אנליזה מתמטית 2

תוכן העניינים

אנליזה מתמטית 2

פרק 1 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

תשובות סופיות

(1 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(2 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(3 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(5 $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(7 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

(8 $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

(9 $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(-1<x<1\right)$

(10 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $\left(|x|<1\right)$

(11 $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $\left(|x|<1\right)$

(12 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$

(13 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $\left(|x|<5\right)$

(14 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)$

(15 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $\left(|x|<3\right)$

(16 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $\left(|x|<1\right)$

(17 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $\left(|x|<\frac{1}{3}\right)$

(18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $\left(|x|<1\right)$

(19 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1<x\le 1\right)$

(20 $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

(21 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(|x|<1\right)$

(22 $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $\left(-5\le x<5\right)$

(23 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$

(24 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $\left(|x|\le 3\right)$

(25 $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

(26 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

(27 $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

טור טיילור סביב $x=x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x)=\ln x$ $\quad(x_0=1)$

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad(x_0=2)$

3) $f(x)=\sin x$ $\quad\left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0<x\le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0<x<4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty<x<\infty)$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים :

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e
2) e^{-2}
3) $\sqrt{e}$
4) $2e$
5) $\pi/4$
6) $\sin 1$
7) $\cos 1$
8) $\ln 2$
9) $\ln\frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול :

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

6) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

7) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{120}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

6) 216

7) $-\frac{1}{2}$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x|< 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.001)$

3) $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^{\circ}$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר **1** עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$
, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.
הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.
הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.
הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:
$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.
הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	**תחום התכנסות**
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$\begin{aligned}(1+x)^m&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n\\&=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots\end{aligned}$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

אנליזה מתמטית 2

פרק 2 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,|y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,|x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\ge 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\le 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y+1\le\sqrt{1-x^2}\right\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||\,x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\right\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x^2+y^2\le 16\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ y\ge \frac{1}{4}x^2\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ x^2+y^2\ge 4\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\ \ y=t^2$ $\quad t\geq 0$

ב. $x=\sin t,\ \ y=\cos^2 t$ $\quad 0\leq t\leq \pi$

ג. $x=\cos t,\ \ y=4\sin t$ $\quad \pi\leq t\leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x=t-4\ \ ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\ \ ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\ \ ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\ \ ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\ \ ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\ \ ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2+y^2=8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $\mathrm{A}(2,2)$ לנקודה $\mathrm{B}(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.

4) נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2, -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1\ ,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{8}\cos t \\ y(t)=\sqrt{8}\sin t \end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{8}\cos t \\ y(t)=\sqrt{8}\sin t \end{cases}\ \frac{\pi}{4}\le t\le \frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases} x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v \end{cases}\ 0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le \frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases} x(u,v)=u\cos v \\ y(u,v)=u\sin v \end{cases}\ \sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$: מרכז: $(0,0)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi\ \begin{cases} x(t)=5\cos t \\ y(t)=5\sin t \end{cases}$

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi\ \begin{cases} x(u,v)=5u\cos v \\ y(u,v)=5u\sin v \end{cases}$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$: מרכז: $(8,4)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi\ \begin{cases} x(t)=8+5\cos t \\ y(t)=4+5\sin t \end{cases}$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi\ \begin{cases} x(u,v)=8+5u\cos v \\ y(u,v)=4+5u\sin v \end{cases}$.

ב. מקרה 1: $0\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right),\ \begin{cases} x(t)=5\cos t \\ y(t)=5\sin t \end{cases},$

מקרה 2 - $\pi\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi\ ,\ \begin{cases} x=8+5\cos t \\ y=4+5\sin t \end{cases}$.

ג. $\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le \sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases} x(t)=2\cos t,\ \ y(t)=\sqrt{2}\sin t\ \ \ 0\le t\le 2\pi \\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ \ y(t)=2\sin t\ \ \ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ג. המסילה DA: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le t \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה BC : $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi \le t \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה AB : $\arctan\left(\sqrt{2}\right) \le t \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

המסילה CD : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi \le t \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

ד.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1 : \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le v \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3 : \begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi \le v \le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2 : \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right) \le v \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

$$D_4 : \begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0 \le \mathbf{u} \le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi \le v \le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

6) א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=\cosh t\\ y=2\sinh t\end{cases}$, שמאלית: $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=2\sinh t\end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_1:\begin{cases}x(u,v)=u\cosh v\\ y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$

$0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_2:\begin{cases}x(u,v)=-u\cosh v\\ y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$

7) א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ וענף שמאלי $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$.

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ $\quad C:\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ ד. 1

8) 8

9) $6\pi\sqrt{29}$

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

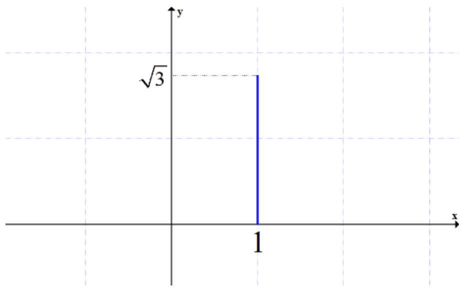
ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

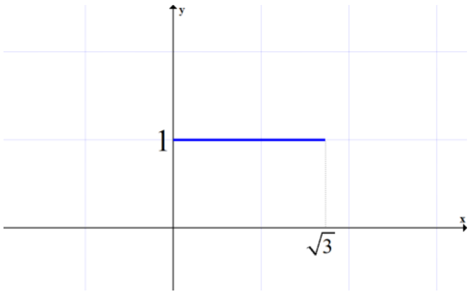
ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א



איור ב



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

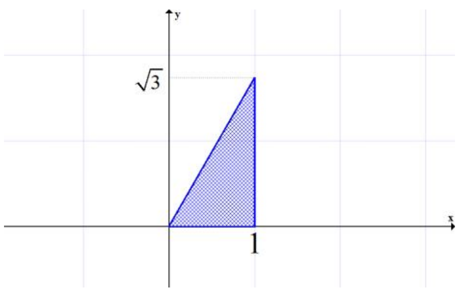
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

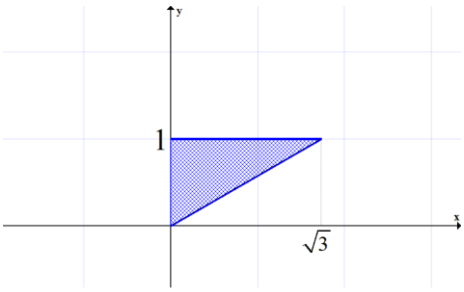
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $r=\frac{1}{\cos\theta}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ ב. $r=\frac{1}{\sin\theta}\quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ or $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $1\le r\le2$, $0.25\pi\le\theta\le\arctan2$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

12) $\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5$, $\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

13) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

14) א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **3-1**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

10) נתונים שני משטחים : $R:\ x^2-y^2+2z^2=3,\ \ Q: 2x^2-y^2+z^2=3$.
א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
ב. הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות , כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C.
כתבו את C בצורה פרמטרית.
ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.
2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
3) היפרבולואיד חד יריעתי.
4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
5) א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.
8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2: (x,y,z)=(3,2t,t)$
10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$
ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0\quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\right\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge \sqrt{3(x^2+y^2)}\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

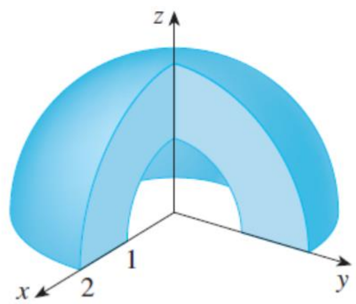
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

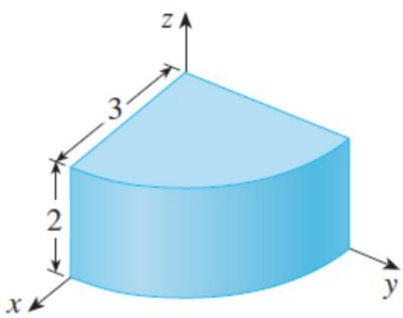
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)\mid\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי $\begin{array}{l} M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3 \\ N: 2x^2-y^2+z^2\le 3 \end{array}$.

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.

שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),
וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

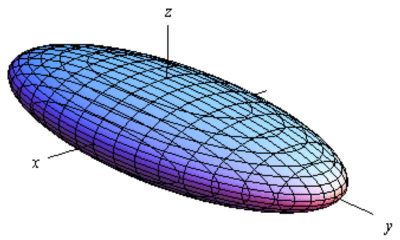
ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

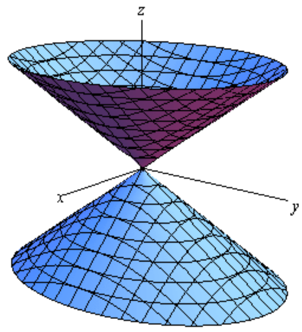
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

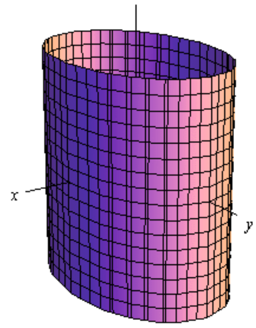


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

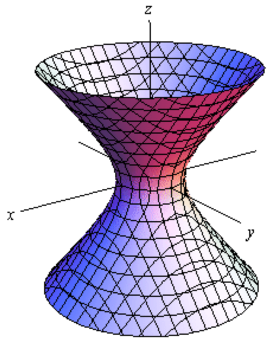


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

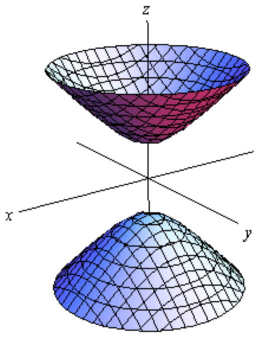


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

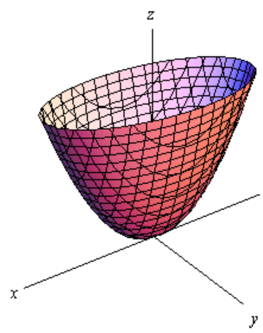


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



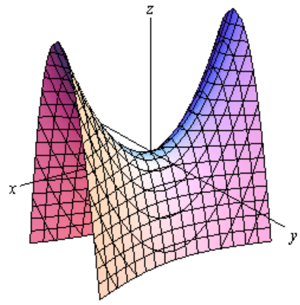
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

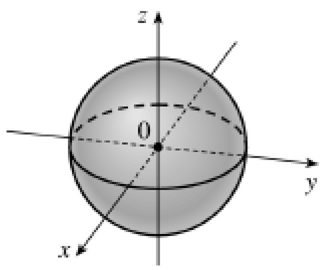
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

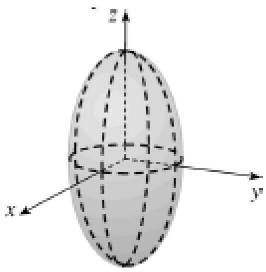
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

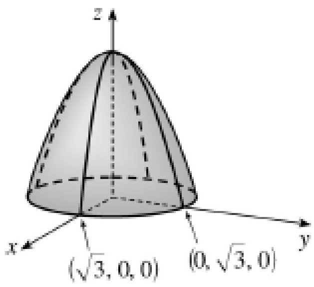
דוגמאות שונות



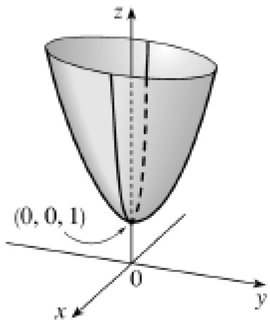
$x^2+y^2+z^2=1$



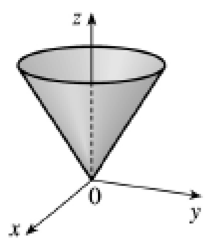
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



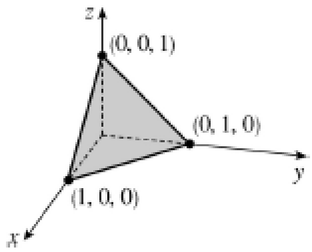
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

אנליזה מתמטית 2

פרק 3 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

1) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

4) $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

5) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

6) $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

7) $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

8) $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

9) $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

10) $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\}$

3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\ \right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\ \right\}$

6) $D=\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ \ x\ge 0\ \}$

7) $D=\{(x,y)\,|\ \ x^2+y^2=4\ \}$

8) $D=\{(x,y)\,|\ |\,x\,|+|\,y\,|<1\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\text{ or }[x>0\text{ and }\ y>4x+1]\}$

11) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\{(x,y)|\ \ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\}$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\{y-x^2,x+y\} \quad (k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases} \quad (k=1)$

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\ne 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

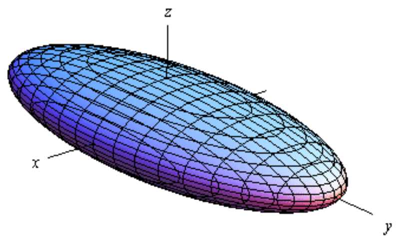
3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

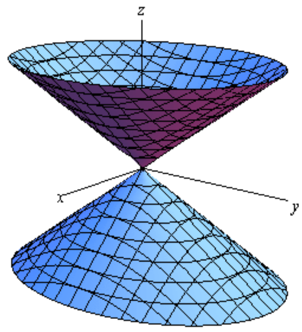
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

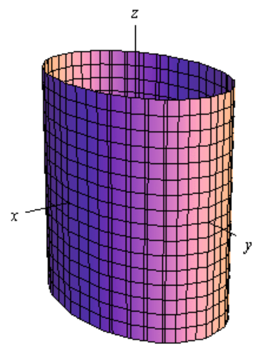


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

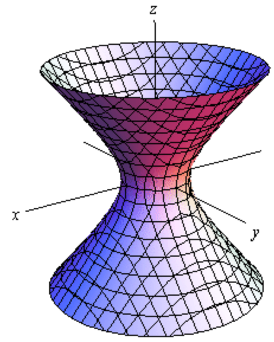


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

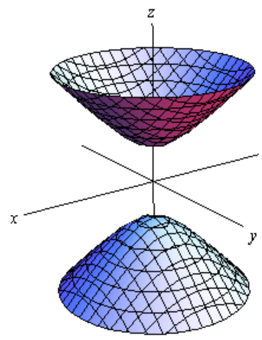


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

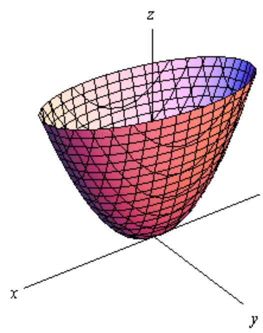


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



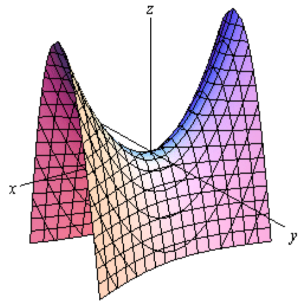
משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

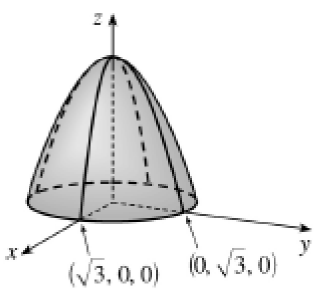
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

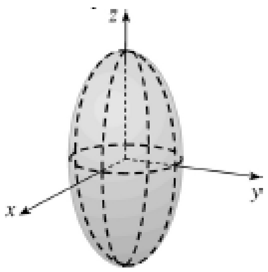
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

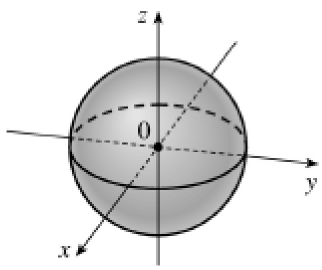
דוגמאות שונות



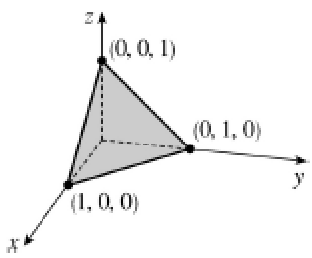
$z=3-x^2-y^2$



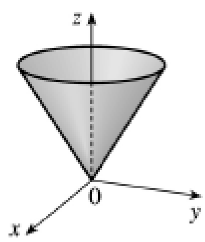
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



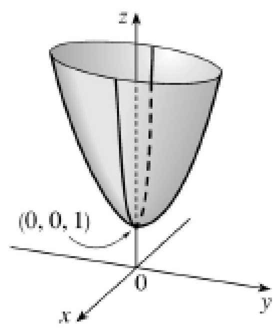
$x^2+y^2+z^2=1$



$x+y+z=1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$z=4x^2+y^2+1$

אנליזה מתמטית 2

פרק 4 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$$

6) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$$

7) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

8) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$$

9) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\dfrac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא ייתנן בגוף השאלה.

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin x+\cos y)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}x^2y=4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}2x^2y=8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה :

אם $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל y ,

וגם $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל x ,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\le \sin^2(x^4+y^4)$, לכל (x,y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי :

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\le|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו :

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ \ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2) , כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \ \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	$---$	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$ $y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = 0$ $a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$ $a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$ $a^\infty = 0$
$y = \sin x$	$---$	$\sin 0 = 0$	$---$
$y = \cos x$	$---$	$\cos 0 = 1$	$---$
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+} = 0$ $\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$ $\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm a = \infty$, $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$, $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ 1^\infty, \ 0^0, \ \infty^0$

אנליזה מתמטית 2

פרק 5 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin(xy)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ \ ;\ \ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות

1) $f_x=12x^2-6xy^2+2$ $\quad f_y=-6x^2y+3$

2) $f_x=5x^4\ln y$ $\quad f_y=\dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x=2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$

4) $f_x=6x^2+6xy+2y^3$ $\quad f_y=6xy^2+12y^3+3x^2$

5) $f_x=\dfrac{x^2+2xy^2+3y}{\left(x+y^2\right)^2}$ $\quad f_y=\dfrac{-3x+3y^2-2x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) $f_x=\cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y=\cos(xy)\cdot x$

7) $f_x=\dfrac{2}{1+(2x+3y)^2}$ $\quad f_y=\dfrac{3}{1+(2x+3y)^2}$

8) $f_r=\cos\theta$ $\quad f_\theta=-r\sin\theta$

9) $f_x=y^2z^3$ $\quad f_y=2xyz^3$ $\quad f_z=3xy^2z^2$

10) $f_u=e^{uv}\left[v\sin ut+t\cos ut\right]$ $\quad f_v=u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t=u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=-2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)=4$

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

15) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבו $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבו $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x=8x-2xy^2+4$, $f_{xx}=8-2y^2$, $f_y=-2x^2y+10$

$f_{yy}=-2x^2$, $f_{xy}=-4xy$, $f_{yx}=-4xy$

2) $f_x=4x^3\ln y$, $f_{xx}=12x^2\ln y$, $f_y=\frac{x^4}{y}$

$f_{yy}=-\frac{x^4}{y^2}$, $f_{xy}=\frac{4x^3}{y}$, $f_{yx}=\frac{4x^3}{y}$

3) $f_x=3x^2-6y$, $f_{xx}=6x$, $f_y=3y^2-6x$

$f_{yy}=6y$, $f_{xy}=6$, $f_{yx}=-6$

4) $f_x=3x^2+3-3y$, $f_{xx}=6x$, $f_y=3y^2+3-3x-6y$

$f_{yy}=6y-6$, $f_{xy}=-3$

5) $f_x=2xy-y^2$, $f_{xx}=2y$, $f_y=x^2-2xy$

$f_{yy}=-2x$, $f_{xy}=f_{yx}=2x-2y$

6) $f_x=2\left[8xy-3y^2\cdot1-24x-0+57y\cdot1+72+0+0\right]$

$f_y=2\left[4x^2\cdot1-3x\cdot2y-0-54y+57x\cdot1+0+27+0\right]$

$f_{xx}=2[8y-0-24]$ $\qquad$ $f_{yy}=2[0-6x\cdot1-54+0+0]$

$f_{xy}=2[8x\cdot1-6y-0+57+0]$

7) $f_x=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$ $\qquad$ $f_y=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right)$

$f_{xx}=e^{xy}\cdot y\left(xy+y^2+1\right)+\left(y+0+0\right)\cdot e^{xy}$ $\qquad$ $f_{yy}=e^{xy}\cdot x\left(x^2+xy+1\right)+\left(0+x\right)\cdot e^{xy}$

$f_{xy}=e^{xy}\cdot x\left(xy+y^2+1\right)+\left(x+2y\right)\cdot e^{xy}$

8) $f_x=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$ $\qquad$ $f_y=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)$

$f_{xx}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+\left(2x+2\right)e^{x+y}$,

$f_{yy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)+\left(2y+2\right)e^{x+y}$

$f_{xy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$

9) $f_x=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$ $\qquad$ $f_y=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)$

$f_{xx}=e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(-4x\cdot2y\right)e^{-x^2-y^2}$

10) $f_x=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$

$f_{xy}=\dfrac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{yy}=\dfrac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$

11) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$f_{yy}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\quad f_{xy}=\dfrac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

12) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\quad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\quad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$f_{yy}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\quad f_{xy}=\dfrac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{3}$

13) $f_x=10\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$

$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$

$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)$ $\quad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$

14) $f_x=yz$ $\quad f_{xx}=0$ $\quad f_{xy}=z$ $\quad f_{xz}=y$

$f_y=xz$ $\quad f_{yx}=z$ $\quad f_{yy}=0$ $\quad f_{yz}=x$

$f_z=xy$ $\quad f_{zx}=y$ $\quad f_{zy}=x$ $\quad f_{zz}=0$

15) -2

16) -1

17) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

18) $\dfrac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

3) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

6) נתונה הפונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאביליות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.
ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

5) א.
$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
ב. לא רציפות.

6) א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות **4-1** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

7) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדקו דיפרנציאביליות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$, המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?

תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל m ג. $m<0.5$
8) שאלת הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.

אנליזה מתמטית 2

פרק 6 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^2$.
חשבו: $z_u\,,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $v=4t+k,\ u=t^2+4m$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

9) נתון: $z=y\cdot f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

11) נתון: $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.
הוכיחו: $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

12) נתון: $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$.
הוכיחו: $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$.
הוכיחו:
א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$
ב. $u_{xy}=u_{yx}$
ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0)=2,\quad g'(0)=1$.

14) נתון: $y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta\ ,\ u=f(x,y)$.
א. הוכיחו: $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.
ב. הוכיחו: $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$.
ג. הוכיחו: $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$.

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

הוכיחו כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

18) נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

1) $z_u=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2+\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_t=e^{u-v}(1)\cdot 2t+e^{u-v}(-1)\cdot 4,\quad z_m=e^{u-1}(1)\cdot 4,\quad z_k=e^{u-v}(-1)\cdot 1$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

אנליזה מתמטית 2

פרק 7 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,
היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y,z)=x^2y^2z$.
חשבו את הנגזרת המכוונת של f , בנקודה $(2,1,4)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) , נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$
בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$, בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $30°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$,
בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$,
בכיוון וקטור היוצר זווית של $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ,
ו- $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- z .
הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q ,
בכיוון וקטור שיוצר זווית $60°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$?

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$,
בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$?

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה 20°,
מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר.
באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$),
בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר,
אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
שחררו את הגֻּלָּה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצאו את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) תהי $f=f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:

1. $f(x,x^2)=\frac{x^2}{2}+x^4$ לכל x.

2. הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$, בנקודה $(1,1)$, בכוון הווקטור $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$,
שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1,1)$.

18) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.

חשבו את $\nabla f(0,2,4)$.

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ תהיה מקסימלית? מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

20) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון

1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.

למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}=(3,4)$.

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הווקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+2$ ב. $8+2\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+2\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$
ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8,32,2)$.
ד. בכיוון הווקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

18) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

19) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$

ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

20) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=(21/29,-20,29)$ (יש אחרים).

אנליזה מתמטית 2

פרק 8 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y', כאשר $x^2+y^5=xy+1$,
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$.

3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x+\ln y=1$.

4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.
חשבו את $y_z(0,0),\ y_x(0,0)$.

6) נתונה המשוואה $x-y=x\cdot y\cdot f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)$.
הוכיחו כי $x^2\cdot z_x+y^2\cdot z_y=z^2$.

7) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.
מצאו $z_{xx}(1,1)$.

8) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$.

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y.

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

10) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$.

א. חשבו את $w_x,\ w_y$.

ב. חשבו $y_x,\ y_w$.

11) נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$.

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת: $\begin{cases} x\cos u + y\sin u + \ln z = f(u) \\ -x\sin u + y\cos u = f'(u) \end{cases}$.

הוכיחו כי:

א. $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

ב. $z_{xy} = z_{yx}$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

2) $y'(1)=5$

3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

6) שאלת הוכחה.

7) $z_x(1,1)=-16$

8) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

9) א. $\left(uv\neq\frac{1}{8}\right)$ $u_x=\frac{12v-1}{8uv-1}, u_y=\frac{4v+2}{8uv-1}, v_x=\frac{3-2u}{8uv-1}, v_y=\frac{4u+1}{8uv-1}$

ב. שאלת הוכחה.

10) א. $\frac{\partial w}{\partial x}=-3uv,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2}(v+u)\ \left(u\neq v\right)$

ב. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2uv}{v+u},\ \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{2}{3(v+u)}\ \left(u\neq\pm v\right)$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5+y^3+y=x^2-1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2+y+e^y=17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה $x=4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3-x^3-3y^2+6x^2+3y-12x+7=0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x,y)$ מתאימה, ובדקו האם קיימת נקודה (x_0,y_0), כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס. בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2+y^2+4=0$

ב. $xy-40x=100$

ג. $x^2-y^2=3$

5) נתונה המשוואה $2x^3+y^3-6xy=0$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y'' עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $x^2+y^2=R^2$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y=f(x)$.
עשו זאת בשתי דרכים:
1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $ax^4+y^4-xy=0$, כאשר a קבוע ממשי.
ידוע שהנקודה $(x_0,0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.

א. מצאו את x_0 ואת הקבוע a.

ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.

ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x.

9) נתונה המשוואה $xy=\ln y-\ln x+1$.

א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.

ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.

ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?

ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x.

ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x+\ln y=y-1$.

א. בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e,e).

ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x=e$?

ג. האם התשובה בסעיף ב׳ עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א׳?

ד. מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.

ה. חשבו את הנגזרת בנקודות הנ״ל.

ו. השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y=f(x)$.

ז. חזרו על סעיף ו׳, רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

11) נתונה המשוואה $y^3+6x\sin y=-8$, ונתונה נקודה $(0,-2)$.

א. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y=y(x)$ בסביבת הנקודה.

ב. פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x=g(y)$.

ב. נתונה המשוואה $x=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x=g(y)$.

ג. חשבו את $g'(1)$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y, $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x,z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.
בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.
מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x,z)$,
ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = u + v, \quad 2)\ y = u^2 + v^2, \quad 3)\ w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$, בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x,y)$?
במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y.

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות:

$$1)\ x = a\cos\phi\cos\theta,\quad 2)\ y = b\sin\phi\cos\theta,\quad 3)\ z = c\sin\theta\quad (a,b,c>0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x,y)$,
בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y.
בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi,x)$,
בנקודה P_0, המתאימה לערכים $\phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$.
במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$ ג. כן. ד. הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה.
ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.

3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.

4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.

5) א. כל נקודה (x,y) שעל המשוואה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ (2,2)$.
ב. $y'=-\frac{2x^2-2y}{y^2-2x}$ ג. כלום! ד. לא.

6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0),\ \left(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a\right)$.
ב. $$y''=-\frac{\left[2x-a\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)\right](y^2-ax)-\left[2y\left(-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}\right)-a\right](x^2-ay)}{\left(y^2-ax\right)^2}$$

7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0),\ (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדרש.

8) א. $x_0=\frac{1}{2},\ a=3$ ב. כן, $(0,0),(-0.5,-0.5)$.
ג. לא. ד. שאלת הוכחה.

9) א. כל נקודה (x,y) שעל $xy=\ln y-\ln x+1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
ב. $y'=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד+ה. לא קיימת.

10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא.
ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
ה. $y'(x)=\frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $\left(x>0,y>0,(x,y)\neq(1,1)\right)$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x)=-2+\frac{1}{2}\sin 2\cdot x+\frac{1}{8}\sin 2(\sin 2-2\cos 2)x^2$

12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1)=-2$

13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.

15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.

16) הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_z(0,0,0.5\pi)=0$, $y_x(0,0,0.5\pi)=-1$

17) א. $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1)=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1)=\frac{3}{2}$ ב. לא מתקיימים.

ג. $w_y(2,2)=3$, $w_x(2,2)=-3$ ד. $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid y>\frac{1}{2}x^2\right\}$

18) א. $\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{1}{b}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{b}{a\sqrt{3}}$ ב. $\frac{\partial z}{\partial \phi}=-c\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2c}{a}$

שימושים גאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע״י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x=-2,\ y=1$?

2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$,
המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

4) למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x,y,z בנקודות A,B,C, בהתאמה.
נסמן: $O=(0,0,0)$.
הוכיחו $OA+OB+OC=a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

5) נתון המשטח $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$, ונתונה הנקודה $(1,2,-1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x+3y-2z=10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.

6) הראו שהמשטח $x^2-2yz+y^3=4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$, בנקודת החיתוך $(1,-1,2)$.

7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C:\ x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=\frac{1}{4}\pi$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$,
ונתונה נקודה $\mathrm{P}\left(x_0,y_0,z_0\right)$, המתקבלת מהצבת $t=t_0$ במשוואת העקום.
הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא
$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום
$C: x=6\sin t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\sin 5t$,
בנקודה בה $t=0.25\pi$.

9) נתונות שתי עקומות
$$\begin{aligned}&C_1: x=2t+1 \quad y=t^2-1 \quad z=t^2+t\\ &C_2: x=s^2 \quad y=-s \quad z=s-1\end{aligned},$$
ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S, וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

10) נתונות שלוש עקומות
$$\begin{aligned}&C_1: x=2t+1, && y=t^2-1, && z=t^2+t\\ &C_2: x=s^2, && y=-s, && z=s-1\\ &C_3: x=u+2, && y=u, && z=u^2-1\end{aligned},$$
ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S, וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy.

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S? נמקו!

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$,
בנקודה P שעליו, היא $\ell:\ \mathrm{P}+t\cdot\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:
$$\begin{cases}2xz-x^2y=3\\ 3x^2y+y^2z=-2\end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

בנקודה P שעליו, היא $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,

כאשר $(a,b,c)=\overrightarrow{\nabla F}(\mathrm{P})\times\overrightarrow{\nabla G}(\mathrm{P})$.

ב. בנקודה $(1,-1,1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz-x^2y=3 \\ 3x^2y+y^2z=-2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, על ידי $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=u^2+v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u,v)=(1,0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u$,

עבור $u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$.

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

1) $3x-6y+2z+18=0$
2) $x-y+z+6=0$, $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$
3) $x+8y+18z=21$, $x+8y+18z=-21$
4) שאלת הוכחה.
5) $Q(7,-9,-15)$
6) שאלת הוכחה.
7) $\ell:\ (x,y,z)=\left(3\sqrt{2},-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)+s\left(3\sqrt{2},-6\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)$
8) א. שאלת הוכחה. ב. $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$
9) א. $P(1,-1,0)$ ב. $x-2z=1$
10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1,-1,0)$. ב. לא.
11) א. שאלת הוכחה. ב. $(x,y,z)=(1,-1,1)+t(3,16,2)$
12) א. שאלת הוכחה. ב. $3x+16y+2z=-11$
13) כל נקודה, למעט $(0,0,0)$. $-2x+z=-1$
14) $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1, שנוסחתו: $x^2+y^2+z^2=1$.

אנליזה מתמטית 2

פרק 9 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות **1-4** לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a,b) :

1) $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\qquad (a,b)=(1,2)$

2) $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\qquad (a,b)=(0,0)$

3) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\qquad (a,b)=(0,0)$

4) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\qquad (a,b)=(2,1)$

5) בעזרת התוצאה של שאלה **2**, חשבו בקירוב את $\ln(1.5)$.

6) בעזרת התוצאה של שאלה **3**, חשבו בקירוב את e^3.

7) בעזרת התוצאה של שאלה **4**, חשבו בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

תשובות סופיות

1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

3) $f(x,y)=1+4y-x^2+7y^2$

4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

5) $\frac{3}{8}$

6) 19

7) $\frac{101}{81}$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

1) חשבו בקירוב: $\ln\left(0.01^2+0.99^2\right)$.

2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

4) נתונות שתי צלעות במלבן $a=10\,\text{cm},\ \ b=24\,\text{cm}$.
חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- $4\,\text{mm}$ ואת הצלע b יקצרו ב- $1\,\text{mm}$.

5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה.
השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%.
העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

1) $\cong -0.01$

2) $2\frac{7}{3200}$

3) 8%

4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.

5) 5%

אנליזה מתמטית 2

פרק 10 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2 \qquad Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם
את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$.
א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.
ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a
הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.
2) $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.
3) $(0,0)$אוכף; $(1,1)$ מינימום.
4) $(-1,\ 1)(-1,\ -1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ 0),(1,1),(1,\ -1)$ אוכף.
5) $(0,\ 2)$ מקסימום.
6) $(4,\ 4)$ מקסימום.
7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.
8) אין נקודות קריטיות.
9) $z = 3, \quad z = 4$
10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
12) $P_2 = 12\$ \qquad P_1 = 10\$,$ רווח מקסימלי 288$.
13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2,\ a = 2$, לא ניתן לדעת; $a > 2,\ a < -2$
אוכף; $-2 < a < 2$ מינימום.
14) $a = -6,\ b = 4$

אנליזה מתמטית 2

פרק 11 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **5-1**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **11-7** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.
מצאו ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b.

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b, המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$, נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$, $a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

אנליזה מתמטית 2

פרק 12 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $2x^2+3xy=1-2y^2$ $f(x,y)=x^2+y^2;$

2) $x^2+y^2=1$ $f(x,y)=x^2-y^2;$

3) $x^2+y^2=13$ $f(x,y)=4x+6y;$

4) $x^2+2y^2=6$ $f(x,y)=x^2y;$

5) נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

2) $\max(\pm1,0)$ $\min(0,\pm1)$

3) $\min(-2,-3)$ $\max(2,3)$

4) $\min(\pm2,-1)$ $\max(\pm2,1)$

5) $\max(6,2)$

6) $\max(9,36)$

7) $(6,2)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max(6,2)$

12) $\max(2,3)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\{2K+L\}$

14) שאלת הוכחה.

אנליזה מתמטית 2

פרק 13 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס״מ, אורך 4 ס״מ, גובה 2 ס״מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.

4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $256/13$. המרחק הארוך ביותר $320/13$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $75/17$. מרחק מקסימלי 10.

אנליזה מתמטית 2

פרק 14 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום R, כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום R, כאשר R הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

אנליזה מתמטית 2

פרק 15 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **3-1**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y) \mid y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

11) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint\limits_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a, שמרכזו בראשית.

14) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a,\ y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10) $$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx +$$
$$+\int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

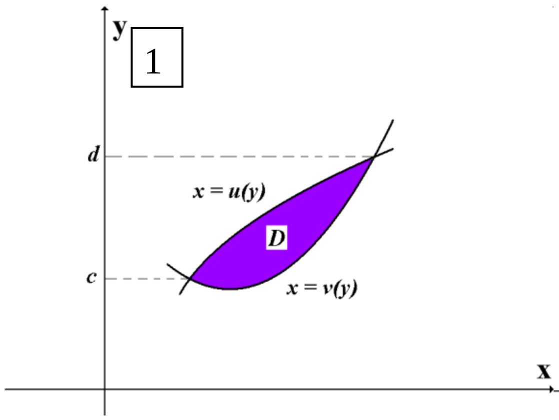
הערות סימון

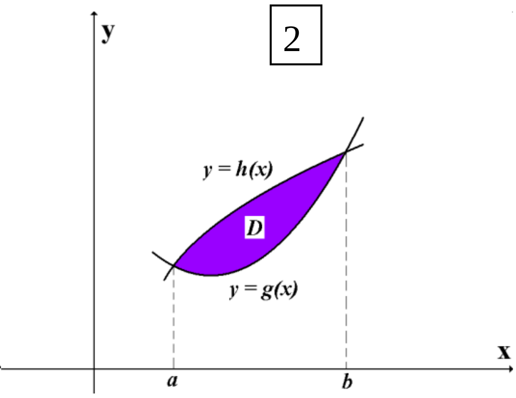
$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$





שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

אנליזה מתמטית 2

פרק 16 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות **1-4** חשבן את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים:

1) $x+y=2,\quad x^2-4y=4$

2) $(a>0)\quad xy=a^2,\quad x+y=\frac{5}{2}a$

3) $y^2=9-x,\quad y^2=9-9x$

4) $x+y=3,\quad y^2=4x$

בשאלות **5-10** חשבן את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים:

5) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

6) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

7) $(x>0)\ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

8) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

9) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

10) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

11) ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,
יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12) ללוח דק בצורת מלבן $R=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2},\quad -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right\}$,
יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).
חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M.

13) מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$, הנמצא מעל למלבן
$R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4\}$, שבמישור xy.

תשובות סופיות

1) $\frac{64}{3}$

2) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$

3) 32

4) $\frac{64}{3}$

5) $\frac{5}{6}$

6) $\frac{88}{105}$

7) $\frac{17}{6}$

8) $16\frac{1}{5}$

9) $\frac{8}{3}$

10) 36

11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$

12) $\frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12}$

13) $\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$

אנליזה מתמטית 2

פרק 17 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

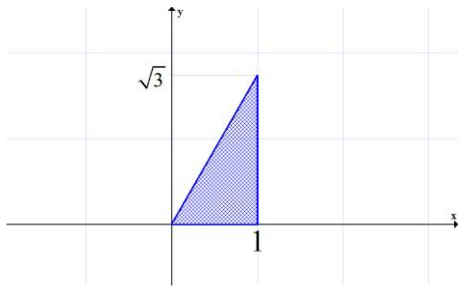
ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

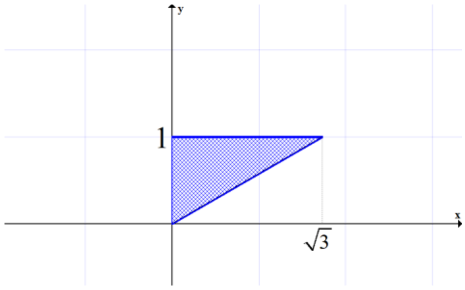
5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0.5\pi \le \theta \le 1.5\pi \end{cases}$

2) א. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -0.5\pi \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ *or* $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 1.5\pi \le \theta \le 2.5\pi \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

3) א. $1 \le r \le 2$, $0.25\pi \le \theta \le \arctan 2$ ב. $0 \le r \le 2,\ 0.25\pi \le \theta \le 1.25\pi$

4) $$\frac{25}{7\sin\theta - \cos\theta} \le r \le 5$$
$$\arctan\frac{4}{3} \le \theta \le \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi$$

5) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

6) א. $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ $\quad 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ $\quad 0 \le r \le \dfrac{1}{\sin\theta}$

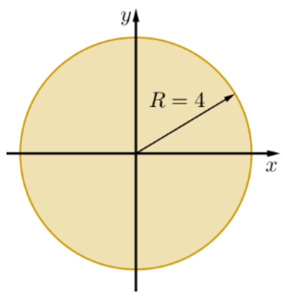
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

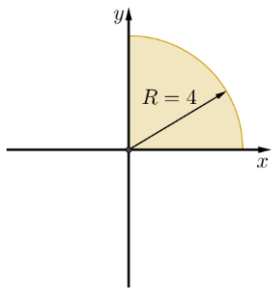
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

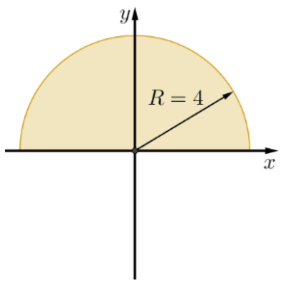
א.



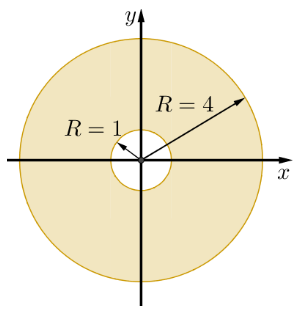
ב.



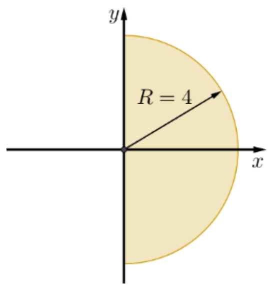
ג.



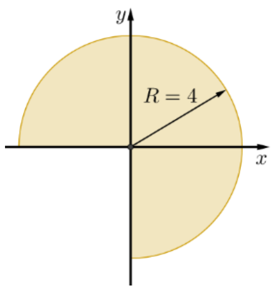
ד.



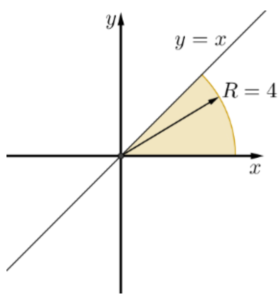
ה.



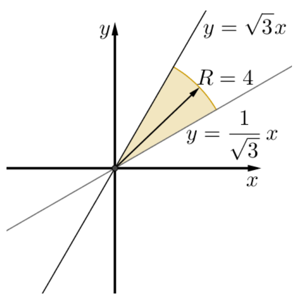
ו.



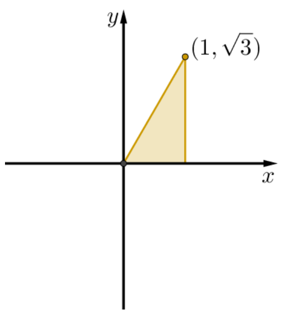
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-2**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות :

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **20-18** חשבו את **נפח הגוף** המתואר :

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{\pi}{8}$ 5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2 7) 2π 8) 36 9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi\ln\frac{e}{2}$ 11) $\pi(4-\pi)$ 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$ 15) $-\frac{4}{5}$ 16) $\pi\ln\frac{4}{e}$ 17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

אנליזה מתמטית 2

פרק 18 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

2) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x},\ y=0.5x,\ y=x$.

3) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{C}(1,1),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{A}(0,0)$.

4) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{D}(1,5),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{A}(-1,3)$.

5) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2,\ xy^2=1,\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x}$.

7) חשבון את האינטגרל הכפול $\iint\limits_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

אנליזה מתמטית 2

פרק 19 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבון את האינטגרלים בשאלות **4-1**:

1) $$\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$$

2) $$\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$$

3) $$B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,-1\le y\le 2,0\le z\le 3\right\}\ ,\ \iiint_B xyz^2dV$$

4) $$B=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le\sqrt{x}\ ,0\le z\le 1+x+y\right\}\ ,\ \iiint_B 6xydV$$

חשבון את האינטגרלים בשאלות **8-5**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $$\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}dxdydz$$

6) $$\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}dydxdz$$

7) $$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3}\frac{\pi e^{2x}\sin\pi y^2}{y^2}dxdydz$$

8) $$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x\frac{\sin 2z}{4-z}dydzdx$$

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

11) $\left(x\geq 0\right)\ \ z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\dfrac{2}{x}$

12) $z=0,\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $\left(z\geq 0\right)\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $\left(k>0\right)$.

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\right\}$, סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\quad M=\frac{1}{2}\pi k h^2 r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

אנליזה מתמטית 2

פרק 20 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

1) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\left(x^2+y^2\right)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dzdydx$

2) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$

3) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

4) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2} dzdydx$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

10) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12) חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13) הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14) חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15) ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:
א. $$V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta$$
ב. $$V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

ב. $V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos\phi} r^2 \sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

6) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int\limits_{x=-2}^{2}\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=1}^{2}\int\limits_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$ ג. $V=\int\limits_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$

אנליזה מתמטית 2

פרק 21 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבון את $\iiint_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים
$xy=4,\quad xy=2,\quad z=y+1,\quad z=y,\quad x=3,\quad x=1$.

2) חשבון את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשבון את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשבון את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=4z^2,\quad y=z^2,\quad y=4x-12,\quad y=4x,\quad y=2z,\quad y=z$.

5) חשבון את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר G הוא כדור שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1 .

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π