

אנליזת פורייה ויישומים



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

| | |
|-----------|---------------------------------------|
| 1 | 1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים |
| 16 | 2. טורי פורייה |
| 40 | 3. התמרת פורייה |
| 60 | 4. התמרת לפלס |
| 72 | 5. בעיות שטורם ליוביל |
| (ללא ספר) | 6. שיטת פורייה עבור משוואת החום |
| (ללא ספר) | 7. שיטת פורייה עבור משוואת הגלים |
| (ללא ספר) | 8. שיטת פורייה עבור משוואת לפלס |
| (ללא ספר) | 9. שאלות מסכמות ברמת בחינה |

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 1 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים 1
2. התכנסויות של פונקציות במרחביים נורמיים 3
3. מערכות אורתונורמליות 7
4. משפט קירוב מיטבי 11
5. מערכת אורתונורמלית סגורה 14
6. תרגילים מסכמים 15

מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

שאלות:

- (1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
 הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a, b]$.
 הוכיחו כי $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.
- (3) יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.
 לכל שני פולינומים $p(x), q(x)$ ב- V נגדיר:
 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (4) נגדיר את המרחב $V = C^1[-1, 1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$).
 נגדיר: $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$
 הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.
- (5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית E מתקיים לכל $f, g \in E$:
 א. $\forall u \in E \quad \langle u, f+g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle u, g \rangle$
 ב. $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$
 ג. $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2)$
 ד. $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}$ (שוויון המקבילית).
- (6) יהי V מרחב מכפלה פנימית.
 נסמן $w = u+v$ וקטורים במרחב.
 הוכיחו כי אם $\langle u, v \rangle = 0$ אזי $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a, b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב- $[a, b]$).

בדקו האם $\langle f, g \rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

(8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1, 1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1, 1]$) כך ש- $f(-1) = 0$.

נגדיר $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f, g \rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V .

(9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx + \max_{[a,b]} |f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V .

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) $f(x) = 1$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

התכנסויות במרחבים נורמיים:

שאלות:

(1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל $f \in C[a,b]$ מתקיים $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \sqrt{x-a} \cdot \|f\|_{L_2[a,b]}$

תזכורות: $\|f\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ ו- $\langle f, g \rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$

ב. הוכיחו כי אם $f_n \rightarrow f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ במרחב $C[a,b]$

אזי גם $f_n \rightarrow f$ בנורמה $\|\cdot\|_{L_1[a,b]}$

תזכורת: $\|f\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |f(t)| dt$

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

(2) יהי V מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u - v\| \geq \left| \|u\| - \|v\| \right|$ (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|$.

(3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n} \cdot x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n} \cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \end{cases}$$

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,10]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,10]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^1[0,10]$?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת ב- $L^2[0,10]$?

(4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x) = n(1-x)x^n$.

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

(5) נתונה
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty, \infty)$?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty, \infty)$?

(6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g'(x)dx$$

א. לכל $x_0 \in [a,b]$ נגדיר את הפונקציה
$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} x-a+1 & a \leq x \leq x_0 \\ x_0-a+1 & x_0 \leq x \leq b \end{cases}$$

- הוכיחו כי לכל $f \in V$ מתקיים $\langle f(x), g_{x_0}(x) \rangle = f(x_0)$.
 ב. הוכיחו כי לכל $f \in V$ ולכל $x_0 \in [a,b]$ מתקיים $|f(x_0)| \leq \sqrt{b-a+1} \cdot \|f\|$.
 ג. נניח כי $f_n(x) \in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f \in V$. הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

$$f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x)\right] \left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x) \quad (7)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?

אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

ג. מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמת $L^1[1, \infty)$?

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \chi_{[2^k, 2^{k+1}]}(x) \quad (8)$$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty, \infty)$?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty, \infty)$?

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx) : L^2[-\pi, \pi] \quad (9)$$

א. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$?

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

ג. האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$?

ד. האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$?

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) א. $f(x) = 0$

ב. $\sup_{[0,10]} |f_n(x)| \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

ד. $\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ב. $\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

(4) א. $f(x) = 0$

ד. $\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ב. $1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

(5) א. $f(x) = 0$

ד. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ג. $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(6) הוכחה.

(7) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית ב- $[1, \infty)$ והפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{x}$.

ב. $\max \left\{ n^\alpha - \frac{1}{n + \frac{1}{n^2}}, \frac{1}{n+1} \right\}$

(8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.
ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty$

(9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.
ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ (בקטע הקומפקטי).

ג. $\sup_{[-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(kx)}{k^{1.5}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k^{1.5}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת $L^2[-\pi, \pi]$ (בקטע סופי).

מערכות אורתונורמליות:

שאלות:

(1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x) = \sin(nx)$ במרחב $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad \text{מתקיים } m < n$$

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$ עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית

$$\varphi_n(x) = \sin(n \ln(x))$$

נגדיר

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2[a, b]$ עם

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \text{ יהיו } c > 0 \text{ ו- } d \text{ ממשי כלשהוא.}$$

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$ הינה מערכת

$$\text{אורתונורמלית סגורה במרחב } L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right] \text{ עם המכפלה}$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ הפנימית}$$

(6) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^N$ מערכת אורתונורמלית סופית.

$$\text{הוכיחו כי לכל } v \in V \text{ מתקיים } \left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$$

מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1, 1)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ : ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית:}$$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- K ומצאו

קבועים α_n כך שהמערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$$

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב K ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$

$$\langle H_n, x^k \rangle = 0 \text{ . ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \text{ : מכפלה פנימית}$$

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$

מהווים מערכת אורתוגונלית ב- K וכי $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$ לכל n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty \text{ למקוטעין ומקיימות את התנאי}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx \text{ נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית}$$

הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל n, k טבעיים כך ש- $k < n$ מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \text{ ניתן להיעזר בנוסחה}$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב: הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט: הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לגינדר: הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר: הוכחה.

קירוב מיטבי:

שאלות:

(1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos(x) - \gamma \cos(10x)|^2 dx$$

א. כאשר $f(x) = \cos^2(x)$

ב. כאשר $f(x) = x^3$

ג. כאשר $f(x) = \sin(x)$

(2) במרחב $C[-\pi, \pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

נגדיר תת מרחב $W = \text{span}\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ ופונקציה $f(x) = |x|$. מצאו פונקציה $g \in W$ כך ש- $\|f - g\|$ מינימלי.

הערה:

שימו לב שהמערכת $\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$ איננה אורתונורמלית.

(3) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל \mathbb{C} .

א. הוכיחו כי $\langle f, g \rangle = f(-1) \overline{g(-1)} + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1 - \alpha + \beta - \gamma|^2 + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(4) נתבונן במרחב $C[-1, 1]$ מעל \mathbb{C} .

נתון כי $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty$

א. הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx$$

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- V .

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

הערה:

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

(6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע $[1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\langle f, g \rangle = \int_1^{\infty} f(x) g(x) x dx$$

$$W = \text{span} \left\{ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$P_W \left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \right)$$

(7) תהי $f \in C[-1, 1]$

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית $g \in C[-1, 1]$

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 |f(x) + f(-x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

תשובות סופיות:

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad \text{ג.} \quad \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad \text{ב.} \quad \alpha = 0.5, \beta = \gamma = 0 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) \quad (2)$$

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (3)$$

$$\alpha = \gamma = 0, \beta = \frac{9}{10} \quad (4)$$

$$P_w(x^3) = \frac{3}{2}x \quad \text{ג.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (5)$$

$$\frac{28}{e} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{36}{e} x^{-\frac{5}{2}} \quad (6)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (7)$$

מערכת אורתונורמלית סגורה:

שאלות:

(1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים $v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו $u, v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{n}$ ו- $\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u, v \rangle$.

(2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי $u \in V$ כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

מצאו את הקירובים המיטביים u_1, u_2, u_3 ל- u בתת המרחבים $W_1 = \text{span}\{e_1\}$,

$W_2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$, $W_3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ בהתאמה.

ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו $\|u - u_1\|$, $\|u - u_2\|$, $\|u - u_3\|$ כאשר u_1, u_2, u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

(3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V .

נגדיר $g_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} + f_{2n}]$, $g_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} - f_{2n}]$

א. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב- V .

ב. הוכיחו כי המערכת $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- V .

תשובות סופיות:

(1) א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$ ב. $\langle u, v \rangle = 1$

(2) א. $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot e_3$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1$

ב. $\|u - u_3\| = \sqrt{\frac{9}{40}}$, $\|u - u_2\| = \sqrt{\frac{7}{24}}$, $\|u - u_1\| = \sqrt{\frac{5}{12}}$

(3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx$$

נגדיר על V מכפלה פנימית:

א. הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V .

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הני"ל.

ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f \in V$ המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - in \cdot f'(x)) e^{-inx} dx \right|^2}{1+n^2} = 1$$

(2) נגדיר $a_n = \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|\cos(x)|} - \alpha \cos(nx) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) נגדיר $R_n = \min_{a,b \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|x|^3} - a \sin(nx) - b \sin([n+1]x) \right|^2 dx \right]$. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$.

(4) נגדיר $g(a,b) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \min\{1, |x|\} - a - b \sin(nx) \right|^2 dx \right]$

א. מצאו את הערכים a, b עבורם $g(a,b)$ מינימלית.

ב. חשבו את $g(a,b)$ עבור a, b אלו.

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) $\frac{4}{\pi}$

(3) $\frac{\pi^3}{2}$

(4) א. $a = 1 - \frac{1}{2\pi}$, $b = 0$. ב. $g(a,b) = 2 - \frac{4}{3\pi} - 2 \left[1 - \frac{1}{2\pi} \right]^2$

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 2 - טורי פורייה

תוכן העניינים

| | | |
|----|--------------------------------------|-----------|
| 16 | 1. הקדמה | (ללא ספר) |
| 17 | 2. טור פורייה ממשי | |
| 17 | 3. טור פורייה מרוכב | |
| 18 | 4. משפט פרסבל | |
| 21 | 5. רימן לבג | |
| 22 | 6. משפט דיריכלה | |
| 24 | 7. המשכה זוגית ואי זוגית | |
| 25 | 8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה | |
| 28 | 9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה | |
| 29 | 10. טור פורייה בקטע כללי | |
| 31 | 11. משפט הקונבולוציה | |
| 33 | 12. גרעין דיריכלה | |
| 35 | 13. גרעין פייר וממוצעי סזארו | |
| 37 | 14. גרעין פוואסון | |
| 38 | 15. תרגילים מסכמים | |

טור פורייה ממשי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \sin(|x|)$.

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תשובות סופיות:

$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x) \quad (2)$$

$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx) \quad (3)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx) \quad (4)$$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

(2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

משפט פרסבל:

שאלות:

(1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$, חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

הינו $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(3) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x - \pi$.

מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$ ובאמצעותו

חשבו את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(5) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- $f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$, $g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$.

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi < x < 3\pi$.
 ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$.

(7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי הנוסחה: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$

חשבו $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$.

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

כאשר $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$ ובשוויון פרסבל כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$

ג. הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.}$$

(6) א. ראו סרטון.

$$\approx 0.769 \quad \text{ג.}$$

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א. (10)}$$

ב. הוכחה.

ג. ראו סרטון.

רימן לבג:

שאלות:

$$(1) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$$

$$(2) \text{ חשבו } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$$

$$(3) \text{ הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$$

תשובות סופיות:

0 (1)

0 (2)

הוכחה. (3)

משפט דיריכלה:

שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה

$$. x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$. x = \frac{\pi}{2} \text{ רמז: הציבו}$$

$$. f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{(2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $f(x)$.

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר a

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$. \frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right]$$

$$. \cot(\pi \alpha) = \frac{1}{\pi \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha + \pi n} + \frac{1}{\pi \alpha - \pi n}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ג. הוכחה. ב. $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$

(3) א. $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ ב. $\frac{\pi^4}{90}$ ג. $\frac{\pi^2}{-12}$ ד. $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0 < x < \pi$

$$. x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 1$ בקטע $[0, \pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ לכל א.}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

(1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x) \in L^2_{pc}[-\pi, \pi]$).

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ בקטע $[0, \pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$ מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0, 2\pi)$.

ב. נסמון $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0, 2\pi)$.

(6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k

פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $j = 0, 1, \dots, k-1$. נסמון $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

ב. תהי $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$.

הראו כי מתקיים $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$.

(8) נגדיר $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמון $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

(11) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \text{ א. } [0, \pi] \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x)$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה. } [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x)$$

$$(3) \text{ א. } \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$$

$$\text{ב. } \sum_{-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \text{ א. הוכחה. ב. } -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \text{ א. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty$$

ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה } g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של $g(x)$.

$$b. \quad \text{עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר $g(x)$ מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במידה שווה

ל- $h(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של f ושל f' .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחיבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום $[-3\pi, 3\pi]$.

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של f' במידה שווה?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad a. \quad g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad b. \quad a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad a. \quad f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$b. \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x) \quad f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

ג. $f(x)$ פונקציה רציפה, מחזורית- 2π , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של $f'(x)$ יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו: $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$

לכל $0 < \delta < \pi$ ולכל n שלם.

טור פורייה בקטע כללי:

שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

(2) תהי הפונקציה $f(x) = \min\{1, |x|\}$.

א. חשבו את מקדמי פורייה a_n ו- b_n של טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. חשבו את $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0, 2]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$.

(4) פתחו את $f(x) = |x|$ לטור פורייה בקטע $[-1, 1]$.

(5) פתחו את $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0, 2]$.

(6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x) = f(x+2)$ ובנוסף $-1 \leq x < 1$ $f(x) = 2 - |x|$.

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

ג. חשבו את הסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

ד. האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $[-1, 1]$?

(7) מצאו טור קוסינוסים $f(x) = x$ בקטע $[0, 3]$.

(8) פתחו את $f(x) = \cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0, \pi]$.

תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3-e}{4(e-1)} \quad \text{ג.} \quad \text{ב. ראו סרטון.} \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1+4n^2\pi^2} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8 \cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$\frac{\pi^2}{8} \quad \text{ג.} \quad \frac{\pi^4}{96} \quad \text{ב.} \quad f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ד. אם f רציפה בקטע $[a, b]$, $f(a) = f(b)$, ו- f' רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של f מתכנס במישל ל- f בקטע $[a, b]$.

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π אז $(f * g)_{(x)}$ מחזוריות- 2π .
- (2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות- 2π ופונקציות זוגיות אז $(f * g)_{(x)}$ זוגית.
- (3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$.
 הערה: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.
- (5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות- 2π כך שלכל $x \in [-\pi, \pi]$ מתקיים $f(x) = x$, $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.
 חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) $\pi - x$ (4) לכל x , $-\pi \leq x \leq \pi$ $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi + 1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x + (2\pi - 1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi + 1 \end{cases} \quad (5)$$

גרעין דיריכלה:

שאלות:

(1) נגדיר $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

ב. הוכיחו כי עבור $x \neq 2\pi m$ $D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

(2) חשבו לכל ערך של n שלם את ערכו של הביטוי $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin(100x) dx$.

(3) הוכיחו כי $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx = 2(n+1)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ טור פורייה חלקי. הוכיחו כי $(f * D_n)_x = S_n(x)$.

(5) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\arctg(x-1) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{e^{(x-1)^2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx$.

$$(6) \quad \text{נגדיר } S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2001}{2} t}{\sin t} 2 \cos \frac{t}{2} \cos^{17} \left(e^{\sqrt{|x-t|}} \right) dt$$

יהיו a_n, b_n מקדמי פורייה הממשיים ו- c_n מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה $S(x)$.
 חשבו את b_{500}, c_{1001} .

רמז: $S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) dt$ כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה מסדר N ו- S_N
 טור פורייה החלקי ה- N של f .

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) 0

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

(6) $c_{1001} = 0, b_{500} = 0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו:

שאלות:

(1) נסמן $D_n(x)$ גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך: $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$.

א. הראו כי לכל $x \neq 2\pi m$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ב. הראו כי $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$.

(2) הוכיחו כי $K_n(x) \geq 0$ לכל x כאשר $K_n(x)$ גרעין פייר.

(3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$

(4) הוכיחו כי לכל $0 < \delta < \pi$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_n(x) dx = 0$

(5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית- 2π וכי $m \leq f(x) \leq M$ לכל x ממשי. הוכיחו כי $m \leq \sigma_n(x) \leq M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי כאשר $\sigma_n(x)$ סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה $f(x)$.

(6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ ונניח כי:

i. $\varphi(x) \geq 0$

ii. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 1$

iii. קיים $0 < \delta_0 < \pi$ כך שלכל $|x| > \delta_0$ מתקיים $\varphi(x) = 0$.

נגדיר $F_n(x) = n\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי.

הוכיחו כי $F_n(x)$ מהווה גרעין חיובי.

תשובות סופיות:

- 1) א. הוכחה.
 - 2) הוכחה.
 - 3) הוכחה.
 - 4) הוכחה.
 - 5) הוכחה.
 - 6) הוכחה.
- ב. הוכחה.

גרעין פוואסון:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$. תהי $f(x)$ פונקציה

רציפה למקוטעין ומחזורית 2π וטור פורייה שלה נתון על ידי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הראו כי $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i. $P_r(x) \geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0 < \delta < \pi$ מתקיים $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$ במידה שווה לפי x

בתחום $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$

ד. תהי $f(x)$ רציפה ומחזורית 2π ועם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$ במידה שווה.

הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא: אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את

התכונות הבאות:

i. $P_r(x) \geq 0$ לכל x ממשי.

ii. לכל $0 < \delta < \pi$ מתקיים $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$ במידה שווה לפי x בתחום

$[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

iii. מתקיים $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$

אזי $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$ במידה שווה.

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1 טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t) = e^{iat}$ בתחום $-\pi \leq t \leq \pi$ כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

ג. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$$

ד. הראו שמתקיים
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$$

2 נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של f .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום $(-\infty, \infty)$?

$$\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{7} \sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2$$

3 תהי $f \in L^2_{PC}([-\pi, \pi])$.

נסמן ב- c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f .

נסמן $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$ ובנוסף נתון כי:

• f ממשית.

• f מתאפסת על הקטע $[-\pi, 0]$.

• מתקיים השיוויון
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$$

מצאו את f .

(4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x) = \cos(2x)$

בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ו- $f(x) = -1$ בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π .

נסמן $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$ ויהי $h > 0$ פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$ כתלות ב- f_n .

תשובות סופיות:

(1) א. $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha - n]\pi} \cdot e^{in t}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א. $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב. כאשר k מספר שלם, $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$ ג. $\frac{\pi^2}{8}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$ אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

ו- $f' \in E[-\pi, \pi]$ אזי טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל- f בקטע $[-\pi, \pi]$.

(5) f_0

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 3 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

| | |
|-----------|------------------------------------|
| 40 | 1. מבוא כללי |
| 42 | 2. נוסחת כיווץ והזזה |
| 44 | 3. נוסחת הנגזרת |
| 45 | 4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה |
| 47 | 5. נוסחת המומנט |
| 49 | 6. נוסחת ההתמרה ההפוכה |
| (ללא ספר) | 7. נוסחת התמרה כפולה |
| 50 | 8. משפט פלנשראל |
| 51 | 9. משפט הקונבולוציה |
| 55 | 10. תרגילים מסכמים |

מבוא כללי:

שאלות:

(1) חשבו את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים הינה

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

(6) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ הינה $f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$

(10) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(11) חשבו את התמרת פורייה של $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ עבור $a > 0$

(12) האם קיימת $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ \text{else} \end{array} \right\} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x) \cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

(1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$

(2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$

(3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים,

הינה $g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$

(4) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה

כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה

ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(6) נניח כי $f(x) \in G(R)$ ונגדיר $g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

(7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$

(8) תהי $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$.

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

הוכחה. (6)

הוכחה. (7)

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$. ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$.

(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$

(3) יהי $A > 0$ קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x) \in G$ המקיימת $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$. מצאו במפורש את $g(x)$.

(4) נניח כי $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$ ומתקיים $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$ לכל x ממשי.

א. הוכיחו כי $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0) = 1$

ג. מצאו את $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי (5)}$$

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{[2 \sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2 \sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת

אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$.

(8) תהי $f \in G$ פונקציה כך ש- $f' \in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g \in G$

המקיימת את המשוואה $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$.

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\cdot f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega \quad (11)$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

$$\cdot \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (12)$$

כאשר $a, b > 0$.

$$\cdot f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)} \quad (13)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (14)$$

הוכיחו כי $a, b > 0$ לכל קבועים.

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (15)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25} \quad (16)$$

תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ג.} \quad \frac{2 \sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א.} \quad (6)$$

(7) הוכחה.

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (13)$$

(14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 4 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

| | |
|----|-------------------------------|
| 60 | 1. התמרת לפלס |
| 63 | 2. התמרת לפלס ההפוכה |
| 67 | 3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס |
| 69 | 4. נוסחאות - התמרת לפלס |

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t+1}\right) \quad \text{(2)} \qquad L(t^2 + 4t - 2) \quad \text{(1)}$$

$$L(\cosh 4t) \quad \text{(4)} \qquad L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad \text{(3)}$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad \text{(6)} \qquad L(\sinh 10t) \quad \text{(5)}$$

$$L(\sin^2 t) \quad \text{(8)} \qquad L(\sin 2t \cos 3t) \quad \text{(7)}$$

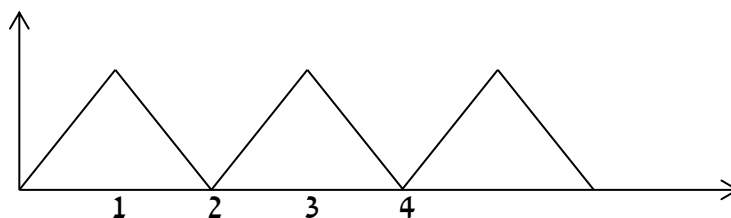
$$L(t^2 \sin 4t) \quad \text{(10)} \qquad L(\cos^2 4t) \quad \text{(9)}$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad \text{(12)} \qquad L(t^4 e^{2t}) \quad \text{(11)}$$

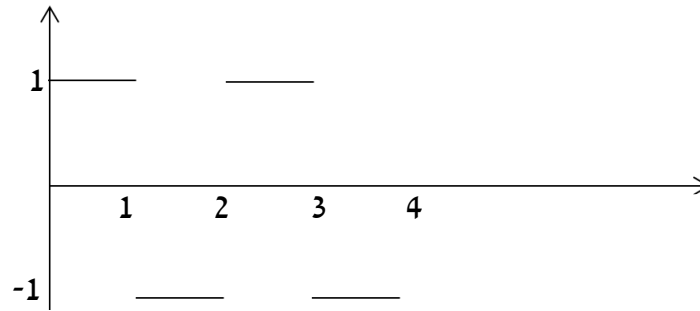
(13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

(14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$

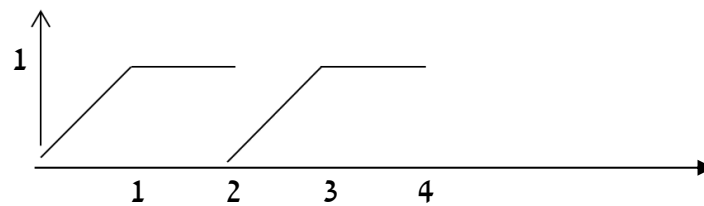
(15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18 הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19 שרטטו את הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20 רשמו את הפונקציה $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21 רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,

של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה : $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$.

23 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה : $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$.

24 ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

תשובות סופיות

$$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2+16} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \quad (8)$$

$$\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3} \quad (10)$$

$$\frac{4}{(s-2)^2+16} \quad (12)$$

$$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+64} \quad (9)$$

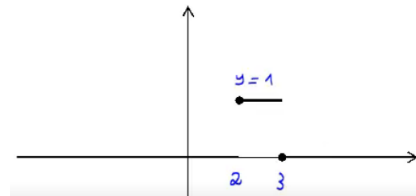
$$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$

$$\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$

$$\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$

$$(19)$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathcal{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות 1-29:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

* בשאלה 27 כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את $f(0)$ ו- $f(\infty)$, כאשר $f(t) = L^{-1}(F(s))$. פתרו בשתי דרכים שונות.

$$\text{הערה: } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

(31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

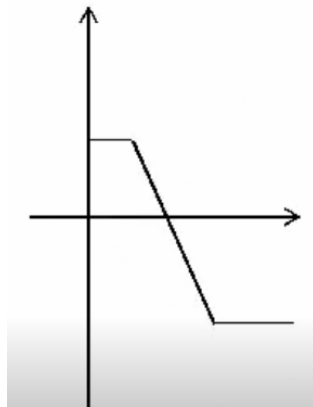
$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

תשובות סופיות

- $$\frac{t^3}{3!} \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$
- $$\frac{1}{3} \sin 2t \quad (4) \qquad e^{10t} \quad (3)$$
- $$e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t \quad (6) \qquad \cos 2t \quad (5)$$
- $$\frac{1}{4} t \sin 2t \quad (8) \qquad e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} \quad (10) \qquad \frac{1}{4} t \sin 2t \quad (9)$$
- $$1 - 2e^{-5t} \quad (12) \qquad \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \quad (11)$$
- $$1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \quad (14) \qquad 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad (13)$$
- $$e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t} \quad (16) \qquad e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t} \quad (15)$$
- $$-6 + 5t + 6e^{-2t} \quad (18) \qquad e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t} \quad (17)$$
- $$2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t} \quad (20) \qquad 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} \quad (19)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75} t \quad (22) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2} t \quad (21)$$
- $$\cos t + e^{-2t} \quad (24) \qquad \sin t + 2e^{3t} \quad (23)$$
- $$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \quad (25)$$
- $$e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad (26)$$
- $$3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3) \quad \text{א.} \quad (27)$$
- $$\text{שרטוט: } \begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases} \quad \text{ב.}$$



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

(31) שאלת הסבר.

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$\text{כאשר } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y'' + 4y' + 5y + 2y = 10\cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t - 2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t - 2\pi) - \delta(t - \pi) \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2) \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

נוסחאות – התמרת לפלס

| $G(s)$ | $g(t)$ |
|---------------------------|--|
| $\frac{1}{s}$ | 1 |
| $\frac{1}{s^2}$ | t |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | t^n (for $n = 1, 2, 3, \dots$) |
| $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$) |
| $\frac{1}{s-a}$ | e^{at} |
| $\frac{1}{(s-a)^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$ |
| $\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$ | $t^{n-1} e^{at}$ |
| $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos(at)$ |
| $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\sin(at)$ |
| $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ |
| $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\sinh(at)$ |
| $\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$ | $\frac{t}{2a} \sin(at)$ |
| $\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$ |
| $\frac{a}{[(s+b)^2+a^2]}$ | $e^{-bt} \sin at$ |

| | |
|---|--|
| $\frac{s+b}{[(s+b)^2+a^2]}$ | $e^{-bt} \cos at$ |
| $\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$ | $t \sin at$ |
| $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $t \cos at$ |
| $\frac{1}{(s-a)^2}$ | te^{at} |
| $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$ |
| $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}}$ | \sqrt{t} |
| $\sqrt{\pi} s^{-\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{t}}$ |
| $\frac{1}{s}$ | $u(t)$ |
| $\frac{e^{-ks}}{s}$ | $u(t-k)$ |
| $e^{-ks} \cdot F(s)$ | $u(t-k) f(t-k)$ |
| $(-1)^n (F(s))^{(n)}$ | $t^n g(t)$ |

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$, ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
- אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

- קונוולוציה:

$$\boxed{L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)}$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 5 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

721. בעיות שטורם ליוביל

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמיט) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.א

(משוואת בסל) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$.ב

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$.

2. מה סכום הטור ב- $x=0$?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x = \sqrt{e}$, $x = 1.5$, $x = 2$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left(\lambda \left(-\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ערכים עצמיים: $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$; בנוסף, $\lambda = -1$ הוא עייע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = e^x$.

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

בנוסף, $\lambda_0 = 0$ הוא עייע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x) = x - 1$.

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ב. סכום הטור ב- $x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$.

$$\text{ג. כאשר } (0 < x < 2), f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. כאשר } 0 < x < \pi, e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

11 א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים : $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x = \sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x = 1.5$ הוא 1; וב- $x = 2$ הוא 0.

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 6 - שיטת פורייה עבור משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי (ללא ספר)

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 7 - שיטת פורייה עבור משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית (ללא ספר)

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 8 - שיטת פורייה עבור משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת (ללא ספר)

אנליזת פורייה ויישומים

פרק 9 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים..... (ללא ספר)