אקונומטריקה א

תוכן העניינים

אקונומטריקה א

פרק 1 - מבוא לקורס

תוכן העניינים

מבוא לקורס:

רקע:

הגדרות וסימונים:

משתנה אמפירי – תוצאותיו ידועות מראש (למשל: רמת הכנסה, גיל, מסי שנות לימוד במדגם מסוים).
משתנה מקרי – תוצאותיו לא ידועות מראש (כגון תוצאה בהטלת קובייה או בהטלת מטבע). באקונומטריקה נעסוק בעיקר במשתנים מקריים.

שני סוגי המשתנים יסומנו באות לועזית עם אינדקס (למשל: Y_t או X_t).
קבוע – מקבל ערך אחד בלבד (מסומן באות לועזית ללא אינדקס – למשל a או b).
לכל משתנה מקרי X_t יש <u>תוחלת</u> המייצגת את מרכז ההתפלגות (μ_X או $E(X)$).
השונות – מייצגת את מידת הפיזור של ההתפלגות (σ_X^2 או $V(X)$).
סטית התקן – היא השורש של השונות (σ_X).
שונות משותפת (covariance) – מדד להתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים ומייצגת את הכיוון של הקשר ביניהם ($\mathrm{Cov}(X,Y)$):
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow X,Y$ בלתי מתואמים.
$\mathrm{Cov}(X,Y)>0 \Leftrightarrow$ מתאם חיובי בין המשתנים.
$\mathrm{Cov}(X,Y)<0 \Leftrightarrow$ מתאם שלילי בין המשתנים.
X,Y בלתי תלויים $\Leftarrow$ X,Y בלתי מתואמים.
מקדם המתאם של פירסון – מדד לכיוון ולעוצמת הקשר הליניארי בין שני משתנים: $\eta_{xy}=\dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.
$-1\le\eta\le1$
$\eta=1$ מתאם ליניארי חיובי מלא בין שני המשתנים.
$\eta=-1$ מתאם ליניארי שלילי מלא בין שני המשתנים.
$\eta=0$ לא קיים מתאם ליניארי בין שני המשתנים.

אמידה:

פרמטר – ערך המשתנה הנחקר המתאר את כל האוכלוסייה.
סטטיסטי/אומד – ערך המשתנה הנחקר המתאר את המדגם.

מדגם	אוכלוסייה
$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$E(X) = \mu$
$S_X^2 = \frac{S_{XX}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$	$V(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$
$\frac{S_{XY}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$	$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$
$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}$	$\eta_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$

נוסחאות וחוקים בסטטיסטיקה:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים, ו- a, b קבועים:

<u>חוקי הסיגמה</u>:

1. $\sum_{t=1}^{T} X_t = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_T$.
2. סכום של קבוע: $\sum_{t=1}^{T} a = Ta$.
3. סכום של קבוע כפול משתנה = לקבוע כפול הסכום: $\sum_{t=1}^{T} aX_i = a\sum_{t=1}^{T} X_t$.
4. סכום של סכום/הפרש = לסכום/הפרש הסכומים: $\sum_{t=1}^{T}(X_t \pm Y)_t = \sum_{t=1}^{T} X_t \pm \sum_{t=1}^{T} Y_t$.
5. יש לשים לב כי: $\sum_{t=1}^{T} X_t^2 \neq \left(\sum_{t=1}^{T} X_t\right)^2$

$\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t \neq \sum_{t=1}^{T} X_t \sum_{t=1}^{T} Y_t$.

הגדרות ופיתוחים:

1. סכום הסטיות מהממוצע = 0: $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)=0$.
2. סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע (מונה השונות):
$$S_{XX}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}X_t^2-T\bar{X}^2=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)X_t.$$
3. מונה של השונות המשותפת:
$$S_{XY}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}X_tY_t-T\bar{X}\bar{Y}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)Y_t=\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)X_t.$$

חוקי התוחלת:

1. תוחלת של קבוע = קבוע: $E(a)=a$.
2. תוחלת של סכום/הפרש = לסכום/הפרש התוחלות:
$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$
$$E\left(\sum(X_i)\right)=\sum E(X_i).$$
3. תוחלת של כפל/חילוק ≠ לכפל/חילוק התוחלות:
$$E(X\cdot Y)\neq E(X)\cdot E(Y)$$
$$E\left(\frac{X}{Y}\right)\neq\frac{E(X)}{E(Y)}.$$
$$E\left(X^2\right)\neq\left[E(X)\right]^2$$
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על התוחלת:
$$E\left(a/\frac{1}{a}X\pm b\right)=a/\frac{1}{a}\cdot E(X)\pm b.$$

חוקי השונות:

1. עבור X ו- Y בלתי תלויים/בלתי מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש = סכום השונויות:
$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$$
$$V\sum(X_i)=\sum V(X_i).$$
2. עבור X ו- Y תלויים/מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש ≠ סכום השונויות:
$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\cdot Cov(X,Y).$$

3. שונות של קבוע = 0: $V(a)=0$, $V(a \pm x)=V(X)$.

4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על השונות: $V(aX+b)=a^2V(X)$.

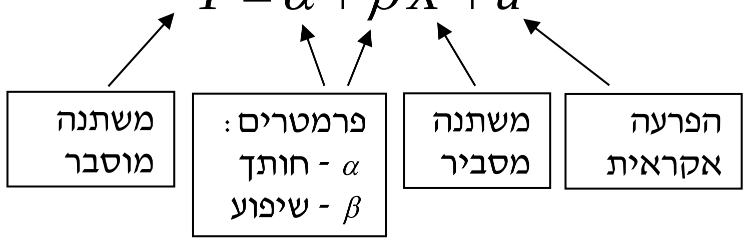
- חוקי התוחלת והשונות מתייחסים למשתנים אמפיריים כאל קבועים (יוצאים מחוץ לתוחלת או לשונות).
  חוקי הסכימה מתייחסים למשתנים אמפיריים כמשתנים הנשארים בתוך הסיגמא (רק הקבועים ייצאו מחוץ לסיגמא).

<u>חוקי השונות המשותפת</u>:

1. שונות משותפת בין משתנה לקבוע = 0: $\mathrm{cov}(X,a)=0$.
2. שונות משותפת של משתנים המוכפלים בקבוע: $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\cdot\mathrm{cov}(X,Y)$.
3. שונות משותפת של משתנה עם עצמו = שונות המשתנה: $\mathrm{cov}(X,X)=V(X)$, $\mathrm{cov}(Y,Y)=V(Y)$.

המודל האקונומטרי:

$$Y=\alpha+\beta X+u$$



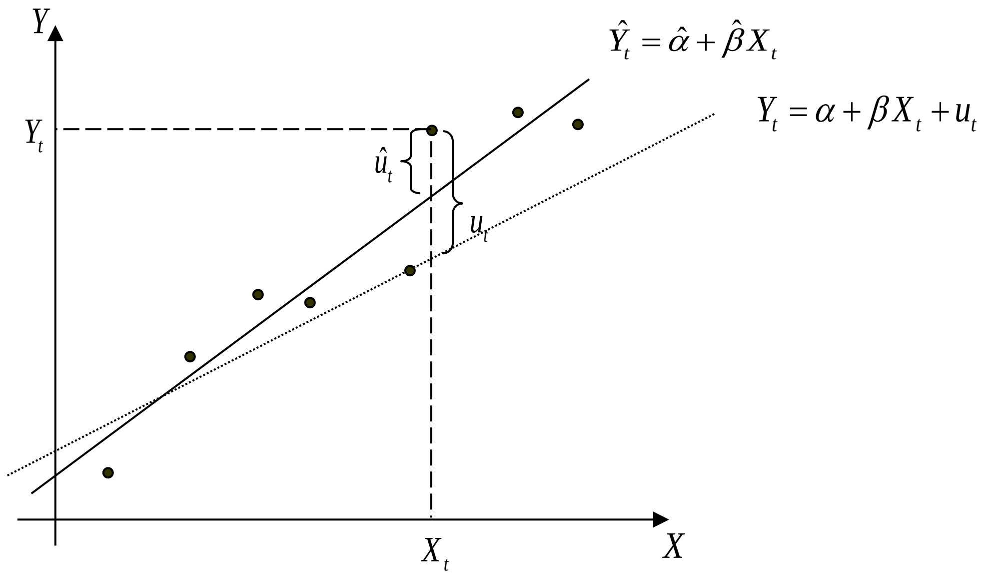
1. במודל: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α ו- $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β.
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. מסומנים בד"כ ע"י 'כובע' - $\hat{\beta}$.
   אומדים אחרים מסומנים בד"כ ע"י 'תלתל' - $\tilde{\beta}$.

4. בעוד α ו-β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים כיוון שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ אחרים.

5. את α ו-β ו-u_t לא ניתן לדעת (אלא רק לאמוד מנתוני המדגם) – הקו האמיתי באוכ' לא ידוע.

6. אפשר לדעת את $\hat{u}_t$, שהיא הסטיה מקו הרגרסיה במדגם:

- עבור X_t, הערך הצפוי של המשתנה המוסבר $\left(\hat{Y}_t\right)$ המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$.
- הסטיה של התצפית (Y_t) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה $\left(\hat{Y}_t\right)$ היא: $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.



— קו הרגרסיה הנאמד (במדגם)
..... קו הרגרסיה האמיתי באוכלוסייה)
• תצפית בודדת

שאלות:

1) הבא נוכיח את הזהויות הבאות:

א. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}X_t^2-T\bar{X}^2$.

ב. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)X_t$.

ג. $\sum\left(X_t-\bar{X}\right)=0$.

ד. $\sum\frac{\left(X_t-\bar{X}\right)^2}{\sum\left(X_t-\bar{X}\right)X_t}=1$.

ה. $\sum\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\left(x_i-\bar{x}\right)=\hat{\beta}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

ו. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}X_tY_t-T\bar{X}\bar{Y}$.

ז. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)Y_t$.

2) בטא באמצעות: $\operatorname{cov}(x,y),\operatorname{var}(x),\operatorname{var}(y)$ והקבועים a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $Var(ax)$.

ב. $Var(x+y)$.

ג. $Var(ax+b)$.

ד. $Cov(x,ay)$.

ה. $Cov(x+a,y+b)$.

ו. מקדם המתאם בין x ל- y.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $a^2\operatorname{var}(x)$. ב. $\operatorname{var}(x)+\operatorname{var}(y)+2\operatorname{cov}(x,y)$. ג. $a^2\operatorname{var}(x)$. ד. $a\operatorname{cov}(x,y)$.

ה. $\operatorname{cov}(x,y)$. ו. $r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y)}}$.

אקונומטריקה א

פרק 2 - אומדי הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

אומדי הריבועים הפחותים:

רקע:

Ordinary Least Squares (OLS) – שיטת האמידה של α ושל β לקבלת אומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ שיביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t \right) \right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$.

	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$
חישוב האומדים	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X}) Y_t}{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$	$\hat{\alpha} = \bar{Y}$
תוחלת האומדים	$E(\hat{\beta}) = \beta$ $E(\hat{\alpha}) = \alpha$	$E(\hat{\beta}) = \beta$	$E(\hat{\alpha}) = \alpha$
שונות האומדים	$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right)$	$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{T} X_t^2}$	$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma_u^2}{T}$

"המשוואות הנורמליות" מתקבלות בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים וחייבות להתקיים על מנת שהפונקציה תתקיים $\left(\sum \hat{u}_t^2 = \min\right)$:
עבור המודל הקלאסי (עם חותך):
בגזירה של α : $\sum \hat{u}_t = 0$.
בגזירה של β : $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.
עבור מודל ללא חותך:
בגזירת β בלבד: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.

מן המשוואות הנורמליות נובעות:

1. התכונות הגיאומטריות:
   א. $\sum \hat{u}_i = 0$.
   ב. $\sum x_i \hat{u}_i = 0$.

- ברגרסיה <u>ללא שיפוע</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית הראשונה. ברגרסיה <u>ללא חותך</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית השנייה.

2. התכונות האלגבריות:
   א. $\operatorname{cov}(x_i, \hat{u}_i) = 0$.
   ב. $\operatorname{cov}(\hat{y}_i, \hat{u}_i) = 0$.
   ג. $\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} = \bar{\hat{y}}$.

- התכונות האלגבריות תקפות עבור קו הרגרסיה הקלאסי (עם חותך ושיפוע) במדגם בלבד.

ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:

1. קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.
2. X איננו קבוע: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2 \neq 0$.
3. תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E(u_t) = 0$ לכל t.
4. X_t אינם משתנים מקריים $\Leftarrow$ ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונות $\Leftarrow$ $\operatorname{cov}(X_t, u_t) = 0$.

5. הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:
$V(u_t)=\sigma_u^2$ לכל t.
6. u_t ב"ת: $\operatorname{cov}(u_t,u_s)=0$ לכל $t\neq s$.
7. ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית: $u_t \approx N$.

תכונות האומדים:

אומדי הריבועים הפחותים הם לינאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים.

1. לינאריות:
אר"פ ניתנים להצגה כטרנספורמציה לינארית של Y_t.
כדי ש-$\hat{\beta}$ למשל, יהיה אומד ליניארי צריך להתקיים: $\hat{\beta}=\sum W_t\cdot Y_t$.
כאשר W_t היא קומבינציה של ערכי X בדרך כלל. למשל: $\hat{\beta}=\dfrac{\sum X_t\cdot Y_t}{\sum X_t^2}$.
כדי להביא את האומד לצורה: $\tilde{\beta}=\sum w_t\cdot y_i$ נעזר בשוויון: $\dfrac{\sum 0}{\sum 0}=\sum\dfrac{0}{\sum 0}$.
אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:
$$\hat{\beta}=\sum\frac{X_t}{\sum X_t^2}Y_t=\sum W_t\cdot Y_t$$
$$W_t=\frac{X_t}{\sum X_t^2}$$
לפיכך מדובר באומד ליניארי.

- שימו לב כי:
W_t אסור שיכלול את Y_t.
Y_t אסור שיהיה במכנה או בשורש/חזקה (אלא אם כן במודל הנתון הוא מצוי בשורש/חזקה).

2. חוסר הטיה:

אומד $\hat{\vartheta}$ מסוים יהווה אח"ה לפרמטר ϑ אותו הוא אומד באוכלוסייה אם מתקיים: $E(\hat{\vartheta})=\vartheta$.

כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטיה?

1. בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה – מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי – מציבים במקום ה-Y_t את המודל ומפתחים אלגברית.

- יש לזכור כי:

u_t y_t מהווים משתנים מקריים ⇐ נשארים בתוך התוחלת, השונות וה- $\sum$.

x_t איננו משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4) ⇐ יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה- $\sum$ ו- α β קבועים ⇐ יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול- $\sum$.

2. בשלב השני מפעילים תוחלת על האומד המפותח ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטייה.

- חוסר הטייה מחייב את התקיימותן של הנחות (3) $E\left(u_t\right)=0$ לכל t ו- (4) $\operatorname{cov}\left(X_t,u_t\right)=0$.

3. יעילות:

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\vartheta}_1$ יקרא אומד יעיל יותר מ-$\hat{\vartheta}_2$ אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר: $V(\hat{\vartheta}_1)<V(\hat{\vartheta}_2)$.

משפט גאוס מרקוב – אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הלינאריים חסרי ההטיה), והם נקראים: B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimation).

כיצד מחשבים שונות של אומד?

חייבות להתקיים הנחות (4) $\operatorname{cov}\left(X_t,u_t\right)=0$, (5) $V\left(u_t\right)=\sigma_u^2$ לכל t

ו-(6) $\operatorname{cov}\left(u_t,u_s\right)=0$ לכל $t\neq s$. אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את u_t מהפיתוח הקודם (לפי כללי הסיגמא והשונות).

4. עקיבות:

ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר.

אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה לפרמטר האמיתי באוכלוסייה: $\begin{array}{c}\left(\hat{\theta}\rightarrow\vartheta\right)\\ \left(T\rightarrow\infty\right)\end{array}$.

תנאי הכרחי לעקיבות:

האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב. אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסייה.

סיכום: השלבים להוכחת התכונות:

1. הוכחת ליניאריות.
2. הכנת האומד $\Leftarrow$ להציב במקום Y_t את המודל האמיתי.

   במודל עם חותך: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$.

   במודל ללא חותך: $Y_t=\beta X_t+u_t$.
3. פיתוח האלגברה.
4. חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.

- ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.
- ליניאריות וחוסר הטיה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.
- עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.
- העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלויים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכ'.

שאלות:

גזירת ארפ:

1) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעיית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS (המשוואות הנורמאליות).

ג. מצאו נוסחה לקבלת האומדים: $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים $\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$.

ה. בהנחה והיינו בוחרים אומד אחר ל- β שאינו אומד הריבועים הפחותים, מה היה יחס הביטויים: $\sum e_i$ ו- $\sum e_i^2$ של אומד זה ביחס לאומד הריבועים הפחותים?

2) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעיית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.

ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\beta}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה אינו עובר דרך נקודת הממוצעים $\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$.

ה. מהו התנאי שבו אומד הריבועים הפחותים שמצאתם בסעיף ג' יהיה זהה לנוסחה של אומד הריבועים הפחותים שנמצא בשאלה הקודמת (במודל עם חותך)?

3) חוקר רצה לחקור האם ציוני IQ משפיעים על הציון באקונומטריקה ולכן אסף תצפיות מ-5 סטודנטים:

SCORE	IQ	e_i
80	100	1
75	110	-1
80	110	1
90	103	2
85	102	-3

איזה מבין המודלים הבאים נאמד?

א. $\hat{score}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot IQ_i$.

ב. $\hat{score}_i = \hat{\beta} \cdot IQ_i$.

ג. $\hat{score}_i = \hat{\alpha}$.

ד. $\hat{score}_i = \bar{y}$.

4) נבדק הקשר שבין שכר לשעה שעובד מסוים מרוויח אצל מעסיק מסוים (X) לבין כמות העובדים שמועסקים אצל אותו מעסיק (Y) (הניחו שכר שווה בין העובדים אצל אותו המעסיק).
לשם כך נדגמו 10 מעסיקים באופן מקרי ונתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x}=35$$
$$\bar{y}=5.8$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2=19{,}100$$
$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2=440$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i=2858.85$$

מהי תחזית כמות העובדים המועסקים אצל מעסיק מסוים המשתכרים 25 ₪ לשעה?

5) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i=\alpha+u_i$.

א. נסחו את בעיית ה-OLS.
ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.
ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\alpha}$.

6) חוקר רצה לבדוק את המודל: $y_i=\hat{\beta}x_i+u_i$ כאשר המשתנה התלוי הוא הציון במקרו והב״ת הוא ציוני IQ. לשם כך אסף תצפיות של 5 סטודנטים:

SCORE	IQ	ציון חזוי	e_i
80	100		
90	110		
95	110		
92			5
	102		3

מאמידת הרגרסיה התקבל כי: $\hat{\beta}=0.85$.
השלם את התאים הריקים בטבלה.

הנחות המודל:

7) שכר של עובדים מנובא על ידי השכלתם במודל הבא: $w_i = \alpha + \beta \cdot s_i + u_i$.

א. כתבו את ההנחות הקלאסיות במונחי המשתנים של המודל הנתון והסבירו אותן.

ב. התייחסו לכל אחת מהטענות הבאות וקבעו האם היא: הנחה קלאסית / משוואה נורמאלית (או תוצאה הנובעת ממשוואה נורמאלית) / אף אחד מהשניים:

i. $\operatorname{cov}(s_i, u_i) = 0$

ii. $E(u_i) = 0$

iii. $\operatorname{cov}(u_i, u_j) = 0$

iv. $\bar{e} = 0$

v. $\bar{w} = \bar{\hat{w}}$

vi. $\sum u_i = 0$

vii. $V(u_i) = \sigma_i$

viii. $S_s^{\,2} \neq 0$

ix. $\operatorname{cov}(s, e) = 0$

x. $\operatorname{cov}(\hat{y}_i, e) = 0$

8) חוקר מעוניין לאמוד את ההשפעה של נוכחות בתרגולים על הציון בקורס אקונומטריקה. לשם כך אמד את המשוואה: $score = \alpha + \beta attendance + u$
הועלתה הטענה כי מודל זה אינו מקיים את הנחה מס' 4 של אי תלות בין המשתנה הב"ת לטעויות $\left(\operatorname{cov}(x_i, u_i) = 0\right)$. חווה דעתך על טענה זו.

ליניאריות:

9) האם האומד: $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$ הוא ליניארי?

10) האם האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} Y_t^3 \sum_{t=1}^{T} X_t (Z_t + Y_t)}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$ הוא ליניארי?

11) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

מי מהאומדים הבאים הוא ליניארי ומהן המשקולות:

א. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$.

ב. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ג. $\tilde{\beta} = \sum \left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)^2$.

ד. $\tilde{\beta} = \sum \dfrac{Y_i}{n}$.

ה. $\tilde{\beta} = \sum \dfrac{X_t}{Y_i}$.

ו. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ז. $\tilde{\beta} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}}$.

חוסר הטיה:

12) נתון האומד הבא: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$.

האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

א. בדוק במודל עם חותך.

ב. בדוק במודל ללא חותך.

13) נתון המודל הבא: $y_i = \alpha + \beta\, x_i + u_i$ נתון בנוסף כי האומד ל- β הינו ליניארי וחסר הטיה.

איזה מן הטענות מתקיימת בהכרח:

א. $\sum w_i x_i = 1$.

ב. $\sum w_i x_i = 0$.

ג. $\sum w_i = 0$.

יעילות ועקיבות:

14) כלכלן הציע את האומד הבא עבור β : $\tilde{\beta}=\frac{y_9-y_5+y_2}{x_9-x_5+x_2}$.

א. בדוק האם האומד חסר הטיה עבור המודל הקלאסי.

ב. האם תשתנה תשובתך אם מדובר באומד ללא חותך?

ג. חשב את שונות האומד עבור מודל ללא חותך.

תרגול ממבחנים:

15) נתון המודל: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$, $T=100$, כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

נתון האומד: $\tilde{\beta}=\frac{\sum_{t=51}^{100}Y_t-\sum_{t=1}^{50}Y_t}{\sum_{t=51}^{100}X_t-\sum_{t=1}^{50}X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד חסר הטיה ל- β . נכון / לא נכון

ב. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד עקיב ל- β . נכון / לא נכון

ג. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד ליניארי ל- β . נכון / לא נכון

ד. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד יעיל ל- β . נכון / לא נכון

ה. השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ היא?

16) נתון המודל: $Y_t=\beta X_t+u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות. (יש לשים לב המודל ללא חותך).

נתון האומד: $\tilde{\beta}=\frac{\sum Y_t}{\sum X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד מוטה ל- β : נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי $\tilde{\beta}$ איננו אומד יעיל יותר מאומד הריבועים הפחותים: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ג. מהי השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$?

17) נתון המודל: $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
(יש לשים לב המודל ללא חותך).
נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum \left(X_t - \bar{X}\right)^2}$.

א. מהי התוחלת של $\tilde{\beta}$?

ב. $E\left(\tilde{\beta}\right) < \beta$. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים הינו אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$. נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ד. מהי השונות האמיתית של האומד: $\dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$?

18) בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
האומדים הם אר״פ, והמודל הוא: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

א. $E\left(Y_t\right) = E\left(\hat{Y}_t\right)$ נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\bar{Y} \neq 0$ נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תיתן את התוצאה: $\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ד. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$, אזי $\hat{\beta}$:

i. הוא בהכרח שלילי.

ii. הוא בהכרח חיובי.

iii. הוא בהכרח שווה לאפס.

iv. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים.

ה. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:

i. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{Y}\right)\hat{u}_t = 0$.

ii. $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - \left(T\bar{X}\right)^2$.

iii. $\sum_{t=1}^{T} X_t u_t = 0$.

iv. אף אחת מהטענות הנ״ל אינה נכונה בהכרח.

ו. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של u_t אינה קבועה. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ז. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

תשובות סופיות:

1) א. $\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_t\right)\right]^2$ ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i x_i=0 \Rightarrow \hat{\beta}$, $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0 \Rightarrow \hat{\alpha}$.

ג. $\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\hat{\alpha}$, $\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\hat{\beta}$. ד. הוכחה. ה. ראה סרטון.

2) א. $\min_{\hat{\beta}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\beta}x_t\right)\right]^2$ ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i x_i=0 \Rightarrow \hat{\beta}$.

ג. $\frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}=\hat{\beta}$. ד. הוכחה. ה. ראה סרטון.

3) אי'.

4) $\hat{y}_i=4.59$.

5) א. $\min_{\hat{\alpha}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\alpha}\right)\right]^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0$. ג. $\hat{\alpha}=\bar{y}$.

6)

e_i	ציון חזוי	IQ	SCORE
-5	85	100	80
-3.5	93.5	110	90
1.5	93.5	110	95
5	97	114	92
3	86.7	102	89.7

7) א. ראה סרטון.
ב. i. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
ii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
iii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
iv. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
v. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
vi. אף אחד מהשניים.
vii. אף אחד מהשניים.
viii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
ix. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
x. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

8) ראה סרטון.

9) כן.

10) לא.

11) א. ליניארי, $W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$. ב. ליניארי, $W_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ג. לא ליניארי. ד. ליניארי, $W_i = \frac{1}{n}$.

ה. לא ליניארי. ו. ליניארי, $W_i = \frac{x_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ז. ליניארי, $W_i = \frac{1}{\sum x_i}$.

12) א. לא. ב. כן.

13) א' ו-ג'.

14) א. מוטה. ב. חסר הטיה. ג. $\frac{1}{(x_9 - x_5 + x_2)^2} \sigma_u^2$.

15) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון.

ה. $V(\tilde{\beta}) = \frac{100\sigma_u^2}{\left(\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t\right)^2}$.

16) א. לא נכון. ב. נכון. ג. $V(\tilde{\beta}) = \frac{T\sigma_u^2}{\left(\sum X_t\right)^2}$.

17) א. $E(\tilde{\beta}) = \frac{\beta \sum X_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$. ב. לא נכון. ג. לא נכון.

ד. $\frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$.

18) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. ii.

ה. i. ו. לא נכון. ז. נכון.

אקונומטריקה א

פרק 3 - מודלים לא ליניאריים

תוכן העניינים

מודלים לא ליניאריים:

רקע:

המודל	משמעות ה- β	השינוי השולי $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)$ בכמה ישתנה Y אם נגדיל את X ביחידה?	הגמישות $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y}\right)$ בכמה % ישתנה Y אם נגדיל את X ב-1%?
ליניארי: $Y=\alpha+\beta X+u$	השינוי השולי אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- β יחידות	β	$\frac{\beta X}{Y}$
חצי לוגריתמי: $\ln Y=\alpha+\beta X+u$ $\left(Y=e^{\alpha+\beta X+u}\right)$	שיעור השינוי השולי אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- $100\cdot\beta\%$	βY	βX
לוגריתמי כפול: $\ln Y=\alpha+\beta\ln X+u$ $\left(Y=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}\right)$	הגמישות אם נגדיל את X ב-1% Y ישתנה ב- $\beta\%$	$\frac{\beta Y}{X}$	β
לוג ליניארי: $Y=\alpha+\beta\ln X+u$ $\left(e^{y}=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}\right)$	אין משמעות כלכלית אם נגדיל את X ב-1% Y ישתנה ב- β	$\frac{\beta}{X}$	$\frac{\beta}{Y}$

- המשתנה שיש בו LN השינוי בו יהיה באחוזים.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN\left(e^{x}\right)=X$$
$$LN\left(X^{Y}\right)=Y\cdot LN\left(X\right)$$
$$LN\left(X\cdot Y\right)=LN\left(X\right)+LN\left(Y\right)$$
$$LN\left(\frac{X}{Y}\right)=LN\left(X\right)-LN\left(Y\right)$$

שאלות:

1) על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

1. $MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t$.
2. $MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$.
3. $LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t$.
4. $LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t$.

א. הסבירו את המשמעות של β בכל אחד מהמודלים.

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311,1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

2) נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

1. $\hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05}$.
2. $\hat{Y} = e^{4.5+0.05X}$.
3. $\hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X}$.
4. $\hat{Y} = \frac{1}{1+e^{4.5+0.05X}}$.

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור $X = 6$.

3) נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

1. $Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i}$.
2. $Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i}$.
3. $Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i}$.
4. $Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i$.
5. $Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i$.
6. $Q_i = e^{A+\beta_1 Ki + u_i}$.
7. $Q_i = A\left(\frac{K_i}{2} + 7\right)^{\beta_1} e^{u_i}$.
8. $Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i$.
9. $Q_i = A + \beta_1\left(\frac{K_i}{L_i}\right) + u_i$.

כאשר:

Q - הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

A - הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

K - הכנסת הפרט.

L - שנות לימוד.

א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?

ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?

ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.

ד. עקומת אנגי׳ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנגי׳ל?

4) נתון המודל הבא: $Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$.

א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?

ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?

ג. נאמד המודל הבא: $\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$, והתקבלו התוצאות הבאות: $\hat{\alpha}_0 = 3$, $\hat{\alpha}_1 = 0.8$.

מהם האומדנים עבור: β_1 , A ?

5) נתון כי הקשר באוכלוסייה בין X ל- Y נתון על ידי המודל הבא: $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$. נתון גם כי עבור המודל הנ״ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

כלכלן הציע את האומד הבא עבור β: $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\ln X_t - \ln \bar{X}\right) \ln Y_t}{\sum_{t=1}^{T} \left(\ln X_t - \ln \bar{X}\right)^2}$.

א. האם האומד ליניארי?

ב. האם האומד חסר הטיה?

ג. האם האומד *blue*?

ד. מהי שונותו?

תשובות סופיות:

1) א.1. השינוי השולי. 2. אין משמעות כלכלית. 3. גמישות.
4. שיעור השינוי השולי.
ב.1. 0.912. 2. 0.77. 3. 0.778. 4. 0.861.

2) א.1. $\hat{\ln}(Y)=4.5+0.05\cdot\ln(X)$. 2. $\hat{\ln}(Y)=4.5+0.05X$.
3. אין צורך. 4. $\ln\left(\frac{1-\hat{Y}}{\hat{Y}}\right)=4.5+0.05X$.
ב.1. 98.45. 2. 121.51. 3. 4.50833. 4. 0.00816.

3) א. מודלים: 4 , 5 , 8 ו-9.
ב. מודלים: 1 , 2 , 6 ו-7.
ג.1. מסביר: $\ln(K_i)$, מוסבר: $\ln(Q_i)$. 2. מסביר: L_i , מוסבר: $\ln(Q_i)$.
3. אינו ליניארי. 4. מסביר: $\frac{1}{L_i}$, מוסבר: Q_i.
5. מסביר: $\sqrt{K_i}$, מוסבר: Q_i. 6. מסביר: K_i , מוסבר: $\ln(Q_i)$.
7. מסביר: $K_i=\frac{K_i}{2}+7$, מוסבר: $\ln(Q_i)$. 8. מסביר: L_i , מוסבר: Q_i.
9. מסביר: $\frac{K_i}{L_i}$, מוסבר: Q_i.
ד. מודלים: 1 ו-7.

4) א. לא. ב. $\ln(Q_i)=\ln(A)-\beta_1\ln(K_i)+u_i$.
ג. $A=20$, $\beta_1=-0.8$.

5) א. כן. ב. כן. ג. כן. ד. $V(\hat{\beta})=\frac{\sigma_u^2}{SS\ln x}$.

אקונומטריקה א

פרק 4 - רגרסיה מרובה ומולטיקולינאריות

תוכן העניינים

רגרסיה מרובה ומולטיקולינאריות:

רקע:

מודל הרגרסיה המרובה:

$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_J X_{Ji} + U_i$.

כאשר:

Y_i = משתנה תלוי.

$X_{1i} \ldots X_{Ji}$ = משתנים ב"ת.

U_i = טעות מקרית המקיימת את כל ההנחות הקלאסיות.

α = חותך אחד שמשמעותו: הציון המנובא כאשר כל המשתנים הב"ת = 0.

$\beta_1 \ldots \beta_J$ = מקדמי השיפוע. (מס' הבטות = למספר המשתנים הב"ת במודל).

משמעות מקדם השיפוע β_j: ההשפעה <u>הייחודית</u> של המשתנה הב"ת המסוים לניבוי המשתנה התלוי, בניכוי השפעתם של כל יתר המשנים הב"ת האחרים המצויים במשוואת הרגרסיה.

אמידת מודל הרגרסיה המרובה:

1. שיטת הריבועים הפחותים:

$$Min\sum e_i^2 = Min\sum\left(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \ldots - \hat{\beta}_J X_{Ji}\right)^2.$$

מפתרון פונקציית הריבועים הפחותים נקבל את אומדי הרגרסיה: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_J$.

2. המשוואות הנורמאליות:

$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ בגלל שיש חותך.

$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{1i} = 0$ בגלל שיש את X_{1i}.

$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{2i} = 0$ בגלל שיש את X_{2i}.

עד $\sum_{i=1}^{n} e_i X_{Ji} = 0$ בגלל שיש את X_{Ji}.

דוגמא:

מקרה פרטי, מודל עם שני משתנים מסבירים:

$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$.

הנוסחאות הנורמאליות הן:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{2i} = 0$$

מפתרון מערכת המשוואות נקבל את הנוסחאות הבאות לחישוב האומדים:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\left(r_{y1} - r_{y2} * r_{12}\right)}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\left(r_{y2} - r_{y1} * r_{12}\right)}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}}$$

הערה:

ניתן לראות כי אם לא קיים מתאם בין המשתנים הב"ת: $r_{12} = 0$,

שיפועי הרגרסיה המרובה זהים לשיפועי הרגרסיה הפשוטה:

$$\hat{\beta}_1 = r_{y1} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_1)}{\operatorname{var}(x_1)}$$

$$\hat{\beta}_2 = r_{y2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}} = \frac{\operatorname{cov}(y, x_2)}{\operatorname{var}(x_2)}$$

מולטיקוליניאריות:

מולטיקוליניאריות מתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל.

מולטיקוליניאריות מלאה:
מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.
הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של המשתנה המסביר השני: $x_1 = a + bx_2$ (x_1 הוא קומבינציה ליניארית מלאה של x_2)
מכאן ש: $r_{12} = 1$.

- שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת (למשל $x_1 = x_2^2$), אז בהכרח $r_{12} \neq 1$.
- מולטיקוליניאריות מלאה יכולה להיווצר גם כאשר קבוצה של משתנים מסבירים מהווה קומבינציה ליניארית מלאה של אחד המשתנים המסבירים: $x_1 + x_2 = a + bx_3$.

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני ולא ניתן לאמוד את המודל שכן אר"פ אינם מוגדרים.
פתרון: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

מולטיקוליניאריות חלקית:
כאשר יש מתאם גבוה מאוד (אך לא מושלם) בין 2 משתנים מסבירים במודל או בין קבוצה של משתנים מסבירים:

$$x_1 = a + bx_2 + u_i$$
$$x_1 + x_2 = a + bx_3 + u_i$$

מכיוון שיש מתאם גבוה בין המשתנים הב"ת לא נוכל לבודד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני המשתנה התלוי.
כל אחד מהמשתנים הב"ת "יגזול" מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב"ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב"ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב"ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

שאלות:

רגרסיה מרובה:

1) כלכלן החליט לאמוד מודל ליניארי עם שלושה משתנים מסבירים: x_1, x_2, x_3.
$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$.

א. מהי בעיית ה-OLS שעליו לפתור?

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של הבעיה.

2) כלכלן החליט לבחון מה משפיע על שער הדולר בישראל.
לכן אסף מדגם בין ארבע תצפיות חודשיות.
להלן טבלה מסכמת:

חודש	X_2 השקעות זרים בישראל (במיליוני דולרים)	X_1 שער הריבית	Y דולר	טעות (e^i)
אוגוסט	100	3	3.2	-5
ספטמבר	95	3.5	3.6	6
אוקטובר	90	3.5	3.8	0
נובמבר	100	3	3.5	-2

מהו המודל אשר אותו אמד הכלכלן?

3) הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין X ל- Y נתון ע"י המשוואה הבאה: $Y_i = 2 + \beta_1 X_{1i} + 5X_{2i} + u_i$ וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

נתון האומד: $\tilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum X_{1i}\left(\left(Y_i - 8X_{2i} - 2\right) - \left(\overline{y - 8X_2 - 2}\right)\right)}{\sum X_{1i}^2}$.

א. חשבו את תוחלת האומד.

ב. חשבו את שונות האומד.

ג. מהו היחס בין שונות האומד הנ"ל, לבין שונות אומד הריבועים הפחותים?

4) הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין X ל- Y נתון ע"י המשוואה הבאה: $y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + 8x_{2i} + u_i$.

כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות וכן: $\sum x_{1i} = 0$.

אומדים את β_1 באופן הבא: $b_1 = \dfrac{\sum (x_{1i} - \bar{x})\left(y_i - 8x_{2i} - \left(\overline{y - 8x_2}\right)\right)}{\sum (x_{1i} - \bar{x})^2}$.

א. האם האומד חסר הטיה?

ב. מהי שונות האומד?

מולטיקולינאריות:

5) נתון המודל: $Y_i = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + U_i$.

חוו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

א. בהנחה כי מתקיים: $X_{1i} - 2X_{2i} = 1$,
לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים. נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ב. בהנחה כי מתקיים: $x_{1i} = x_{2i}^2$,
לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים. נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ג. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים ב' ו-ג'.

ד. בהנחה כי מתקיים: $r_{12} = 0.98$,

i. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים. נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ii. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.

6) כלכלן אמד את המודל: $y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$.
בשל החשש ממולטיקוליניאריות בחן הכלכלן את המתאם בין כל זוג של משתנים מסבירים וקיבל: $r_{x_3,x_2} = 0.5$, $r_{x_1,x_3} = 0.99$, $r_{x_1,x_2} = 0.9$.
לכן הסיק כי אין בעיה של מולטיקוליניאריות מושלמת במודל.
האם הוא צודק?

7) כלכלן אמד את המודל הבא: $\ln(Q_i) = \alpha + \beta_1 \ln(K_i) + \beta_2 \ln(K_i^2) + \beta_3 L_i^{0.5} + u_i$.
האם קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות במודל?

8) להלן מודל של שכר W_i, כפונקציה של שנות לימוד S_i ושל גיל A_i:

1. $W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + u_i$.

בנוסף למשתנים במשוואה, החליט החוקר להוסיף גם את משתנה הוותק: EXP_i.
מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים (מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 2:

2. $W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + \beta_3 \cdot EXP_i + w_i$.

חווה דעתך על המשוואה השנייה.

תשובות סופיות:

1) א. $\min \sum \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i} \right)^2$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} e_i X_{1i} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} e_i X_{2i} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} e_i X_{3i} = 0$.

2) $y_i = \beta_1 x_{1i} + u_i$.

3) א. לא ניתן לחשב. ב. $Var = \dfrac{\sigma^2}{\sum X_{1i}^2}$. ג. לא ניתן לדעת.

4) א. כן. ב. $V(b_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x_{1i}^2}$.

5) א. נכון. ב. לא נכון. ג. הוכחה. ד.i. לא נכון.
ii. מולטיקולינאריות חלקית.

6) הכלכלן לא יכול להיות בטוח.

7) כן.

8) ראו סרטון.

אקונומטריקה א

פרק 5 - מבחן t

תוכן העניינים

מבחן t:

רקע:

המבחן הסטטיסטי למובהקות מקדמי הרגרסיה.

המבחן הסטטיסטי	ניסוי	השערות	סטטיסטי המבחן	כלל הכרעה לדחיית H_0	מסקנה
מובהקות השיפוע	האם משתנה מסביר מסוים רלוונטי למודל / משפיע על התלוי?	$H_0:\beta=0$ $H_1:\beta\neq 0$	$t_{\beta=0}=\dfrac{\hat{\beta}-\beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$	שימוש בטבלת T: $\lvert t_{\beta=0}\rvert > t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}$ K=**מספר מקדמים (כולל חותך)	יש/אין עדות לכך שהמשתנה הב"ת מובהק באוכ'
מבחן חד צדדי לשיפוע	האם מקדם השיפוע חיובי/שלילי באוכ'?	$H_0:\beta=0$ $H_1:\beta>/<0$		שימוש בטבלת T: $t_{\beta=0}>t_{(n-K,\alpha)}$ $t_{\beta=0}<-t_{(n-K,\alpha)}$	יש/אין עדות לכך שהשיפוע חיובי/שלילי באוכ'
השיפוע = ערך מסוים באוכ'	האם מקדם השיפוע = לערך מסוים (למשל ל-2)?	$H_0:\beta=2$ $H_1:\beta\neq 2$	$t_{\beta=2}=\dfrac{\hat{\beta}-2}{S_{\hat{\beta}}}$	שימוש בטבלת t	יש/אין עדות לכך שהשיפוע = ל-2 באוכ'.
מבחן למובהקות החותך **ניתן לבצע גם מבחן חד צדדי ושהחותך = לערך מסוים באוכ'	האם קו הרגרסיה יוצא מראשית הצירים?	$H_0:\alpha=0$ $H_1:\alpha\neq 0$	$t_{\alpha=0}=\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha_0}{S_{\hat{\alpha}}}$	נדחה את H_0 אם: שימוש בטבלת T: $\lvert t_{\alpha=0}\rvert > t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}$	יש/אין עדות לכך שקו הרגרסיה עובר דרך ראשית הצירים

רב"ס ל- β : $P\left(\hat{\beta}-t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot S_{\hat{\beta}}\le\beta\le\hat{\beta}+t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot S_{\hat{\beta}}\right)=1-\alpha$.

רב"ס ל- α : $P\left(\hat{\alpha}-t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot S_{\hat{\alpha}}\le\alpha\le\hat{\alpha}+t_{\left(n-K,\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot S_{\hat{\alpha}}\right)=1-\alpha$.

- ניתן לבדוק השערות באמצעות הרב"ס.
  צריך לבדוק האם הרב"ס מכיל את הערך המבוקש לפי השערת האפס.
  אם כן – נקבל את H_0 ואם לא – נדחה אותה.

תחזית:

המטרה של קו הרגרסיה הוא ביצוע תחזיות:
<u>תחזית נקודתית</u> מחושבת על פי קו הרגרסיה שאמדנו.
נציב במקום ה- X ים ערכים נתונים ונקבל למה שווה ה- Y המנובא.

אמידת התחזית באוכלוסייה עבור ערך מסוים של X (ברגרסיה פשוטה):

$$\hat{Y}\pm t_{\left(n-2,\frac{\alpha}{2}\right)}S_u\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(X_f-\bar{X}\right)^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$$

$$\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2=S_{XX}=(n-1)S_X^2 \qquad S_u^2=MSE=\frac{SSE}{n-2}$$

רישום הרב"ס: $p(\_\_\_\le Y\le\_\_\_\_)=1-\alpha$.

התחזית מדויקת יותר (שונות התחזית קטנה יותר) כאשר:

1. n (גודל המדגם) גדול יותר.
2. שונות המשתנה המסביר X גדולה יותר.
3. X_f קרוב יותר ל- $\bar{X}$.
4. האומד לשונות הטעויות – S_u, קטן יותר.

מבחן t מורכב (בחינת קשרים ליניאריים בין הפרמטרים):

משמש לבדיקת השערות העוסקות בקשרים בין הפרמטרים.
כמו למשל: $H_0:\alpha=5\beta$ או $H_0:\beta_1=2\cdot\beta_2$.
במקרים אלו נרשום את השערות האפס כך: $H_0:\alpha-5\beta=0$ ו-$H_0:\beta_1-2\cdot\beta_2=0$
ונחשב את סטטיסטי המבחן t: $t_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}=\dfrac{\left(\hat{\alpha}-5\hat{\beta}\right)-0}{S_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}}$ או $t_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2}=\dfrac{\left(\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2\right)-0}{S_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2}}$.
כאשר את טעות התקן של המבחן מחשבים תוך שימוש בנוסחאות:

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$V(aX)=a^2V(X)$$

$$\operatorname{cov}(aX,bY)=a\cdot b\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

ואחר כך מוציאים לשונות שורש כדי לקבל את סטית התקן.
לשם כך יש לקבל נתונים על השונויות המשותפות של הפרמטרים (cov).

שאלות:

מובהקות מקדמי הרגרסיה:

1) חוקר רצה לבחון את השפעת ההכנסה ($INCOME$) על גובה המס (TAX) (במיליארדי $) שגובה מדינה במערב לפי המודל: $TAX_i = \alpha + \beta \cdot INCOME_i + u_i$.
לשם כך אסף נתונים מ-51 מדינות. להלן התוצאות:
$TAX_i = -0.086912 + 0.152232 \cdot INCOME_i$.
(0.08953) (0.01622).
סטיות התקן של האומדים נתונות בסוגריים.

א. מהי המשמעות הכלכלית של β ושל α?
ב. האם ההכנסה משפיעה על גודל המס? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
ג. בדקו את ההשערה כי כאשר ההכנסה אפסית, גודל המס שונה מ-0 באוכלוסייה.
ד. בדקו את ההשערה כי ככל שההכנסה עולה כך עולה גם המס ברמת מובהקות של 5% וברמת מובהקות של 1%.
ה. בנו רווח-סמך לשיפוע הרגרסיה ברמת ביטחון של 95%.
ו. בדקו את ההשערה שתוספת של מיליארד $ להכנסה תגדיל את המס ב-0.2 מיליארד $, ברמת מובהקות של 0.05.

2) חוקר רצה לבדוק את השפעת הותק בעבודה (EXP) על השכר ($SALARY$) לפי המודל: $\ln(SALARY_t) = \alpha + \beta \cdot EXP_t + u_t$. הוא אסף 403 תצפיות, ואמד את הפרמטרים. להלן תוצאות האמידה:
$\ln(SALARY)_i = 7.334 - 0.0087 \cdot EXP_i$
(0.068) (0.0026).

א. האם קיים קשר חיובי מובהק בין ותק ללוג השכר?
ב. בדוק את ההשערה כי שיעור התשואה בשכר לשנת ותק קטנה מ: -0.9.
ג. מהי תחזית השכר עבור אדם בעל 10 שנות ותק?

3) נאמד המודל: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \beta_3 W_i + \beta_4 S_i + u_i$ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\hat{y}_i = 5.06 + 0.97x_i + 3z_i - 5.02w_i + 8.97s_i$.
(0.456) (0.42) (0.08) (0.7) (0.29).

א. האם משתנה W רלוונטי למודל? בדקו ברמת מובהקות של 0.01.
ב. בנו רווח בר סמך להשפעת X על Y.

תחזית:

4) נתונה משוואת הרגרסיה הבאה: $\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i}$.
כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i לחינוך לשבוע, x_{ji} הינו גילו של הילד j.
מה יהיה סה"כ הוצאות משק הבית אם גיל הילד הראשון הוא 2 שנים, של השני 4.5 שנים, השלישי הוא בן 5 ואילו הרביעי בן 8?

5) במדגם של 30 דירות המושכרות לסטודנטים ברדיוס של עד 2 ק"מ מסביב למכללה נחקר הקשר בין שכר דירה למספר הסטודנטים הגרים בדירה.
להלן תוצאות האמידה: $\hat{Y}_i = 686.207 + 233.52 \cdot X_i$.
נתון בנוסף כי:
$S_x^2 = 1.313^2$
$S_u^2 = 414.055^2$
$\bar{x} = 3$
א. חשבו אומדן נקודתי לשכר הדירה אותו ישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד.
ב. אמוד את שכר הדירה שישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת בטחון של 95%.

t מורכב:

6) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ שלצורך אמידתו נאספו 240 תצפיות ונתקבל ש:
$\hat{Y}_i = 5.25 + 0.96X_i$.
(0.12) (0.25).
נתון בנוסף כי: $\text{cov}\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = -0.003$.
יש לבדוק את ההשערה: $H_0 : \alpha = 5\beta$.

7) על מנת לאמוד את פונקציית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה: $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$.
להלן תוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל:
$C_i = -107.226 + 0.743W_i + 0.561P_i$.
(0.4) (0.0678).
נתון גם ש: $\text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.009$.
יש לבדוק את ההשערה שהנטייה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך ההכנסה זהה לנטייה השולית לצרוך מתוך ההון.

תרגול מסכם:

8) כלכלן בנה עבור מכבי ת"א מודל החוזה את השכר שיש לשלם לשחקן כדורסל לחוזה של שנה: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + u_i$.

כאשר:

Y: שכר השחקן באלפי $.

X_1: מס' נקודות שקולע השחקן בממוצע למשחק.

X_2: מס' האסיסטים שיש לשחקן בממוצע למשחק.

X_3: מס' הדקות שיושב שחקן על הספסל בממוצע למשחק.

הכלכלן דגם 34 משחקים וקיבל את התוצאות הבאות:

$\hat{Y}_i = 120 + 18X_{1i} + 8X_{2i} - 22X_{3i}$.

(-5)   (4.4)   (3)   (2.2)

**הערכים שבסוגריים הם ערכי t.

התקבל בנוסף כי: $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 4, \operatorname{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) = -3, \operatorname{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -6$.

א. תנו פירוש למקדמי הרגרסיה.

ב. איזה מהמשתנים הב"ת רלוונטי למודל?

ג. בנו רב"ס למשתנים המובהקים.

ד. מייקל ג'ורדן הצטרף למכבי והוא דורש 2 מיליון $ לעונה.
ידוע כי מייקל קולע 45 נקודות בממוצע למשחק, מוסר 15 אסיסטים בממוצע למשחק ויושב 5 דקות בממוצע על הספסל. כמה צריך לשלם לו?

ה. לטענת שמעון מזרחי מס' הנקודות הממוצע שקולע שחקן למשחק צריך להשפיע פי 4 ממספר האסיסטים הממוצע שלו. האם הוא צודק?

9) כלכלן אמד את המודל הבא: $\ln(Q_i) = \alpha + \beta_1 \ln(K_i) + u_i$ שמתאר את הקשר שבין צריכת מוצר מסוים להכנסת הפרט (עקומת אנג'ל):

K - הכנסה חודשית באלפי שקלים.

Q - צריכה שנתית באלפי שקלים.

לשם כך אסף 60 נתונים והריץ רגרסיה.

התוצאות אשר קיבל הן: $\hat{\beta} = -2$, $\hat{\alpha} = 4$, $t_{\hat{\beta}} = -7$, $t_{\hat{\alpha}} = 3$, $\operatorname{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -0.05$

, $S_Q = 0.05$, $S_K = 1.5$.

נקודת הממוצעים הינה: (6.7,0.4).

א. הכלכלן ביקש לבדוק את ההשערה כי הגמישות במודל יחידתית ושווה ל-1-.

ב. בדקו את ההשערה כי מקדם החיתוך של קו הרגרסיה הוא כפול ממקדם השיפוע.

ג. חיים משתכר בממוצע לחודש 10,000 ₪, כמה ישקיע בצריכת המוצר בשנה?

ד. בנו רב"ס לתחזית הצריכה של חיים באוכלוסייה.

תשובות סופיות:

1) א. ראה סרטון. ב. כן. ג. אין עדות לכך. ד. יש עדות לכך.
ה. $P(0.12 \le \beta \le 0.184) = 0.95$. ו. ניתן לדחות את השערת האפס.

2) א. לא. ב. אין עדות לכך. ג. $\hat{Y} = 1404$.

3) א. כן. ב. $P(0.13 \le \beta \le 1.81) = 0.95$.

4) 142.5 ₪ לשבוע.

5) א. 1153.247. ב. $P(282.94 \le Y_{X=2} \le 2023.55) = 0.95$.

6) אין עדות לכך.

7) אין עדות לכך.

8) א. ראה סרטון. ב. כל שלושת המשתנים.
ג. $P(6 \le \beta_1 \le 30) = 0.95$, $P(4.364 \le \beta_2 \le 11.636) = 0.95$, $P(-30.8 \le \beta_3 \le -13.2) = 0.95$.
ד. 940 אלף $. ה. כן.

9) א. אין עדות לכך. ב. יש עדות לכך. ג. 545 ₪.
ד. $P(-6.205 \le Q_i \le 7.295) = 0.95$.

אקונומטריקה א

פרק 6 - מבחן F ו R בריבוע

תוכן העניינים

מבחן F ו-R בריבוע:

רקע:

מדד R^2 לטיב הרגרסיה:

מדד לפרופורציית השונות המוסברת:

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

מתבסס על הנוסחה לפירוק השונות של קו הרגרסיה:

$$TSS = RSS + ESS$$

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum e_i^2$$

תכונות R^2:

- נע בין 0 ל-1: $0 \le R^2 \le 1$.

  כאשר $R^2 = 1$ ההתאמה מושלמת ואין שום טעויות בניבוי במודל ואילו כאשר $R^2 = 0$ הכל טעות ואין שום הסבר במודל.
- אר"פ מביא למקסימום את R^2.
- לא ניתן להשוות במדד בין מודלים שבהם אין את אותו משתנה מוסבר.
- בהוספת משתנים מסבירים נוספים למודל, R^2 יכול רק לעלות או להישאר ללא שינוי. זהו למעשה החיסרון הגדול של המדד.

  כדי להתגבר על חיסרון זה קיים מדד נוסף והוא R^2_{adj} (R^2 מתוקנן):

$$\bar{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k}$$

  K = מס' הפרמטרים במודל (כולל החותך).
- המדד המתוקנן לוקח בחשבון את מספר המשתנים הב"ת שיש במודל ויכול לרדת בהוספת משתנים למודל לכן מתקיים תמיד ש: $\bar{R}^2 < R^2$.
- המדד המתוקנן – $\bar{R}^2$ עדיף על המדד – R^2 בכדי לבחון האם כדאי לנו להוסיף משתנים ב"ת למודל.

זהויות שכדאי לדעת לגבי R^2 :

במודל רגרסיה פשוטה: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ מתקיים:

1. $R^2 = r_{yx}^2$.
2. $r_{yx} = \hat{\beta}\frac{S_x}{S_y}$.
3. $R^2 = \hat{\beta}^2\frac{S_x^2}{S_y^2}$.
4. במודלים: $\begin{matrix} y_i = \alpha_1 + \beta_1 x_i + u_i \\ x_i = \alpha_2 + \beta_2 y_i + \varepsilon_i \end{matrix}$ מתקיים:
   i. הם בעלי אותו R^2 .
   ii. $R^2 = \beta_1 \cdot \beta_2$.

שימו לב:

1. במודל ללא שיפוע: $y_i = \alpha + u_i$, ה- R^2 שווה ל-0 כי אין מקדם הסבר לרגרסיה.
2. במודל ללא חותך: $y_i = \beta x_i + u_i$ אין משמעות ל- R^2 כיוון שלא מתקיימת המשוואה הנורמלית הראשונה: $\sum \hat{u}_i = 0$ ולכן גם $\bar{\hat{y}} \neq \bar{y}$ ולכן גם לא מתקיים: $SST = SSR + SSE$.

מבחן F:

משמש לבדיקת:

1. הגבלות שונות המתקיימות במודל (מבחן WALD).
2. מובהקות מודל הרגרסיה כולו.

מבחן WALD:

לבדיקת השערת אפס שיש בה מספר שוויונים (במבחן t היה רק שוויון אחד בהשערת האפס).

1. אומדים את המודל המקורי – הלא-מוגבל (Unrestricted) ומקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות $\left(\sum e^2_{i\ UR}\right)$.
2. מגדירים את כל השוויונים של השערת האפס.
3. מציבים את השוויונים של השערת האפס במודל המקורי לקבלת המודל המוגבל (Restricted).
4. אומדים את המודל המוגבל ומקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות $\left(\sum e^2_{i\ R}\right)$.
5. חישוב הסטטיסטי: $\dfrac{\left(\sum e^2_{\text{מ}} - \sum e^2_{\text{למ}}\right)/m}{\sum e^2_{\text{למ}}/(n-k)} \sim F_{(m,n-k,1-\alpha)}$.

(כש- m מספר המגבלות ו- k מס' הפרמטרים במודל הלא מוגבל).

- כאשר לשתי הרגרסיות (המוגבלת והלא מוגבלת) אותו משתנה מוסבר ניתן להשתמש גם בנוסחה הבאה: $\dfrac{\left(R^2_{\text{למ}} - R^2_{\text{מ}}\right)/m}{\left(1-R^2_{\text{למ}}\right)/(n-k)} \sim F_{(m,n-k,1-\alpha)}$.

כלל הכרעה לדחיית H_0: $F_{stat} > F_{(m,n-k;1-\alpha)}$.

אם דוחים את H_0 המסקנה היא שהמודל המקורי (הלא-מוגבל) הוא הרלוונטי ולהיפך.

מבחן F למובהקות המודל:

משמש לבדיקה האם מודל הרגרסיה שלנו לניבוי משתנה תלוי מסוים על ידי המשתנים הב"ת, מובהק באוכלוסייה.

השערות: $\begin{array}{l} H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_K = 0 \\ H_1: OTHERWISE \end{array}$.

המודל הלא מוגבל יהיה: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u_t$ U:

המודל המוגבל יהיה: $Y_t = \alpha + u_t$ R:

מאחר ו- $R_{ב}^2=0$ ו- $m=k-1$: $F=\dfrac{\dfrac{R_U^2-R_R^2}{m}}{\dfrac{1-R_U^2}{n-k}}=\dfrac{\dfrac{R_U^2}{k-1}}{\dfrac{1-R_U^2}{n-k}}$.

הערה :
בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה מרובה ניתנת לביצוע רק על ידי מבחן F מאחר ויש יותר ממגבלה אחת בהשערת האפס.
לעומת זאת בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה חד משתנית ניתנת לביצוע גם על ידי מבחן t שכן יש רק מגבלה אחת בהשערת האפס : $F=t^2$.

לסיכום:

1. מתי נשתמש במבחן t ומתי במבחן F?
   - רק t : השערות חד צדדיות (סימן אי שוויון בהשערות).
   - t או F (כאשר : $F=t^2$) : מגבלה אחת (שוויון אחד בלבד) בהשערת האפס.
   - רק F : כאשר יש כמה מגבלות (שוויונים) בהשערת האפס.
2. מצב של סתירה בין מבחן F למבחני t :
   כאשר המודל מובהק אולם אף אחד מהשיפועים לא יוצא מובהק – בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית במודל (מתאמים גבוהים בין המשתנים הב״ת).

שאלות:

R בריבוע:

1) דרגו את המודלים הבאים (לפי קריטריון R^2):

1. $y_i = \alpha + \beta x_{1i} + u_i$ $R^2 = 0.15$.
2. $y_i = \alpha + u_i$.
3. $y_i = \beta x_{1i} + u_i$.
4. $y_i = \alpha + \beta\, x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$.
5. $y_i = \alpha + \beta_2 x_{2i} + u_i$ $R^2 = 0.20$.

2) על סמך מדגם של 100 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:

1. $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}$.
2. $\hat{y}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1i} + \hat{\delta}_2 x_{2i}$ $R^2 = 0.70$.
3. $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_2 x_{2i}$ $R^2 = 0.65$.

א. שלושה חוקרים העלו טענה לגבי מקדם R^2 של משוואה מסי (1):

1. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם R^2 של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.70.
2. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם R^2 של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.65.
3. ניתן לצפות כי R^2 של משוואה (1) יהיה גדול מ-0.70.

בהתייחס לטענות החוקרים ניתן לומר:

i. רק הטענה של חוקר 1 נכונה.
ii. רק הטענה של חוקר 2 נכונה.
iii. רק הטענה של חוקר 3 נכונה.
iv. כל הטענות שגויות.

ב. חוו דעתכם על הטענות הבאות המתייחסות ל- $\bar{R}^2$:

i. ניתן לצפות ש- $\bar{R}^2$ של משוואה (1) יהיה גדול מ-0.7.   נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת
ii. ניתן לצפות כי $\bar{R}^2$ של משוואה (2) יהיה קטן מ-0.7.   נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת
iii. ניתן לצפות כי $\bar{R}^2$ של משוואה (3) יהיה קטן מ-0.7.   נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

3) על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{y}_i = 5 + 2x_{1i} + 2x_{2i}$ $R^2 = 0.77$.
2. $\hat{y}_i = 24 + 0.8x_{1i}$ $R^2 = 0.62$.
3. $\hat{y}_i = 14 + 0.7x_{2i}$ $R^2 = 0.25$.
4. $\hat{y}_i = 4 + 0.5w_i$ $R^2 = 0.30$.
5. $\hat{\ln}(y)_i = 7 + 0.9x_{1i} + 0.6x_{2i}$ $R^2 = 0.45$.
6. $\hat{\ln}(y)_i = 11 + 0.7x_{1i} + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i}$.
7. $\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i}$.

כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i, x_{ji} הינו גילו של הילד j, ונתון כי: $w_i = 2x_{3i} + x_{1i} - x_{2i}$.

דרגו את הרגרסיות לפי קריטריון R^2 (הימני עדיף על השמאלי).

4) נתונות שתי המשוואות הבאות: $y_i = 58 + b_1x_i + e_{1i}$ ו- $x_i = a_2 - 0.2y_i + e_{2i}$,

כאשר: $\bar{y} = \bar{x} = 40$. למה שווה מקדם המתאם של פירסון בין X ל- Y?

א. 0.09.
ב. 0.69.
ג. 0.3.
ד. 0.72.
ה. אף תשובה לא נכונה.

5) נתון מודל רגרסיה: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

הוכיחו כי: $SST = SSR + SSE$.

מבחן F:

6) נאמד המודל: $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ והתקבל כי: $\sum e^2 = 620.1683$ וכי: $R^2 = 0.99$.

הועלתה ההשערה כי ההשפעה על Y של משתנה S היא פי 3 מזו של משתנה Z, וכן כי החותך הוא 5.

א. מהי השערת האפס?

ב. מהו המודל המוגבל שאותו צריך לאמוד?

מאמידת המודל המוגבל התקבל כי: $\sum e^2 = 623.99$ וכי: $R^2 = 0.99$.

ג. חשב את הסטטיסטי של WALD.

ד. כמה דרגות חופש יש במונה וכמה במכנה?

ה. האם דוחים או מקבלים את השערת האפס?

7) במדגם של 82 תצפיות התקבל: $y_i = 12 + 3x_{1i} + 4x_{2i} + e_i$ $R^2 = 0.73$.

א. בחנו את ההשערה כי: $\begin{array}{l} H0: \beta_2 = 0 \\ H1: \beta_2 \neq 0 \end{array}$.

כאשר נתון כי לאחר אמידת המודל המוגבל התקבל כי: $R^2 = 0.6$.

ב. חשבו את $S_{\hat{\beta}_2}$.

8) על מנת לאמוד את פונקציית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה: $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$.

מתוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל התקבל כי: $\sum e^2 = 52968$.

על מנת לבדוק את ההשערה שהנטייה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך ההכנסה זהה לנטייה השולית לצרוך מתוך ההון נאמדה גם המשוואה הבאה: $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot Y_i + u_i$ כאשר: $Y_i =$ סה"כ ההכנסה של משק בית t ($W_i + P_i$).

התקבל: $\sum e^2 = 54156$.

א. בדקו את ההשערה.

ב. חשבו את סטטיסטי t לבדיקת ההשערה.

מבחן F למובהקות המודל:

9) נתון המודל: $y = A \dfrac{x_{1i}^{\beta_1}}{x_{3i}^{\beta_3}} e^{\beta_2 x_2} e^{u_i}$.

באמידת מדגם של 58 נבדקים התקבל: $R^2 = 0.56$.

האם המודל מובהק?

תרגול מסכם:

10) נאמדו חמשת המודלים הבאים על 70 תצפיות:

1. $ESS = 130 \quad I_i = 12 + 0.13 \cdot \exp_i + 0.08 \cdot scl_i + 2 \cdot workh_i + u_i$.
2. $ESS = 150 \quad I_i = 11 + 0.1 \cdot scl + 0.1 \cdot workh_i + u_i$.
3. $ESS = 151 \quad I_i = 9 + 0.22 \cdot scl + u_i$.
4. $ESS = 152 \quad I_i = 15 + 0.15 \cdot workh_i + u_i$.
5. $ESS = 200 \quad I_i = 25 + u_i$.

המשתנה המוסבר הוא הכנסה מעבודה (I) והמשתנים המסבירים שבחנו הם מספר שנות הלימוד (scl), מספר שעות עבודה ($workh$) וותק בעבודה (exp)
הערה: הניחו כי ערך F הקריטי הוא 4.

א. האם לשעות עבודה ($workh$) ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?
ב. האם לשנות לימוד ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?
ג. האם רגרסיה 2 מובהקת? (בחנו האם יש הסבר במודל 2), כיצד זה מסתדר עם תשובתכם ל-א' ו-ב'.
ד. האם השפעת הוותק יכול להיות 0.15?
ה. כלכלן נוסף הציע להריץ את המודל:
$I_i + \exp_i = 2 - 3(scl_i - workh_i) + u_i \ , \ ESS = 145$.
איזו השערה ניתן לבחון באמצעות מודל זה?
כמה דרגות חופש יש לסטטיסטי שנקבל? בחנו אותה.

11) על סמך מדגם של 40 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $y_i = 2 + 3X_{1i} + 4X_{2i} + e_i \quad R^2 = 0.76$.
2. $y_i = 3 + 5D_i + e_i \quad R^2 = 0.60$.
3. $D_i = 0.2X_{1i} + X_{2i}$.

כאשר Y הינו הציון בתואר ראשון, X_1 ציוני הבגרות ו-X_2 ציוני הפסיכומטרי.

א. בדקו את ההשערה כי ציוני הבגרות וציוני הפסיכומטרי ביחד לא משפיעים על ציוני תואר ראשון.
ב. בדקו את ההשערה כי רגרסיה 2 מובהקת.
ג. איזה השערה ניתן לבדוק באמצעות רגרסיה 1 ו-2?

12) על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{y}_i = 5 + 2X_{1i} + 2X_{2i}$ $R^2 = 0.6$.
2. $\hat{y}_i = 11 + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i}$ $R^2 = 0.45$.
3. $\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i}$ $R^2 = 0.78$.

כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i , x_{ji} הינו גילו של הילד j.

חשבו את האומדן לסטיית התקן של המקדם של X_3 ברגרסיה 3.

13) נתון המודל: $y_i = AX_{1i}^{\beta_1} e^{\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}} e^{u_i}$.

א. מהי המשוואה לאמידת המקדמים של המודל?

ב. מה המודל המוגבל עבור ההשערה: $\beta_1 = 2\beta_3$; $\beta_2 = 3\beta_3$.

ג. מהן דרגות החופש במונה ובמכנה?

ד. רשמו את הנוסחה לחישוב סטטיסטי המבחן.

14) המודל הבא מתאר את פונקציית הייצור של מוצר P:

$\ln(P_i) = \alpha + \beta_S \ln(S_i) + \beta_J \ln(J_i) + \varepsilon_i$.

כאשר S ו- J הן שתי התשומות בייצור (S = תשומת ההון ו- J = תשומת העבודה).

מהו המודל המוגבל המתאים לבדיקת ההשערה כי פונקציית הייצור מקיימת תק"ל (תשואה קבועה לגודל)?

תשובות סופיות:

1) $4>5>1=3>2$.

2) א. iii.   ב. i. לא ניתן לדעת.   ii. נכון.   iii. נכון.

3) 7 , 1 , 2 , 4 , 3 ובאופן נפרד : 6 , 5.

4) ג'.

5) הוכחה.

6) א. $H_0: \alpha=5\,,\ \beta_s=3\beta_z$.   ב. $Y_t-5=\beta_x X_t+\beta_z\left(Z_t+3S_t\right)+\beta_w W_t+u_t$.
ג. $F=0.6145$.   ד. מונה: 2 , מכנה : 199.   ה. מקבלים.

7) א. יש עדות לכך.   ב. $S_{\hat{\beta}_2}=0.645$.

8) א. אין עדות לכך.   ב. $t=0.934$.

9) יש עדות לכך.

10) א. אין עדות לכך.   ב. אין עדות לכך.   ג. יש עדות לכך.
ד. כן.   ה. $H0;\ \beta_{\exp}=-1\,;\ \beta_{work}=-\beta_{scl}$.

11) א. יש עדות לכך.   ב. יש עדות לכך.   ג. $\beta_1=0.2\beta_2$.

12) $S.E=0.25$.

13) א. $\ln\left(y_i\right)=\ln\left(A\right)+\beta_1\ln\left(X_{1i}\right)+\beta_2 X_{2i}+\beta_3 X_{3i}+u_i$.
ב. $\ln\left(y_i\right)=\ln\left(A\right)+\beta_3\left(\ln\left(X_{1i}\right)+3X_{2i}+X_{3i}\right)+u_i$.
ג. מונה: $m=2$, מכנה : $n-k=n-4$.
ד. $F=\dfrac{\dfrac{R_U^2-R_R^2}{m}}{\dfrac{1-R_U^2}{n-k}}$.

14) $\ln\left(\dfrac{P_i}{S_i}\right)=\alpha+\beta_J\ln\left(\dfrac{J_i}{S_i}\right)+\varepsilon_i$.

אקונומטריקה א

פרק 7 - שינוי יחידות מדידה

תוכן העניינים

שינוי יחידות מדידה:

רקע:

טרנספורמציה ליניארית: הוספה/החסרה של קבוע ו/או הכפלה/חילוק של קבוע של אחד או שני המשתנים (התלוי והב"ת).

- טרנספורמציה ליניארית של המשתנים לא תשפיע על: R^2, F, $t_{\hat{\beta}}$ ו- PF.

השינויים מסוכמים בטבלה הבאה:

$S\hat{\alpha}$	$S_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}'$	$\hat{\beta}'$	
$s_{\hat{\alpha}'} \neq s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = s_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} - \hat{\beta}d$	$\hat{\beta}' = \hat{\beta}$	**הוספת קבוע ל- X:** $Y = \alpha' + \beta'(X+d) + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = s_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} + d$	$\hat{\beta}' = \hat{\beta}$	**הוספת קבוע ל- Y:** $Y + d = \alpha' + \beta' X + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = \frac{s_{\hat{\beta}}}{d}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}$	$\hat{\beta}' = \frac{\hat{\beta}}{d}$	**הכפלת X פי קבוע:** $Y = \alpha' + \beta'(dX) + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = ds_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = ds_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = d\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}' = d\hat{\beta}$	**הכפלת Y פי קבוע:** $dY = \alpha' + \beta' X + v$

- $t_{(\hat{\beta}'=0)} = t_{(\hat{\beta}=0)}$ תמיד.
- $t_{(\hat{\alpha}'=0)} = t_{(\hat{\alpha}=0)}$ רק בהכפלות.

שאלות:

1) חוקר ביקש לאמוד את הקשר בין שכר ב-₪ (*MWAGE*) לבין שנות לימוד (*SCL*) באמצעות 2 מודלים שונים.
להלן תוצאות האמידה:

א. $MWAGE_t = 139.54 + 118.62 \cdot SCL_t$.

ב. $MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN\left(SCL\right)_t$.

חשבו מחדש את מקדמי הרגרסיה וסטטיסטי המבחן F בכל אחד מהמודלים כתוצאה:

1. התברר כי נעשה טעות בחישוב מספר שנות הלימוד, ויש צורך להוסיף 20% למשתנה המקורי.
2. התברר כי הקשר בין שכר לשנות לימוד הוא ריבועי ולכן יש צורך להעלות את המשתנה המקורי של מספר שנות הלימוד בריבוע.

2) בהמשך לנתוני השאלה לדוגמא מהפרק החמישי:
החוקר טען כי יש לבדוק את הקשר בין שכר לוותק ע״י שימוש בשכר נטו (*NET*) ולא בשכר ברוטו (*SALARY*). (קיים שיעור מס קבוע של 20%).
המודל הוא: $\ln\left(NET_t\right) = \alpha' + \beta' \cdot EXP_t + v_t$.
מה יהיו ערכי האומדים, סטיות התקן שלהם וטיב ההתאמה באמידת מודל זה?

תשובות סופיות:

1) 1. א. $\hat{\alpha}' = \alpha = 139.59$, $\hat{\beta}' = 98.85$, סטטיסטי F לא משתנה.
ב. $\hat{\alpha}' = -1671$, $\hat{\beta}' = 1239.6$, סטטיסטי F לא משתנה.
2. לא ניתן לדעת.

2) $S_{\hat{\alpha}'} = S_{\hat{\alpha}} = 0.0688935$, $S_{\hat{\beta}'} = S_{\hat{\beta}} = 0.0026235$, $\hat{\alpha}' = 7.11161$, $\hat{\beta}' = \hat{\beta} = -0.00874$,
$R^2 = 0.0269$.

אקונומטריקה א

פרק 8 - מבחן 1 ללא פלטים

תוכן העניינים

מבחן 1 ללא פלטים:

שאלות:

לשם חישובים הנח כי ערך t הינו 2 וערך F הינו 4.

1) הנח כי הקשר באוכ׳ בין X ל-Y נתון על ידי המשוואה הבאה: $Y_t = \beta \cdot X_t + U_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{S_{XX}}$.

א. האם האומד ליניארי?

ב. האם האומד חסר הטיה?

ג. אומד זה יעיל פחות מאומד הריבועים הפחותים. נכון/ לא נכון/ אי אפשר לדעת

ד. האם אומד זה הוא blue?

ה. אומד $\tilde{\beta}$ מוגדר רק כאשר $S_X^2 \neq 0$. נכון/ לא נכון/ אי אפשר לדעת

ו. חשבו את השונות של $\tilde{\beta}$ עבור מודל שבו $\alpha \neq 0$.

ז. שונות האומד (שחושבה בסעיף הקודם) הינה גדולה משונות המודל הנתון. נכון/לא נכון/ אי אפשר לדעת

2) על סמך מדגם של 60 משפחות שלכל אחת 3 ילדים נאמדו המשוואות הבאות:

1. $y_i = 15 + 0.7x_{1i} + 0.35x_{2i} + 0.20x_{3i}$ $\quad R^2 = 0.85$.

2. $y_i = 2 + 0.1z_i$ $\quad R^2 = 0.25$.

3. $z_i = x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i}$.

כאשר y_i הינן הוצאות משק הבית על חינוך הילדים ואילו x_{ji} הינו גילו של הילד j.

א. ההשערה שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות הינה:

i. $HO: \beta_1 = \beta_2; \beta_1 = 2\beta_3$.

ii. $HO: \beta_1 = -\beta_2 = 2\beta_3$.

iii. $HO: \beta_2 = -\beta_1; \beta_3 = 2\beta_1$.

iv. לא ניתן לדעת.

ב. סטטיסטי המבחן שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות שווה בקירוב ל:

i. 56.

ii. 57.

iii. 112.

iv. 74.66.

3) כלכלן הציע את המודלים הבאים:

1. $y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(0.5x_i) + u_i$.
2. $y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(x_i^{0.5}) + u_i$.

האם ניתן לאמוד את המודלים בשיטת OLS?

א. אין בעיה לאמוד את שני המודלים.
ב. לא ניתן לאמוד את המודל הראשון בלבד.
ג. לא ניתן לאמוד את המודל השני בלבד.
ד. לא ניתן לאמוד את שני המודלים.

4) כלכלן אמד את המודל הבא: $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x_i) + u_i$,

וקיבל את האומדנים: $\hat{\alpha}_0 = 10$ ו- $\hat{\alpha}_1 = 6$.

על אותו המדגם אמד חברו את המודל הבא: $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i^2) + u_i$.

מכאן ש:

א. $\hat{\beta}_0 = 5$ ו- $\hat{\beta}_1 = 3$.
ב. $\hat{\beta}_0 = 10$ ו- $\hat{\beta}_1 = 3$.
ג. $\hat{\beta}_0 = 5$ ו- $\hat{\beta}_1 = 6$.
ד. כל התשובות שגויות.

5) על סמך מדגם של 95 תצפיות נאמד המודל הבא:

$$y_i = 2 + \underset{(2)}{0.5}x_{1i} + \underset{(1)}{0.3}x_{2i} \qquad R^2 = 0.73.$$

הערכים שבסוגריים הם סטיות התקן של המקדמים.

א. בדוק האם המודל מובהק.
ב. בדוק האם מקדמי השיפוע מובהקים.
ג. מה תוכל להסיק מסעיפים א ו-ב?

6) על סמך מדגם של 52 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $y_i = 4 + 0.1x_{1i} + 0.8x_{2i} \qquad R^2 = 0.84$.
2. $y_i = 2 + 0.8x_{1i} \qquad R^2 = 0.7$.
3. $y_i = 7 + 0.23x_{2i} \qquad R^2 = 0.25$.
4. $y_i = 3 + 0.23z_i \qquad R^2 = 0.55$.

כאשר x_{1i} ו- x_{2i} הם השכלת הבעל והאישה בהתאמה במשפחה i ו- y_i הכנסת משק בית i. כמו כן נתון כי: $z_i = x_{1i} + 2.2x_{2i}$.

א. בדוק את ההשערה כי להשכלה אין השפעה על הכנסות המשפחה
ב. איזה השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (1) ו-(4)? בדוק אותה.
ג. חשב את סטית התקן של המקדם x_{1i} ברגרסיה (1).

7) חוקר מעוניין לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + u_i$.
א. חשב את נוסחת אומד הריבועים הפחותים ל- α על ידי פתרון בעיית המינימיזציה של סכום ריבועי הסטיות.
ב. חשב את נוסחת שונותו של האומד.

8) על סמך מדגם של 45 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:
1. $y_i = 5.4 + 1.2x_{2i} + 4.4x_{3i} + u_i \quad R^2 = 0.75$.
2. $y_i = 6.3 + 5.8x_{3i} + u_i \quad R^2 = 0.65$.
3. $y_i = 5.7 + 1.2x_{2i} + u_i \quad R^2 = 0.70$.
4. $y_i = 3.9 + 3.4\ln(x_{2i}) + u_i \quad R^2 = 0.56$.
5. $\ln(y_i) = 2.4 + 1.8x_{2i} + 2.7x_{3i}^2 + 4.2x_{4i}^2 + u_i$.
6. $y_i = 1.3 + 3.1x_{2i} + 0.5x_{3i} + 4.8x_{4i}^2 + 1.5x_{5i}^2 + u_i$.

א. דרג את הרגרסיות על פי מדד ההסבר (מהנמוך לגבוה)
ב. בדוק את ההשערות של משתנים X_2 ו- X_3 ביחד אין השפעה על Y במודל (1).
ג. בדוק בהסתמך על מודל (2) האם המשתנה X_2 מובהק ברגרסיה (1).
ד. ברגרסיה (1) נתונים כעת אומדי הטעויות הסטנדרטיות (סטיות התקן) של מקדמי X_2 ו- X_3 0.5 ו-2.5 בהתאמה. בדוק עבור כל אחד מהמקדמים הנ"ל האם מובהק ומה אפשר ללמוד מרגרסיה (1).
ה. איזו השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (6) ו-(3)?

תשובות סופיות:

1) א. לינארי. ב. מוטה. ג. אי אפשר לדעת. ד. לא.
ה. נכון. ו. $V\left(\tilde{\beta}\right)=\frac{n\sigma^2}{S^2{}_{XX}}$. ז. לא נכון.

2) א. iii. ב. iii.

3) ד'.

4) ב'.

5) א. מובהק. ב. לא מובהקים. ג. קיימת בעיה מולטיקולינאריות חלקית.

6) א. מובהק. ב. $\beta_2=2.2\beta_1$. ג. $S.E=0.00743$.

7) ראה סרטון.

8) א. $4>2>3>1>6$. ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך.
ד. X_2 מובהק, X_3 אינו מובהק. ה. $HO:\beta_2=\beta_4=\beta_5=0$.

אקונומטריקה א

פרק 9 - מבחן 2 ללא פלטים

תוכן העניינים

מבחן 2 ללא פלטים:

שאלות:

אם לא נאמר אחרת בנתוני השאלה, התבסס על ההנחות הבאות:

1. ערך t קריטי הוא 2.
2. ערך F קריטי הוא 4.

1) הנח כי הקשר באוכלוסייה בין X לבין Y נתון ע"י המשוואה הבאה: $\sqrt{y_i} = \beta \ln(x_i) + u_i$.

נתון גם כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

כלכלן הציע את האומד הבא עבור β: $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{y_i}\ln(x_i)}{\sum \ln(x_i)^2}$.

א. מהי הטענה הנכונה:

i. האומד חסר הטיה ובעל שונות מינימאלית.

ii. האומד מוטה.

iii. האומד לא ליניארי.

iv. האומד מוטה אך יש לו שונות נמוכה מאומד OLS.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. שונות האומד הוא:

i. $\frac{\sigma^2}{\sum [\ln(x_i)]^2}$.

ii. $\sigma^2 \sum (\frac{\sqrt{y_i}}{\ln(x_i)})^2$.

iii. $\frac{\sigma^2}{\sum \ln(x_i)}$.

iv. לא ניתן לחשב את האומד שכן הוא לא ליניארי.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ג. מה בהכרח מתקיים עבור אומד זה:

.i $\sum_{i=1}^{n}[\frac{\ln(x_i)}{\sum[\ln(x_i)]^2}\times\ln(x_i)]=1$.

.ii $\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i)}{\sum[\ln(x_i)]^2}=0$.

.iii $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum\ln(x_i)^2}=1$.

.iv $\sum_{i=1}^{n}[\frac{\ln(x_i)}{\sum\ln(x_i)^2}\times\ln(x_i)]=0$.

.v כל התשובות האחרות אינן נכונות.

2) נתונים שני מודלים:

.1 $\ln(y_i)=\alpha+\beta_1\ln(x_i)+\beta_2\ln(x_i{}^2)+u_i$.

.2 $y_i=\alpha+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i{}^2+u_i$.

להלן שלוש טענות:

1. במודל 1 יש מולטיקולינאריות מושלמת ולכן הוא לא ניתן לאמידה בשיטת OLS.
2. במודל 2 יש מולטיקולינאריות מושלמת ולכן הוא לא ניתן לאמידה בשיטת OLS.
3. במודל 1 יש מולטיקולינאריות חלקית ולכן הוא ניתן לאמידה בשיטת OLS.

א. רק טענה 1 נכונה.

ב. רק טענה 2 נכונה.

ג. רק טענות 2 ו-3 נכונות.

ד. רק טענה 3 נכונה.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

3) אסף הוא כלכלן צעיר שמתעניין מאוד בביתר ירושלים. לאור אכזבות חוזרות ונשנות להבאת שחקנים טובים. החליט אסף לפנות למאמן הקבוצה ולהסביר לו את הפרמטרים החשובים לשחקן כדורגל.

אסף הריץ את הרגרסיה הבאה: $\hat{y}_i=\alpha+\beta_1\cdot x_{1i}+\beta_2\cdot x_{2i}+\beta_3\cdot x_{3i}$ על סמך 500 תצפיות וקיבל את התוצאות הבאות:

$\hat{y}_i=10+2\cdot x_{1i}+1.5\cdot x_{2i}+2.5\cdot x_{3i}$,

$S^2{}_u=10$ $S_{\hat{\alpha}}=3$, $S_{\hat{\beta}1}=0.5$, $S_{\hat{\beta}2}=0.75$, $S_{\hat{\beta}3}=1$,

$\text{cov}(\beta_3,\beta_2)=-3$, $\text{cov}(\beta_1,\beta_3)=1$, $\text{cov}(\beta_1,\beta_2)=-0.6$.

כאשר:

y - טיב השחקן (על סמך דירוג הפרשנים).

x_{1i} - מהירות השחקן.

x_{2i} - קשיחות השחקן.

x_{3i} - הרמה הטכנית של השחקן.

א. מהו רווח בר סמך ל- β_1 והאם היא מובהקת?

i. $[1,3]$, לכן ה- β_1 מובהקת.

ii. $[1.5,2.5]$, לכן ה- β_1 מובהקת.

iii. $[1,3]$, לכן ה- β_1 לא מובהקת.

iv. $[1.5,2.5]$, לכן ה- β_1 לא מובהקת.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. המאמן טוען כי השפעת הרמה הטכנית על טיב השחקן היא כפולה מזו של הקשיחות. T סטטיסטי לבחינת ההשערה הוא (מעוגל ובערך מוחלט):

i. 0.128.

ii. 1.255.

iii. 0.125.

iv. 0.156.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

4) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{Y}_i = 2+4X_{1i}+2X_{2i}{}^2-4X_{3i}$ $\quad R^2=0.70$.

2. $\hat{Y}_i = 4+5X_{1i}-2X_{3i}$ $\quad R^2=0.65$.

3. $\hat{X}_{2i} = 3+5.2Y_i$ $\quad R^2=0.40$.

4. $\hat{Y}_i = 5+2X_{1i}-1.2X_{2i}$.

מה ניתן לדעת על R^2 ברגרסיה (4)?

א. $R^2 > 0.4$.

ב. לא ניתן לדעת.

ג. $R^2 > 0.65$.

ד. $R^2 < 0.7$.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

5) על סמך מדגם בגודל 30 תצפיות אמדו יצחק וטל את המודל הבא: $Y_i = \beta \cdot X_i + u_i$ והתקבל: $\hat{Y}_i = 3X_i$ $R^2 = 0.75$.
כעת הגיע מנדי (כלכלן חדש) והציע את המודל הבא: $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i^2 + u_i$.
מה ניתן להסיק על R^2 של המודל החדש על סמך R^2 של המודל המקורי?
א. לא ניתן להסיק על R^2 של המודל החדש על סמך R^2 של המודל המקורי.
ב. $R^2 > 0.75$.
ג. $R^2 = 0.75$.
ד. $R^2 < 0.75$.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

6) ערן החליט לבדוק את אהבת הסטודנטים לאקונומטריקה א'. לכן הריץ רגרסיה בה בדק השפעת שעות הלימוד של הסטודנט על הציון בבחינה.
ערן החליט לאמוד את המודל הבא: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.
לשם כך ערן אסף 51 תצפיות והריץ רגרסיה.
התוצאות אשר קיבל הן: $\hat{\alpha} = 1, \ \hat{\beta} = 5$.
מספר סטודנטים קטני אמונה, טענו כי ההשפעה של שעת לימוד על הציון צריכה להיות 3 (ולא יותר). הם בדקו זאת ע"י בחינת T סטטיסטי וקיבלו $T = 1$.
כמו כן ידוע כי השונות של X היא 10. מכאן סכום הטעויות בריבוע הינו:
א. 98,000.
ב. 49,000.
ג. 24,500.
ד. אין מספיק נתונים כדי לפתור את השאלה.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

7) נתון המודל הבא: $y_i = \beta_1 \cdot x_{1i} + \beta_2 \cdot x_{2i} + u_i$ במודל זה בהכרח מתקיים:
א. $\sum (x_{1i} + x_{2i}) e_i = 0$.
ב. $\sum (1 + x_{1i} + x_{2i}) e_i = 0$.
ג. $\sum (1 + x_{1i}) e_i = 0$.
ד. $\sum e_i = 0$.
ה. כל התשובות האחרות לא נכונות.

8) נתון המודל: $Y_i = AX_{1i}^{\beta_1} X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{\beta_4 X_{4i}^3} X_{5i} e^{u_i}$ שהורץ על המדגם בן 45 תצפיות.
מהי המשוואה לאמידת המקדמים של המודל?

א. $\ln(\frac{y_i}{x_5}) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 \ln(x_{3i}) + \beta_4 X_{4i}^3 + u_i$.

ב. $\ln(\frac{y_i}{K5}) = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + 3x_{4i} + u_i$.

ג. $\ln(y_i) - \ln(x_{5i}) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + u_i$.

ד. $\ln(\frac{y_i}{x_5}) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 \ln(x_{3i}) + \beta_4 \ln(X_{4i}^3) + u_i$.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

9) נתון המודל: $Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$.

א. מהו המודל המוגבל עבור ההשערה: $\beta_1 = \beta_2 + 1 , \beta_3 = 2$?

i. $Y_i - x_{1i} - 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i}) + u_i$.

ii. $Y_i - x_{1i} + 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i}) + u_i$.

iii. $Y_i - 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i} + 1) + u_i$.

iv. $Y_i + 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i} + 1) + u_i$.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. מהו סטטיסטי המבחן?

i. רק מבחן $\frac{\left(\sum e^2_{\text{מ}} - _{\text{מל}}\sum e^2\right)/m}{\sum e^2_{\text{מ}} /_{\text{ל}}(n-k)}$.

ii. רק מבחן $\frac{R^2/(k-1)}{\left(1-R^2\right)/\left(n-k\right)}$.

iii. רק מבחן $\frac{\left(R^2_{\text{מ}} - _{\text{מ}}R^2\right)/_{\text{ל}}\, m}{\left(1-R^2_{\text{מ}}\right)/_{\text{ל}}(n-k)}$.

iv. מבחנים $\frac{\left(R^2_{\text{מ}} - _{\text{מ}}R^2\right)/_{\text{ל}}\, m}{\left(1-R^2_{\text{מ}}\right)/_{\text{ל}}(n-k)}$ או $\frac{\left(\sum e^2_{\text{מ}} - _{\text{מל}}\sum e^2\right)/m}{\sum e^2_{\text{מ}} /_{\text{ל}}(n-k)}$.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

10) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{Y}_i = 3 + 45.X_{1i} + 5X_{2i}$, $R^2 = 0.65$.
2. $\hat{Y}_i = 5.2X_{1i}$, $R^2 = 0.30$.
3. $\hat{Y}_i = 4.5 + 5.9X_{1i}$, $R^2 = 0.40$.

בדוק את ההשערה שהשפעת המשתנה X_2 מובהקת ברגרסיה (1), ומהו סטיית התקן של β_2.

א. מובהקת. וסטיית התקן של β_2 היא 0.86 (בקירוב).
ב. אינה מובהקת. וסטיית התקן של β_2 היא 0.72 (בקירוב).
ג. אינה מובהקת. וסטיית התקן של β_2 היא 0.86 (בקירוב).
ד. מובהקת. וסטיית התקן של β_2 היא 0.72 (בקירוב).
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

11) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{Y}_i = 3 + 3X_{1i} + 5X_{2i} + 2X_{3i}$.
2. $\hat{Y}_i = 9.3 + 0.6W_i$.

נתון גם כי: $W_i = X_{1i} - 2X_{2i} + X_{3i}$.
איזו השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (1) ו-(2)?

א. ברגרסיה (1) $\beta_1 = \beta_3 = -0.5\beta_2$.
ב. ברגרסיה (1) $\beta_1 = \beta_3 = 0.5\beta_2$.
ג. ברגרסיה (1) $\beta_1 = \beta_3 = 2\beta_2$.
ד. ברגרסיה (1) $\beta_1 = \beta_3 = \beta_2$.
ה. כל התשובות האחרות לא נכונות.

תשובות סופיות:

1) א. i. ב. ii. ג. i.
2) א'.
3) א. i. ב. i.
4) א'.
5) א'.
6) א'.
7) א'.
8) א'.
9) א. i ב. i.
10) א'.
11) א'.

אקונומטריקה א

פרק 10 - פיתרון מבחן סמסטר א מועד ב 6.3.2017

תוכן העניינים

מבחן 3 ללא פלטים:

שאלות:

לשם חישובים הנח כי ערך t הינו 2 וערך F הינו 4.

1) הקשר באוכלוסייה בין X ל-Y מוגדר על ידי המודל הבא: $Y_t^2 = \alpha + X_{1t}^2 + \beta \ln X_{2t} + u_t$.
נתון כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
אומדים את המקדם β לפי הנוסחה: $\hat{\beta} = \dfrac{\sum (Y_t^2 - X_{1t}^2)\ln X_{2t}}{\sum (\ln X_{2t})^2}$.

א. האומד ליניארי אבל מוטה.
ב. האומד לא ליניארי ומוטה.
ג. האומד ליניארי וחסר הטיה.
ד. האומד לא ליניארי אך חסר הטיה.
ה. כל התשובו האחרות אינן נכונות.

2) שונות האומד הנ"ל הינה:

א. $\dfrac{\sigma^2 (\ln X_{2t})}{\sum (\ln X_{2t})^2}$.
ב. $\dfrac{\sigma^2}{4X_t^2}$.
ג. $\dfrac{\sigma^2}{\sum (\ln X_{2t})^2}$.
ד. $\sigma^2 \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{1}{X_t^2}$.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

3) נתון המודל הבא: $Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$, נתון בנוסף כי מקדם המתאם בין שני המשתנים הבלתי תלויים הינו מושלם ($\rho_{12} = 1$). להלן 3 טענות:

1. בהכרח קיימת מולטיקוליניאריות מושלמת במודל.
2. ייתכן כי ברגרסיה אין מולטיקוליניאריות מושלמת.
3. אם היה חותך במודל, בהכרח לא ניתן היה לאמוד את המודל.

מכאן ש:

א. רק טענות 1 ו-3 נכונות.
ב. רק טענה 2 נכונה.
ג. רק טענה 3 נכונה.

ד. כל התשובות האחרות אינן נכונות.
ה. רק טענות 2 ו-3 נכונות.

4) נאמד המודל הבא: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + u_t$. ידוע כי במדגם: $\hat{\alpha} = 2, \hat{\beta} = 0.5$, $SSY = SSX$.
מכאן ניתן להסיק כי R^2 של המודל הוא:
א. 0.5.
ב. 0.25.
ג. 1.
ד. 0.75.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

5) נאמד המודל הבא: $Y_t = \beta X_t + u_t$.
אם מתקיים: $E(u_t) \neq 0$ ומלבד זאת כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות. אזי:
א. $\hat{\beta}$ יהיה חסר הטיה.
ב. $\sum X_t \hat{u}_t < 0$.
ג. $\sum X_t \hat{u}_t > 0$.
ד. $\hat{\beta}$ יהיה מוטה.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

6) נתון המודל הבא: $Y_t = \alpha + \beta_1 \ln(x_t^2) + \beta_2 \ln(2x_t) + u_t$.
א. יש במודל מולטיקוליניאריות מ ושלמת ולכן לא ניתן לאמוד את המודל.
ב. אין במודל מולטיקוליניאריות מושלמת ולכן ניתן לאמוד את המודל.
ג. יש במודל מולטיקוליניאריות מושלמת אבל ניתן לאמוד את המודל.
ד. יתכן ויש במודל מולטיקוליניאריות חלקית ולכן לא ניתן לאמוד את המודל.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

7) הנח כי הקשר באוכלוסייה בין X ל-Y נתון על ידי המודל הבא: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + u_t$.
אומד OLS במודל ל-β יהיה:
א. עם שונות קטנה יותר ככל ששונות ההפרעות (Ui) באוכלוסייה תהיה גדולה יותר.
ב. עם שונות קטנה יותר ככל ששונות Y במדגם תהיה גדולה יותר.
ג. עם שונות קטנה יותר ככל ששונות X במדגם תהיה גדולה יותר.
ד. עם שונות גדולה יותר ככל ששונות X במדגם תהיה גדולה יותר.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

8) סטודנט אמד מודל מסוים וקיבל את התוצאות הבאות :

$\hat{Y}_i = 2 - 3\ln X_{1i} + 2X_{2i} + 6X_{2i} \cdot X_{1i}$.

מה יכול להיות המודל אותו אמד הסטודנט :

א. $Y_i = AX_{1i}^{\beta_1}(X_{1i} \cdot X_{2i})^{\beta_3} e^{\beta_2 X_{1i} + u_i}$.

ב. $Y_i = X_{1i}^{\beta_1}(X_{1i} \cdot X_{2i})^{\beta_3} e^{\beta_2 X_{1i} + u_i}$.

ג. $e^{Y_i} = X_{1i}^{\beta_1} e^{\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{1i} \cdot X_{2i} + u_i}$.

ד. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ה. $e^{Y_i} = AX_{1i}^{\beta_1} e^{\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{1i} \cdot X_{2i} + u_i}$.

9) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות :

1. $\hat{Y}_i = 2 + 4X_{1i} + 2X_{2i} - 4X_{3i}$.
2. $\hat{Y}_i = 5 + 2X_{1i} - 1.2X_{2i}$.
3. $\hat{Y}_i = 5 + 4\ln(X_{1i}) + 12X_{2i} + 3X_{3i} + 2X_{4i}$.
4. $\hat{Y}_i = 5 + 2X_{4i} - 1.2X_{2i}$.

מה מתקיים בהכרח :

א. R בריבוע של משוואה 3 גדול מ-R בריבוע של משוואה 1.

ב. R בריבוע של משוואה 3 גדול מ-R בריבוע של משוואה 4.

ג. R בריבוע של משוואה 3 גדול מ-R בריבוע של משוואה 2.

ד. R בריבוע של משוואה 2 גדול מ-R בריבוע של משוואה 4.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

10) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות :

1. $ESS = 200 \quad \hat{Y}_i = 4 + 2.8X_{1i} + 2X_{2i}$.
2. $ESS = 320 \quad \hat{Y}_i = 2 + 2.5X_{2i}$.

ידוע כי R בריבוע של משוואה 1 הוא 0.75. מה הוא R בריבוע של משוואה 2?

א. 0.7.

ב. 0.5.

ג. 0.4.

ד. 0.6.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

11) על סמך מדגם של 43 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

1. $\hat{Y}_i = 1.8 + 3.4X_{1i} + 0.9X_{2i}$.
2. $\hat{Y}_i = 3.3 + 3.2X_{1i} + 2.4X_{3i}$ $R^2 = 0.8$.
3. $X_{1i} = 2.7 + 3Y_i$ $R^2 = 0.6$.

על פי נתונים אלו ניתן להסיק כי:

א. מדד טיב הרגרסיה ברגרסיה (1) בהכרח גדול מ-0.6.
ב. מדד טיב הרגרסיה ברגרסיה (1) בהכרח גדול מ-0.8.
ג. מדד טיב הרגרסיה ברגרסיה (1) בהכרח קטן מ-0.8.
ד. מדד טיב הרגרסיה ברגרסיה (1) בהכרח קטן מ-0.6.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

12) נתון המודל הבא: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + u_t$.

כלכלן א' אמד את β על ידי האומד הבא: $\frac{Y_{10} - Y_1}{2X_{10} - 2X_1}$.

כלכלן ב' אמד את β על ידי האומד הבא: $\frac{Y_{10} - Y_1}{X_{10} - X_1}$.

א. האומדנים של שני הכלכלנים הינם חסרי הטיה.
ב. אין הבדל בין שני האומדנים כי שני האומדנים הינם אומדנים ליניאריים.
ג. לאומדן של כלכלן א' יש שונות נמוכה יותר.
ד. האומדנים של שני הכלכלנים הינם מוטים.
ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

13) נתון המודל: $Y_i = \alpha + \beta_1 \ln(X_{1i}) + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$.

מהו סטטיסטי המבחן עבור בחינת ההשערה הבאה: $\beta_3 = 0, \beta_1 = \beta_2$?

א. רק מבחן: $\frac{R^2/(k-1)}{1-R^2/(n-k)}$.
ב. רק מבחן: $\frac{(R^2_{\text{מ}} - R^2_{\text{ל}})/m}{(1-R_{\text{מ}})/(n-k)}$.
ג. רק מבחן: $\frac{(\sum e_n^2 - \sum e_{\text{מ}}^2)/m}{\sum e_{\text{מ}}^2/(n-k)}$.
ד. כל התשובות האחרות אינן נכונות.
ה. מבחנים: $\frac{(R^2_{\text{מ}} - R^2_{\text{ל}})/m}{(1-R_{\text{מ}})/(n-k)}$ או $\frac{(\sum e_n^2 - \sum e_{\text{מ}}^2)/m}{\sum e_{\text{מ}}^2/(n-k)}$.

14) נתון המודל הבא: $\ln Y_i = \alpha + \beta_1 \ln(X_{1i}) + \beta_2 \ln(X_{2i}) + \beta_3 X_{3i} + u_i$.
מה המודל המוגבל עבור ההשערה: $\beta_1 = -\beta_3, \beta_2 = -1$.

א. $\ln(Y_i + X_{2i}) = \alpha + \beta_1(\ln(X_{1i}) - X_{3i}) + u_i$.

ב. $\ln(Y_i \cdot X_{2i}) = \alpha + \beta_1(\ln(X_{1i}) - X_{3i}) + u_i$.

ג. $\ln Y_i + X_{2i} = \alpha + \beta_1 \ln(X_{1i}) + \beta_3 X_{3i} + u_i$.

ד. $\ln Y_i + X_{3i} = \alpha + \beta_1[\ln(X_{1i}) - \ln(X_{2i}] + u_i$.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

תשובות סופיות:

1) א'.
2) ג'.
3) ה.
4) ב'.
5) ד'.
6) א'.
7) ג'.
8) ה.
9) ב'.
10) ד'.
11) א'.
12) ג'.
13) ה.
14) ב'.