אנליזת פורייה

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

פרק 1 - חזרה על חדו"א - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.
במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\frac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha<0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (-1 \le x \le 1)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right) \quad \left(\frac{1}{4} \le x \le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \quad (-a \le x \le a)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

תשובות סופיות

1) $x > 0$
2) $x \neq 5$
3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$
5) $x > 0$
6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot 2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

14) $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$

15) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

17) $f(x) = \frac{x}{4x+1}$

18) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x) = \frac{3}{x^2+x-2}$

20) $f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

1) $-1\le x<1\ ,\ R=1$

2) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$

3) $-0.2\le x\le 0.2\ ,\ R=0.2$

4) $-1\le x\le 1\ ,\ R=1$

5) $-3<x\le -1\ ,\ R=1$

6) $-1<x<1\ ,\ R=1$

7) $x=1\ ,\ R=0$

8) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$

9) $-5<x\le 3\ ,\ R=4$

10) $-\frac{19}{3}<x<-\frac{11}{3}\ ,\ R=4/3$

11) $-9\le x\le 11\ ,\ R=10$

12) $-7<x<-3\ ,\ R=2$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n} \quad (|x|<1)$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n} \quad (|x|<\frac{1}{3})$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n \quad (|x|<5)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (|x|<\frac{1}{4})$

18) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (|x|<3)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n \quad (|x|<1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n \quad (|x|<\frac{1}{3})$

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n-1)}$?

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}\quad(|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}\quad(-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}\quad(|x|<\frac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}\quad(|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $|x|<1\quad \frac{2}{(1-x)^3}$

10) א. $|x|<1\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1\quad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1\quad \arctan x$

אנליזת פורייה

פרק 2 - חזרה על מד"ר - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

7) $dy=2t(y^2+4)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \qquad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan\left(t+c\right)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln\left|y\right|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\ ,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\ ,\quad y=x,\ \ y=-3x$

3) $-\ln|x| = \ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5) $\ln|x| = -\sin(y/x)+c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\qquad y=0$

7) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9) $n=1,\quad \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,y=x-3\ ,\quad y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x dy=0$

5) $\left(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+(xy)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}\quad;\quad y(1)=-1$

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(y^4-4xy\right)dx+\left(2xy^3-3x^2\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $\left(5x^2+3y^3+2xy\right)dx+\left(3x^2+3xy^2+6y^3\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x^2y^3\right)dx+\left(x+xy^2\right)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu\left(x^\alpha y^\beta\right)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $\left(y-xy^2\ln x\right)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: } \frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy) \quad \text{then: I.F. : } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y) \quad \text{then:I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \qquad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \qquad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \quad ; \quad y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \qquad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \qquad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \quad ; \quad z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

תשובות סופיות

1) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$

2) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$

3) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

4) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y=2t+e^{-t}$

6) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

7) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$

8) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y)=y^2(y+c)$

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\dfrac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\dfrac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $$y'=e^{2x}+\left(1+\frac{5}{2}e^{x}\right)y+y^{2}$$

2) $$y'=1+(x-y)^{2}$$

3) $$y'=1+x+2x^{2}\cos x-(1+4x\cos x)y+2y^{2}\cos x$$

תשובות סופיות

1) $$y(x)=-0.5e^{x}+\frac{e^{x}}{-\frac{2}{3}+Ce^{-1.5x}}$$

2) $$y(x)=x+\frac{1}{-x+C}$$

3) $$y(x)=x+\frac{1}{\cos x-\sin x+Ce^{x}}$$

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y'=\cos(y-x)$

2) $y'=\frac{2y}{x}+\cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1)=0$

3) $y'-x^2y+y^2=x-\frac{x^4}{4},\ \ y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z}+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש- $y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$, $y_1(x)=-x+1$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=(x^2+y^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)(x^2+y)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=(2x+y^3)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y'=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y'=\frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1)=\pi \end{cases}$ $(x>0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y'=5+5y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y'=-\frac{x}{y} \ (y>0) \\ y(0)=1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=x+\sin y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=x\cdot\sin xy \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=xye^{-y^2} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

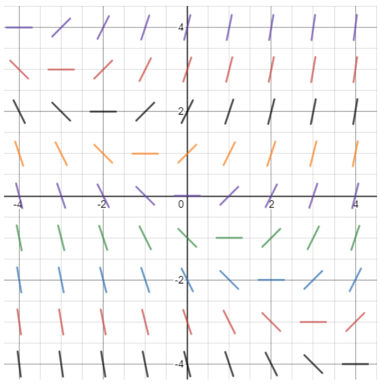
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א׳-ג׳ לשדה הכיוונים שלה:

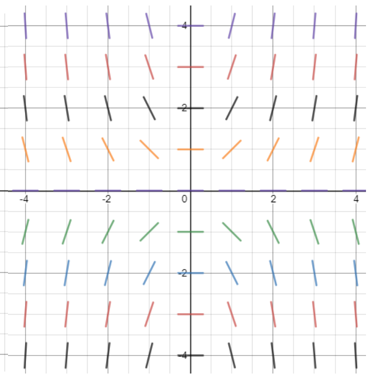
א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

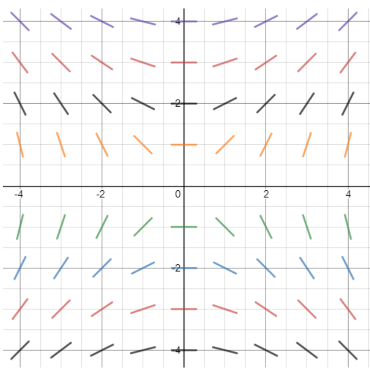
ג. $y'=x+y$



איור 1



איור 2



איור 3

3) נתונה המד״ר $y'=y-x\ ,\ y(0)=2$.

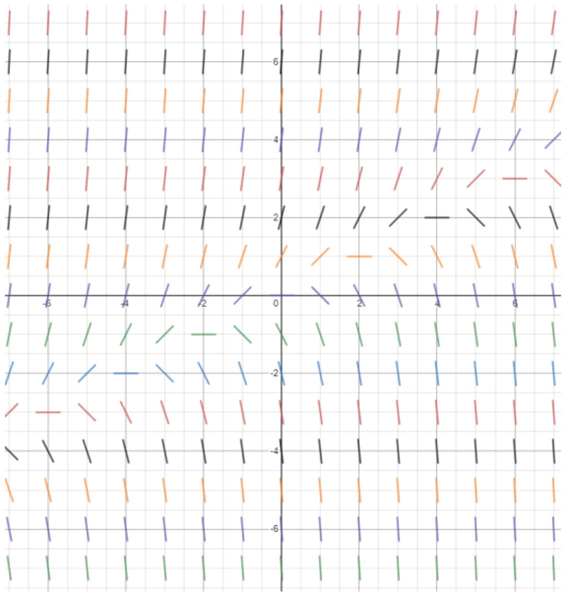
מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

4) נתונה המד״ר $y'=x+y\ ,\ y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2-4x^2p-2xy-y^2=0$ $\quad (p=y')$

2) $x^2p^2+xyp-6y^2=0$ $\quad (p=y')$

3) $xyp^2+\left(x^2+xy+y^2\right)p+x^2+xy=0$ $\quad (p=y')$

4) $y=2px+p^4x^2$ $\quad (p=y')$

5) $xp^2-2yp+4x=0$ $\quad (p=y')$

6) $6p^2y^2+3px-y=0$ $\quad (y>0)$ $\quad (p=y')$

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

אנליזת פורייה

פרק 3 - חזרה על מד"ר - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\left(x\neq 0\right)\ x^2y''+xy'=\frac{1}{x}$

2) $\left(\cos x\neq 0\right)\ y''\tan x-1=y'$

3) $2xy'y''-\left(y'\right)^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+\left(y'\right)^2=0$

7) $2y''y-\left(y'\right)^2=1$

8) $\left(\cos y\neq 0\right)\ y''\tan y=2\left(y'\right)^2$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2;\,y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;\,y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k\quad;\quad y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right)\quad;\quad y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\ ,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\ ;\ \ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 \qquad (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר $yy''+\left(y'\right)^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\quad y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\frac{e^{x}}{x}\quad ;\quad y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}[\ln x-1]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad (x>0)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$, כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת ״הפתרון השני״ לפתרון מד״ר ליניארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד״ר:
$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x}\quad ,(0<x<1),$$
כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד״ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

2) $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$, $y_2=|x^3|$, בקטע $[-4,4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$, שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד״ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$, בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x),y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד״ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר ליניארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^x+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^x-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^x+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5$

2) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$

3) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4xe^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

אנליזת פורייה

פרק 4 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי $\|f\|=\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V=R_{\le 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.

לכל שני פולינומים $p(x),q(x)$ ב- V נגדיר:

$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר את המרחב $V=C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$).

נגדיר: $\langle f(x),g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f,g\in E$:

א. $\langle u, f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle$ $\quad \forall u\in E$.

ב. $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$.

ג. $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$.

ד. $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left\{\|f\|^2+\|g\|^2\right\}$ (שוויון המקבילית).

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.

נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אזי $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a,b]$).
בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$) כך ש- $f(-1)=0$.
נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.
הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) $f(x)=1$
8) הוכחה.
9) הוכחה.

התכנסויות במרחבים נורמיים:

שאלות:

1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל $f \in C[a,b]$ מתקיים $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \sqrt{x-a}\cdot\|f\|_{L_2[a,b]}$.

תזכורת: $\|f\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$ ו- $\langle f,g\rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

ב. הוכיחו כי אם $f_n \to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ במרחב $C[a,b]$

אזי גם $f_n \to f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_1[a,b]}$.

תזכורת: $\|f\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

2) יהי V מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל $u,v \in V$ מתקיים $\|u-v\| \ge \big|\|u\|-\|v\|\big|$ (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|f\|$.

3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}\cdot x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n}\cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,10]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,10]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^1[0,10]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^2[0,10]$?

4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x)=n(1-x)x^n$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב-$[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב-$[0,1]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

5) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & else\end{cases}$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=f(a)g(a)+\int_a^b f'(x)g'(x)dx$.

א. לכל $x_0\in[a,b]$ נגדיר את הפונקציה $g_{x_0}(x)=\begin{cases}x-a+1 & a\le x\le x_0\\ x_0-a+1 & x_0\le x\le b\end{cases}$

הוכיחו כי לכל $f\in V$ מתקיים $\langle f(x),g_{x_0}(x)\rangle=f(x_0)$.

ב. הוכיחו כי לכל $f\in V$ ולכל $x_0\in[a,b]$ מתקיים $|f(x_0)|\le\sqrt{b-a+1}\cdot\|f\|$.

ג. נניח כי $f_n(x)\in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f\in V$.
הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

7) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\left[1-\chi_n(x)\right]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

ג. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמה $L^1[1,\infty)$?

8) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot\chi_{\left[2^k,2^k+k\right]}(x)$

כאשר $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמה $L^1(-\infty,\infty)$?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמה $L^2(-\infty,\infty)$?

9) נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה במרחב $L^2[-\pi,\pi]$: $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)$.

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמה $L^2[-\pi,\pi]$ לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

נגדיר $h_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$.

ג. האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

ד. האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמה $L^2[-\pi,\pi]$?

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) א. $f(x)=0$

ב. $\sup_{[0,10]}\left|f_n(x)\right| \ge \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

ג. $\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ד. $\frac{2}{\sqrt{3}} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

4) א. $f(x)=0$

ב. $\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$

ג. $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ד. $\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

5) א. $f(x)=0$

ב. $1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

ג. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ד. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

6) הוכחה.

7) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית ב- $[1,\infty)$ והפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{x}$.

ב. $\max\left\{ n^{\alpha} - \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \ , \ \frac{1}{n+1} \right\}$

ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \infty$

9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע הקומפקטי).

ג. $\sup_{[-\pi,\pi]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-\cos(kx)}{k^{1.5}}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k^{1.5}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ (בקטע סופי).

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\sin(nx)$ במרחב $L^2[0,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש-$\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n.

נניח כי לכל n,m טבעיים כך ש- $m<n$ מתקיים $\langle \varphi_n(x),x^m\rangle=0$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $\left[e^{-\pi},e^{\pi}\right]$ עם המכפלה

הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx$ נגדיר $\varphi_n(x)=\sin(n\ln(x))$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. יהיו $c>0$ ו- d ממשי כלשהוא.
הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.
הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}|\langle v,e_n\rangle|^2$.

מערכת פולינומי צ'בישב:

7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$
ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos[n\cdot\arccos(x)]$ (הנקראות גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.
נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.
הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle H_n, x^k\rangle = 0$. ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

מערכת פולינומי לג'נדר:

9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$ ונגדיר ב- K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle P_n, x^k\rangle = 0$.

מערכת פולינומי לגר:

10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x}dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$ (נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n,k טבעיים כך ש- $k<n$ מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$.

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) מערכת פולינומי צ׳בישב: הוכחה.
8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
9) מערכת פולינומי לג׳נדר: הוכחה.
10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\alpha-\beta\cos(x)-\gamma\cos(10x)\right|^2dx$$

א. כאשר $f(x)=\cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x)=x^3$

ג. כאשר $f(x)=\sin(x)$

2) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

נגדיר תת מרחב $W=span\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ ופונקציה $f(x)=|x|$.

מצאו פונקציה $g\in W$ כך ש-$\|f-g\|$ מינימלי.

<u>הערה:</u>

שימו לב שהמערכת $\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ איננה אורתונורמלית.

3) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=f(-1)\overline{g(-1)}+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1-\alpha+\beta-\gamma|^2+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

4) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

נתון כי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\right|^2dx+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx.$$

5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 e^{-x^2}dx<\infty$.

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,
מהווה מרחב מכפלה פנימית כאשר $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$.

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V.

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

<u>הערה :</u>
ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\quad,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad,\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1,\infty)$
המקיימות $\int_{1}^{\infty} x|f(x)|^2dx<\infty$.

במרחב L מוגדרת המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{1}^{\infty} f(x)g(x)xdx$.

נגדיר $W=span\left\{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}$.

מצאו את ההיטל האורתוגונלי $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

7) תהי $f\in C[-1,1]$.
הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g\in C[-1,1]$
מתקיים $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|f(x)+f(-x)|^2dx\le\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|^2dx$.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=0.5\ ,\ \beta=\gamma=0$ ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$ ג. $\alpha=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \gamma=0$

2) $g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(x)$

3) א. הוכחה. ב. $\alpha=0\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=0$

4) $\alpha=\gamma=0\ ,\ \beta=\frac{9}{10}$

5) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $P_W\left(x^3\right)=\frac{3}{2}x$

6) $\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

7) הוכחה.

מערכת אורתונורמלית סגורה:

שאלות:

1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים $v\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו $u,v\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{n}$ ו- $\langle v,e_n\rangle=\frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u,v\rangle$.

2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי $u\in V$ כך ש- $\langle u,e_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

מצאו את הקירובים המיטביים u_1,u_2,u_3 ל- u בתת המרחבים $W_1=span\{e_1\}$,
$W_2=span\{e_1,e_2\}$, $W_3=span\{e_1,e_2,e_3\}$ בהתאמה.

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו $\|u-u_1\|$, $\|u-u_2\|$, $\|u-u_3\|$ כאשר u_1,u_2,u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

נגדיר $g_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1}-f_{2n}]$, $g_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1}+f_{2n}]$.

א. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב- V.

ב. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V.

תשובות סופיות:

1) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2<\infty$ ב. $\langle u,v\rangle=1$

2) א. $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1+\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot e_2$, $u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e_1+\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot e_2+\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot e_3$

ב. $\|u-u_1\|=\sqrt{\frac{5}{12}}$, $\|u-u_2\|=\sqrt{\frac{7}{24}}$, $\|u-u_3\|=\sqrt{\frac{9}{40}}$

3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

מערכת האר:

שאלות:

1) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=x^N$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\varphi_{0,-1}\}\cup\{\varphi_{n,k}\}_{n=0}^{n=N}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

2) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי. מצאו את הקירוב מיטבי לפונקציה $f(x)=e^{i\pi 2^{N+1}x}$ על תת המרחב הנפרש על ידי $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0}^{n=N-1}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מוכלל של $f(x)=e^x$ על ידי בסיס האר $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0}^{n=\infty}{}_{k=0}^{k=2^n-1}$.

ב. הוכיחו כי $\frac{e^2-4e+3}{2(e^2-1)}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2^n}{1-e^{\frac{2}{2^n}}}\left(2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right)^2$.

4) האם קיימת $f\in L^2_{PC}[0,1]$ המקיימת $\int_0^1 f(x)\psi_{n,k}(x)dx=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(n+2)\ln(n+2)}}$ לכל $n\geq 0$ שלם ולכל $k=0,1,\dots 2^n-1$.

5) נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)$ כאשר $\psi_{n,k}(x)$ פונקציות האר.

א. האם הטור מתכנס נקודתית בקטע $[0,1]$?

ב. האם הטור מתכנס בנורמה $L^2[0,1]$?

תשובות סופיות:

1) $$P_W f=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n=N}\frac{1}{2^{n(N+0.5)}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\left[2(k+0.5)^{N+1}-(k)^{N+1}-(k+1)^{N+1}\right]\varphi_{n,k}(x)$$

2) $P_W f=0$

3) א. $$f\sim(e-1)\psi_{-1}(x)+\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}2^{\frac{n}{2}}\left\{2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right\}e^{\frac{k}{2^n}}\psi_{n,k}(x)$$

ב. הוכחה.

4) ∞

5) א. $x=0$ ב. $$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר על V מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\overline{g'(x)}dx$.

אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V.

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f\in V$ המקיימת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-in\cdot f'(x)\right)e^{-inx}dx\right|^2}{1+n^2}=1$$

2) נגדיר $a_n=\min_{\alpha\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|\cos(x)|}-\alpha\cos(nx)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}a_n$.

3) נגדיר $R_n=\min_{a,b\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|x|^3}-a\sin(nx)-b\sin([n+1]x)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}R_n$.

4) נגדיר $g(a,b)=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\min\{1,|x|\}-a-b\sin(nx)\right|^2dx\right]$.

א. מצאו את הערכים a,b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a,b אלו.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

2) $\frac{4}{\pi}$

3) $\frac{\pi^3}{2}$

4) א. $b=0$, $a=1-\frac{1}{2\pi}$ ב. $g(a,b)=2-\frac{4}{3\pi}-2\left[1-\frac{1}{2\pi}\right]^2$

אנליזת פורייה

פרק 5 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

משפט פרסבל:

שאלות:

1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le\pi \\ x+\pi & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=x$.
מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x\le\pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}$ ובאמצעותו חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5) נתונות הפונקציות $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le\pi \\ e^{x^2} & -\pi\le x<0 \end{cases}$ ו- $g(x)=\begin{cases} 0 & 1<x\le\pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1 \\ 0 & -\pi\le x<0 \end{cases}$.
נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$.
הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n}=\frac{1}{8}$.

6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad -\pi\le x<\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$.

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי הנוסחה : $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}e^{inx}$.

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$.

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x\le h\end{cases}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$.

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{\pi^2}{4}$

5) הוכחה.

6) א. ראו סרטון.

ב. $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx)$

ג. ≈ 0.769

7) 8π

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi^2-4}{4}$

10) א. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

1) חשבו $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos\left(\sqrt{|x|}\right) \sin(nx)\, dx$.

2) חשבו $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2+1} e^{i\cdot n^2 t} dt$.

3) הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{x} \frac{s e^{s^2} ds}{\sqrt{s^2+2017}} e^{inx} dx \right) = 0$.

תשובות סופיות:

1) 0

2) 0

3) הוכחה.

משפט דיריכלה:

שאלות:

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה ממשי $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$.

רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$.

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π: $f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

ב. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

ד. חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos(ax)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר a אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

א. $\frac{1}{\sin(\pi a)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$

ב. $\cot(\pi\alpha)=\frac{1}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\alpha+\pi n}+\frac{1}{\pi\alpha-\pi n}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. ראו סרטון.

ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$ ג. הוכחה.

3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).
נסמן $f(x)\sim\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\frac{\pi^6}{960}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$.

ד. הוכיחו כי $\frac{\pi^3}{32}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\frac{\pi^4}{96}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.
נסמן $f(x)\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.
כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,\dots k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^k c_n)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $\quad f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\quad \frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

ב. עבור $-\pi\le x\le\pi$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int_{-\pi}^{x}g(t)dt$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) נגדיר פונקציה $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f'.

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$ ב. $a=-\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $f(x)\sim\left(\frac{2}{\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$,

$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$ ב. $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π, הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta]$

לכל $0<\delta<\pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$.

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2,2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.

4) פתחו את $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$.

5) פתחו את $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$.

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף $-1\le x<1$ $f(x)=2-|x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1,1]$?

7) מצאו טור קוסינוסים $f(x)=x$ בקטע $[0,3]$.

8) פתחו את $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

תשובות סופיות:

1) $0\le x\le 2\pi$ $\quad$ $x^2\sim\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx-\frac{4\pi}{n}\cdot\sin nx$

2) א. $$b_n=0\quad,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{-4}{\pi^2[2k-1]^2} & n=2k-1\\ \dfrac{-8}{\pi^2[4k-2]^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[2k-1]^4}=\frac{\pi^4}{96}$

3) א. $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2}e^{in\pi x}$ $\qquad$ ב. ראו סרטון. $\qquad$ ג. $\frac{3-e}{4(e-1)}$

4) $|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(\pi[2k-1]x)$

5) $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2[2k-1]^2}\sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$

6) א. $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos([2k-1]\pi x)$ $\qquad$ ב. $\frac{\pi^4}{96}$ $\qquad$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

ד. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ ו-f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[a,b]$.

7) $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

8) $\cos(2x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2}\sin([2k-1]x)$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
חשבון לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.
הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=x^2$.
חשבון לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $g(x)$, $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$, $f(x)=x$.
חשבון לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\pi - x$

4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$

5)
$$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2-(x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2-\left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

1) נגדיר $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ עבור $x\neq 2\pi m$.

2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$.

3) הוכיחו כי $I=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$ טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי $(f*D_n)_x=S_n(x)$.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{arctg(x-1)\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$.

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2001}{2}t}{\sin t}2\cos\frac{t}{2}\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$.

יהיו a_n , b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.

חשבו את b_{500} , c_{1001}.

רמז: $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N טור פורייה החלקי ה- N -י של f.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה.   ב. הוכחה.

2) 0

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0$, $c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x\neq 2\pi m$ $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

ב. הראו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$.

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|<\pi}K_n(x)dx=0$.

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית-2π וכי $m\leq f(x)\leq M$ לכל x ממשי.
הוכיחו כי $m\leq\sigma_n(x)\leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x)\geq 0$.

ii. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=1$.

iii. קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$.

נגדיר $F_n(x)=n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.
הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$.

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}\xrightarrow{r\to 1-}f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

i. $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במידה שווה לפי x בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$.

אזי $f(x)\xrightarrow{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi\le t\le\pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים $\frac{1}{\alpha}-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}$.

ג. הראו שמתקיים $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}$.

ד. הראו שמתקיים $\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)\frac{\pi}{4\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}$.

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב-$f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\dots$$

ג. חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

3) תהי $f\in L^2_{PC}([-\pi,\pi])$.

נסמן ב-c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f.

נסמן $d_n=\mathrm{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

- f ממשית.
- f מתאפסת על הקטע $[-\pi,0]$.
- מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}d_ne^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$.

מצאו את f.

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos(2x)$
בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו-$f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.
מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$.
האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.
נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כלשהו.
מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(t+x)dt$ כתלות ב-f_n.

תשובות סופיות:

1) א. $e^{i\alpha t}\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi}\cdot e^{in\cdot t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

2) א. $f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos([2k+1]x)$

ב. $\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \pi k<x<\pi(k+1)\\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1)<x<\pi k\\ 0 & x=\pi k\end{cases}$, כאשר k מספר שלם. ג. $\frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x^2e^{|x|}\cos(x) & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x\le 0\end{cases}$

4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$ - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$
ו-$f'\in E[-\pi,\pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi,\pi]$.

5) f_0

אנליזת פורייה

פרק 6 - דיסטריבוציות

תוכן העניינים

נגזרת דיסטריביוטיבית:

שאלות:

1) מצאו $f'(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ x^2+2x & 1\le x<2 \\ 2x & x\ge 2 \end{cases}$.

2) מצאו $f''(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=e^{-|x|}$.

3) מצאו $f''(x)$ במובן הדיסטריביוטיבי כאשר $f(x)=|x|\sin(x)$.

4) תהי $h(x)\in C^{\infty}(-\infty,\infty)$ (פונקציה גזירה אינסוף פעמים) ותהי L דיסטריבוציה.
הוכיחו כי $(hL)'=h'L+hL'$ (כאשר הנגזרות הן במובן הדיסטריביוטיבי).

5) הוכיחו כי $(1+x-e^x)\delta'''(x)=\delta(x)-3\delta'(x)$.

6) יהיו $j,k\in\mathbb{N}$. הראו כי:
א. אם $j>k$ אז $x^j\cdot\delta^{(k)}(x)=0$.
ב. אם $j\le k$ אז $x^j\cdot\delta^{(k)}(x)=\frac{(-1)^j}{k!(j-k)!}\delta^{(k-j)}(x)$.
רמז: תוכלו להיעזר בנוסחת לייבניץ לגזירה $\left[f(x)\cdot g(x)\right]^{(k)}=\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}f^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(x)=2\delta(x-1)-4\delta(x-2)+h(x)$

2) $f^{(2)}=-2\delta(x)+e^{-|x|}$

3) $f^{(2)}=\begin{cases} -\left[2\cos(x)-x\sin(x)\right] & x<0 \\ 2\cos(x)-x\sin(x) & x>0 \end{cases}$

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גבולות דיסטריביוטיביים:

שאלות:

1) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{2h}$.

2) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $f_n(x)=\frac{n}{2}e^{-n|x|}$.

3) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטריביוטיבי $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$.

4) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases} n & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n} \\ 0 & else \end{cases}$.

א. בדקו האם הסדרה מתכנסת נקודתית על הישר הממשי.
ב. בדקו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי.
ג. בדקו האם הסדרה מתכנסת במובן הדיסטריביוטיבי.

5) תהי $f_n(x)=\begin{cases} 1-x^n & |x|<1 \\ \frac{1}{n} & |x|\ge 1 \end{cases}$ סדרת דיסטריבוציות במרחב D'.

א. מצאו את הגבול הדיסטריביוטיבי $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
ב. מצאו את הגבול הדיסטריביוטיבי $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם $\varphi(x)$ פונקציית מבחן אזי $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\omega^n\hat{\varphi}(\omega)=0$ לכל n טבעי.
ב. יהי N טבעי קבוע. הוכיחו כי הגבול של $f_k(x)=k^N\sin(kx)$ במובן הדיסטריביוטיבי הינו 0.

תשובות סופיות:

1) $\delta'(x)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}e^{-n|x|}=\delta(x)$

3) $\left|\int_a^b \sin(\lambda x)\varphi(x)dx\right|\le\int_a^b|\varphi(x)|dx\equiv M$

4) א. יהי x שרירותי. אם $x\le 0$ אז $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

אם $x>0$ אז החל מ-n גדול מספיק מתקיים $\frac{2}{n}<x$.

ב. $\sup_{(-\infty,\infty)}|f_n(x)-f(x)|=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.

ג. $\langle f_n(x),\varphi(x)\rangle\xrightarrow{n\to\infty}\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle$.

5) א. $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$ ב. $\delta(x+1)-\delta(x-1)$

6) א. הוכחה. ב. הוכחה.

אנליזת פורייה

פרק 7 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\frac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\frac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.

רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$$

2) $$f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

3) $$f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$$

4) $$f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$$

5) $$f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \ \ or \ \ -4\pi-2\le x\le -4\pi+2\\ 0 & else\end{cases}$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)}=\frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:
א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.
ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.
ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$$

8) א. $\dfrac{1}{2\pi(a+i\omega)}$

ב. $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

ג. $\dfrac{1}{4\pi i}\left(\dfrac{1}{a+i[\omega-b]}+\dfrac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(i\omega)\dfrac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2 e^{-|\omega|}$.
רמז : $F\left\{\dfrac{1}{1+x^2}\right\}=\dfrac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $\dfrac{i\cdot\dfrac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\dfrac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & else \end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^5} & x\geq 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$.
הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.
הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i\cdot\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\pi\omega^2}$

2) $F\left\{x^2e^{-x^2}\right\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f(\omega)=\dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2) $$\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1 \end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבון התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבון את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו- $x\le 0$.

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש- $f(\omega)=\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f''(t)\right)g(x-t)dt=2f(x).$$

5) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $g(x)=e^{-|x|}$

5) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$

6) א. $\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$ ב. $f(x)=e^{-|x|}$

7) א. $$\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

ב. הוכחה.

8) $$\left(f*f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$$

9)
$$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10)
$$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{(1-x^2)}dx$.

ד. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^\infty h'(y)e^{-|x-y|}dy=x\cdot e^{-|x|}$.

3) יהי $A>0$ קבוע. נגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A\\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ המקיימת $g(\omega)=f(\omega)f(-\omega)$.

מצאו במפורש את $g(x)$.

4) נניח כי $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש- $f'(x),x\cdot f'(x),f''(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0)=1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

5) תהי $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1\le |x|\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$.

ג. חשבו את האינטגרל $\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)dt$.

6) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. חשבו את האינטגרלים : $\int\limits_0^\infty\left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx$

ו- $\int_0^\infty\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\cos(x)dx$.

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$.

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש- $f'\in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)du+f'(t)$.

9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$.

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

11) נגדיר $f\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left(\omega-t\right)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left(t\right)e^{i\omega x}dtd\omega$.

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f\left(x\right)$.

תזכורת: $\chi_{[a,b]}\left(t\right)=\begin{cases}1 & \text{t}\in\left[a,b\right]\\ 0 & else\end{cases}$.

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$

כאשר $a,b>0$.

13) מצאו את התמרת הפורייה של $f\left(x\right)=e^{-\left(x^2+2x+5\right)}$.

14) הוכיחו כי $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-ax^2}\cos\left(bx\right)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\left(x\right)\cos\left(x\right)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$.

16) הוכיחו כי $\int\limits_{0}^{\infty}\sin^3\left(x\right)xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=-i\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sin(\omega\pi)\cdot\frac{2}{1-\omega^2}$ ב. $g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}$

ג. $\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד. $\frac{\pi^2}{2}$

2) א. $-\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2}$ ב. $h(y)=-e^{-|y|}$, $-h(y)=e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א. הוכחה. ב. $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג. $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א. $\frac{4\cdot\sin(2\omega)-2\cdot\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב. $\frac{5\pi}{2}$ ג. $\frac{3\pi}{2}$

6) א. $2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$ ב. $\frac{1}{15}$ ו- $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

7) הוכחה.

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\frac{\pi}{a+b}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\frac{\omega}{b^2+\omega^2}d\omega$

13) $f(\omega)=\frac{1}{e^4}\cdot e^{i\omega}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

אנליזת פורייה

פרק 8 - התמרת פורייה ב L2, משפט הדגימה של שאנון וקירוב יחידה

תוכן העניינים

התמרת פורייה ב-L2:

שאלה:

1) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ במובן L^2 .

תשובה סופית:

1) $$F\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\}\underset{L_2}{=}\begin{cases}\frac{1}{2} & |\omega|<1\\ 0 & else\end{cases}$$

משפט הדגימה של שאנון:

שאלות:

1) נגדיר $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{x^2} & x\neq 0\\ \pi^2 & x=0\end{cases}$.

ראינו בעבר כי התמרת הפורייה שלה הינה: $f(\omega)=\begin{cases}\pi+\omega & -\pi\le\omega\le 0\\ \pi-\omega & 0\le\omega\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את טור הפורייה המוכלל של $f(x)$ ביחס למערכת $\left\{\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{(\pi x-\pi n)}\right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$.

2) נגדיר $f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2-3\omega^2\right)e^{i\omega x}d\omega$.

מצאו את טור פורייה מוכלל של $f(x)$ ביחס למערכת $\left\{\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{\pi x-\pi n}\right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$.

תשובות סופיות:

1) $$f(x)\sim\pi^2\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{n=\infty}\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2}\frac{\sin(\pi x-\pi n)}{(\pi x-\pi n)}$$

2) $$f(x)\sim\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{12\pi(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot\frac{\sin(\pi x-\pi n)}{\pi x-\pi n}$$

קירוב יחידה:

שאלות:

1) הראו כי אם $\psi(x)$ מקיימת את התכונות:

א. $\psi(x)\geq 0$ לכל x.

ב. $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=1$.

אזי $K_n(x)=n\cdot\psi(nx)$ הינו גרעין יחידה.

2) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(nx-n\pi)}{n(x-\pi)^2}arctg\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{3}}\right)dx$.

הערה: ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

3) הראו כי אם $f(x)$ רציפה וחסומה על R ואם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ גם רציפה וחסומה על R אזי מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}se^{-\frac{n^2s^2}{2}}f(s)ds=f'(0)$.

4) תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על ידי הישר הממשי, רציפה וחסומה שם.

נניח כי $\varphi(x)$ גזירה ברציפות על הישר הממשי וכי $\varphi'(x)$ חסומה על הישר הממשי.

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(1+n^2x^2)^2}\varphi(x)dx$.

5) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה, גזירה ברציפות למקוטעין וכי $f'(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נגדיר $\varphi(x)=\frac{15}{16}(x^2-1)^2\chi_{(-1,1)}(x)$.

מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}n^2\varphi'(nx)f(x)dx$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נגדיר את הפונקציה $h_\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$.
הראו כי משפחת הפונקציות $\{h_\lambda(x)\}_{\lambda\in(0,\infty)}$ מהווה קירוב יחידה כאשר $\lambda\to 0^+$.

ב. נסמן $H(t)=\frac{1}{2\pi}e^{-|t|}$. הראו כי מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)e^{itx}dt=h_\lambda(x)$.

ג. תהי $f\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$ פונקציה רציפה ונניח כי $\hat{f}(\omega)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.
הראו כיצד מקבלים מסעיפים א', ב' את נוסחת ההתמרה ההפוכה $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.
הערה: הניחו כי מותר להכניס את הגבול אל תוך האינטגרל.

7) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה זוגי. תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על הישר הממשי, רציפה למקוטעין וחסומה שם.
הוכיחו כי בכל נקודה x_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x_0-x)\varphi(x)dx=\frac{\varphi(x_0^+)+\varphi(x_0^-)}{2}$.

8) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה המקיים $\forall x\notin[-1,1]\to K_n(x)=0$. תהי $\varphi(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין על הישר הממשי, הרציפה בנקודה $x=0$.
הוכיחו כי מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(0-x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$.

9) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ כאשר $a_n=\frac{3}{4}\lim_{L\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right]}(m-x)\frac{L-L^3(m-x)^2}{x^2+x}dx$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $-\frac{\pi}{6}$

3) הוכחה.

4) $\lim_{n\to\infty}\left(K_n*\varphi'\right)_{(0)} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi'(0)$

5) $-f'(0)$

6) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) 1

אנליזת פורייה

פרק 9 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבון את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L(\cosh 4t)$

5) $L(\sinh 10t)$

6) $L(\sin 2t\cos 2t)$

7) $L(\sin 2t\cos 3t)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

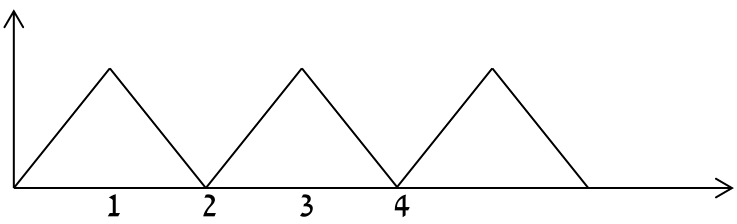
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

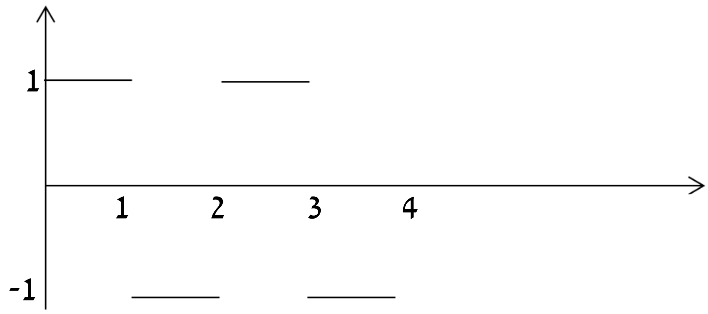
13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$.

14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

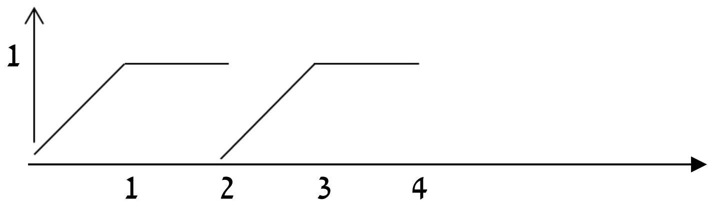
15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.
ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{\left(s-2\right)^5}$

12) $\frac{4}{\left(s-2\right)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

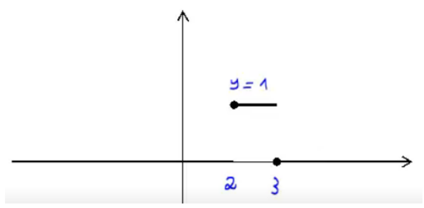
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u\left(t-k\right)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\ge k\end{cases}$

19)



20) $f\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\le\\ 1 & t>4\end{cases}=u\left(t-4\right)$

21) $L=\left(u\left(t-k\right)f\left(t-k\right)\right)=e^{-ks}L\left(f\left(t\right)\right)$

22) א. $L\left(\left(t-4\right)^2\cdot u\left(t-4\right)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L\left(t\right)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta\left(t-2\pi\right)\right]=e^{-2\pi s}$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשבו את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{t^3}{3!}$

3) e^{10t}

4) $\frac{1}{3}\sin 2t$

5) $\cos 2t$

6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$

7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$

11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

12) $1-2e^{-5t}$

13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$

14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$

16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$

18) $-6+5t+6e^{-2t}$

19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$

20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$

23) $\sin t+2e^{3t}$

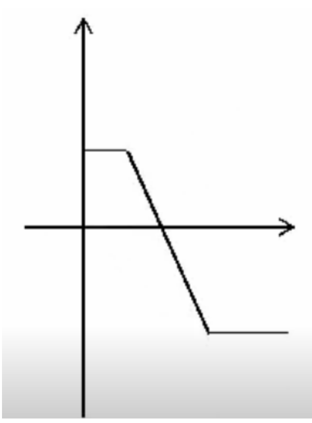
24) $\cos t+e^{-2t}$

25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

27) א. $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\geq 3\end{cases}$; שרטוט:



28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}\left(-2\cos t+2-t\sin t\right)$

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,
כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$, כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\ge 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$, כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

תשובות סופיות

1) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3) $y(t)=-4t-1$

4) $y(t)=t^2$

5) $y(t)=\frac{1}{8}e^{t}(t^2+2)$

6) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10) $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11) $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12) $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2\left(t-2\pi\right)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2\left(t-\pi\right)\right)\right]$

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \quad (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$

$e^{-bt}\cos at$	$\dfrac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$
$t\sin at$	$\dfrac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
$\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$u(t-k)$	$\dfrac{e^{-ks}}{s}$
$u(t-k)f(t-k)$	$e^{-ks}\cdot F(s)$
$t^n g(t)$	$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$,
ורוצים את $f(0)$ ו-$f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

אנליזת פורייה

פרק 10 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות - משוואת הגלים

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

פרק 11 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות - משוואת החום

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

פרק 12 - משוואות דיפרנציאליות חלקיות - משוואת לפלס

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

פרק 13 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים