצר בישראל באופן ישיר וגם כתלות בתוצר האמריקאי.

תשובות סופיות:

1) א.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$. ii. WALD ו-t. ב.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 , \alpha_3 = 0$.

ii. WALD.

2) ב׳.

3) א. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. ב. $H_0 : \alpha_3 = 0$.

ג. $H_0 : \beta_1 = \beta_2$. ד. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_3 ; \beta_1 = \beta_3$.

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים:

רקע:

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים:

לדוגמא – שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקציית השכר:
מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).
נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).
נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).
נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי גם בשנות לימוד (S_t).

1. הבדל בחותך ללא אינטראקציה:
   המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$.
   במודל זה – אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
   ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד:
   1. הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.
   2. הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים: $H_0 : \alpha_2 = 0$.

2. הבדל בחותך עם אינטראקציה:
   המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$.
   במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
   במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי:
   3. $H_0 : \alpha_3 = 0$.

3. דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה:
   הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא:
   D_1 יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת.
   D_2 יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת.
   D_3 יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת.
   הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

המודל: $W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$.
נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה:

	גבר	אישה	הפרש
לבן	$\gamma_0 + \gamma_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_1 - \gamma_3$
שחור	$\gamma_0 + \gamma_2$	γ_0	γ_2
הפרש	$\gamma_1 - \gamma_2$	γ_3	

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה: $H_0 : \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ או $H_0 : \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$
התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך הקודמת: $\begin{matrix} WALD = t^2 \\ PF = Pt \end{matrix}$.

שאלות:

1) חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה:

$$\ln(MWAGE) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot S + \alpha_2 \cdot E + \alpha_3 \cdot (S \cdot E) + \beta_0 \cdot EXP + \beta_1 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_2 \cdot (EXP \cdot E) + \beta_3 \cdot (EXP \cdot S \cdot E) + U,$$

כאשר:
S משתנה דמי: 1= עבור נשים, 0=גברים.
E משתנה דמי: 1= עבור השכלה גבוהה $(scl > 12)$, 0=השכלה נמוכה.

א. רשמו את הפונקציה לחישוב:
i. תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.
ii. תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.
iii. לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות:
i. אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.
ii. השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.
iii. אין השפעות השכלה אצל גברים.
iv. אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.

תשובות סופיות:

1) א. i. $\hat{\ln}(MWAGE)=\hat{\alpha}_0+\hat{\beta}_0\cdot 10$.

ii. $\hat{\ln}(MWAGE)=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2+\hat{\alpha}_3$.

iii. $EXP_t=\dfrac{-(\alpha_1+\alpha_3)}{\beta_1+\beta_3}$.

ב. i. $H_0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$.

ii. $H_0:\alpha_3=\beta_3=0$.

iii. $H_0:\alpha_2=\beta_2=0$.

iv. $H_0:\beta_2+\beta_3=0$.

אקונומטריקה ב

פרק 4 - תיאוריה הפרת ההנחות קלאסיות

תוכן העניינים

הפרת ההנחות הקלאסיות:

רקע:

ארבעת הנושאים הבאים עוסקים במצב של הפרת אחת ההנחות הקלאסיות הדרושות לאמידת הפרמטרים בשיטת OLS:

- הטרוסקדסטיות (הפרת הנחה מס' 5) – שונות קבועה ויחידה לאורך קו הרגרסיה: $V(u_t)=\sigma^2$.
- מתאם סידרתי (הפרת הנחה מס' 6) – אי תלות בין הטעויות: $\text{cov}(u_t,u_s)=0$.
- מודלים דינמיים ו-משוואות סימולטניות (הפרת הנחה מס' 4) – אי תלות בין המשתנים הב"ת לטעויות: $\text{cov}(x,u)=0$.

בכל אחד מן הנושאים נלמד:

- מהן ההשלכות של הפרת ההנחות הללו על אומדי הריבועים הפחותים.
- מהם המבחנים הסטטיסטיים המשמשים לזיהוי קיומה של ההפרה.
- כיצד נתקן את משוואת הרגרסיה כך שניתן יהיה לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS.

אקונומטריקה ב

פרק 5 - הטרוסקדסטיות

תוכן העניינים

השלכות על אומדי OLS:

רקע:

הטרוסקדסטיות הוא מצב שבו מופרת הנחת ההומוסקדסטיות, הגורסת כי שונות הטעויות היא אותה שונות עבור כל תצפית ותצפית: $V(u_t)=\sigma^2$ לכל t, כלומר התצפיות מפוזרות באופן אחיד סביב קו הרגרסיה.
במצב של הטרוסקדסטיות שונות הטעויות של כל תצפית היא שונה: $V(u_t)=\sigma_t^2$.

בהינתן הטרוסקדסטיות מופרת תכונת היעילות של אומדי הריבועים הפחותים שכן בכדי לחשב שונות יעילה של האומדים השתמשנו בהנחה של שונות קבועה.

מבחנים לזיהוי הטרוסקדסטיות:

רקע:

החשד לקיומה של בעיית הטרוסקדסטיות בנתונים צריך להתעורר כאשר אנו בוחנים את גרף השאריות – באיזה אופן השונות של הטעויות משתנה בין תצפית לתצפית.
שיטות לזיהוי הטרוסקדסטיות: מבחן GQ (Goldfeld-Qauandt) ומבחן White.
מבחן GQ מניח כי במקום שונות אחת אחידה של הטעויות לכל התצפיות, קיימות שתי שונויות שונות בלבד. ואילו מבחן White מניח כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות.

1. מבחן GQ:
ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה היא כי קיימות שתי שונויות שונות של טעויות.
ביצוע המבחן:

- מחלקים את המדגם לשני חלקים:
  1. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות גבוהה יותר.
  2. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות נמוכה יותר.

  מקובל להשמיט מס' תצפיות (בין 1/6 ל-1/3) במרכז המדגם.

- אומדים כל אחד מהחלקים בנפרד ומקבלים את ה-ESS של כל חלק.
- מחשבים את הסטטיסטי: $F_{stat}=\dfrac{ESS_1/T_1-K-1}{ESS_2/T_2-K-1}$ (תמיד השונות הגבוהה חלקי הקטנה).
- סטטיסטי זה מתפלג: $F_{(\alpha;T_1-K-1,T_2-K-1)}$.
- כלל ההכרעה: אם $F_{stat}>F_C$ אז דוחים את H_0.
- ההשערות: $\begin{matrix}H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\\ H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2\end{matrix}$.

2. מבחן White:
ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות. הביטוי המתמטי של הנחה זו היא היותה של השונות פונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים:

$$\sigma_t^2=f\left(x_j,x_j^2,x_jx_j\right)$$

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1x_1+...+\alpha_kx_k+\beta_1x_k^2+...+\beta_kx_k^2+\gamma_{12}x_1x_2+\gamma_{13}x_1x_3...$$

האומד ל- σ_t^2 הוא $\hat{u}_t^2$.
המבחן הוא מבחן LM:

- אומדים את המודל המקורי ומקבלים את הסטיות מקו הרגרסיה $\hat{u}_t$ (המכונה בתוכנה הסטטיסטית RES-SAS).
- אומדים את $\hat{u}_t^2$ כפונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים: $\hat{u}_t^2 / x_j, x_j^2, x_j x_j$ זוהי רגרסיית העזר.
- נחשב את סטטיסטי LM: $LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2$.
- אם $LM_{stat} > \chi_m^2$ כאשר, m = מסי' המשתנים ברגרסיית העזר.

השערות: $\begin{array}{l} H_0 : \alpha_j = \beta_j = \gamma_{jj} = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{array}$.

שאלות:

1) חוקר מניח כי מכירות של חנות הן פונקציה של שיטחה, דמי שכירות והאפשרות של מכירת עיתונים.
נסמן:
Y_SALES - מכירות חודשיות (₪).
$X1\_SQUARES$ - שטח החנות (מ"ר).
$X2\_RENT$ - דמי שכירות ($).
$PAPERS$ - משתנה איכותי המקבל 1 אם החנות מוכרת גם עיתונים ו-0 אם לא.
החוקר חשד כי קיימת בעיה של הטרוסקדסטיות בנתונים.
החוקר ביצע מבחן לזיהוי הטרוסקדסטיות שתוצאותיו נתונות להלן:

:Dependent Variable

Number of Observations Read	20
Number of Observations Used	20

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	---	-------	------	------	---- -
Error	---	-------	------		
Corrected Total	---	----			

Root MSE	-------	R-Square	0.086942
Dependent Mean	-------	Adj R-Sq	-------

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	-------	----	-------	---- -
X1_SQUARE	1	-------	-----	------	---- --
X1_SQUARE^2	1	-------	-----	-----	---- --
X1_SQUARE*X2_RENT	1	-------	-----	------	--- --
X2_RENT	1	-------	--------	-----	--- -
X2_RENT^2	1	--------	--------	-----	--- --
X2_RENT*PAPERS	1	-------	------	-----	--- --
PAPERS	1	------	------	-----	-- --

הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת : ______________________.
על ידי מבחן : ___________________ .
המשתנה התלוי הינו: ________________.
המשתנים הב"ת: ____________________.
ההשערות הינן: _____________________ .
גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): ____________.
המסקנה המתקבלת היא: _____________________________.

תשובות סופיות:

1) קיום הטרוסקדסטיות בנתונים.
$WHITE(LM)$.
RES^2.
$X1\_SQUARE$, $X1\_SQUARE^2$, $X1\_SQUARE*X2\_RENT$,
$X2\_RENT$, $X2\_RENT^2$, $X2\_RENT*PAPERS$, $PAPERS$.
$LM_{stat}=1.73$.
אין עדות לכך.

פתרון בעיית ההטרוסקדסטיות WLS:

רקע:

נניח שאנו רוצים לאמוד את המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ וידוע כי לכל קריזה שונות אחרת. ההנחה שעומדת בבסיס שיטת ה-WLS היא כי השונות המשתנה כוללת בתוכה מרכיב קבוע ומרכיב משתנה: $\sigma_t^2 = Z_t \cdot \sigma^2$ את המרכיב המשתנה בשונות (Z_t) יש לנטרל. לשם כך ניצור משתנה חדש – W_t שיהווה השורש ההופכי לאותו מרכיב משתנה: $W_t = \frac{1}{\sqrt{Z_t}}$.

נכפיל כל תצפית במשתנה החדש W_t וניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$
$$Y_t W_t = \alpha \cdot W_t + \beta\left(X_t W_t\right) + u_t W_t$$

בצורתה המפורשת המשוואה החדשה נראית כך: $\frac{Y_t}{\sqrt{Z_t}} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_t}} + \beta \cdot \frac{X_t}{\sqrt{Z_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}$.

שאלות:

1) נתון המודל:

1. $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + U_t$.

ונתון כי: $VAR(U_t) = \frac{\sigma^2}{Z_t^2}$ (Z_t משתנה ידוע).

א. מהי הבעיה שנוצרת באמידת משוואה (1)?

ב. מהן תכונות אומדי הריבועים הפחותים של משוואה (1)?

כדי לפתור את הבעיה שנוצרה, נאמדה המשוואה הבאה:

2. $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + U_t \cdot W_t$.

ג. מהו W_t שבעזרתו ניתן לאמוד את α ו- β בצורה יעילה?

ד. מהו האומד היעיל של σ^2?

ה. האם ניתן להשוות בין המודלים על בסיס R^2? אם לא, האם ניתן להחליט בכל זאת איזה מודל טוב יותר?

ו. חוו דעתכם על הטענות הבאות, ונמקו:

i. אם נתון כי: $Z_t = a + b \cdot \bar{X}$, התשובות לסעיפים א' ו-ב' נשארות ללא שינוי.

ii. המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$ (כאשר: $\varepsilon_t = U_t \cdot W_t$) היא אחת המשוואות הנורמאליות לאמידת משוואה (2).

2) ענו על השאלה הקודמת, כאשר נתון כי: $VAR(U_t) = \sigma^2 \cdot X_t^2$.

3) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$. וקיים מדגם של 100 תצפיות כאשר נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} X_t \sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ X_t^2 \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$. (שאר ההנחות הקלאסיות מתקיימות).

א. במשוואה מס' 1 יש בעיה של: ________________.

ב. אמידת משוואה (1) תניב אומדים בלתי מוטים ועקיבים: נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. פתרון הבעיה הקיימת במשוואה (1) ייתכן על ידי אמידת המשוואה הבאה: $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + \omega_t$.

כאשר: $W_t =$ ______.

ד. אם נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} 3\sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$

האם ישתנו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב': כן/לא/לא ניתן לדעת

4) להלן משוואה המציגה את הקשר בין שנות השכלה X והכנסה Y:

$Y_t = \alpha + \beta 1 X_t + \beta_2 X_t^2 + u_t$.

כמו כן ידוע שמתקיים הקשר: $\text{var}(u_t) = 64X_t^2$.

הריצו מספר רגרסיות וקיבלו את התוצאות הבאות:

1. $\frac{\hat{Y}_t}{X_t} = 21 + 8\frac{1}{X_t - 2X_t}$.
2. $\frac{\hat{Y}_t}{X_t^2} = 13\frac{1}{X_t}3\frac{1}{X_t^2} - 4X_t$.
3. $\frac{\hat{Y}_t}{X_t} = 2 - 20\frac{1}{X_t^2} + 7X_t$.
4. $\frac{\hat{Y}_t}{8} = 7 + 6\frac{X_t}{8} - 4\frac{X_t^2}{8}$.

אומדני ה-OLS עבור α ו-β המבוססים על רגרסיה המקיימת את כל ההנחות הקלאסיות הינם:

א. $\hat{\alpha} = 8; \hat{\beta}_1 = 21$.

ב. $\hat{\alpha} = 3; \hat{\beta}_1 = 13$.

ג. $\hat{\alpha} = 20; \hat{\beta}_1 = 7$.

ד. $\hat{\alpha} = 7; \hat{\beta}_1 = 6$.

תשובות סופיות:

1) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Z_t^2}}} = Z_t$.

ד. $\sigma^2 = \frac{ESS}{T-K}$. ה. לא, המודל השני. ו.i לא נכון. ii. לא נכון.

2) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{X_t}$.

ד. $S^2 = \frac{ESS}{T-k-1}$. ה. ראו סרטון. ו. ראו סרטון.

3) א. הטרוסקדסטיות. ב. נכון.

ג. $t \geq 50$ $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t}}$, $t \leq 50$ $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t^2}}$. ד. לא.

4) א'.

אקונומטריקה ב

פרק 6 - מתאם סדרתי

תוכן העניינים

כללי:

רקע:

מתאם סדרתי עוסק במצב שבו מופרת ההנחה (מס' 6) של אי תלות בין הטעויות: $\text{cov}(u_t,u_s)=0$ ונוצרת תלות סטטיסטית בין הטעויות במודל: $\text{cov}(u_t,u_s)\neq 0$.
תלות כזו בין הטעויות קיימת בדרך כלל כאשר הנתונים הנאספים הם נתוני סדרות עיתיות ולא נתוני חתך בהם עסקנו עד כה. בנתוני סדרות עיתיות, מאחר ומדובר באותו הפרט הנמדד בזמנים שונים סביר שהטעויות בניבוי שלו תהיינה תלויות אחת בשנייה.

השלכות על אומדי הריבועים הפחותים (OLS):

מבין התכונות של אר"פ (ליניאריות, חוסר הטיה, עקיבות ויעילות) היחידה שמופרת כאשר קיים מתאם סידרתי היא: תכונת היעילות.
משום שתכונת היעילות היא היחידה מבין תכונות אר"פ התלויה להוכחתה בקיומה של הנחת אי התלות בין הטעויות. משום הפגיעה בתכונת היעילות, בדיקת ההשערות לא תהיה תקפה.

- שימו לב: כי במידה וקיים מתאם סידרתי חיובי בין הטעויות ולמשתנים יש מגמת זמן (X עולה או יורד עם הזמן) אומד השונות (ESS) יהיה מוטה כלפי מטה ואז נקבל: R^2, F ו-t מוטים כלפי מעלה.

מבנה המתאם הסדרתי:

מתאם סדרתי מסדר ראשון:
ההנחה היא כי יש מתאם בין הטעויות במרחק אחד, כלומר u_t תלוי ישירות רק ב-u_{t-1}: $\text{cov}(u_t,u_{t-1})\neq 0$.
את המתאם בין הטעויות מסדר ראשון ניתן לנסח באופן הבא: $u_t=\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t$

כך ש:

1. $\rho\neq 0$ (כי אם $\rho=0$ אין מתאם סידרתי).
2. $1<\rho<-1$ (כי אם חורג מ-1 הטעות הולכת וגדלה עם הזמן).
3. ρ חיובי פירושו מתאם סדרתי חיובי ואילו ρ שלילי פירושו מתאם סדרתי שלילי (לא נפוץ).

4. ε_t מקיים את ההנחות הקלאסיות מאחר ומהווה סטייה מקרית לחלוטין

(בניגוד ל- u_t) כך ש:

$$E(\varepsilon_t)=0$$
$$V(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2 .$$
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-s})=0$$

המודל יכיל שתי משוואות-המשוואה העיקרית והגדרת המתאם הסדרתי (מסדר ראשון):

$$Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$$
$$u_t=\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t .$$

מלבד α ו- β נרצה לאמוד גם את ρ.

מתאם סדרתי מסדר שני:

$u_t=\rho_1\cdot u_{t-1}+\rho_2\cdot u_{t-2}+\varepsilon_t$.

הן u_{t-1} והן u_{t-2} משפיעים ישירות על u_t.

מתאם סדרתי מסדר P:

$u_t=\rho_1\cdot u_{t-1}+\rho_2\cdot u_{t-2}+\ldots+\rho_P\cdot u_{t-P}+\varepsilon_t$.

u_t מושפע מתקופות שונות בעבר.

תכונות המתאם הסדרתי:

מכיוון שכל טעות בזמן מסוים מתואמת עם הטעות הסמוכה לה בזמן: $r_{(u_t,u_{t-s})}=\rho^s$

המתאם של u_t הולך ופוחת עם הזמן: $\rho_{u_tu_{t-1}}>\rho^2_{u_tu_{t-2}}>\rho^3_{u_tu_{t-3}}>\ldots>\rho^s_{u_tu_{t-s}}$.

בנוסף לכך, התוחלת, השונות והשונות המשותפת של הטעויות:

$$E(u_t)=0$$

$$V(u_t)=\sigma_u^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

$$COV(u_t,u_{t-s})=\rho^s\sigma_{u_t}^2=\rho^s\frac{\sigma_s^2}{1-\rho^2}$$

שאלות:

1) כלכלן החליט לאמוד מודל עבור הצמיחה במשק.
לשם כך אמד את המודל: $gdp_i = \alpha + \beta_1 r_i + \beta_2 c_i + u_i$ עבור 25 תצפיות.
כאשר: gdp הוא התוצר השנתי במשק, r זו הריבית השנתית הממוצעת שהייתה ו- c זו הצריכה הפרטית השנתית במשק.
התקבלו נתוני האמידה הבאים:

$$\hat{\alpha} = 10\ ,\ S_{\hat{\alpha}} = 6$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.05\ ,\ S_{\hat{\beta}_1} = 0.06$$

$$\hat{\beta}_2 = 0.6\ ,\ S_{\hat{\beta}_2} = 0.1$$

כמו כן נתון כי קיים מתאם סדרתי חיובי בנתונים ונמצא כי:
$\sum \text{cov}(u_i, u_j) > 0$.

א. מי מהאומדים מובהק?
ב. מי מהאומדים חסר הטיה ומי עקיב?

2) נתון מתאם סדרתי מסדר ראשון: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.
נתון כי: $\rho = 0.9$ וכי: $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 1$.
מצאו את:
א. המתאם בין u_t ל- u_{t-1}.
ב. המתאם בין u_t ל- u_{t-4}. הסבר את ההבדל בין המתאמים (סעיף א' ו-ב').
ג. השונות σ_u^2.
ד. חזרו על סעיפים א' עד ג' עבור $\rho = 0.4$. הסבירו את ההבדל בין התוצאות.

3) ידוע כי במודל מתקיים מתאם סדרתי מסדר ראשון כלומר:

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta_1 x_i + u_i \\ u_i &= \rho u_{i-1} + \varepsilon_i \end{aligned}.$$

כמו כן ידוע כי: $\rho = 0.4; \text{var}(\varepsilon_i) = 2$.
א. חשב את: $\text{var}(u_i)$.
ב. חשב את: $\text{cov}(u_i, u_{i-3})$.
ג. חשב את: ρ_{u_i}, u_{i-3}.

4) נתון המודל: $y_i = \alpha + \beta_1 x_i + u_i$ המקיים את כל ההנחות הקלאסיות פרט למתאם סדרתי. ידוע כי מתקיים: $u_t = -0.5u_{t-1} + \varepsilon_t$.
בנוסף ידוע כי: $VAR(\varepsilon_t) = 1$.
מה יהיה: $VAR(u_t)$?

א. 2.
ב. 0.8.
ג. 0.67.
ד. 1.33.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

תשובות סופיות:

1) א. β_2. ב. כולם.

2) א. $r_{(u_t,u_{t-1})} = 0.9$. ב. $r_{(u_t,u_{t-4})} = 0.6561$. ג. $\sigma_u^2 = 5.263$.
ד. $\sigma_u^2 = 1.19$, $r_{(u_t,u_{t-4})} = 0.0256$, $r_{(u_t,u_{t-1})} = 0.4$.

3) א. 2.38. ב. 0.15. ג. 0.4^3.

4) ד'.

מבחנים לזיהוי המתאם הסדרתי:

רקע:

מבחן DW (דרבין ווטסון) לקיום מתאם סדרתי מסדר ראשון:

- נניח תחילה כי אין מתאם סדרתי ונאמוד את המשוואה הראשית בשיטת OLS.
- כחלק מתוצאות האמידה נקבל ציון DW (יכול לקבל ערכים בין 0 ל-4 בלבד).
- נתבונן בטבלת DW ולפי K = מס' המשתנים הב"ת במודל ו-T = מס' התצפיות במדגם נשלוף שני ערכים: d_U ו- d_L.
- נחלק את הטווח שבין 0 ל-4 באופן הבא:

$$0 — \rho>0 — d_L — d_U — \rho=0 — 4-d_U — 4-d_L — \rho<0 — 4$$

- נראה היכן נופל ציון ה-DW שהתקבל כחלק מתוצאות האמידה.
ניתן לדעת אם יש מתאם ואיזה סוג של מתאם רק אם ציון ה-DW ייפול בחלקים המודגשים באדום.

השערות: $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho>0,\rho<0$.

חישוב הסטטיסטי: $DW_{stat}\cong 2\cdot(1-\hat{\rho})$.

אם אנו מקבלים ציון $\hat{\rho}$ ניתן להציב בנוסחה ולקבל DW_{stat}.

למבחן DW יש שתי בעיות עיקריות:

1. מתאים רק למתאם סדרתי מסדר ראשון.
2. יש אזורים "מתים" בטווח בהם לא ניתן לדעת האם יש מתאם סדרתי.

בנוסף לכך על מספר תנאים להתקיים כדי שאפשר יהיה להשתמש במבחן DW:

1. הרגרסיה כוללת חותך.
2. ה-Xים קבועים ולא משתנים.
3. אין משתנים מסבירים שהם פיגור של המשתנה המוסבר.
4. אין תצפיות חסרות באמצע.
5. אם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון אז הוא מהצורה: $u_t=\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t$.

מבחן LM:

לעומת מבחן DW מבחן LM מתאים גם לבחינת קיומו של מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר מסדר ראשון: $\begin{matrix} Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + u_t \\ u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \end{matrix}$.

המודל הלא מוגבל:

(U): $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

ניתן להתייחס לבחינת קיומו של מתאם סדרתי כהוספת משתנה מסביר: $\hat{u}_{t-1}$.

השלבים לביצוע המבחן:

- נאמוד את המודל המקורי ונחשב $\hat{u}_t$ ו-$\hat{u}_{t-1}$.
- נאמוד את רגרסיית העזר: $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k; \hat{u}_{t-1}$.
- נחשב סטטיסטי LM: $LM_{stat} = T \cdot R^2$.
- נדחה את H_0 כאשר: $LM_{stat} > \chi^2_m$ כאשר m = סדר המתאם הסדרתי.

אם נדחה את H_0 נדע את סימנו של המתאם הסדרתי לפי המקדם של $\hat{u}_{t-1}$ ברגרסיית העזר ששווה ל- $\hat{\rho}$.

שימו לב כי אם נרצה לבדוק מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר:

ההשערות: $\begin{matrix} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_s = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{matrix}$.

רגרסיית העזר: $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k; \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, ..., \hat{u}_{t-s}$.

שאלות:

מבחן DW:

1) חוקר רצה לאמוד את מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן שעובר: $CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME_t + u_t$.

כאשר:

$CLOSE_t$ = מחיר סגירה של מניה ב-$ ביום t.

$TIME_t$ = משתנה זמן שמקבל את הערכים: $1,2,3\ldots$.

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: CLOSE

Analysis of Variance

F Value	Prob>F	Mean Square	Sum of Squares	DF	Source
	55.78		-------	1	Model
			-------	151	Error
			-------	152	C Total
		0.181	R-square	---- Root MSE	
		------	Adj R-sq	---- Dep Mean	
				---- C.V.	

Parameter Estimates

T for H0: Parameter=0	Prob>|T|	Standard Error	Parameter Estimate	DF	Variable
91.047	0.0000	0.0148	1.3474	1	INTERCEP
0.0000	-7.468	0.0001	-0.00075	1	TIME

Durbin-Watson D **0.150**

האם קיים מתאם סדרתי?

TABLE 12 Cutoff Points for the Distribution of the Durbin-Watson Test Statistic

Let d_α be the number such that $P(d < d_\alpha) = \alpha$, where the random variable d has the distribution of the Durbin-Watson statistic under the null hypothesis of no autocorrelation in the regression errors. For probabilities $\alpha = .05$ and $\alpha = .01$, the tables show, for numbers of independent variables, K, values d_L and d_U such that $d_L \le d_\alpha \le d_U$, for numbers n of observations.

$\alpha = .05$

n	K = 1		2		3		4		5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	1.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

2) המודל הינו: $\begin{array}{l} Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \end{array}$.

u_t - הפרעה מקרית קלאסית.

$T = 100$ וידוע כי:

$u_t = 0.9u_{t-1}$

$d_L = 1.57$

$d_U = 1.65$

האם קיים מתאם סדרתי ברמת מובהקות של 5%?

מבחן LM:

3) עבור הדוגמא הקודמת – ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:

$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME + u_t$.

נבחן את קיומו של מתאם סדרתי מסדר ראשון באמצעות מבחן LM.

נאמוד את רגרסיית העזר: $u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot TIME_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	Prob>F	F Value
Model	2	-------			
Error	150	--------			
C Total	152	-------			

Root MSE	------	R-square	0.855
Dep Mean	----	Adj R-sq	------
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate
INTERCEP	1	-.000096
TIME	1	1.16331E-05
RES1	1	0.927172

א. האם קיים מתאם סדרתי?

ב. מהו ערכו של המתאם הסדרתי הנאמד?

ג. מהו כיוונו של המתאם הסדרתי באוכלוסייה?

תשובות סופיות:

1) יש עדות לכך.

2) יש עדות לכך.

3) א. יש עדות לכך. ב. $\hat{\rho} = 0.927$. ג. חיובי.

פתרון המתאם הסדרתי:

רקע:

רגרסיית הפרשים (שיטת קוקרן-אורקט):

ניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית שבה לא יהיה מתאם סדרתי ולכן ניתן יהיה לאמוד אותה בשיטת הריבועים הפחותים, האומדים יהיו יעילים וניתן יהיה לבצע בדיקת השערות.

משוואה (1): המודל בזמן t : $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

משוואה (2): המודל בזמן $t-1$ מוכפל ב- ρ : $\rho \cdot Y_{t-1} = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot X_{t-1} + \rho \cdot u_t$.

החסרת משוואה (2) ממשוואה (1):

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}).$$

כדי לאמוד את הפרמטרים של רגרסיית ההפרשים נגדיר:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$
$$\alpha^* = \alpha(1-\rho)$$
$$\beta^* = \beta$$
$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$
$$\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

כך "נטרלנו" את המתאם הסדרתי: $\varepsilon_t = u_t - \rho \cdot u_{t-1}$, $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \Leftarrow$.

ε_t מקיים את כל ההנחות הקלאסיות ולכן שונות הרגרסיה וכן שונות הפרמטרים הנאמדים לא תהיה תלויה במקדם המתאם הסדרתי.

המשוואה "המתוקנת" אותה נאמוד: $Y^* = \alpha^* + \beta^* X_t^* + \varepsilon_t$.

לאחר אמידת משוואה זו ניתן לחלץ את האומדים של הפרמטרים המקוריים: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

מאחר ש- ρ איננו ידוע יש צורך לאמוד אותו.

אמידת ρ בשיטת קוקרן אורקוט:

שיטת קוקרן אורקוט לאמידת ρ היא שיטה איטראטיבית – מבוססת על חזרות של תהליך מסוים עד להתכנסות.

התהליך הממוחשב נקרא אוטורגרסיה (AUTOREGRESION) מסדר ראשון, שני, שלישי וכו' (תלוי בסדר המתאם הסדרתי). התיקון למתאם הסדרתי יתבצע על ידי הרצת רגרסיה עם משתנה AR(1) (אוטו רגרסיה מסדר ראשון), AR(1) ו-AR(2) (אם מניחים קיום אוטורגרסיה מסדר שני) וכו'. אם משתנה AR מובהק זו אינדיקציה שפתרנו את הבעיה של המודל המקורי.

שאלות:

1) כלכלן החליט לאמוד מודל עבור הצמיחה במשק.
לשם כך אמד את המודל: $gdp_i = \alpha + \beta_1 r_i + \beta_2 c_i + u_i$ עבור 25 תצפיות.
כאשר: gdp הוא התוצר השנתי במשק, r זו הריבית השנתית הממוצעת שהייתה ו-c זו הצריכה הפרטית השנתית במשק.
ידוע כי במודל מתקיים מתאם סדרתי מסדר ראשון, כלומר:
$u_i = \rho u_{i-1} + \varepsilon_i$.

א. מהי רגרסיית ההפרשים שעל הכלכלן לאמוד על מנת לקבל אומדים חסרי הטיה ויעילים וכמה תצפיות יש עבורה?

ב. בהנחה כי קיים מתאם סדרתי מסדר שני בנתונים:
$u_i = \rho_1 u_{i-1} + \rho_2 u_{i-2} + \varepsilon_i$.
מהי רגרסיית ההפרשים שעל הכלכלן לאמוד על מנת לקבל אומדים חסרי הטיה ויעילים וכמה תצפיות יש עבורה?

2) ידוע כי במודל מתקיים מתאם סדרתי מסדר ראשון, כלומר:
$$y_i = \alpha + \beta_{x_i + u_i}$$
$$u_i = \rho u_{i-1} + \varepsilon_i$$.
נאמדה הרגרסיה המקורית והתקבל:
$$\hat{\alpha} = 10 \ , \ S_{\hat{\alpha}} = 6$$
$$\hat{\beta} = 2 \ , \ S_{\hat{\beta}} = 10$$.
כמו כן, ידוע כי: $\hat{\rho} = 0.6$.
בגלל בעיית המתאם הסדרתי נאמדה גם רגרסיית ההפרשים הבאה:
$y_i - \rho \cdot y_{i-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(x_i - \rho \cdot x_{i-1}) + u_i - u_{i-1}$.
כלומר נאמד מודל *: $y^*_i = \alpha^* + \beta^* x^*_i + \varepsilon_i$.
והתקבלו התוצאות הבאות:
$$\hat{\alpha}^* = 8 \ , \ S_{\hat{\alpha}^*} = 2$$
$$\hat{\beta}^* = 2 \ , \ S_{\hat{\beta}^*} = 6$$.

א. מהם האומדים חסרי ההטיה, העקיבים והיעילים עבור β , α?

ב. בחן את ההשערה כי $\alpha = 15$.

ג. בחן את ההשערה כי $\beta = 16$.

ד. ידוע כי: $e_9 = 1$, $x_{10} = 15$, $x_9 = 10$, $y_9 = 50$, מה התחזית של $\hat{y}_{10}$?

3) ידוע כי במודל מתקיים מתאם סדרתי מהצורה:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$
$$u_i = \rho u_{t-1} + \varepsilon_i$$

כמו כן ידוע כי: $\hat{\rho} = -0.6$.

חוקר אמד את רגרסיית העזר הבאה:

$y^* = \gamma_0 + \gamma_1 x_i^* + \varepsilon_i$.

כאשר:

א. $y_i^* = (y_i - 0.6 y_{i-1}), \gamma_0 = 0.4\alpha, x_i^* = (x_i - 0.6 x_{i-1})$.

ב. $y_i^* = (y_i - 0.6 y_{i-1}), \gamma_0 = \alpha, x_i^* = (x_i - 0.6 x_{i-1})$.

ג. $y_i^* = (y_i + 0.6 y_{i-1}), \gamma_0 = 1.6\alpha, x_i^* = (x_i + 0.6 x_{i-1})$.

ד. $y_i^* = (y_i + 0.6 y_{i-1}), \gamma_0 = 0.4\alpha, x_i^* = (x_i - 0.6 x_{i-1})$.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

4) נתון המודל: $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$.

ידוע כי מתקיים: $u_t = 0.3u_{t-1} - 0.1u_{t-2} + \varepsilon_t$.

לכן נאמד גם המודל הבא:

$$y_t - 0.3y_{t-1} + 0.1y_{t-2} = 5 + 2(x_t - 0.3x_{t-1} + 0.1x_{t-2})$$
$$(2) \quad (0.8)$$

בסוגריים סטיות התקן.

הסטטיסטי בערך מוחלט לבחינת ההשערה כי: $\alpha = 10$ הוא:

א. 2.5.

ב. 1.

ג. 1.5.

ד. כל התשובות אינן נכונות.

5) כלכלן הריץ את המודל הבא: $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$.

הוא קיבל את סטטיסטי $DW = 3$ כאשר $DL = 1.2$ ו- $DU = 1.8$ והסיק שיש מתאם סדרתי.

על מנת לאמוד את המקדמים במודל הנ"ל מחליט החוקר להריץ את רגרסיית ההפרשים: $y_t - \rho y_{t-1} = \alpha^* + \beta^*(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t$.

א. החוקר צודק כי יש מתאם סדרתי והיחס בין α^* ל- α הוא: 1.5.

ב. החוקר צודק כי יש מתאם סדרתי והיחס בין α^* ל- α הוא: 0.66.

ג. החוקר צודק כי יש מתאם סדרתי והיחס בין α^* ל- α הוא: 2.

ד. החוקר אינו צודק כי יש מתאם סדרתי.

ה. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

תשובות סופיות:

1) א. $gdp^* = \alpha^* + \beta_1^* r_i^* + \beta_2^* c_i^* + \varepsilon_i$, 24. ב. $gdp^* = \alpha^* + \beta_1^* r_i^* + \beta_2^* c_i^* + \varepsilon_i$, 23.

2) א. $\hat{\alpha} = 20$, $\hat{\beta} = 2$. ב. לא מובהק. ג. מובהק.

ד. $\hat{y}_{10} = 56$.

3) ג'.

4) ג'.

5) א'.

אקונומטריקה ב

פרק 7 - סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות

תוכן העניינים

סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות:

רקע:

<table dir="rtl">
<tr><th></th><th>מתאם סדרתי</th><th>הטרוסקדסטיות</th></tr>
<tr><td>המשוואה העיקרית של המודל</td><td colspan="2">למשל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$</td></tr>
<tr><td>ההנחה הקלאסית המופרת</td><td>$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) = 0$</td><td>$V(u_t) = \sigma^2$</td></tr>
<tr><td>המצב לאחר ההפרה</td><td>$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$</td><td>$V(u_t) = \sigma_t^2$</td></tr>
<tr><td>המשוואה המאפיינת את ההפרה</td><td>$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$</td><td>$V(u_t) = W_t \sigma^2$</td></tr>
<tr><td>מה קורה אם אומדים ב-OLS</td><td colspan="2">מתקבלים אומדים חסרי הטיה ועקיבים, אך תכונת היעילות נפגעת.</td></tr>
<tr><td>זיהוי הבעיה</td><td>מבחן DW
מבחן LM</td><td>מבחן GQ
מבחן White</td></tr>
<tr><td>פתרון הבעיה</td><td>שיטת קוקרן – אורקוט
(רגרסיית ההפרשים)
הכנסת משתנה מוסבר בפיגור
(מודל דינמי)</td><td>שיטת WLS</td></tr>
</table>

אקונומטריקה ב

פרק 8 - מודלים דינאמיים

תוכן העניינים

מודלים דינאמיים:

רקע:

מודל דינמי הוא מודל שיש בו משתנה מוסבר בפיגור, כלומר Y היום מושפע מ-Y של אתמול: $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$.

המכפילים הדינמיים:

שלוש סוגים של השפעות בהקשר של המודל הדינמי (מכפלים):

1. מכפל לטווח קצר (מיידי):

   איך X היום משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}$.

2. מכפל ביניים מסדר j (מכפיל דינמי):

   איך X מלפני j תקופות משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}$.

3. מכפל טווח ארוך (מצב עמיד):

   איך X משפיע על Y לאורך P תקופות: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*}$.

   כאשר X ו-Y נותרים קבועים על פני הזמן (מצב עמיד):

$$\begin{array}{l} Y_t = Y_{t-1} = \ldots = Y_{t-p} = Y^* \\ X_t = X_{t-1} = \ldots = X_{t-p} = X^* \end{array}.$$

הקשר בין מתאם סדרתי למודלים דינמיים

המתאם הסדרתי נובע מהשמטה של דינמיות מבנית במודל. המודל המקורי היה צריך להיות מודל דינמי אך נאמד בטעות מודל סטאטי. הדינמיות תבוא אז לידי ביטוי בטעויות, כלומר במתאם הסדרתי.
רגרסיית ההפרשים, המהווה פתרון למתאם הסדרתי, היא למעשה מודל דינמי.

לסיכום:
בכדי לפתור את בעיית המתאם הסדרתי יש לאמוד מלבד את המשתנה המוסבר בזמן t גם את המשתנה המוסבר והמסביר בזמן $t-1$.
המשתנה בפיגור Y_{t-1} נועד לפתור מתאם סדרתי מסדר ראשון, Y_{t-2} משמש לפתירת מתאם סדרתי מסדר שני וכך הלאה.
בכדי לבדוק קיומו של מתאם סדרתי במודל דינמי לא נוכל לבצע מבחן DW אלא רק מבחן LM.

השלכות על אר"פ של משתנה מוסבר בפיגור כמשתנה מסביר:

בניגוד למשתנה מסביר רגיל (X), Y_{t-1} הינו משתנה מקרי.
משום כך אר"פ ברגרסיה הכוללת משתנים כאלה הם מוטים (להזכירכם בהוכחת חוסר הטיה של האומדים השתמשנו בהנחה מס' 4 הגורסת כי המשתנים המסבירים אינם משתנים מקריים).
בנוסף לכך העקיבות של האומדים תלויה בקיום מתאם סדרתי:
$$\hat{\beta} \to \beta + \frac{COV\left(Y_{t-1}, u_t\right)}{V\left(Y_{t-1}\right)}.$$
אם אין מתאם סדרתי: $COV\left(Y_{t-1}, u_t\right) = 0 \;\Leftarrow$ האומד עקיב.

אם יש מתאם סדרתי: $COV\left(Y_{t-1}, u_t\right) \neq 0 \;\Leftarrow$ האומד איננו עקיב.

לסיכום – ההשלכות על אר"פ:

1. האומדים מוטים ולכן ניתן לבצע בדיקת השערות רק במדגמים גדולים (T>30).
2. אם אין מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים עקיבים ויעילים (ניתן לבצע בדיקת השערות במדגמים גדולים).
   אם יש מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים אינם עקיבים ואינם יעילים (לא ניתן לבצע בדיקת השערות גם במדגמים גדולים).

שאלות:

חישוב מכפלים:

1) חשבו את שלושת סוגי המכפלים של המודלים הדינמיים הבאים:

א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

ב. $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

תרגול מסכם:

2) המודל הבא הורץ ב-SAS עם מדגם בעל 100 תצפיות: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

א. מהפלט עולה DW=0.195 לפיכך:

i. לא קיים מתאם סדרתי.

ii. קיים מתאם סדרתי והוא: ______________.

iii. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. לפי תשובתך לסעיף א' חווה דעתך על תכונות האומדים:

i. מוטים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ii. ליניאריים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iii. יעילים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

iv. עקיבים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. אמידה של איזו משוואה תפתור באופן מלא את הבעיה שנוצרה במודל:

i. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$.

ii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-1} + u_t$.

iii. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$.

ד. בדוק את ההשערה כי לפי מודל (3) השפעת X על Y הולכת ופוחתת עם הזמן.
מצורף החלק הרלוונטי מהפלט:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	0.42	0.06	7.00	0.000
X	1	0.25	0.03	8.33	0.000
Y1	1	0.85	0.05	17.00	0.000

ה. מהו המכפיל הדינמי בתקופה t-8?

3) הקשר בין כמות הכסף לבין רמת האינפלציה במשק נאמד בסדרה עתית על ידי המשוואה הבאה:

1. $M_t = \alpha + \beta \cdot P_t + U_t$.

כאשר:

M_t - כמות הכסף במשק בחודש t.

P_t - מדד המחירים לצרכן במשק בחודש t.

משוואה (1) נאמדה בפלט מס' 1.

א. לפי מבחן על הסטטיסטי DW , נראה כי ב- U_t:

i. לא ניתן לחשב את הסטטיסטי DW מהנתונים הקיימים.
ii. קיים מתאם סדרתי שלילי.
iii. קיים מתאם סדרתי חיובי.
iv. לא קיים מתאם סדרתי.
v. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. סמנו את התשובה הנכונה בהכרח:

i. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים.
ii. האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.
iii. האומדים מוטים אך עקיבים.
iv. האומדים חסרי הטיה, אך לא עקיבים.
v. כל התשובות אינן נכונות.

ג. אומד השונות מוטה ובדיקת השערות לא תקפה: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

חוקר טען כי הבעיה שנוצרה במשוואה (1) תיפתר ע"י אמידת המשוואה הבאה:

2. $M_t = \alpha_1 + \beta_1 \cdot P_t + \beta_2 \cdot M_{t-1} + \varepsilon_t$.

כאשר:

M_{t-1} - כמות הכסף בשנה הקודמת.

משוואה (2) נאמדה בפלט מס' 2, כמו כן נאמדה על ידי החוקר המשוואה המופיעה בפלט מס' 3.

ד. הרגרסיה המופיעה בפלט מס' 3 נועדה לבדיקת: ________________.
במשוואה: ________________________.
על ידי מבחן: ________________________.
גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשום תוצאה מספרית): ______________.

ה. לאור תשובתך לסעיף ד' טענת החוקר: נכונה/לא נכונה/אי אפשר לדעת

ו. האומד ל- β_1 במשוואה (2) הוא מוטה אך עקיב: נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ז. ניתן להשתמש בסטטיסטי DW לבדיקת מתאם סדרתי במשוואה (2): נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת.

ח. חשבו את המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$.

ט. בדקו את הטענה כי המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה $t-1$ $\left(\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-1}}\right)$ הינו 90% מהמכפיל המיידי בטווח הקצר.

י. רשמו את השערת האפס עבור הטענה כי המכפיל בט"א שווה ל-1 . מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבחינת ההשערה?

פלט מס' 1 – משוואה (1):

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	44.03828	44.03828	5145.80	<.0001
Error	103	0.88148	0.00856		
Corrected Total	104	44.91976			

Root MSE	0.09251	R-Square	0.9804
Dependent Mean	8.53854	Adj R-Sq	0.9802
Coeff Var	1.08344		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.49372	0.09862	15.15	<.0001
p	1	1.69267	0.02360	71.73	<.0001

Durbin-Watson D 0.208

פלט מס' 2 – משוואה (2):

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	42.19946	21.09973	15988.1	<.0001
Error	101	0.13329	0.00132		
Corrected Total	103	42.33275			

Root MSE	0.03633	R-Square	0.9969
Dependent Mean	8.55393	Adj R-Sq	0.9968
Coeff Var	0.42469		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.40374	0.06790	5.95	<.0001
m1	1	0.81811	0.03857	21.21	<.0001
p	1	0.28127	0.06633	4.24	<.0001

$m1 = m_{t-1}$

פלט מס' 3:

pendent Variable: res Residual

$RES = \hat{\varepsilon}_t =$ של אמידה משוואה (ב)

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	0.00032896	0.00010965	0.08	0.9695
Error	99	0.13173	0.00133		
Corrected Total	102	0.13206			

Root MSE	0.03648	R-Square	0.0025
Dependent Mean	0.00033853	Adj R-Sq	-0.0277
Coeff Var	10775		

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	Intercept	1	0.03298	0.08192	0.40	0.6881
p		1	0.02640	0.07979	0.33	0.7415
m1		1	-0.01672	0.04705	-0.36	0.7230
res1		1	-0.01304	0.11039	-0.12	0.9062

$RES1 = \hat{\varepsilon}_{t-1}$

תשובות סופיות:

1) א. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = 0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = \beta_1 \beta_2^{j-1}$, מכפיל של הטווח הארוך: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*} = \beta_1 \cdot \frac{1}{1-\beta_2}$.

ב. מכפיל מיידי: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = \beta_0$, מכפיל טווח ביניים: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = \beta_2^{j-1}\left(\beta_1 + \beta_0 \beta_2\right)$,

מכפיל של הטווח הארוך: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*} = \frac{\beta_1 + \beta_0 \beta_2}{1-\beta_2}$.

2) א. ii , חיובי.   ב. i. לא נכון.   ii. נכון.   iii. לא נכון.
iv. נכון.   ג. ii.   ד. יש עדות לכך.
ה. $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = 0.068$.

3) א. iii.   ב. i.   ג. נכון.
ד. קיום מתאם סדרתי במשוואה (2).
מבחן LM.
$LM_{stat} = 0.2575$.
ה. נכונה.   ו. נכון.   ז. לא נכון.   ח. $\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-i}} = \beta_1 \beta_2^i$.
ט. יש עדות לכך.   י. $H_0: \beta_1 = 1 - \beta_2$, WALD.

אקונומטריקה ב

פרק 9 - משוואות סימולטניות

תוכן העניינים

משוואות סימולטניות:

רקע:

עוסקות בהפרת ההנחה של אי תלות בין המב"ת לטעויות בניבוי: $\operatorname{cov}(x,u)=0$.
ה- X ים במשוואה נחשבו משתנים אקסוגניים – משפיעים על Y אך לא מושפעים ממנו בחזרה לעומת זאת משתנים אנדוגניים – משפיעים על Y אך גם מושפעים ממנו בחזרה. מאחר ומשתנים אלו הם גם מסבירים וגם מוסברים, הם נחשבים כמשתנים מקריים, המתואמים עם הטעויות במודל: $\operatorname{cov}(x,u)\neq 0$.

משוואות המבנה (משוואות סימולטניות):

מערכת משוואות הכוללות משתנים מסבירים אנדוגניים ואקסוגניים.
בד"כ מדובר בשתי משוואות אשר המשתנה המוסבר בראשונה הוא משתנה מסביר בשנייה והמשתנה המוסבר בשנייה הוא משתנה מסביר בראשונה.
משתנים המופיעים באחת המשוואות כמוסברים ובאחרת כמסבירים הם משתנים אנדוגניים. יתר המשתנים במשוואות הם אקסוגניים.
המטרה היא לאמוד בצורה יעילה את הפרמטרים (אלפות ובטות) ולבצע בדיקת השערות.

השלכות על אר"פ:

הנחת אי תלות בין המשתנה הב"ת והטעויות שימשה אותנו להוכחת ליניאריות, חוסר הטיה ועקיבות.
לכן הפרתה משמעה פגיעה בכל תכונות אר"פ.
האומדים לא ליניאריים, מוטים לא עקיבים ולכן גם לא יעילים (לפי גאוס מרקוב).
אומד השונות מוטה גם הוא ובדיקת ההשערות לא תקפה (ללא תלות בגודל המדגם).

הצורה המצומצמת של מודל עם משוואות סימולטניות:

משוואות הצורה המצומצמת הן פתרון עבור המשתנים האנדוגניים במערכת:
הגדרת המשתנים האנדוגניים כפונקציה של המשתנים האקסוגניים במערכת בלבד.
מספר המשוואות המצומצמות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (במקרה זה שניים).

תכונות המשוואות מהצורה המצומצמת:

- מס' המשוואות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (X ו- Y).
- המשתנה המוסבר הוא אנדוגני וכל המסבירים אקסוגניים.
- המשתנים המסבירים הם זהים בכל המשוואות (ה- Z ים).
- מכיוון שכל המשתנים המסבירים הם אקסוגניים ניתן לאמוד את הפרמטרים (ה- λ ות וה- μ ים) ב-OLS ולקבל אומדים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים עם יכולת לבצע בדיקת השערות.

אמידת הפרמטרים של משוואות המבנה באמצעות משוואות הצורה המצומצמת:
משוואות הצורה המצומצמת מאפשרות לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS אבל אנחנו מעוניינים למעשה לאמוד את הפרמטרים של המשוואות המקוריות – משוואות המבנה. מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת נחלץ את הפרמטרים של משוואות המבנה.

בתהליך החילוץ של הפרמטרים המבניים ייתכנו 3 מצבים:

1. אין זיהוי: לא ניתן לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.
2. זיהוי מדויק: יש רק דרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מהפרמטרים של הצורה המצומצמת.
3. זיהוי יתר: יש יותר מדרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת.

בכדי להקל על בעיית הזיהוי מומלץ לאמץ את הכלל הבא:
עבור כל אחת מהמשוואות המבניות יש לחשב:

1. $g-1$: מס' אנדוגניים במשוואה הספציפית פחות 1
ולהשוות עם:
2. $K-k$: מספר אקסוגניים סה"כ בשתי המשוואות כולל חותך (K) פחות מספר אקסוגניים במשוואה הספציפית כולל חותך (k).

אם 2=1 זיהוי מדויק ; 2>1 זיהוי יתר ; 2<1 אין זיהוי.

שיטות לפתרון משוואות סימולטניות:

1. שיטת ריבועים פחותים עקיפה (ILS):
   א. יש להציג את מערכת משוואות המבנה בצורתה המצומצמת.
   ב. יש לאמוד בשיטת OLS את הפרמטרים של המשוואות בצורה המצומצמת.
   ג. יש לחלץ מן הפרמטרים של המערכת המצומצמת את הפרמטרים של הצורה המבנית.

משום שתהליך החילוץ איננו ליניארי האומדים המבניים המתקבלים הם מוטים אך עקיבים.
כאשר הזיהוי מדויק: האומדים יהיו גם אסימפטוטית יעילים (במדגמים גדולים).
כאשר הזיהוי הוא יתר: האומדים לא יהיו יעילים.

2. שיטת ריבועים פחותים בשני שלבים (2SL2):
   א. אמידת משוואות הצורה המצומצמת בשיטת OLS ושימוש בתוצאות האמידה כדי לחשב את המשתנים האנדוגניים (המסבירים).
   ב. הצבת המשתנים האנדוגניים שהתקבלו במשוואות המבנה ואומדתם ב-OLS.

אם משוואות המבנה מזוהות בדיוק או ביתר – האומדים שיתקבלו יהיו אמנם מוטים אבל עקיבים ויעילים אסימפטוטית. האומדים שיתקבלו יהיו זהים לאומדים שהתקבלו בשיטת הריבועים הפחותים העקיפה.
כאשר אין זיהוי: אין אקסוגניים ולכן אין משתנים מסבירים בצורה המצומצמת או שכל האקסוגניים בצורה המצומצמת כבר קיימים במשוואה המקורית ולכן החלפת x ב-$\hat{x}$ תיצור בעיה של מולטיקוליניאריות מלאה.

3. שיטת משתני העזר (IV):
   משתנה עזר הוא משתנה שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני במשוואת המבנה ויעזור לאמוד את הקשר בינו לבין התלוי.
   משתנה העזר צריך להיות:
   א. משתנה אקזוגני או פונקציה ליניארית של משתנים אקזוגניים: $\text{cov}(Z,u)=0$.
   ב. מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף: $\text{cov}(Z,X)\neq 0$.

ככל שהמתאם גבוה יותר, האומד שיתקבל באמצעותו יהיה טוב יותר.
הבעיה: אומדני OLS שיתקבלו יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.
הפתרון בשיטת IV: אמידת ההשפעה של Y על X עם משתנה אקסוגני שלא קיים במערכת שמתואם עם Y (אותו הוא מחליף) אך לא עם u.

אם יש יותר ממשתנה עזר אחד המקיימים את התנאים הנ״ל, האומדים שיתקבלו יהיו כולם מוטים אך עקיבים (ניתן להשתמש בהם במדגמים גדולים).
משתנה העזר היחיד שיניב אומד יעיל יהיה בעל המתאם הגבוה ביותר עם המשתנה האנדוגני אותו הוא בא להחליף. משתנה עזר זה יהיה אומדן לאנדוגני שהתקבל מאמידת משוואת הצורה המצומצמת בשלב הראשון של 2SLS.

משתנה לא יוכל לשמש כמשתנה עזר:
אם נוסחתו מכילה רק משתנים אקזוגניים המצויים במשוואת המבנה בה הוא משמש כמשתנה עזר, שכן אז תיווצר בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.
במילים אחרות, נוסחת משתנה העזר צריכה להיות מורכבת מלפחות משתנה אקזוגני אחד שלא מופיע במשוואה כדי שהמשתנה יוכל לשמש כמשתנה עזר.

משתני עזר שונים יכולים להניב את אותם האומדים לפרמטרים:
נבדוק זאת בצורה הבאה: נמחק מהנוסחאות של משתני העזר את המשתנים האקסוגניים המופיעים במשוואה. אם נשארנו עם שני ביטויים שהם מכפלה אחד של השני, יתקבלו אותם האומדים.

סיכום תוצאות אמידה של משוואות סימולטניות:

מסי האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות ותכונותיהם תלויים בזיהוי של המשוואה:
אם המשוואה לא מזוהה: לא ניתן להשתמש באף אחת מהשיטות.
כאשר המשוואה מזוהה (בדיוק או ביתר): האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות יהיו תמיד מוטים אך עקיבים.

תכונת היעילות ומסי האומדים האפשרי מסוכמים בטבלה הבאה:

	מזוהה בדיוק	**מזוהה ביתר**
שיטת ILS	אומד אחד לפרמטר **יעיל**	יתכן יותר מאומד אחד לפרמטר **לא יעילים**
שיטת 2SLS	אומדן אחד למשתנה האנדוגני **יעיל**	
שיטת IV	אינסוף משתני עזר אם משתנה העזר זהה לאומדן לאנדוגני המתקבל בשלב הראשון בשיטת – 2SLS הוא יהיה גם **יעיל**	

כאשר הזיהוי מדויק יתקבל אותו אומד מוטה אך עקיב ויעיל בשלושת השיטות:
ILS, 2SLS ו-IV (במידה ומשתנה העזר הוא $\hat{X}_t$ מהשלב הראשון של 2SLS).

משתנים בפיגור ומשוואות סימולטניות:

אם X_t אקסוגני אז גם המשתנים בפיגור X_{t-p} בוודאות אקסוגניים.
אם Y_t אנדוגני אז מעמדם של המשתנים בפיגור תלוי בקיומו של מתאם סדרתי:
אם יש מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t \neq 0)$, אז Y_{t-1} אנדוגני.
אם אין מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t = 0)$, אז Y_{t-1} אקסוגני.

מבחנים סטטיסטיים לבחינת אנדוגניות ולחוזק משתנה עזר:

מבחן האוזמן (Hausman Test):
מבחן המשמש אותנו לבחינת אנדוגניות של משתנה מסוים.

- השלב הראשון לביצוע מבחן האוזמן הוא הרצת המשוואה המצומצמת – כלומר, המשתנה שחושדים שהוא אנדוגני כתלוי על כל האקסוגניים.
- מאמידה זו נשמור את סידרת השאריות הנאמדות (vhat).
- כעת נאמוד את המודל המקורי (משוואת המבנה) ונוסיף לו את (vhat) כמשתנה מסביר חדש.
- לפי תוצאות האמידה – אם המקדם של vhat מובהק נסיק כי המשתנה הוא אכן משתנה אנדוגני במודל.

מבחן לחוזק IV:
מבחן שמתבצע על המשוואה המצומצמת שבה נעשה שימוש במשתני העזר.
בודקים:

א. האם משתנה העזר לניבוי המשתנה התלוי מובהק באוכ׳ באמצעות מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה. אם כן- ניתן להסיק כי המשתנה האקסוגני, המשמש כמשתנה עזר, מתואם עם האנדוגני אותו הוא אמור להחליף.

ב. אולם בכדי לבדוק האם משתני העזר חזקים מספיק נבצע מבחן F למובהקות כל משתני העזר המוצעים במשוואה המצומצמת. כלל אצבע-רק אם: $F_{stat} > 10$ נוכל להסיק כי משתני העזר חזקים מספיק בכדי שנוכל לקבל תוצאות אמינות כאשר אנו משתמשים בהם.

שאלות:

זיהוי משוואות המבנה:

1) חוקר רצה לאמוד את פונקציית הביקוש ואת פונקציית ההיצע לתות שדה.
הוא אסף נתונים עבור 30 תקופות:

Pt - מחיר קופסא בש"ח בתקופה t.

Qt - כמות נקנית בק"ג בתקופה t.

Zt - מחיר פרי תחליפי ב-₪ בתקופה t.

INCOMEt - הכנסת הצרכנים באלפי ₪ בתקופה t.

Lt - מחיר שעת עבודה ב-₪ בתקופה t.

א. החוקר מניח שהכמות המבוקשת היא פונקציה של מחיר התות שדה, של מחיר הפרי התחלפי ושל הכנסת הצרכנים, והכמות המוצעת היא פונקציה של מחיר התות שדה ושל מחיר העבודה.
נסחו את המודל הסימולטני, תחת ההנחה שהגמישויות קבועות.
הציגו גם את תנאי הסדר וקבעו עבור כל משוואה אם היא מזוהה במדויק, ביתר או בחסר.

ב. עיינו במודל 1 שבדפי הפלט (ראו סרטון) והשיבו: איזו פונקציה נאמדה, והאם תוצאות האמידה שהתקבלו מתיישבות עם התיאוריה הכלכלית? נמקו.

ג. עיינו בדפי הפלט המתאימים (ראו סרטון) והשיבו: אם העלות של שעת עבודה תעלה באחוז אחד, מהם השינויים הצפויים בכמות ובמחיר של שווי משקל?

ד. בתקופה מסוימת אנו צופים שמחיר המוצר התחלפי יהיה 10 ₪, ההכנסה תהיה 50 אלף ₪, מחיר שעת עבודה 25 ₪.
מה יהיה מחיר שווי המשקל של תות השדה?
האם ניתן גם לאמוד את כמות שווי המשקל?

להלן הפלטים:

Model 1: TSLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_Q

Instruments: l_L

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.83485	1.14385	-1.604	0.10869
l_P	-1.34898	0.645690	-2.089	0.03669 **
l_Z	1.72145	0.467875	3.679	0.00023 ***
l_income	0.984145	0.483543	2.035	0.04182 **

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 2.67757

Standard error of residuals = 0.32091

Unadjusted R-squared = 0.222881

Adjusted R-squared = 0.133214

F-statistic (3, 26) = 2.48564 (p-value = 0.0829)

Model 3: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	0.499595	0.630065	0.793	0.43500
l_L	-0.611731	0.163450	-3.743	0.00091 ***
l_income	0.395076	0.142590	2.771	0.01019 **
l_Z	0.937441	0.197381	4.749	0.00007 ***

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 0.834357

Standard error of residuals = 0.179139

Unadjusted R-squared = 0.681008

Adjusted R-squared = 0.644201

F-statistic (3, 26) = 18.5023 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 11.1662

(Log-likelihood for Q = -75.1618)

Model 4: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_P

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.73053	0.419481	-4.125	0.00034 ***
l_L	0.453478	0.108821	4.167	0.00030 ***
l_income	0.436678	0.0949326	4.600	0.00010 ***
l_Z	0.581185	0.131411	4.423	0.00015 ***

Mean of dependent variable = 2.99427

Standard deviation of dep. var. = 0.314761

Sum of squared residuals = 0.369832

Standard error of residuals = 0.119266

Unadjusted R-squared = 0.871281

Adjusted R-squared = 0.856428

F-statistic (3, 26) = 58.6632 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 23.3704

(Log-likelihood for P = -66.4576)

שיטת ILS:

2) נניח שאנו מתכוונים לאמוד את המשוואות:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

C_t - הוצאות לתצרוכת פרטית.

Y_t - הכנסה לאומית.

u_t - הפרעה אקראית.

א. מהי הבעיה באמידת המשוואות בשיטת הריבועים הפחותים? מהן תכונות אר"פ?

ב. האם המשוואות מזוהות?

ג. אמדו את מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת באופן ידני.

ד. מהו הפתרון של המשוואות המצומצמות בשיטת ILS?

להלן תוצאות אמידת מערכת המשוואות בצורה המצומצמת:

Dependent Variable: C

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.000
Z	1	-0.087066	0.3036	-0.2867	0.776

Dependent Variable: Y

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.0000
Z	1	0.912934	0.3036	3.00699	0.0049

ה. חשבו את האומדים המבניים.

שיטת 2SLS:

3) תאר את תהליך האמידה בשני שלבים (2SLS) של משוואות המבנה:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$
$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

C_t - הוצאות לתצרוכת פרטית.

Y_t - הכנסה לאומית.

u_t - הפרעה אקראית.

א. מה ניתן יהיה לומר על האומדים שהתקבלו בשיטה זו?

ב. מה יהיה ערכם של האומדים $\hat{\beta}$ ו- $\hat{\alpha}$?

להלן תוצאות האמידה בשיטת 2 השלבים:

Dependent variable: C

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	16264.47	8221.233	1.978349	0.0520
y	1	-0.095370	0.364274	-0.261808	0.7943

Dependent variable: Y

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-9.95E-09	3.52E-09	-2.828212	0.0062
C	1	1.00000	2.08E-13	4.80E+12	0.0000
Z	1	1.00000	1.99E-13	5.04E+12	0.0000

4) לפניך המודל הסימולטני הבא:

משוואת הביקוש: $Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Z_t + u_t$.

משוואת ההיצע: $Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 P_t + v_t$.

P_t - מחיר המוצר בתקופה t.

Q_t^D - כמות מבוקשת בתקופה t.

Q_t^S - כמות מוצעת בתקופה t.

Z_t - מחיר המוצר התחלפי בתקופה t.

Z_t הוא משתנה אקסוגני.

א. רשום את המשוואות המצומצמות וקבע את התכונות של אומדי OLS למשוואות אלה.

ב. היעזר בשיטת ILS לאמידת הפרמטרים של המשוואה שניתן לזהות, אם התקבלו המשוואות המצומצמות הבאות:

$$\hat{Q}_t = 2 + 3Z_t$$
$$\hat{P}_t = 1 + 4Z_t$$
.

ג. באם ננסה לאמוד את משוואת הביקוש בשיטת TSLS:
האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב הראשון? נמק.
האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב השני? נמק.

ד. החוקר מנסה לאמוד את משוואת ההיצע בשיטת TSLS.
למה שווה האומדן שיתקבל ל-β_1?

שיטת IV:

5) נתונות המשוואות הבאות:

1. $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot Z_{1t} + \alpha_3 \cdot Z_{2t} + \varepsilon_t$.

2. $X_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_t + \beta_2 \cdot Z_{1t} + \omega_t$.

נתון כי: T_t , X_t משתנים אנדוגניים ו- Z_{2t} , Z_{1t} משתנים אקסגוניים.
חוו דעתכם על כל אחת מהטענות הבאות, והסבירו:

א. ניתן להשתמש ב- Z_{1t} כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 1.

ב. ניתן להשתמש ב- $\frac{Z_{1t}+Z_{2t}}{2}$ כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2.

ג. יתכנו מספר אומדים עקיבים שונים זה מזה ל- β_2 במשוואה מס' 2.

ד. שימוש ב- Z_2 כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס' 2 יניב אומדים עקיבים וגם יעילים.

ה. משתנה העזר $Z_{1t} + Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

ו. משתנה העזר $3Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אותם אומדים כמו משתנה העזר בסעיף ד'.

ז. משתנה העזר $7Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

מבחן האוזמן:

6) נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי.
לכל מדינה i נסמן ב- Y_i – את הרמה הנאמדת של ההכנסה, נסמן ב- s_i את שיעור החיסכון במדינה i וב- D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה ושיעור החיסכון על איתנות הממשל דמוקרטי: $D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 s_i + \varepsilon_i$.
אבל אתם חוששים ש- $\operatorname{cov}(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$.
הסבירו כיצד תשתמשו ב – *Hausman Test* כדי לבחון את ההשערה:
$H_0 : \operatorname{cov}(Y_i, \varepsilon_i) = 0$?

מבחן לחוזק IV:

7) נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאות:

$$Y_{1i} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

$$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + v_i$$

כאשר: X_1, X_2, X_3 הינם משתנים אקסוגניים.
להלן מערכת המשוואות של הצורה המצומצמת:

$$Y_{1i} = \pi_{11} X_{1i} + \pi_{12} X_{2i} + \pi_{13} X_{3i} + \tilde{u}_i$$

$$Y_{2i} = \pi_{21} X_{1i} + \pi_{22} X_{2i} + \pi_{23} X_{3i} + \tilde{v}_i$$

תארו כיצד בודקים ש- X_{1i} ו- X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?

תרגילים מסכמים:

1) נתונות המשוואות הבאות:

1. $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \alpha_4 Z_{3t} + \alpha_5 Z_{4t} + u_t$.
2. $X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \beta_4 Z_{5t} + v_t$.

נתון כי: $\text{cov}\left(Z_j, u_t\right) = 0$ עבור $j = 1,....,5$ (כלומר ה-Z ים אקסוגוניים).

א. אמידת כל אחת מהמשוואות תניב אומדים:

i. מוטים — נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ii. עקיבים — נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ב. משוואה 1 — מזוהה בדיוק/ מזוהה ביתר/בלתי מזוהה

משוואה 2 — מזוהה בדיוק/ מזוהה ביתר/ בלתי מזוהה

ג. חווה דעתך על הטענות הבאות:

i. תוך שימוש בשיטת ILS ניתן לאמוד את משוואה 1 באופן עקיב וחד ערכי: — נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ii. תוך שימוש בשיטת ILS ניתן לאמוד את משוואה 2 באופן עקיב וחד ערכי: — נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ד. משוואות הצורה המצומצמת הן:

$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \lambda_3 Z_{3t} + \lambda_4 Z_{4t} + \lambda_5 Z_{5t} + \varepsilon_{1t}$.

$X_t = \mu_0 + \mu_{1t} + \mu_2 Z_{2t} + \mu_3 Z_{3t} + \mu_4 Z_{4t} + \mu_5 Z_{5t} + \varepsilon_{2t}$.

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ה. אמידת משוואות הצורה המצומצמת ב-OLS תניב אומדים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים: — נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ו. להלן רשימה של משתני עזר פוטנציאליים:

i. Z_5.

ii. $\frac{Z_1 + Z_5}{2}$.

iii. $2Z_1 + 3Z_2 + Z_3$.

iv. $Z_3 + Z_4$.

v. $3Z_3 + 4Z_4$.

vi. $3Z_3 + 3Z_4$.

vii. Z_1.

עבור כל משתנה רשום באיזה משוואה ניתן להשתמש בו אם בכלל.

ז. איזה מבין משתני העזר הבאים ינבו את אותם האומדים עבור אותה המשוואה (תתכן יותר מתשובה אחת נכונה):
i. i ו-ii.
ii. iv ו-vi.
iii. v ו-vi.
iv. iv ו-v.
ח. האם משתנה עזר i (Z_5) יניב אומדים יעילים?
ט. אם ידוע כי אין מתאם סדרתי, האם X_{t-1} , Y_{t-1} הם אנדוגניים או אקסוגניים?
י. האם הוספה של משתנה אקזוגני נוסף למשוואה 1 תשנה את הזיהוי של משוואה 2?
יא. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשוואה 2 תשנה את הזיהוי של משוואה 1?
יב. הנח כי הוטלו המגבלות הבאות על הפרמטרים המבניים: $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.
האם ניתן כעת לזהות את יתר הפרמטרים במודל?

2) היצע העבודה של נשים נשואות היה נושא מרכזי במחקר הכלכלי.
לצרוך אמידת היצע זה נבחר המודל הבא:

$$HOURS = \beta_1 + \beta_2 WAGE + \beta_3 EDUC + \beta_4 AGE + \beta_5 KIDSL6 + \beta_6 KIDS618 + \beta_7 NWIFEINC + \varepsilon$$

כאשר:
$HOURS$ - היצע העבודה בשעות.
$WAGE$ - שכר לשעה.
$EDUC$ - מספר שנות הלימוד.
AGE - גיל.
$KIDSL6$ - מספר הילדים בבית מתחת לגיל 6.
$KIDS618$ - מספר הילדים בגיל 6-18.
$NWIFEINC$ - הכנסת משק הבית ממקורות שאינם בעבודתה של האישה.

א. מהם הסימנים שתצפו לקבל בכל אחד מהמקדמים?
ב. הסבירו מדוע לא ניתן לאמוד את משוואת ההיצע הנ"ל בשיטת הריבועים הפחותים.
ג. הניחו כי אנחנו משתמשים בניסיון של האישה בשוק העבודה ($EXPER$) ובריבועו ($EXPER^2$) כמשתני עזר למשתנה $WAGE$. הסבירו מדוע משתני העזר הללו עונים על הדרישות שלנו ממשתני עזר.
ד. תארו את השלבים (לא בפקודות מחשב) שתבצעו כדי לקבל את האומדים בשיטת TSLS.

3) נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאה:

$$Y_{1t} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$
$$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + v_i$$

כאשר X_1 , X_2 , X_3 הינם משתנים אקסוגניים.

א. חלצו את מערכת המשוואות המצומצמת (Reduced Form Equations) של Y_1 ו- Y_2 (ז"א פתרו את המערכת המבנית עבור שני המשתנים האנדוגניים Y_1 ו- Y_2 על מנת לקבל את הצורה המצומצמת. כתבו את המקדמים והשאריות במערכת המצומצמת למטה כפונקציות של הפרמטרים והשאריות במערכת המבנית).

ב. הראו שבהינתן אומדים עקיבים ל- $\pi_{11},...,\pi_{23}$ ניתן למצוא אומד עקיב ל- γ.

ג. האם γ ניתן לזיהוי כאשר $\beta_3 = 0$?

ד. אילו תנאים צריכים X_{1i} ו- X_{2i} לקיים בכדי להיות משתני עזר ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?

ה. תארו כיצד בודקים ש- X_{1i} ו- X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל- Y_{1i} במשוואה השנייה?

4) נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי. לכל מדינה i נסמן ב- Y_i - את הרמה הנאמדת של ההכנסה וב- D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה על ממשל דמוקרטי: $D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \varepsilon_i$, אבל אתם חוששים ש- $\text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$.

א. הסבירו מדוע החשש שההכנסה מתואמת עם השגיאה במשוואה הנ"ל הגיוני?

ב. האם אומד הריבועים הפחותים של β_2 הינו חסר הטיה?

ג. נסמן ב- S_i את שיעור החיסכון במדינה i. הסבירו אלו תנאים צריך משתנה עזר (iv) לקיים. נמקו מדוע S_i מתאים או לא מתאים לשמש כמשתנה עזר.

ד. הסבירו כיצד תשתמשו בשיטת 2SLS כדי לאמוד את β_2. האם האומד המתקבל עקיב?

ה. הסבירו כיצד תשתמשו ב- *Hausman Test* כדי לבחון את ההשערה: $H_0 : \text{cov}(Y_i, \varepsilon_i) = 0$.

תשובות סופיות:

1) א. $\ln Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 \ln P_t + \alpha_2 \ln Z_t + \alpha_3 \ln INCOME_t + u_t$

$$\ln Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + \beta_2 \ln L_t + v_t$$

$$Q_t^D = Q_t^S$$

משוואת הביקוש מזוהה במדויק.

משוואת היצע מזוהה ביתר.

ב. פונקציית הביקוש, התוצאות מתיישבות.

ג. הכמות תרד ב-0.61173%, המחיר יעלה ב-0.453478%.

ד. $\hat{P} = 16.05$, $\hat{Q} = 9.34$.

2) א. ראו סרטון. ב. מזוהות בדיוק. ג. $\hat{C}_t = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 Z_t$, $\hat{Y}_t = \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4 Z_t$.

ד. $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_4} = \frac{\hat{\gamma}_3}{\hat{\gamma}_4}$, $\hat{\beta} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_4}$. ה. $\hat{\alpha} = 16,264.46$, $\hat{\beta} = -0.09537$.

3) א. מוטים אך עקיבים ויעילים במדגמים גדולים.

ב. $\hat{\beta} = -0.09537$, $\hat{\alpha} = 16,264.47$.

4) א. $Q_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} - \frac{\beta_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \cdot Z_t + \frac{\beta_1 (u_t - v_t)}{\alpha_1 - \beta_1} + v_t$, BLUE.

ב. $\hat{\beta}_0 = 1.25$, $\hat{\beta}_1 = 0.75$. ג. שלב ראשון: ניתן , שלב שני: לא ניתן.

ד. 0.75.

5) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. נכון. ז. לא נכון.

6) ראו סרטון.

7) ראו סרטון.

תרגילים מסכמים:

1) א.i. נכון. ii. לא נכון.

ב. משוואה 1: מזוהה בדיוק , משוואה 2: מזוהה ביתר.

ג.i. נכון. ii. לא נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו.i. 1. ii. 1. iii. 2. iv. 2. v. 2.

vii. 2. ז.i. נכון. ii. נכון. iii. לא נכון. iv. לא נכון.

ח. כן. ט. אקסוגניים. י. לא. יא. כן.

יב. משוואה 1 מזוהה בדיוק ומשוואה 2 מזוהה ביתר.

2) א. מקדם wage חיובי, מקדם educ לא ניתן לדעת, מקדם age יכול להיות חיובי או שלילי, מקדם kidsl6 שלילי, מקדם kids618 חיובי, מקדם nwifeinc שלילי.

ב. ראו סרטון. ג. ראו סרטון. ד. ראו סרטון.

3) א. $\pi_{13} = \frac{\beta_3 \gamma}{1 - \delta\gamma}$, $\pi_{12} = \frac{\beta_2}{1 - \delta\gamma}$, $\pi_{11} = \frac{\beta_1}{1 - \delta\gamma}$,

$\pi_{23} = \frac{\beta_3}{1 - \delta\gamma}$, $\pi_{22} = \frac{\beta_2 \delta}{1 - \delta\gamma}$, $\pi_{21} = \frac{\beta_1 \delta}{1 - \delta\gamma}$,

$\tilde{v}_i = \frac{v_i + \delta u_i}{1-\delta\gamma}$, $\tilde{u}_i = \frac{u_i + \gamma v_i}{1-\delta\gamma}$.

ב. מכיוון ש- $\gamma = \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}}$, ניתן לקבל אומד עקיב ל- γ ע"י $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\pi}_{13}}{\hat{\pi}_{23}}$.

ג. לא. ד. צריכים להיות מתואמים עם y_{1i} ובלתי מתואמים עם v_i .

ה. ראו סרטון.

4) א. טעות מדידה במשתנה המוסבר, משתנה מושמט, משוואות סימולטניות.

ב. לא. ג. ראו סרטון. ד. עקיב. ה. ראו סרטון.

אקונומטריקה ב

פרק 10 - מבחן לדוגמה - אריאל

תוכן העניינים

מבחן לדוגמא מס' 1:

שאלות:

לשם החישובים כשצריך הנח כי (אם לא נאמר אחרת): $\chi^2_{(2)}=3.0$, $\chi^2_{(5)}=11.05$,
$F=4$, $t=2$.

1) חוקר בדק את השפעת השכר ההתחלתי של עובד, עמדה ניהולית ומגדר על השכר הנוכחי של העובד. לכן אמד את המודל הבא בשיטת הריבועים הפחותים (OLS):

$$y_t=\beta_0+\beta_1G_t+\beta_2M_t+\beta_3\left(G_tM_t\right)+\beta_5\left(X_t,G_t\right)+\beta_6\left(X_tM_t\right)+\beta_7\left(X_tG_tM_t\right)+\varepsilon_t .$$

Y - השכר הנוכחי של העובד (באלפי שקלים).

G - משתנה דמי למגדר. $G=1$ עבור גברים ו-$G=0$ עבור נשים.

M - משתנה דמי לעמדה ניהולית. $M=1$ מחזיק בעמדה ניהולית ו-$M=0$ לא מחזיק בעמדה ניהולית.

X - משתנה המתאר את השכר ההתחלתי של העובד (באלפי שקלים).

א. מהי ההשערה שבוחנת כי השכר ההתחלתי של העובד משפיע באופן זהה עבור גברים ונשים (כלומר, השפעת השכר ההתחלתי אצל גבר המחזיק בעמדה ניהולית שווה לזה של אישה המחזיקה בעמדה ניהולית והשפעת השכר ההתחלתי אצל גבר שאינו מחזיק בעמדה ניהולית זהה לזה של אישה שאינה מחזיקה בעמדה ניהולית):

i. $H_0:\beta_3=\beta_5=0$.

ii. $H_0:\beta_5=\beta_7=0$.

iii. $H_0:\beta_5=0$.

iv. $H_0:\beta_1=\beta_3=\beta_5=\beta_7=0$.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. מהי ההשערה אשר בוחנת כי שכרו הנוכחי של גבר שלא מחזיק בעמדה ניהולית זהה לו של אישה המחזיקה בעמדה ניהולית כאשר לשניהם יש שכר התחלתי של 1000 ₪.

i. $H_0:\beta_5=\beta_6$.

ii. $H_0:\beta_1=\beta_5=\beta_2=\beta_6$.

iii. $H_0:\beta_1=\beta_2$.

iv. $H_0:\beta_1+\beta_5=\beta_2+\beta_6$.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

2) נתון המודל הבא: $y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + u_t$ המקיים את כל ההנחות הקלאסיות פרט להומוסקדסטיות. ידוע כי מתקיים: $\text{var}(u_t) = \frac{x_t^4}{2}$.

חוקר זיהה שקיימת בעיה של הומוסקדסטיות במודל זה במודל וביצע תיקון למודל כך שכעת לא קיימת הבעיה.

א. מי מבין האפשרויות הבאות יכול להיות החותך במודל המתוקן:

i. β_0.

ii. β_1.

iii. x_t.

iv. 2.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. מהי השונות במודל החדש:

i. 2.

ii. $\frac{1}{2}$.

iii. x_t^4.

iv. $\frac{x_t^2}{2}$.

v. לא ניתן לדעת שכן יש בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.

3) חוקר מעוניין לאמוד את המודל הבא: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 z_t + u_t$.

עקב חשש להטרוסקדסטיות חילק החוקר את המדגם לשלושה חלקים כאשר:

חלק ראשון בן 60 תצפיות כאשר התוצאות שהתקבלו: $ESS_1 = 1400$.

חלק שני בן 40 תצפיות כאשר התוצאות שהתקבלו: $ESS_2 = 900$.

סך כל התצפיות במדגם היו 120.

א. תוצאות הסטטיסטי F=GQ (Goldfeld-Quandt) ותוצאת בדיקת הטרוסקדסטיות היא (הניחו כי F קריטי במבחן זה הוא 2):

i. $GQ=1$ קיימת הטרוסקדסטיות.

ii. $GQ=1.55$ לא קיימת הטרוסקדסטיות.

iii. $GQ=1$ לא קיימת הטרוסקדסטיות.

iv. $GQ=1.55$ קיימת הטרוסקדסטיות.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. אם החוקר היה מבצע את מבחן WHITE לבדיקת קיום הטרוסקדסטיות בנתונים, מספר דרגות החופש של המבחן הוא:

i. 2.
ii. 4.
iii. 5.
iv. 6.
v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

4) נתון המודל הבא: $y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + u_t$ שנאמד על סמך מדגם של 100 נבדקים. נתון בנוסף כי סטטיסטי המבחן של DW שווה ל-1.5. חוקר חשד שיש מתאם סידרתי מסדר ראשון במודל.

א. איזה מבין האפשרויות הנ"ל נכונה:

i. יש מתאם סידרתי שלילי מובהק בנתונים.
ii. יש מתאם סידרתי חיובי מובהק בנתונים.
iii. אין עדות למתאם סידרתי בנתונים.
iv. לא ניתן לדעת האם יש מתאם סדרתי מובהק בנתונים.
v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ב. בהנחה כי קיים מתאם סידרתי מובהק בנתונים מהצורה הבאה: $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$. האומד ל- ρ הוא:

i. -0.25.
ii. 1.5.
iii. -1.5.
iv. 0.25.
v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ג. ידוע כי: $\mathrm{var}(u_t) = 2$. מהו האומד ל- σ_ε^2:

i. 2.133.
ii. 1.875.
iii. 1.5.
iv. 2.66.
v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ד. בשל החשש ממתאם סידרתי מסדר שני $(u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t)$ הוצע לבצע את מבחן LM. רגרסיית העזר לביצוע המבחן הינה:

i. $\hat{u}_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$.
ii. $\hat{u}_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \beta_3 \hat{u}_{t-1} + \beta_4 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$.
iii. $\hat{u}_t^2 = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \beta_3 \hat{u}_{t-1} + \beta_4 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$.
iv. $\hat{u}_t^2 = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_t^2 + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \varepsilon_t$.

v. אף אחת מהתשובות לעיל אינה נכונה.

ה. אם ידוע כי קיים מתאם סדרתי בנתונים ואומדים אותו בשיטת הריבועים הפחותים (OLS) ללא ביצוע תיקון אזי:
i. האומדים יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.
ii. האומדים יהיו חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.
iii. האומדים יהיו חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים.
iv. האומדים יהיו מוטים אך עקיבים.
v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

5) מאמן כושר אמד את הרגרסיה הבאה: $y_t = 1+3x_t+0.7y_{t-1}+\hat{u}_t$. כאשר:
y_t - סך ק״ג ירידה במשקל בחודש t.
x_t - סך שעות האימונים של אדם בחודש t.

א. מהן תכונות האומדים של המשוואה:
i. האומדים מוטים אך עקיבים.
ii. האומדים חסרי הטיה, עקיבים אך אינם יעילים.
iii. האומדים מוטים ואינם עקיבים.
iv. האומדים חסרי הטיה אך אינם עקיבים.
v. אף אחת מהתשובות לעיל אינה נכונה.

ב. אם רמת אימוני הכושר לפני ארבעה חודשים עלו ב-3 שעות, כיצד צפויה להשתנות רמת הירידה במשקל היום:
i. 2.16.
ii. 3.15.
iii. 0.2401.
iv. 3.087.
v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ג. אילו אדם זה מעולם לא התעמל, מה צפויה להיות רמת הירידה במשקל שלו היום:
i. 1.4.
ii. 10.
iii. 3.3.
iv. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

ד. אם רמת האימונים עלתה היום בשעה, מהי סך ההשפעה הצפויה על רמת הירידה במשקל?
i. 10.
ii. 3.
iii. 2.1.

iv. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

6) נתונה מערכת המשוואות הנ"ל:

1. $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 z_i + u_i$.
2. $x_i = \beta_0 + \beta_1 s_i + \beta_2 z_i + v_i$.
3. $z_i = \delta_0 + \delta_1 y_i + \delta_2 k_i + \varepsilon_i$.

א. מה ניתן לומר על תכונות אומדי הריבועים הפחותים של שלושת המשוואות הנתונות:

i. אומדי OLS של המשוואות הם חסרי הטיה עקיבים אך אינם יעילים.

ii. אומדי OLS של המשוואות הם חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.

iii. אומדי OLS של המשוואות הם מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.

iv. אומדי OLS של המשוואה הראשונה בלבד הם חסרי הטיה, עקיבים ויעילים.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ב. איזה משיטות האמידה: ILS (שיטת הריבועים הפחותים העקיפה), TSLS (שיטת הריבועים הפחותים בשני שלבים) ו-IV (שיטת משתני העזר) מתאימה לכל אחת משלושת המשוואות הנתונות:

i. שלושת המשוואות ניתנות לאמידה בכל שלושת השיטות.

ii. רק המשוואה הראשונה ניתנת לאמידה בכל שלושת השיטות. המשוואות השנייה והשלישית ניתנות לאמידה בשיטת ILS ו-IV בלבד.

iii. שלושת המשוואות אינן ניתנות לאמידה באף אחת מהשיטות.

iv. שלושת המשוואות ניתנות לאמידה בשיטת ILS ו-IV בלבד.

v. אף אחת מהתשובות לעיל איננה נכונה.

ג. לשם אמידת הפרמטרים של המשוואות המבניות על פי שיטת ILS נאמדו המשוואות המצומצמות עבור Y ו-Z והתקבל ש:

$$y_i = 2 + 3k_i$$
$$z_i = 4 - 2k_i$$

i. האומד ל- α_0 שווה ל-2 ואילו האומד ל- δ_0 שווה ל-4.

ii. האומד ל- α_0 שווה ל-8 ואילו האומד ל- α_2 שווה ל-1.5-.

iii. האומד ל- α_0 שווה לאומד ל- β_0.

iv. לא ניתן לאמוד את α_0 ואת α_2.

v. כל התשובות לעיל אינן נכונות.

תשובות סופיות:

1) א. ii. ב. iv.
2) א. ii. ב. ii.
3) א. iii. ב. iii.
4) א. ii. ב. iv. ג. ii. ד. ii. ה. iii.
5) א. v. ב. i. ג. iii. ד. i.
6) א. iii. ב. i. ג. ii.

אקונומטריקה ב

פרק 11 - הדרכה בקריאת פלטים של תוכנת EVIEW

תוכן העניינים