

# אנליזת פורייה



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1. טורי פורייה ..... 1
9. התמרת פורייה ..... 9

# אנליזת פורייה

פרק 1 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשל ..... 1
3. טור פורייה מרוכב ..... 2
4. משפט פרסבל ..... 3
5. משפט דיריכלה ..... 6
6. המשכה זוגית ואי זוגית ..... 8

## טור פורייה ממשי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \sin(|x|)$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

## טור פורייה מרוכב:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

### תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

## משפט פרסבל:

### שאלות:

(1) באמצעות טור הפורייה  $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$ , חשבו את הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

(2) נתון כי טור הפורייה הממשי של  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

הינו  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$ . הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

(3) נתונות הפונקציות  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$  ו- $g(x) = x$ .

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

(4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$  ובאמצעותו

חשבו את הסכום  $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

(5) נתונות הפונקציות  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$  ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$ ,  $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$ .

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור  $2\pi$  :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע  $-3\pi < x < 3\pi$ .  
 ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ .

(7) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[-\pi, \pi]$  על ידי הנוסחה:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$

חשבו  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$ .

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

כאשר  $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$  ובשוויון פרסבל כדי לחשב  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.}$$

(6) א. ראו סרטון.

$$\approx 0.769 \quad \text{ג.}$$

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א. (10)}$$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

## משפט דיריכלה:

### שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  לטור פורייה

$$. x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \text{ ממשי}$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \text{ היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח}$$

$$. x = \frac{\pi}{2} \text{ רמז: הציבו}$$

$$(2) \text{ נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi : f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ ג. הוכיחו כי}$$

(3) במרחב הפונקציות  $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $f(x)$ .

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ ב. חשבו את הטור}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ ג. חשבו את הטור}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ד. חשבו את הטור}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \cos(ax)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $a$

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$. \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right] \text{ א.}$$

$$. \cot(\pi \alpha) = \frac{1}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha + \pi n} + \frac{1}{\pi \alpha - \pi n} \text{ ב.}$$

**תשובות סופיות:**

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ג. הוכחה.      ב.  $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$

(3) א.  $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$       ב.  $\frac{\pi^4}{90}$       ג.  $\frac{\pi^2}{-12}$       ד.  $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה.      ב. הוכחה.

## המשכה זוגית ואי זוגית:

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור קוסינוסים:  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  והוכיחו כי לכל  $0 < x < \pi$

$$.x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = 1$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור סינוסים:  $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ א. לכל}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

# אנליזת פורייה

## פרק 2 - התמרת פורייה

### תוכן העניינים

9	1. מבוא כללי
11	2. נוסחת כיווץ והזזה
13	3. נוסחת הנגזרת
14	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
16	5. נוסחת המומנט
18	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
19	8. משפט פלנשראל
20	9. משפט הקונבולוציה
24	10. תרגילים מסכמים

## מבוא כללי:

### שאלות:

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (1)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (3)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (4)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של} \quad (5)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (6)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (7)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (8)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega} \quad \text{הינה} \quad f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של} \quad (9)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (10)$$

$$\cdot a > 0 \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (11)$$

$$\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{האם קיימת} \quad f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \quad \text{כך ש-} \quad (12)$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

## נוסחת כיווץ והזזה:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  כאשר  $r > 0$ .

(2) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$  על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה  $g(x) \in G(\mathbb{R})$  בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)$ .

מצאו פונקציה  $f(x)$  (כתלות ב- $g(x)$ ) בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)\cos(\omega)$ .

(4) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-ax^2}$  כאשר  $a > 0$ .

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ .

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

## נוסחת הנגזרת:

### שאלות:

(1) נניח כי  $f(x) \in G$  גזירה, מקיימת  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f'(x) \in G$  ו-  $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$ . מצאו התמרת פורייה של  $f'(x)\cos(2x)$ .

(2) יהי  $a$  ממשי כלשהו. הוכיחו כי  $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left( -\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$ . רמז:  $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

### תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

## נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

### שאלות:

$$(1) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$$

$$(2) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה} \\ \text{כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(5) \text{ מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה} \\ \text{ובעובדה כי } F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$(6) \text{ נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \text{ מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$$

$$(8) \text{ תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א.  $H(x)e^{-ax}$  כאשר  $a > 0$

ב.  $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$  כאשר  $a, b > 0$

ג.  $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$  כאשר  $a, b > 0$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[ \frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[ e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

## נוסחת המומנט:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי  $f(\omega)$  גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של  $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה היא  $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$  מתבדר.

## תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

## נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

## משפט פלנשראלי:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$  עבור  $a > 0$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$  עבור  $a, b > 0$ .

(2) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$ . תוכלו להיעזר בעובדה:  $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$ .

(3) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$  כך ש-  $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$ .

### תשובות סופיות:

א.  $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$ . ב.  $\pi \cdot \min\{a, b\}$ .

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$ .

תזכורת:  $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים  $x > 0$  ו- $x \leq 0$ .

(3) מצאו פונקציה  $f \in G$  כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- $E$  את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים  $f(t)$

המקיימות  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  וגם  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

מצאו פונקציה  $g(x)$  כך שלכל  $f(t) \in E$  מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר  $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ . מצאו את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .

תזכורת:  $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $(1+|x|)e^{-|x|}$ .

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .

ב. הוכיחו כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$ .

(8) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ .

(9) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$ .

(10) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$ .

(11) חשבו את הקונבולוציה  $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$ .

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$ .

(13) נניח כי  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$ .

## תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות  $h(y)$  המקיימות  $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$

(3) יהי  $A > 0$  קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה  $g(x) \in G$  המקיימת  $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$ . מצאו במפורש את  $g(x)$ .

(4) נניח כי  $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$  כך ש-  $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$  ומתקיים  $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$  לכל  $x$  ממשי.

א. הוכיחו כי  $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את  $f(\omega)$  אם נתון כי  $f(0) = 1$

ג. מצאו את  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי } (5)$$

א. חשבו את  $f(\omega)$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{[2 \sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$

ג. חשבו את האינטגרל  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2 \sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים:  $\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו-  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר  $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . הוכיחו כי המערכת  $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  מהווה מערכת

אורתונורמלית ב-  $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$ .

(8) תהי  $f \in G$  פונקציה כך ש-  $f' \in G$  פונקציה רציפה. מצאו פונקציה  $g \in G$

המקיימת את המשוואה  $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$ .

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\cdot f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega \quad (11)$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור  $f(x)$ .

$$\cdot \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (12)$$

כאשר  $a, b > 0$ .

$$\cdot f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)} \quad (13)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (14)$$

הוכיחו כי  $a, b > 0$  לכל קבועים.

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (15)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25} \quad (16)$$

## תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א. (1)}$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{(3)}$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה. (4)}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א. (5)}$$

$$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ג.} \quad 2 \frac{\sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א. (6)}$$

(7) הוכחה.

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad \text{(8)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad \text{(9)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad \text{(10)}$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad \text{(11)}$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{(12)}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{(13)}$$

(14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.