אנליזה מתמטית 1

תוכן העניינים

1. וקטורים גיאומטרים 1
2. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב 11
3. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה 42
4. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות 53
6. גבול של פונקציה 75
7. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים 93
8. הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות 108
9. חישוב נגזרת של פונקציה 121
10. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי 134
11. כלל לופיטל 145
12. חקירת פונקציה 152
13. חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות 181
14. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 185
15. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) 190
16. משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב 210
17. אינטגרלים מיידיים 216
18. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 221
19. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 223
20. אינטגרלים בשיטת ההצבה 227
21. אינטגרלים של פונקציות רציונליות 230
22. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות 235
23. האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו 246

תוכן העניינים

24. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) 259
25. שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת) 281
26. המשפט היסודי של החדו״א (גזירת האינטגרל) 286
27. אינטגרלים לא אמיתיים 294
28. מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות 305

אנליזה מתמטית 1

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים

תוכן העניינים

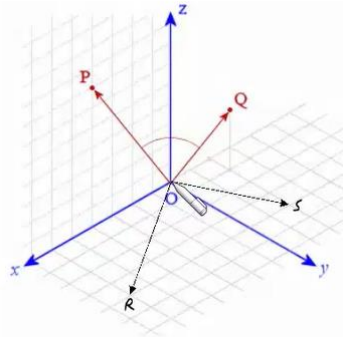
1. וקטורים 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 8
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 10

וקטורים

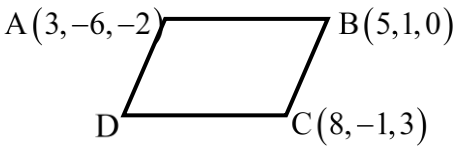
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \mathbf{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

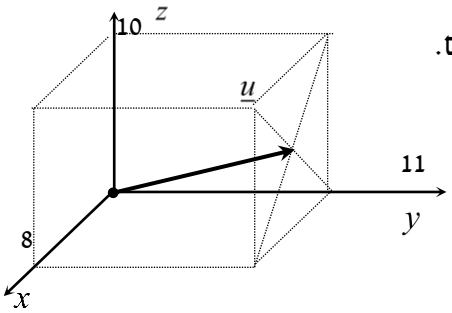
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



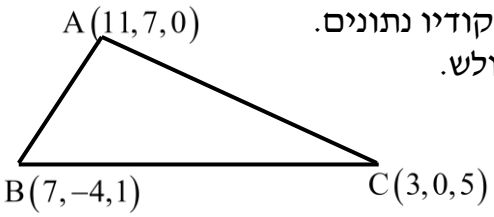
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



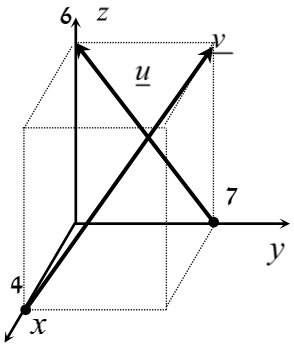
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



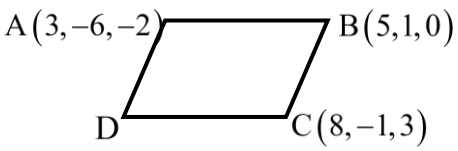
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$, כאשר:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) ענו על חמשת הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.

ב. הוכיחו כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.

ג. הוכיחו כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.

ד. הוכיחו כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}$*

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3)$, $B(4,-1,2)$, $C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$

ב. $(v\times w)\cdot u$

ג. $w\cdot(u\times v)$

ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. -6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3}, \quad L_2: \quad x+7=y-5,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של ישר 11
2. מצב הדדי בין ישרים 14
3. הצגה פרמטרית של מישור 16
4. משוואת מישור 17
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור 18
6. מישורים המקבילים לצירים 19
7. מצב הדדי בין ישר ומישור 20
8. מצב הדדי בין מישורים 21
9. ישר חיתוך בין מישורים 22
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים 23
12. זווית בין ישר ומישור 24
13. זווית בין שני מישורים 25
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב 26
16. מרחק בין נקודה לישר 27
17. מרחק בין נקודה למישור 28
18. מרחק בין ישרים מקבילים 29
19. מרחק בין ישר למישור 30
20. מרחק בין מישורים מקבילים 31
21. מרחק בין ישרים מצטלבים 32
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. שאלות מסכמות 33

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

7) מצאו את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות $A(3,-1,5)$, $B(k,-1,3)$, $C(-6,3,-1)$, $D(-2,3,k)$.
הראו כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

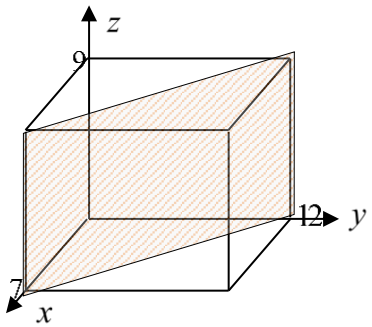
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$, $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת מישור

שאלות

1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi: -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi: x-3y+8z=0$

4) $\pi: 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$, $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$, $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6,5,1)$, $D(-1,4,2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$, $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$

2) $44.83°$

3) $14.9°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$

2) $87.539°$

3) $32.312°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשבו את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi:2x+4y-4z+15=0$, $\ell:\underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2: \underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$

$$l_3: \underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4: \underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים k, q ו- p, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
2) 1.567 יח"א.
3) $\sqrt{2}$ יח"א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$, $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

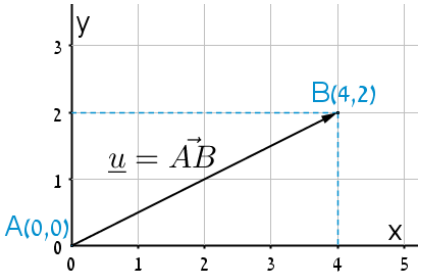
סיכום כללי

הגדרה כללית

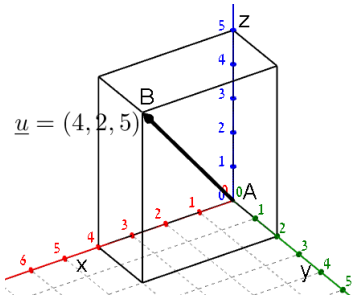
וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.



וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

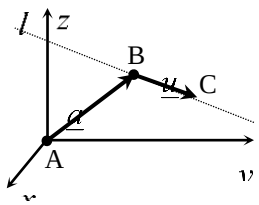
מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$; $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

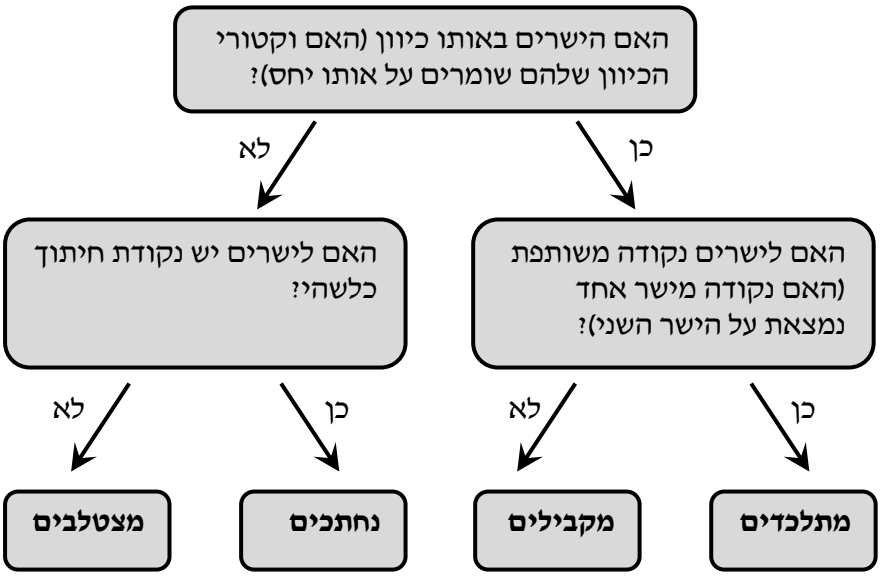
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

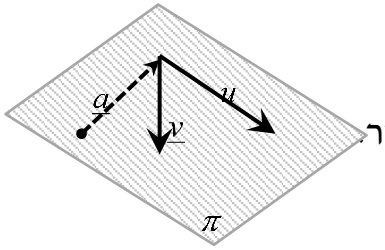
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 3 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. קואורדינטות קוטביות 42
2. הנגזרת ושימושיה 44
3. שימושי האינטגרל המסוים 45

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=3+8\sin\theta$ בנקודה $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=1-2\sin\theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

1) $y=\frac{11\sqrt{3}}{5}x-\frac{98}{5}$

2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\ ,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r=2(1+2\cos\theta)$.

2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=6+4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y.

3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=3+2\sin\theta$.

4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=3+2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r=2$.

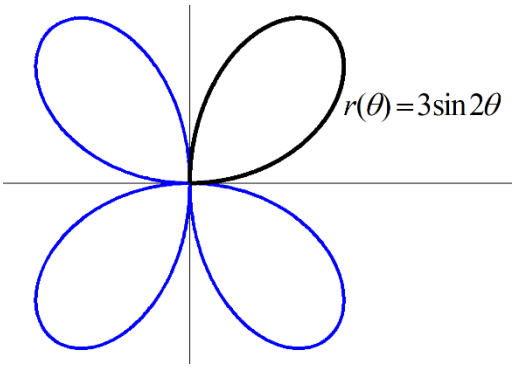
5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ומחוץ ל- $r=3+2\sin\theta$.

6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ובתוך $r=3+2\sin\theta$.

7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r=2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r=1$.

8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r=1+\cos\theta$.

9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r=3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



10) מצאו את אורך העקום $r=\theta$, כאשר $0\le\theta\le 1$.

11) העקום $r=\cos\theta$, כאשר $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) העקום $r=4+4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

1) $S=4\pi-6\sqrt{3}=2.174$

2) $S=22\pi-48$

3) $S=11\pi$

4) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$

5) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$

6) 10.37

7) $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) 8

9) $\ell=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2\theta}\,d\theta$

10) $\ell=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

11) $S_x=\pi$

12) $S_y=102.4\pi$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

1) $r\cos\theta = a$ - הישר $x = a$.
2) $r\sin\theta = b$ - הישר $y = b$.
3) $\theta = \beta$ - הישר העובר דך הראשית $y = (\tan\beta)x$.

מעגלים

1. $r = a$ - מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a.
2. $r = 2a\cos\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו $|a|$.
3. $r = 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(0,b)$ ורדיוסו $|b|$.
4. $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנק' (a,b) ורדיוסו $\sqrt{a^2+b^2}$.

קרדיודות ולמניסקטות

1) קרדיודות $r = a \pm a\cos\theta,\ r = a \pm a\sin\theta$:
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

2) למניסקטות עם לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a < b)$:
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

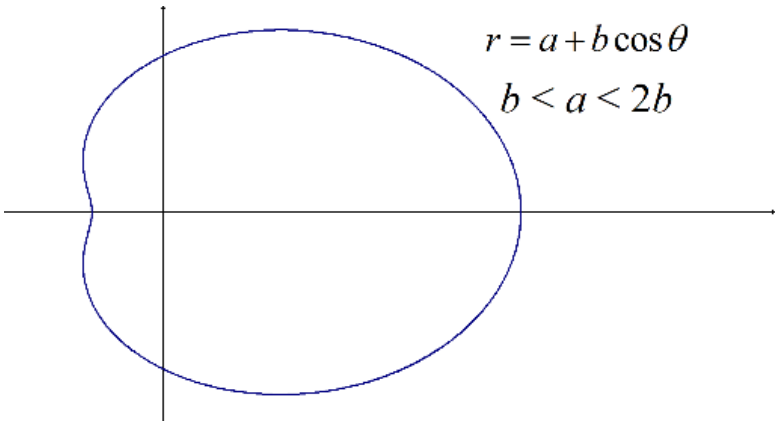
3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a > b)$:
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

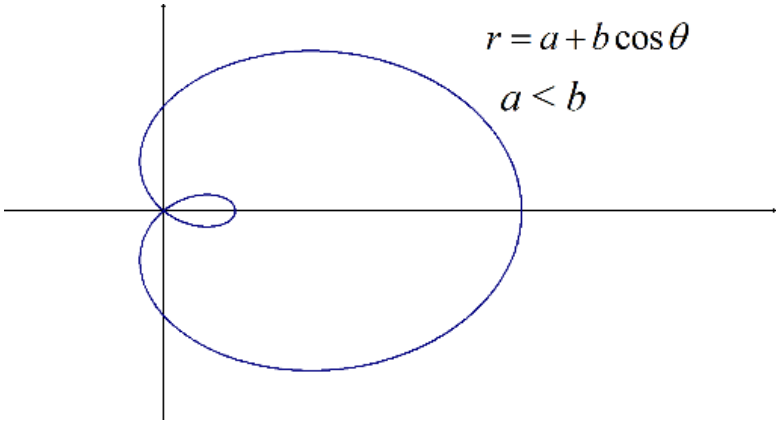
* נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם $0 \le \theta \le 2\pi$.

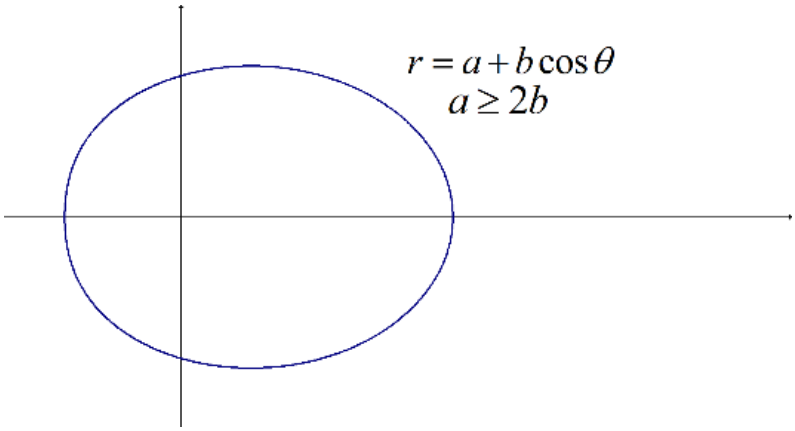
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

למינסקטות ביתר פירוט

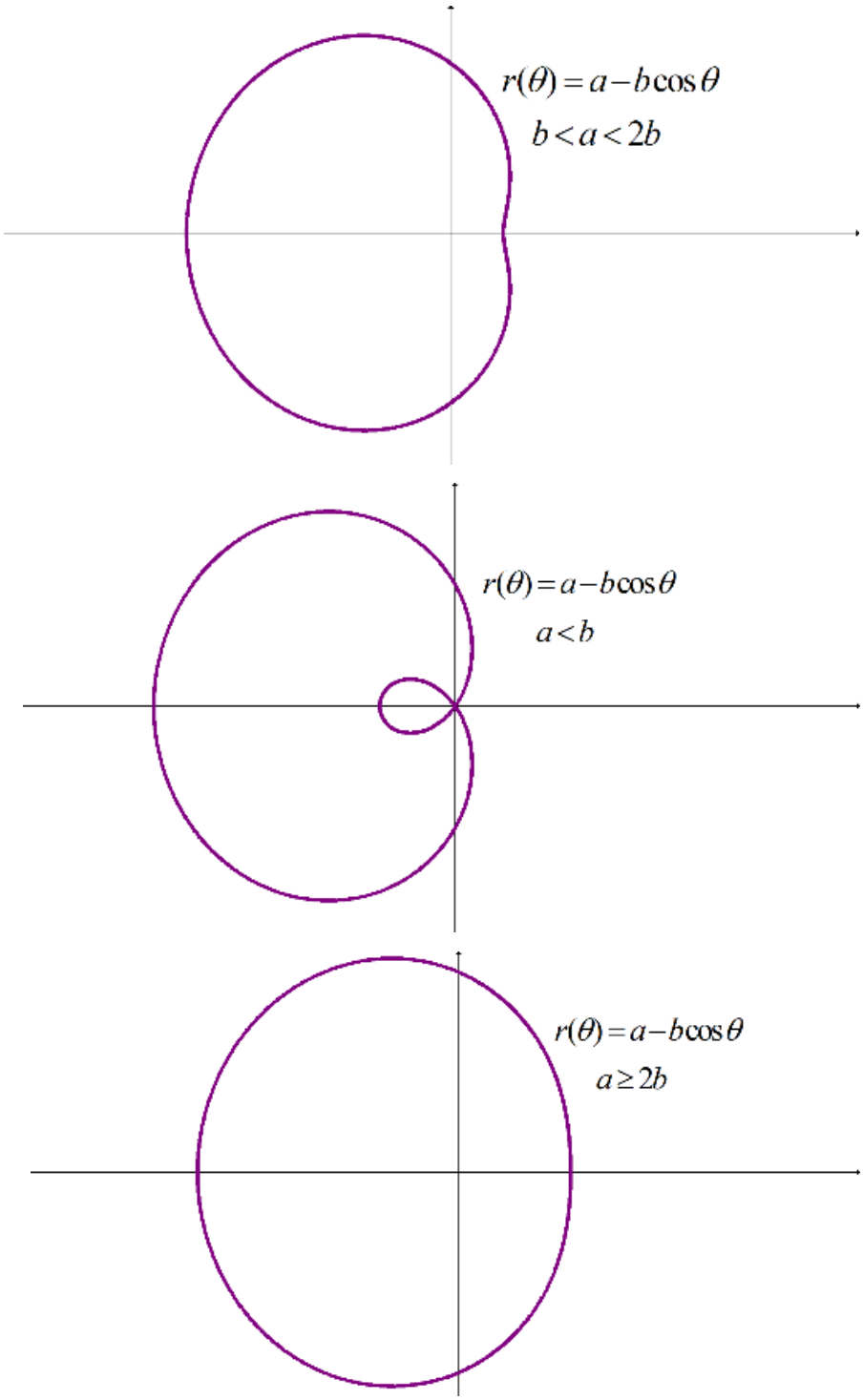
הגרף של $r = a + b\cos\theta$:





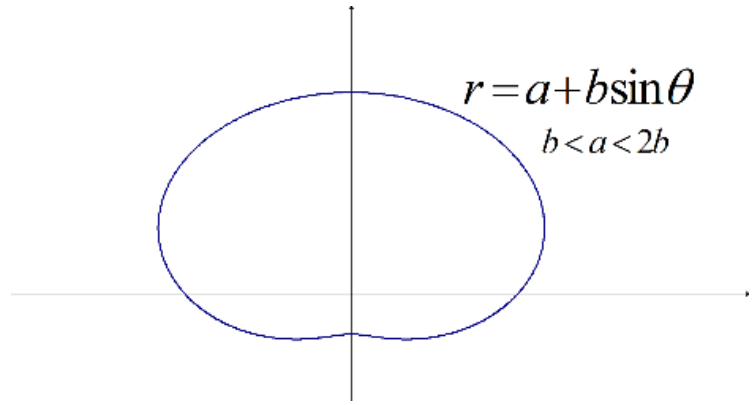


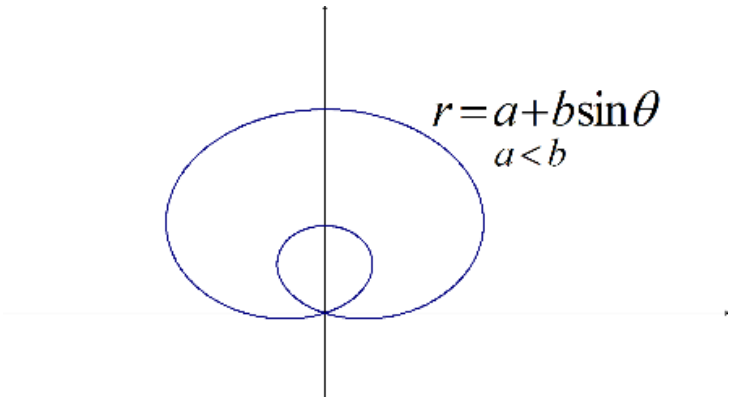
הגרף של $r = a - b\cos\theta$

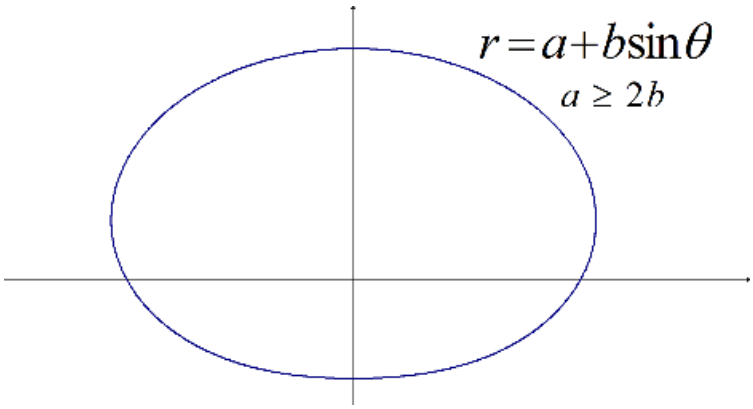


כתב ופתר – גיא סלומון ©

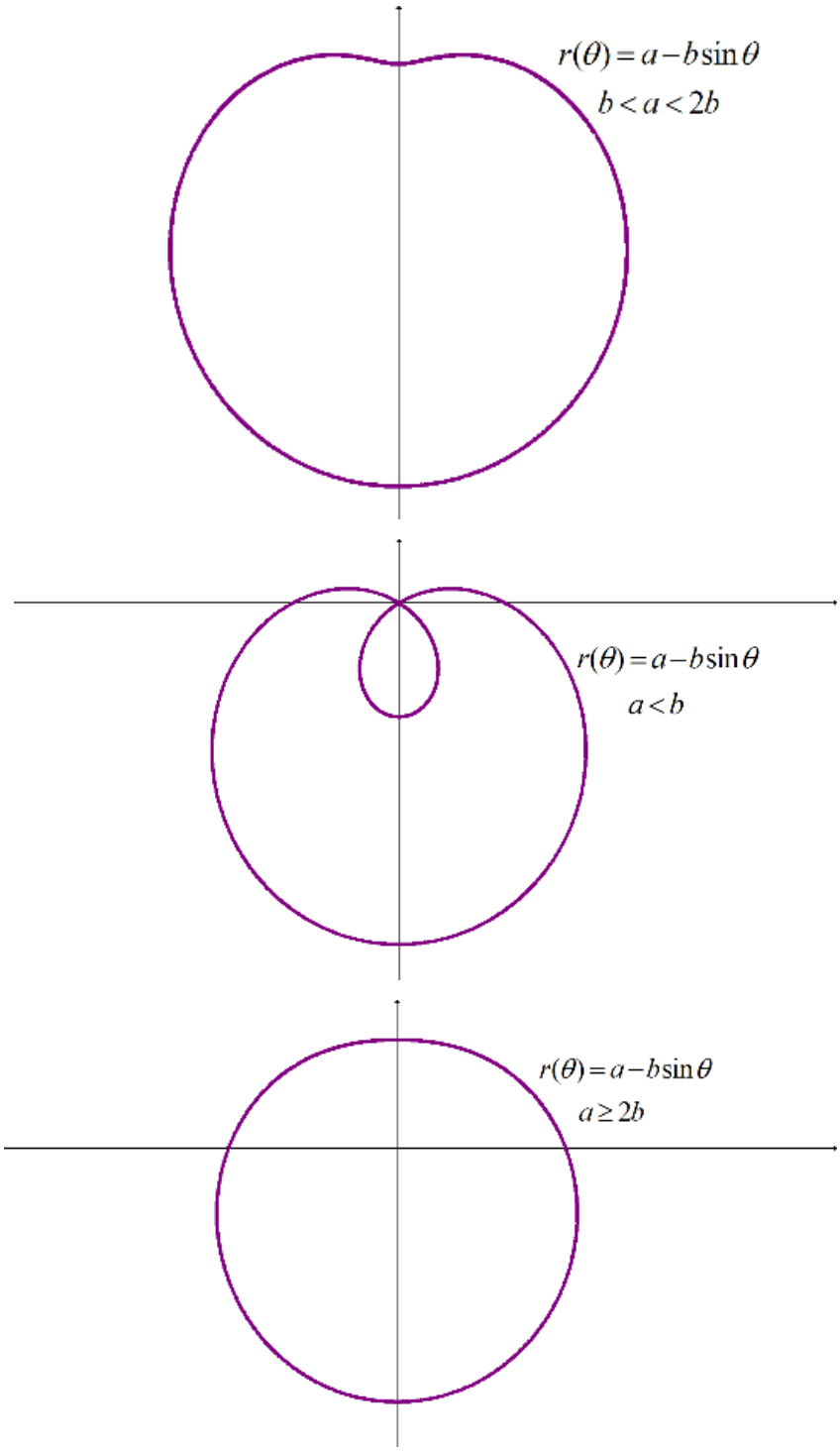
הגרף של $r = a + b\sin\theta$





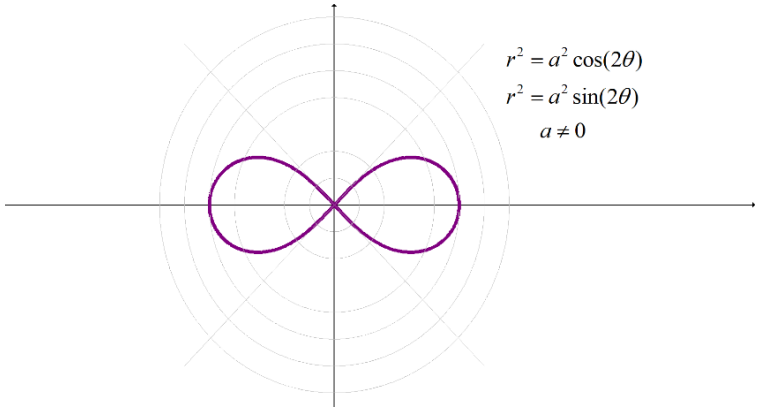


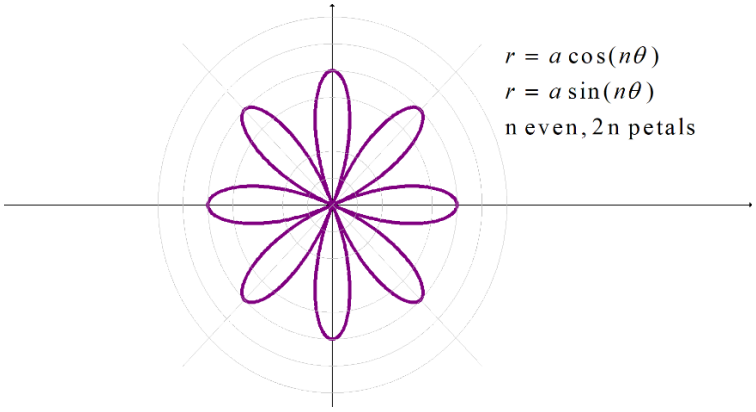
הגרף של $r = a - b\sin\theta$

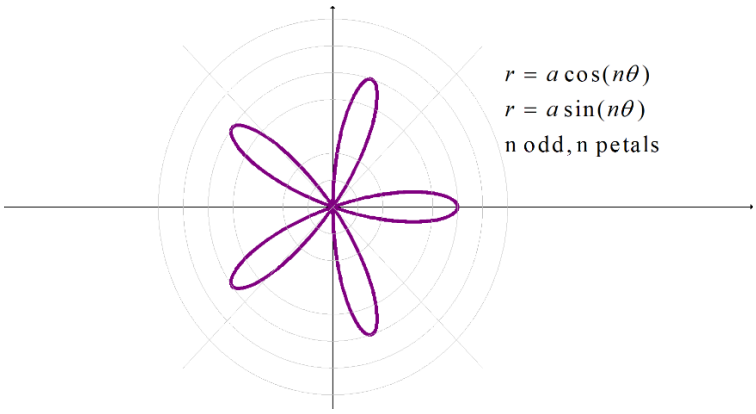


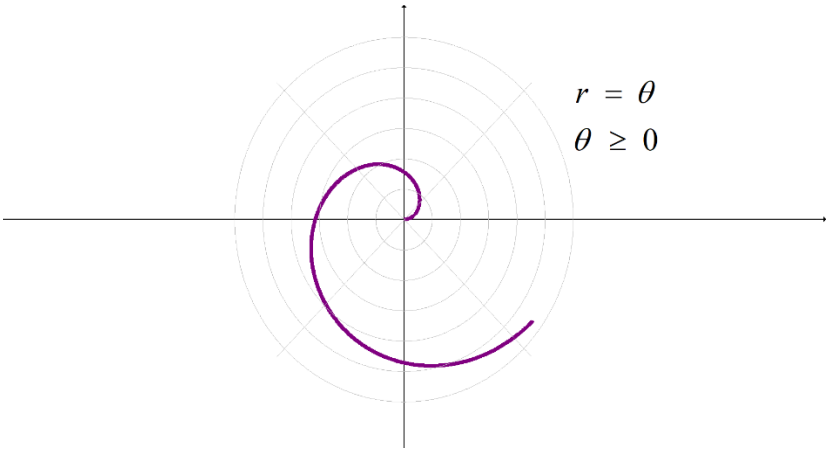
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים נפוצים נוספים









כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 4 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות ..... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה ..... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום ..... (ללא ספר)

אנליזה מתמטית 1

פרק 5 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה 53
2. הרכבת פונקציות 55
3. הפונקציה ההפוכה 58
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 62
5. פונקציה מחזורית 67
6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית 70
7. תרגילים משולבים 71

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y=x^3-x^2-4x+1$

2) $y=\frac{1}{x^2-4}$

3) $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{1}{x^3-x}$

5) $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

6) $y=\sqrt{x-4}$

7) $y=\sqrt{x^2+x-2}$

8) $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

11) $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

12) $y=e^{x^2+x+1}$

13) $y=\log_x\left(x+4\right)$

14) $y=\tan\left(10x\right)$

15) $y=\cot\left(4x\right)$

16) $y=\arctan\left(x+4\right)$

17) $y=\arcsin\left(x-4\right)$

18) $y=\arccos\left(x+1\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל x.

4) $x \neq 0,1,-1$

5) $x \neq 2,-1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2$, $x \geq 1$

8) כל x.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2$, $x > 1$

11) $x > 0$, $x \neq 1$

12) כל x.

13) $x > 0$, $x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל x.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $f(x)=x^2-7x,\ g(x)=\ln x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו $f(g(x)),\ g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\geq 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\leq -3$
2. $n\geq 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x))))}_{n \text{ times}}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) $\frac{69}{13}$

4) -10

5) 4

6) $f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ (3x)^2 & x\le 0\end{cases}$, $g(f(x))=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

1) $f(x)=\frac{x-1}{3}$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

4) $f(x)=x^2-4 \quad (x\ge 0)$

בתרגילים **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

6) $f(x)=x^2-x$

7) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

9) $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

10) $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\quad f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2-4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.
ג. אם f ו- g על, אז h על.
ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.
ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.
ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.
ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.
ב. f על.
ג. g חח"ע.
ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$,

ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y .

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$, $y\neq 3$

4) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$, $y\geq -4$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(1,\infty]$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

7) $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=f(x^2)$, $k(x)=-f(x)$.

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f(x^4)$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.

נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

14) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.

ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.

קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נגדיר: $f_{odd}(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},\quad f_{even}(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.

ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.

ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב- $x=0$ אז $f(0)=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

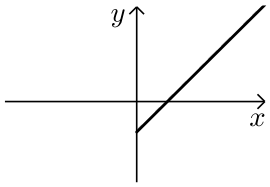
20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

א. $y=\arctan x$

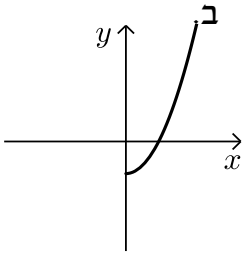
ב. $y=\arcsin x$

21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

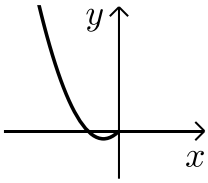
א.



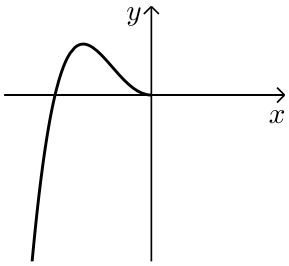
ב.



ג.

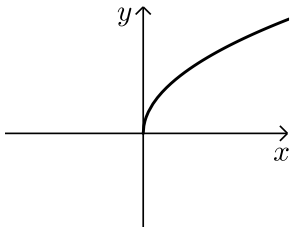


ד.

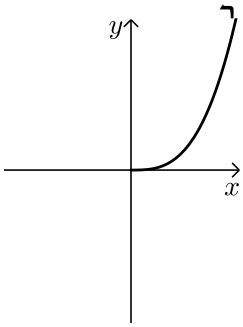


22) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

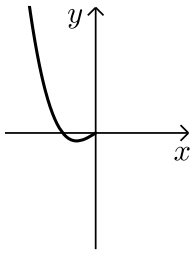
א.



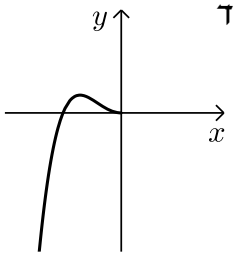
ב



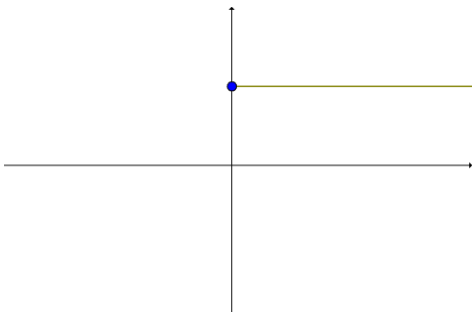
ג.

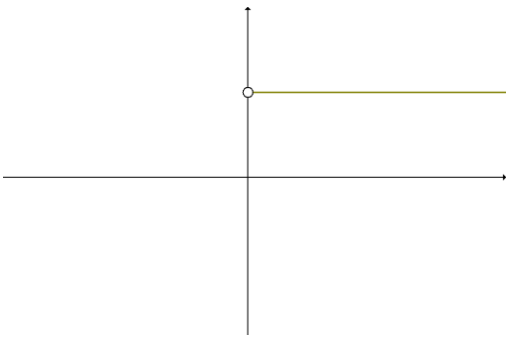


ד



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





תשובות סופיות

שאלות **1-8** : זוגית : **2,3,5,8** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **6,7**.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב'.

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

16) א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x)=\underbrace{x}_{odd}+\underbrace{x^2+1}_{even}$

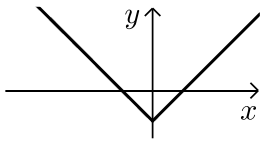
17) שאלת הוכחה.

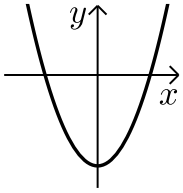
18) שאלת הוכחה.

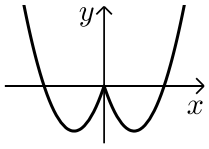
19) שאלת הוכחה.

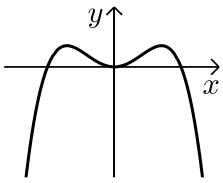
20) שאלת הוכחה.

21) להלן הגרפים :

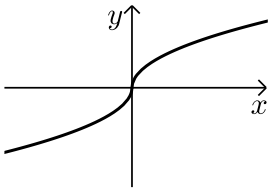
א.


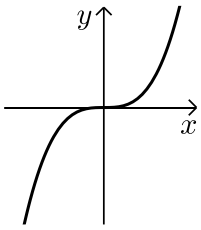
ב.


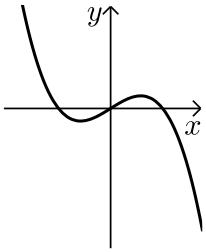
ג.


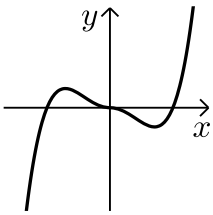
ד.


22) להלן הגרפים :

א.


ב.


ג.


ד.


23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

1) $y=1+10\sin(0.5x+4)$

2) $y=1+14\cos 20x$

3) $y=-4+20\tan 4x$

4) $y=-1+14\sec 2x$

5) $y=\sin^2 4x$

6) $y=\cos^2 2x$

7) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

8) $y=(\sin x+\cos x)^2$

9) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

10) $y=\cot^2 x$

11) $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

12) $y=\sin 4x+\sin 14x$

13) $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

14) $y=\cos 2x\cos x$

15) $y=\sin^3 x$

16) $y=\sin^4 x$

17) $y=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

18) $y=|\sin x|$

19) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

20) $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

21) $y=x+\sin x$

22) $y=x+\cos x$

23) $y=x\sin x$

24) $y=x^2\cos x$

25) $y=\frac{\sin x}{x}$

26) $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5x}$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

27) הוכיחו:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

28) הוכיחו: אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x+nT)=f(x)$.

29) נתון כי f,g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1, p_2 , בהתאמה.

נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.

הוכיחו כי גם הפונקציות $f \pm g,\quad f \cdot g,\quad \frac{f}{g}\ (g \neq 0)$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x]$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f .

32) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$.

ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x ,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 4π	2) $\frac{\pi}{10}$	3) $\frac{\pi}{4}$	4) π	5) $\frac{\pi}{4}$
6) $\frac{\pi}{2}$	7) π	8) π	9) $\frac{\pi}{2}$	10) π
11) 40π	12) π	13) 2π	14) 2π	15) 2π
16) π	17) π	18) π		

19) הפונקציה היא למעשה $y=1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

20) $\frac{\pi}{2}$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

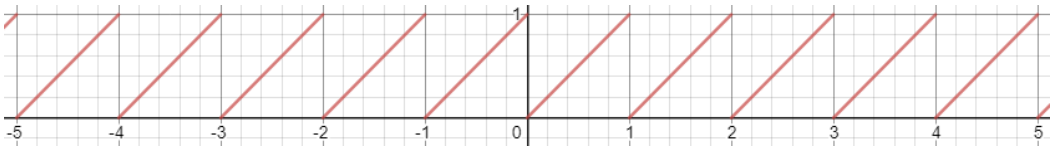
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

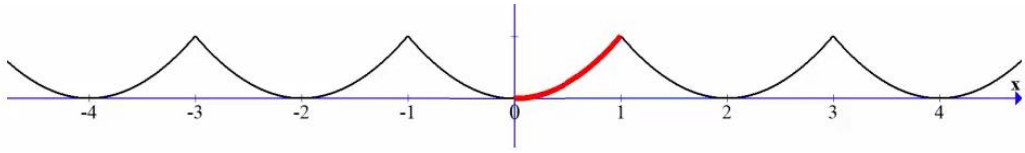
30) א.



ב. 1 ג. שאלת הוכחה.

31) $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.

32) $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$

2) $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$

4) $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$

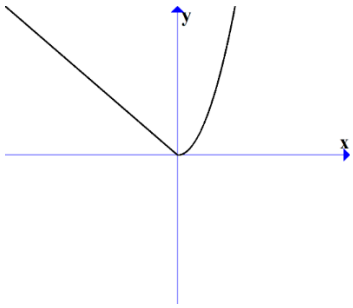
2) $y=\begin{cases} 3x+3 & x\ge -1 \\ -3x-3 & x<-1 \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} x^2+2x-2 & x\ge 1 \\ x^2-2x+2 & x<1 \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

5) א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.



ג. כללית.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
איזו טענה נכונה?
א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\le 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f(g(x))$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\ge f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=(3\lfloor x\rfloor)^3+27\lfloor x\rfloor$.
$g(x)=f(x)+x^3-28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב' נכונה.

4) טענה א' נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 6 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה 75
3. צמצום 76
4. הכפלה בצמוד 77
5. גבולות טריגונומטריים 78
6. פונקציה שואפת לאינסוף 81
7. איקס שואף לאינסוף 82
8. הגבול של אוילר 84
9. כלל הסנדויץ 85
10. גבול של פונקציה מפוצלת 87
11. גבול לפי הגדרה 90

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) 4

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) 4 9) $\frac{1}{4}$

10) $-\frac{1}{2}$ 11) $\cos a$ 12) $-\sin a$ 13) $\frac{1}{\cos^2 a}$

14) $\frac{4}{10}$ 15) $\frac{1}{2}$ 16) $\frac{2}{\pi}$ 17) 1

18) $\frac{-1}{12}$

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n=0 \\ \cos \pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

תשובות סופיות

1) ϕ
2) ϕ
3) $-\infty$
4) ϕ
5) $-\infty$
6) ∞
7) ∞
8) ϕ
9) 0
10) 1
11) ϕ
12) $-\infty$
13) $-\infty$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}-\dfrac{x}{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

תשובות סופיות

1) 0 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) 4 4) $-\infty$

5) 0 6) -5 7) 1 8) -1

9) -3 10) 1.5 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ 12) $\frac{1}{4}$

13) 0 14) 4 15) $\frac{1}{9}$ 16) 2

17) $\ln 3$ 18) $e^{\frac{1}{3}}$ 19) 0

20) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: ∞. אם: $a<0$, $b=0$: $-\infty$.

21) 2.5 22) $\frac{k}{2}$ 23) $\frac{1}{2}$ 24) $-\frac{1}{2}$

25) $\frac{1}{2}$ 26) $\frac{a-b}{2}$ 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ 28) $\frac{5}{4}$

29) $\ln(6e)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) 1 3) e^2 4) e^{-1} 5) e^3

6) e 7) e^{-12} 8) e^{30} 9) e

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

11) נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל x.

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

12) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\pm 1 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)|=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 0 2) 0 3) $\frac{3}{4}$ 4) 3 5) 0

6) 0 7) $\frac{3}{4}$ 8) 4 9) 1 10) 0

11) $\lim_{x\to 2} f(x)=16$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}=0$,

$\lim_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim_{x\to -\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

12) 0

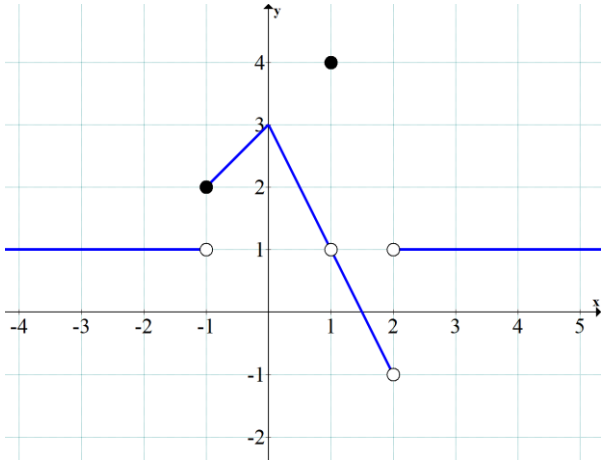
13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 1.

ב. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)$ 1.

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4-f}$ 1.

2) נגדיר פונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 1-x^2 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge 2\end{cases}.$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\ge\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$

5) $(a=1),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

6) $(a=0),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

7) $(a=\infty),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

8) $(a=-\infty),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $1.\lim_{x\to1} f(x)=1$, $2.\ \lim_{x\to2} f(x)=\nexists$, $3.\ \lim_{x\to-1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim_{x\to1}\left(3f-f^2\right)=2$, $2.\ \lim_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\frac{1}{3}$, $2.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}=\nexists$

2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \lim_{x\to2} f(x)=-3$ ג. 6

3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \nexists\lim_{x\to\pi} f(x)$ ג. -1

4) 4

5) ϕ

6) ϕ

7) 1

8) -1

9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות **1-6**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

7) חשבו, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים **8-11**:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתון הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M, כך ש-$\left|f(x)-L\right|<0.1$: $\forall x>M$).

16) נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}\neq 1$ לפי ההגדרה.

20) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{x+10}\neq 1$ לפי ההגדרה.

21) הוכיחו שאם $\lim_{x\to 0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x\to c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = |k|$ $(k \neq 0)$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 7 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה 93
2. משפט ערך הביניים 100
3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות 104
4. שיטת החצייה 107

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-6**: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x?

8) $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **12-15** : מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

12) $$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

13) $$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

14) $$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

15) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

16) הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכיחו זאת.

18) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\ge 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x.
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\le x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=\left[f(x)f(y)\right]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

22) נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x.

ב. הפונקציה f רציפה לכל x.

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x.

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x$ לכל x.

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin x$ לכל x.

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x.

ידוע כי עבור $x\neq\pm1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x.

25) הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל x.

הוכיחו שהפונקציה $|f(x)-g(x)|$ רציפה לכל x.

26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)(1-f(x))\right]=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ או $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

27) תהי f מוגדרת לכל x.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x, אז f רציפה לכל x.

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x, אזי f רציפה לכל x.

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=4$, אזי $f(x)=4$ לכל x.

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$
2. $Max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$

ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

1. $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$
2. $z_2(x) = Max\{f(x), g(x)\}$

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$

13) $a=1$, $b=2$ או $a=2$, $b=1$.

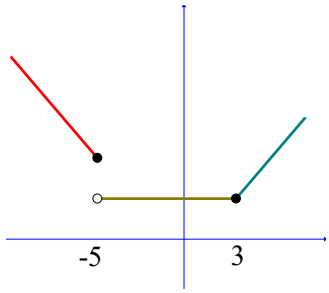
14) $a=-2e^{-1}$, $b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}$, $b=-\frac{e}{3}$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב--5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

23) שאלת הוכחה.

24) $$f(x)=\begin{cases}-\pi & x=-1\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x\neq\pm1\\ \pi & x=1\end{cases}$$

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

5) $e^x-5x=0$

6) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x, המקיימת: $f(1)=2$, $f(0)=1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

9) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש-$f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש-$f(c)=c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש-$f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש-$f(c)=f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש-$f(c_1)=f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

16) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π.
הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

19) יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכיחו כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x, שעבורם $f(x)=\sin x$.

22) יהי P פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- (a,b).
הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a,b), כך ש-
$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכיחו זאת.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a,b).
נניח כי: $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$.
הראו כי תמונת הקטע (a,b) היא $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0)=-1,\ f(1)=4$.
תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α.

ג. הוכיחו כי $\alpha\in(0,1]$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha)=0$.

27) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.
הוכיחו שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0\le r\le 1$.
הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c)=rz(a)+(1-r)z(b)$.

29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה $A\sin x+B\cos x=C\sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)>0,\ f(4)>2f(2)$.
הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c)=2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)=1,\ f(1)=2$.
הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

30) פונקציה f מוגדרת לכל x.
לפונקציה יש את התכונה הבאה:
כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.
הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

8) $[0.1,1]$

9) א. $f(0)=-1\ ,\ f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-30** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה,
שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f, היא קטע.

2) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

3) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.

4) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1,x_2,
המקיימות $x_1<x_2$, קיימת נקודה $x_1<x_3<x_2$, שעבורה $f(x_3)=g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)$, לכל x.

5) תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

6) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x)=f(x^2)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=f(1)x$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K ,
כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו- x_2 , בקטע (a,b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ** :
$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$
הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b) .
* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
באריכות :
הוכיחו שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$,
כך ש- $f(x)\ge f(x_0)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו :
א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
ג. תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.
הערה : פונקציה זאת נקראת פונקציית דִירִיכְלֶה.

11) הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .
ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

בשאלות **12-13** הוכיחו :

12) אם f רציפה ב- x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

13) אם f רציפה ב- x_0 , ואם $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של x_0 , שבה $f(x)>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a)\neq g(a)$,
עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x)\neq g(x)$.

<u>הערה</u>
תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\neq 0$, עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x)\neq 0$.
פשוט לקחנו $g(x)=0$.
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15) הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a , אזי הפונקציה $g(x)$,
המוגדרת על ידי $g(x)=\begin{cases}-c & f(x)<-c\\ f(x) & |f(x)|\le c\\ c & f(x)>c\end{cases}$, גם רציפה בנקודה a
(כאשר c מספר חיובי כלשהו).

16) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x} & x\ge 1\\ e^{-x}-e^{-1} & x<1\end{cases}$.
בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

17) הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אז יש $c>0$ כך ש-
$f(x)>c$ לכל $x\in[a,b]$.

18) הוכיחו כי אם f,g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה $z(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.
הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון ε,δ).
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

תשובות סופיות

16) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ -\ln\left(x+e^{-1}\right) & x>0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

1) נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$,
מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?

2) נתונה המשוואה: $x^3-x-2=0$.

א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.

ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?

ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001 .

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

1) 0.07

2) א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 8 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה..... 108
2. נגזרות חד צדדיות..... 116

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

4) $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

9) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

13) חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

16) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:

$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.

הוכיחו כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

---

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) הוכיחו או הפריכו:

א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב- x_0.

ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב- x_0.

ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב- x_0.

ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב- x_0.

21) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה, אז $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

22) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם f גזירה ב- (a,b) ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכיחו ש- f גזירה ב- $x=4$, וחשבו את $f'(4)$.

24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכיחו כי $f(0)=0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x=0$ ו- $f'(0)=0$.

25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו- $f'(0)=k$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראו שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0.

28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם f גזירה ב- 0, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

29) נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$.
הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם f גזירה ב- x_0, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראו שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+\ldots+f(1+\frac{k}{n})\right)-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1)$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x)=(x-a)f(x)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c)=0$.
הוכיחו:

א. אם $f'(c)=0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c.

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c)=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

39) יהיו f,g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c)=g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x)-g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x)=Max\{f(x),g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c)=g'(c)$.

40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$ 2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ 3) $f'(x)=4\cos 4x$

4) $f'(x)=e^x$ 5) $f(x)=\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

7) $44!$ 8) 2 9) 4

10) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

11) א. $n>1$ ב. $n>2$

12) א. $n>1$ ב. $n>1$

13) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה. $f'=0$

17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

19) א. $f'(x)=\begin{cases}5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0 & x=n\pi\\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

32) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה-a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15) חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1]=-5$, $[4.1]=4$.

17) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=[x](1-\cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \le x^2$ לכל x,
אז f גזירה ב-$x=0$.

21) תהי f פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=|x|\,f(x)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f(0)=0$.

22) יהיו f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$,
אז הפונקציה z, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-x_0 ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $g\circ f$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב-x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של
$g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f\circ g$ גזירה מימין ב-x_0.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

23) תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-g היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.
הוכיחו כי f גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

24) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & x\ge 1 \\ \dfrac{\pi}{4}-\arctan x & x<1 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות וגזירות f.

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\ge 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e\quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \frac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

13) $a=e\quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0,\ p=4$

15) -10

16) שאלת הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

19) $f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ odd}\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

24) א. רציפה לכל x וגזירה לכל $x\neq 1$. ב. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) & 0<x<\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 9 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה 121
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 125
4. גזירה סתומה 128
5. כלל השרשרת 130
6. גזירה לוגריתמית 133

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

13) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $f(x)=\sin(x^3)$

21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$

23) $f(x)=\tan(x^2)$

24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

25) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

26) $f(x)=\arctan(x^2)$

27) $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

28) $f(x)=(\sin x)^x$

29) $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

30) $y=x^{\ln x}$

31) $y=\sqrt[x]{x}$

32) $y=x^{\sqrt{x}}$

33) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

34) $y=(x^2+1)^x$

35) $y=(x+1)^{(x+1)}$

הערה: בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

כתב ופתר – גיא סולומון ©

תשובות סופיות

1)

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

2)

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3) א. 0 ב. 0

4) א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

5) א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

6) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

7) א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

8) א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

9) א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

גזירה סתומה

שאלות

1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את y' בנקודה בה $y=0$.

6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

8) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y=1$.

9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

10) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) -1

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.

חשבו את $g'(2)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$.

חשב ואת $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$.

חשבו את $z'(e)$.

3) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$.

חשבו $g'(100)$.

4) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\dfrac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=(f(x))^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 40

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) 36

5) $\frac{8}{9}$

6) 44

7) -2

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 10 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

1. המשיק 134
2. בעיות משיקים 136
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק 138
4. הנורמל 142
5. זווית שבין שתי עקומות 143
6. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם 144

המשיק

שאלות

1) מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$, בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$, בנקודה $x=-2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע a.

3) הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$, בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$, לגרף הפונקציה

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?

לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

10) פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x, בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

1) א. 17 ב. 4

2) $a=2$

3) $(1,3)$

4) $a=2,\ b=-1$

5) $a=2,\ b=-2$

6) לערך $k=6$, בנקודה $x=1$; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

7) א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \beta=116.56°$

8) $x=5,\ x=-1$

9) $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

11) $\alpha=33.69°,\ \beta=90°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות משיקים

שאלות

1) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

2) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

3) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את a ו- c.

4) הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

6) $y=x^2-2x+1$, $(2,-3)$

7) $y=\sqrt{x}$, $(-3,1)$

8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

9) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון כי f גזירה לכל x.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

תשובות סופיות

1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

3) נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

5) משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

6) $(0,1)$, $y=-2x+1$; $(4,9)$, $y=6x-15$

7) המשיק $(9,3)$, $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

8) $y=-2x-1$, $y=2x-1$

9) $k=1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

10) א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$, בנקודה $x=-1$.

2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$, ששיפועו 2 .

3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$, בנקודה $x=0$.

4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$, בנקודה $x_1=1$.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y=2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$, ששיפועו -2 .

8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$,
בנקודה $x_1=2$.

9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

10) נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$.
מצאו את משוואת המשיק.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$, בנקודה $x=0$.

12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

13) לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצאו את משוואת המשיק.

14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$, בנקודה $x=1$
.

15) הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^2}+y=y^2-1$,
דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=24x+22$

2) $y=2x-3$

3) $y=1$

4) $y=-12x+9$

5) $a=2,\quad y=-4x-2$

6) $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

7) $y=-2x+8$

8) $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

9) $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

10) $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

11) $y=3x+1$

12) $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

13) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

14) $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

15) $y=\frac{1}{e}x$

16) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

17) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

18) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

19) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

20) $y=\frac{4}{3}x+2$

21) א. $(1,0)$, $(0,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמל

שאלות

1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.

2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$, בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

1) $y=-2x+8$

2) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

3) $(2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f(x)=x^2$ ו- $y=g(x)=\frac{1}{x}$.

2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$.

3) הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

1) $71.57°$

2) $71.56°$

3) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{27}$

2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\ln 2,\ \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

1) $\sqrt{5} \cong 2.25,\ \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6},\ \sqrt{27} = 5\frac{1}{5}$

2) $\ln 2 \cong 1,\ \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 11 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 145
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 148
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 149
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 150
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 151

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

35) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$	2) $\frac{20}{17}$	3) $n-1$	4) 4	5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$	7) $\frac{5}{6}$	8) $-\frac{3}{2}$	9) 1	10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$	12) $\frac{1}{6}$	13) $-\frac{1}{2}$	14) 2	15) 1
16) 1	17) $\frac{a}{b}$	18) $\frac{a}{b}$	19) $\frac{1}{6}$	20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$	22) $\frac{1}{8}$	23) $\frac{1}{3}$	24) $-\frac{1}{3}$	25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$	27) 1	28) 1	29) $\frac{2}{3}$	30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$	32) ∞	33) 0	34) ∞	35) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty\cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

תשובות סופיות

1) ∞ 2) 0 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 6 9) $\frac{5}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

תשובות סופיות

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: ∞^0, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$

תשובות סופיות

1) e 2) 1 3) 1 4) 1 5) e^2

6) 1 7) e^3 8) $e^{1/3}$ 9) $e^{-1/2}$ 10) 1

11) 1 12) e 13) 1 14) e 15) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 12 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד 152
2. חקירת פולינום 153
3. חקירת פונקציה רציונלית 154
4. חקירת פונקציה מעריכית 158
5. חקירת פונקציה לוגריתמית 161
6. חקירת פונקציה עם שורשים 165
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט 166
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית 169
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות 173
10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות 175
11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה 180

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x(x-9)^2$ **2)** $f(x)=x^4-2x^3$

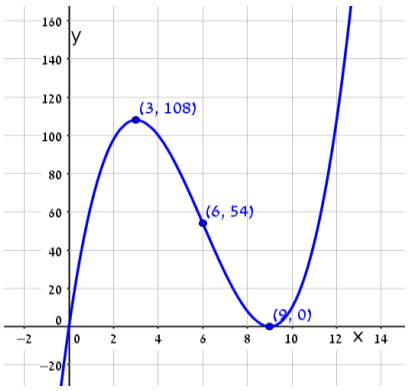
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-9.
נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.
תחום עלייה: $x<3$ or $x>9$, ירידה: $3<x<9$.
תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.
נקודת פיתול: $(6,54)$.

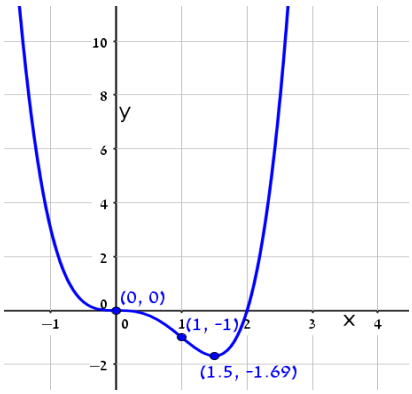
2) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-2.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.
תחום קמירות: $x<0$ or $x>1$, קעירות: $0<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$, $(1,-1)$.

גרפים

1)



2)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2} \ \ or \ \ x<-1$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2,\ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12} \ \ or \ \ x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1 \ \ or \ \ x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: -1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

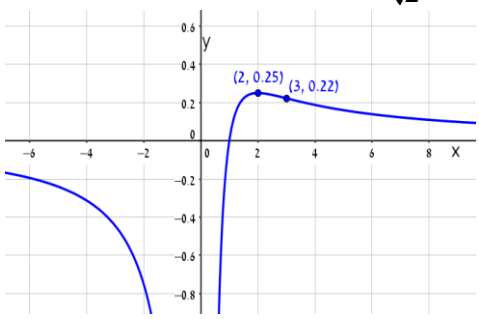
7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

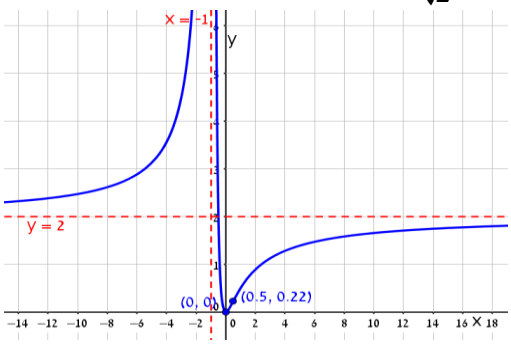
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

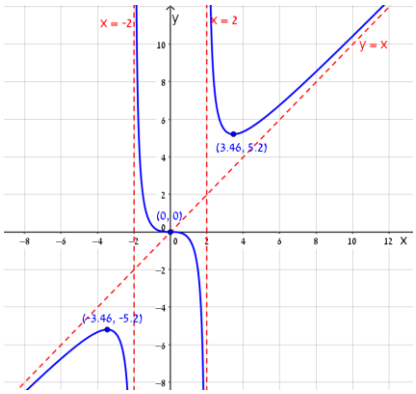
(1



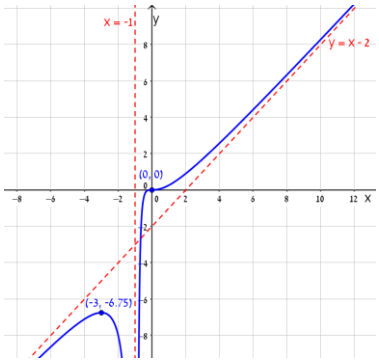
(2



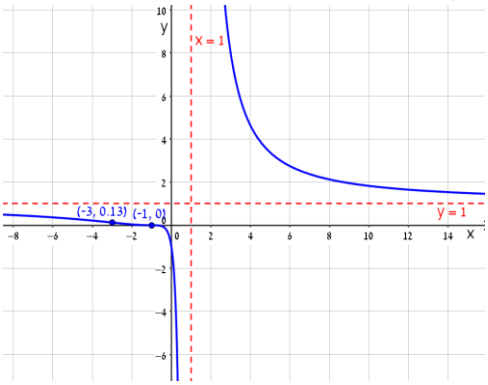
(3



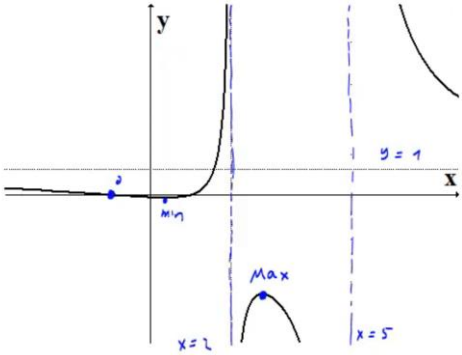
(4



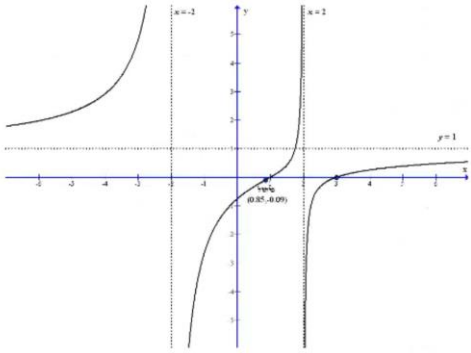
(5



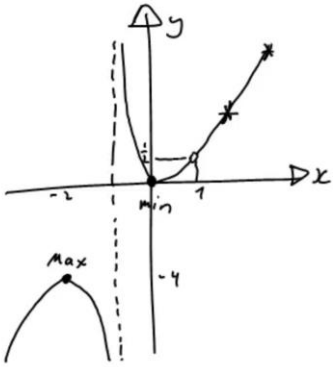
(6



(7



(8



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-e^{x}$

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

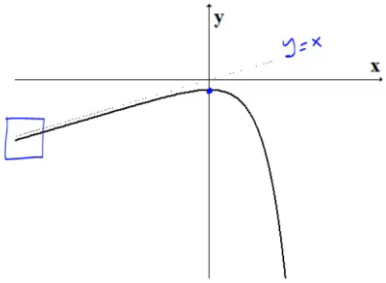
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: -2.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ or $x>2$, ירידה: $-1<x<0$ or $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ or $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ or $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

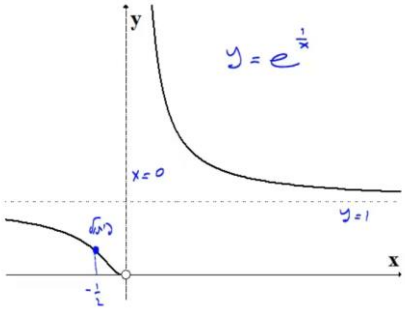
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

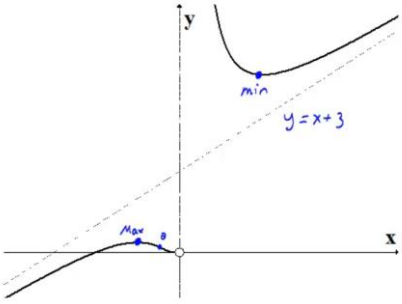
1)



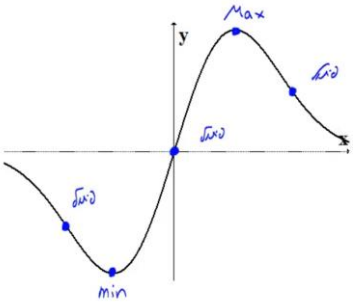
2)



3)



4)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.

נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.

נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.

אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.

תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.

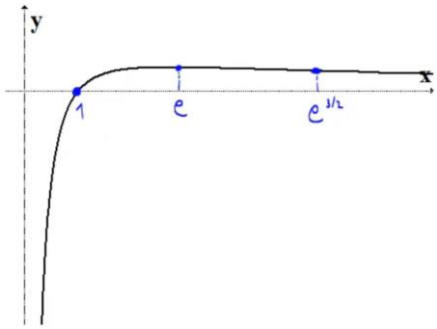
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.

תחום קמירות: $0<x<1\ \ or\ \ 1<x<5.15$, קעירות: $x>5.15$.

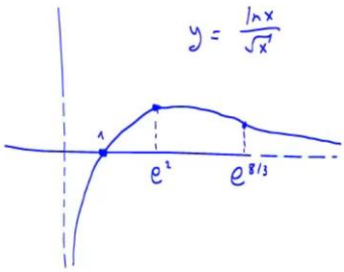
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

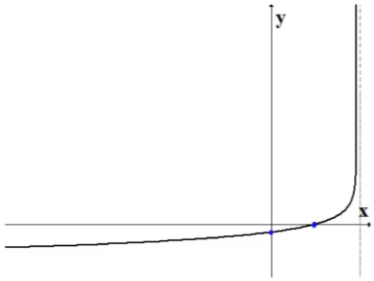
1)



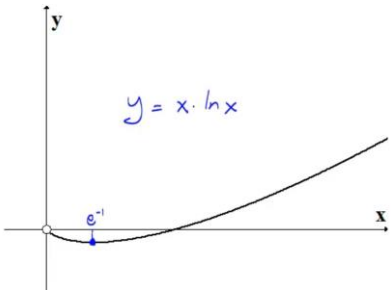
2)



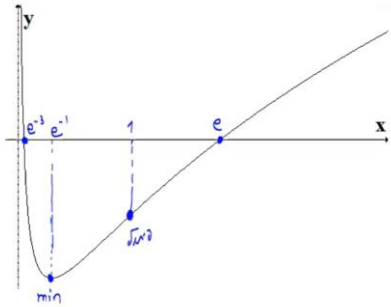
3)



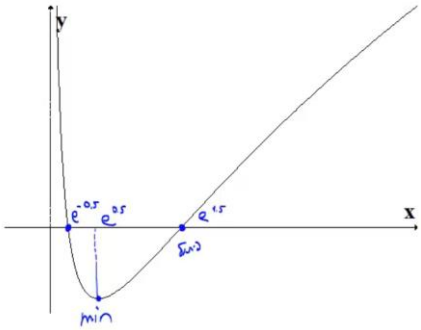
4)



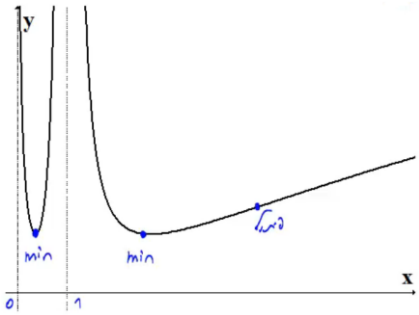
5)



6)



7)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: אין.

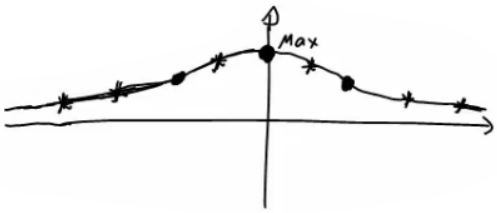
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x>\frac{2}{5}$ or $x<0$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $-0.2<x<0$ or $x>0$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0$ or $x>1$, ירידה: $0<x<1$ or $x<-1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x.

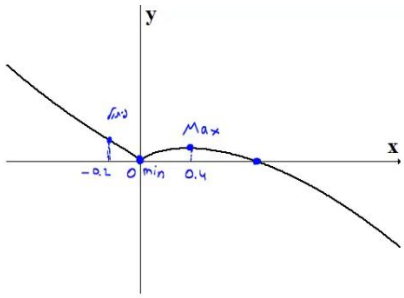
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: ±1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-1<x<0$ or $x<-1$.
נקודות פיתול: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1$ or $x<-1$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1.5, עם ציר ה- x: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- ∞, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x<2$ or $x>3$.

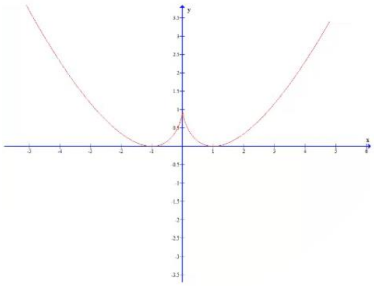
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

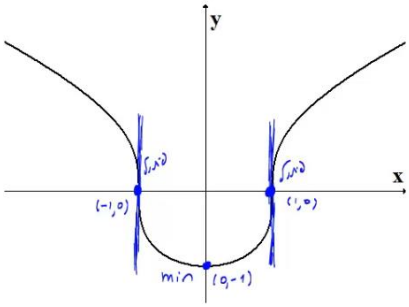
1)



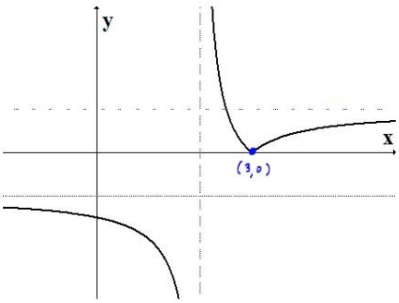
2)



3)



4)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

8) $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

9) $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

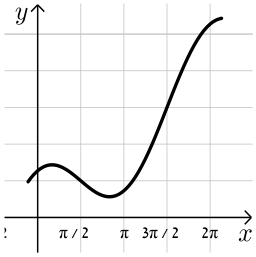
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$.



ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

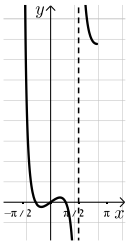
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

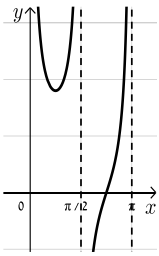


ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

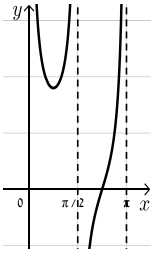
3) א. $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

4) א. $(\pi,0),(0,-2)$.



ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

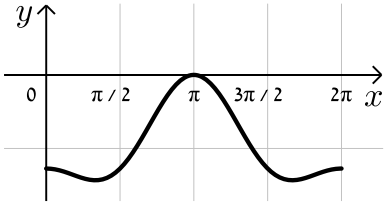
ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:

כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

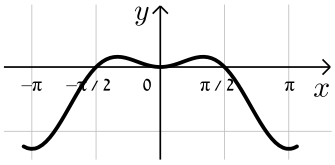
ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

ד. 2 פתרונות.



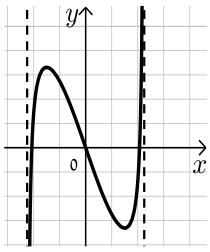
6) א. חיתוך: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.



7) א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$.

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.



8) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7, עם ציר ה- x : $x=7$, $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

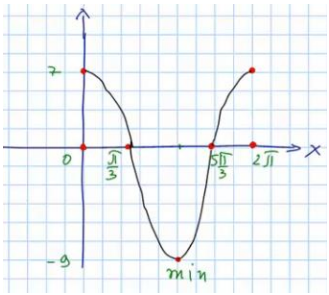
נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7)$, $(0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.



9) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2, עם ציר ה- x : $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

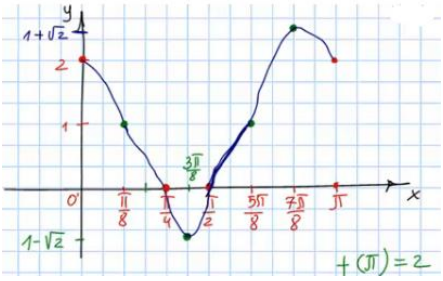
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$.

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x) = x - 2\arctan x$

2) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

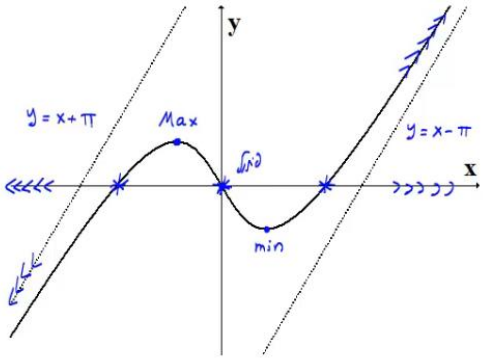
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x<-1 \ or \ x>1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

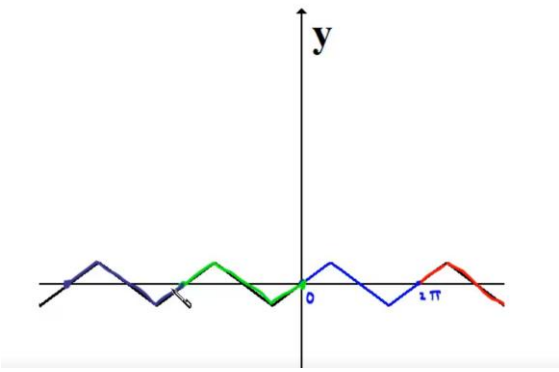
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור 2π.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2} \ or \ \frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

גרפים

1)



2)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבוע a.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצאו את הקבועים a,b.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$, וידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבוע a.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$, וידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול.
מצאו את הקבועים a,b.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה $x=3$ הוא 33.
מצאו את a.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.
מצאו את a,b.

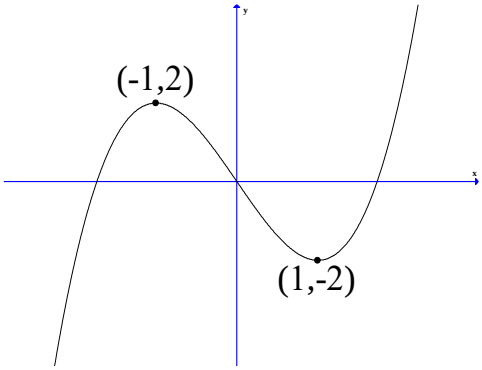
7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$.
ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+bx+4}{x}$.
ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a ואת b.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$.
ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a.

שאלות **10-17** מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:



10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

13) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

14) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

15) עבור איזה ערך של k, למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

16) האם קיים ערך של k, עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{x}$.

א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x=e$?

ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.

מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=\sqrt{f(x^2)+4}$.

מי מהבאים בהכרח נכון?

א. z עולה לכל x .

ב. z יורדת לכל x .

ג. z עולה לכל $x>0$.

ד. z יורדת לכל $x>0$.

21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x=e$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x=0$.

נגדיר $g(x)=(f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:

א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.

ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x)=a\cdot f(x)$, כאשר $a<0$.

איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה** :

א. בתחום בו $f(x)$ שלילית , $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).

ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.

ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n,0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=n$ הוא המקסימלי באותו התחום.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $a=-\frac{2}{3}$

2) $a=-4\ ,\ b=6$

3) $a=-\frac{1}{3}$

4) $a=-1\ ,\ b=3$

5) $a=1$

6) $a=\frac{2}{3}\ ,\ b=-1$

7) $a=8$

8) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=1$

9) $a=-7$

10) 1

11) 2

12) 3

13) $k<-2\ ,\ k>2$

14) $k=\pm 2$

15) $-2<k<2$

16) לא

17) $x<-1\ ,\ -1<x<1\ ,\ x>1$

18) א. $z'(0.5)=-16$ ב. שאלת הוכחה.

19) א. עולה. ב. יורדת.

20) ד

21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

22) ג

23) ד

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

1) $8x^3 \le 3x^4 + 6x^2$, $(-\infty < x < \infty)$

2) $x < 2\sin x$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right)$

3) $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$, $(x > 0)$

4) $\ln(x+1) \le x$, $(x \ge 0)$

5) נתון כי f רציפה לכל $x \ge 0$, $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, וכן $f(0) = 0$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 13 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

1. נגזרת הפונקציה ההפוכה 181
2. נגזרת מסדר גבוה 182
3. נוסחת לייבניץ 183
4. גזירה פרמטרית 184

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

1) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרת מסדר גבוה

שאלות

חשבו את הנגזרת ה- n, $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות:

1) $y=\frac{1}{x+a}$

2) $y=\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

3) $y=\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$

4) $y=\frac{x^4}{x^2-1}$

תשובות סופיות

1) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot(x+a)^{-n-1}$

2) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-5(x-1)^{-n-1}+7(x-2)^{-n-1}\right)$

3) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1}-\frac{1}{6}(x+1)^{-n-1}+\frac{2}{3}(x-2)^{-n-1}\right)$

4) $y'=2x-\frac{1}{2}\left((x-1)^{-2}-(x+1)^{-2}\right)\ ,\ y''=2+\left((x-1)^{-3}-(x+1)^{-3}\right)$

$y^{(n)}=\frac{1}{2}(-1)^n\cdot n!\cdot\left((x-1)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}\right),(n>2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחת לייבניץ

שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית , $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות :

1) $y = x^3 e^x$

2) $y = x^3 \sin 5x$

תשובות סופיות

1) $\left(e^x \cdot x^3\right)^{(10)} = e^x\left[x^3 + 103x^2 + 456x + 120\cdot 6\right]$

2) $\left(\sin 5x \cdot x^3\right)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6\cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54\cdot 5^9 x \sin 5x - 24\cdot 5^9 \cos 5x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה פרמטרית

שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

הנתונה בצורה פרמטרית $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=t\cos t \end{cases}$.

תשובה

1) $y'=\dfrac{\cos t-\sin t\cdot t}{1-\cos t}$, $y''=\dfrac{(-t\cos t-2\sin t)(1-\cos t)-\sin t(\cos t-t\sin t)}{(1-\cos t)^3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 14 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 185
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי 188
3. הוכחת אי שוויונים 189

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות **1-7** מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x \quad (-1\le x\le 3)$

2) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(20-x) \quad (-1\le x\le 20)$

4) $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x<1\\ (x-2)(x-3) & x\ge 1\end{cases} \quad \left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$

5) $f(x)=1+\left|9-x^2\right| \quad (-5\le x\le 1)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \quad (-5<x<-1)$

7) $f(x)=x^3-9x+1 \quad (-\infty<x<\infty)$

8) נתונה הפונקציה $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$.

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0,0.5)$.
הוכיחו שדני טועה.

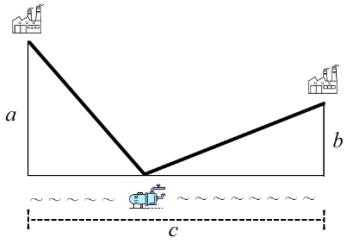
9) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)=x^2+\left|\ln x\right|$.

10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, ב- $\mathbb{R}$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$,
ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1,3]$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

12) לחברת מי עדן יש שני מפעלים.
האחד מרוחק a ק"מ מהמעיין.
השני מרוחק b ק"מ מהמעיין.
המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.
החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין
בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.
מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?
הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזויות בין כל צינור למעיין שוות.



13) גליל חסום בכדור.
הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי $\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $(-1,-7)$ מינימום מוחלט, $(3,9)$ מקסימום מוחלט.

2) $(-1,0)$ מינימום מוחלט, $(5,0)$ מינימום מוחלט, $(2,3)$ מקסימום מוחלט.

3) $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(20,0)$ מינימום מוחלט, $(8,48)$ מקסימום מוחלט.

4) $(2.5,-0.25)$ מינימום מוחלט, $(1,2)$ מקסימום מוחלט.

5) $(-3,1)$ מינימום מוחלט, $(-5,17)$ מקסימום מוחלט.

6) $(-2,-4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.

9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1+\ln 2)$.

10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.

11) ב- $\mathbb{R}$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.

ב- $[1,3]$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, $(2,1)$ מקסימום מוחלט.

12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

1) תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).
נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש-$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in(a,b)$, כך ש-$f'(d)=0$.

2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x)-f'(x)=f''(x)$ לכל x, וכן $f(a)=f(b)=0$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל x בקטע.

3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a,b), כך ש-$f''(x)<0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a)=f(b)=0$.
א. הוכיחו כי $f(x)>0$ בקטע (a,b).
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

1) $x^3e^{-x} \le \frac{27}{e^3}$ (לכל x)

2) $xe^{-\sqrt{x}} \le 1 \quad (x \ge 0),$

3) $0 \le x^2e^{x-1} \le 1 \quad (x \le 1),$

4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים.
הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1)\ a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad (2)\ b(1-a) > \frac{1}{4}$$

הערת סימון: $[a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b \quad ; \quad (a,b) \Leftrightarrow a < x < b \quad ; \quad [a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 15 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון 190
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 191
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור 192
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 196
5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב 200
6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה 202
7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 203
8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 208

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.
א. הביעו את y באמצעות x.
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

1) $8,8,8$

2) 1

3) א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

4) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בהנדסת המישור

שאלות

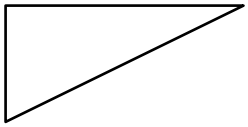
1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

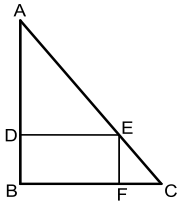
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

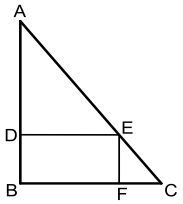
3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



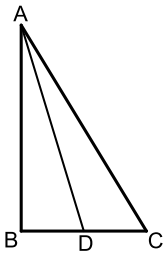
4) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס"מ , $BC=$ 16 ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



5) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=a$, $BC=b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

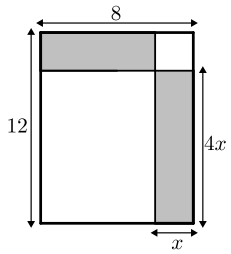


6) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

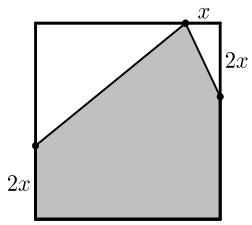


כתב ופתר – גיא סלומון ©

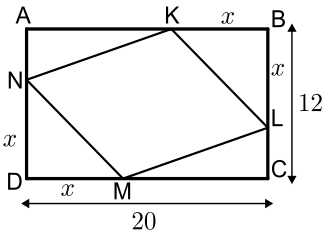
7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את x, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של x,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



9) הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

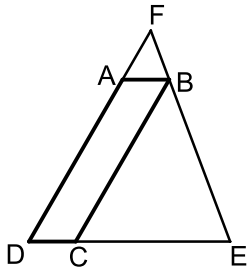


א. הביעו באמצעות x את סכום שטחי המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות x, כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

10) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB =$ 2 ס"מ, $AD =$ 8 ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב- x.



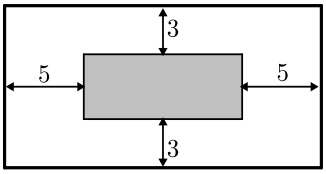
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

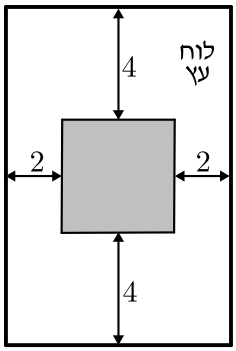


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

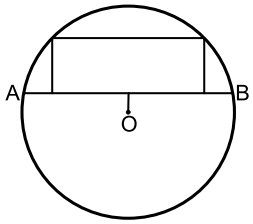
12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

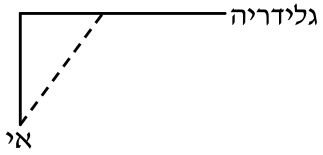


14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות

1) $4\sqrt{3}$ ס״מ.

2) א. 2.5 ס״מ.

3) א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

4) 80 סמ״ר $= S$.

5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

6) 4 ס״מ, 16 ס״מ.

7) $x=2.75$

8) $x=6$

9) א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $= S$.

10) א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

11) א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

12) א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

13) 92 ס״מ.

14) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

15) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

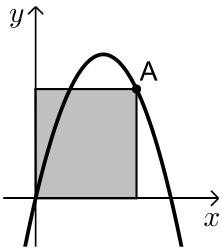
16) $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

17) $4\cdot 6$

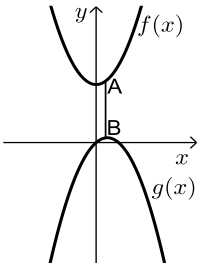
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

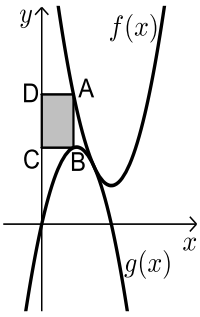
שאלות



1) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

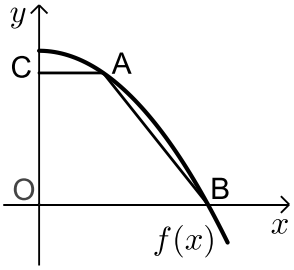


2) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$, כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור).
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

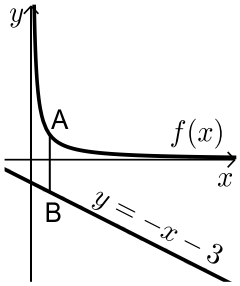
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

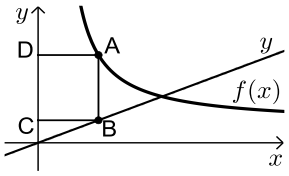


5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$, ונתון הישר: $y=-x-3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

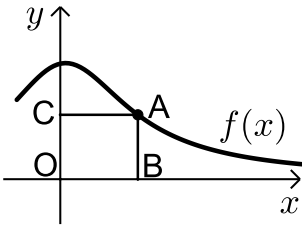
ב. מצאו את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y=2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



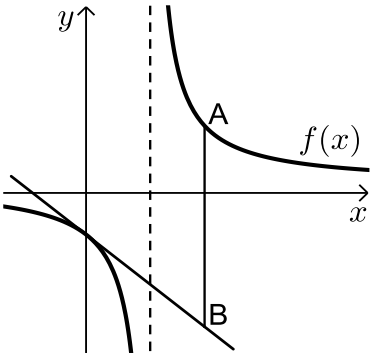
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x\ge 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

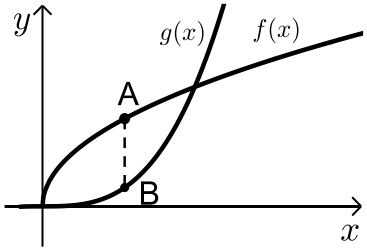
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

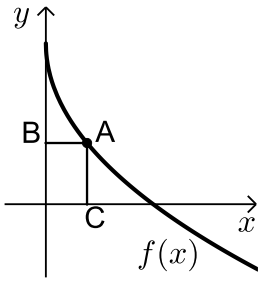
מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מַקְצֶה על הצירים הוא מינימלי.



11) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



12) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים $AB+AC$.

ב. מצאו את ערכו של t, עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

13) נתונות הפונקציות $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצאו את ערכו של b, שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) $A(2,2)$

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ

7) $1\cdot 2$

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

11) $A(1,2)$

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$

13) $b=1$

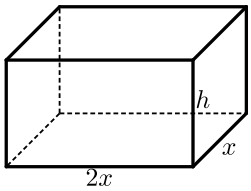
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x
מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

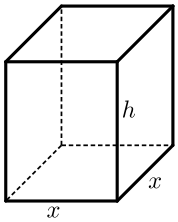


3) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא x.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

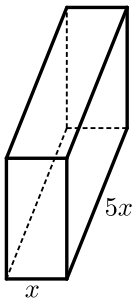
א. הביעו את h באמצעות x.

ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות x.

ג. מה צריך להיות ערכו של x, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?



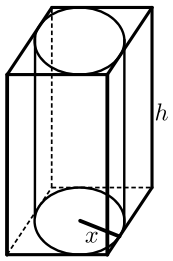
4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.



5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©



7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h.
ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות x

1. את נפח הגליל.
2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את x, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

1) $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

3) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.

5) $8\cdot6\cdot3$ ס"מ.

6) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

7) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

1) נתונים שני מספרים חיוביים, p ו- q, שסכומם a.

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט)

בעיית קיצון עם תנועה

3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום,
היא יכולה לקבל מחיר של $p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.

א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
ב. אם $x=20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.

א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$.

א. מצאו את תחום הפונקציה.
ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7) פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8) פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x=100$.
איזו מסקנה ניתן להסיק?

9) פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x=100$.

ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$,
ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

11) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$, ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=-0.15Q+50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13) ליצרן פונקציית ביקוש $Q=\frac{5000-50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

14) ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q=10$,
העלות הכוללת היא 225 ₪.

15) הוכיחו:
א. שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.
הסבירו את המשמעות הגרפית.
ב. שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

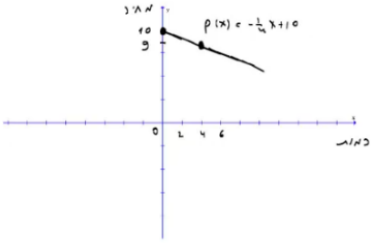
16) $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.
א. האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
ב. האם יתכן להפך?
ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם
ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17) מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2, בהתאמה.
אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.
א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי
כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y}=\frac{p_2^2}{p_1^2}$.
ב. חשבו את x ו- y עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
$p_1=$ ₪ 3,000 , $p_2=$ ₪ 100 , $A=$ ₪ 372,000 .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

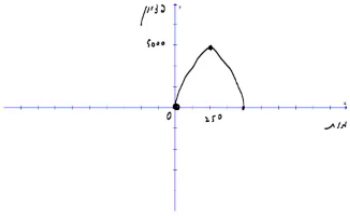
תשובות סופיות

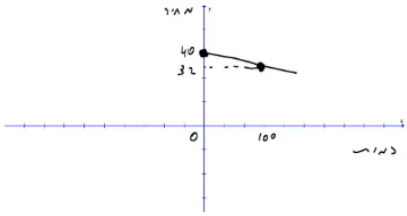
1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p)=40-4p$ ד.



2) א. $R(x)=-0.6x^2+120x$, בתחום: $x\ge 0$. ב. 2,160 ג. 2,160

3) א. $x\ge 0$ ב. ג.





4) א. $x\ge 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x)=-0.04x^2+100x$,

הפדיון הממוצע: $AR(x)=-0.4x+100$ $x>0$. ג. $R'(x)=-0.08x+100$

ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500 .

5) א. פונקציית הפדיון: $R(x)=-6x^3+240x^2+1800x$,

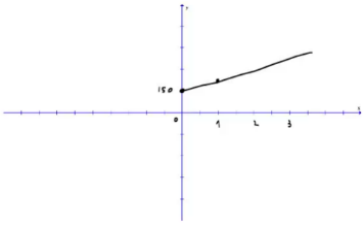
הפדיון השולי: $R'(x)=-18x^2+480x+1800$. ב. לא.

ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000 .

6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right)=10\cdot 33\frac{1}{3}-\frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

7) א.



ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x)=5$

8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ₪ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ₪ בערך.

9) א. $C(101)=1250.804$, $C(100)=1240$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

10) הכמות: 800 , המקסימום: 38,200 .

11) הכמות: 5 , המקסימום: -250 .

12) 25

13) הכמות: 800 , המקסימום: 38,200 .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

15) שאלת הוכחה.

16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, \quad y = 3600$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**)?

3) אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?

4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים,
שכל אחד מהם משלם 100 דולר.
על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

1) א. 200 ב. $93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.

2) 70 ₪ ל-350 דקות.

3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪

4) 40

5) 75 אג'.

6) מחיר הכרטיס: 30 ₪, ההכנסה המקסימלית: 3,600 ₪.

7) 4,500 ₪.

8) שאלת הוכחה.

9) 350

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 16 - משוואות - מציאת מספר הפתרונות, פתרון כללי ופתרון מקורב

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה 210
2. פתרון משוואות פולינומיאליות 213
3. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות 215

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואות יש בדיוק פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

5) נתונה המשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ונתון כי $b^2<3ac$.
מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות **6-9**, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה:

6) $e^{x-1}=x$

7) $\arctan x-x=0$

8) $\ln(x+5)-4=x$

9) $x^2+x\sin x=1-\cos x$

10) תהי f פונקציה גזירה לכל x, המקיימת: $f(0)=1,\ f(1)=2$, $f'(x)\le 1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

הוכיחו שלמשוואות בשאלות **11-13** יש בדיוק שני פתרונות:

11) $e^x-5x=0$

12) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

13) $1+4x^4=8x^3$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בכל אחת מהמשוואות **14-17**, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס):

14) $ax^2+bx+c=0$

15) $ax^3+bx^2+cx+d=0$

16) $x+a\cos(bx)=1$

17) $(n>4,\ odd)\ ax^n+bx^{n-2}+cx^{n-4}-d=0$

18) מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $a^2x+e^x=a$ כאשר a קבוע ממשי.

19) הוכיחו שלמשוואה $2ax^3+a^2+x^2=0$ קיים פתרון אחד ויחיד כאשר a קבוע ממשי.

20) הוכיחו שלמשוואה $x^2+x^3+5x=1$ יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד.

הערה: שאלה זו יש לפתור תוך שימוש במשפט רול.

21) נתון הפולינום $p(x)=3x^4-2x^3+x^2+cx-1$.

א. הוכיחו שלפולינום יש לכל היותר שני שורשים.

ב. נתון בנוסף כי $|c|<1$.

מה מספר השורשים של הפולינום?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) פתרון יחיד.
6) $x=1$
7) $x=0$
8) $x=-4$
9) $x=0$
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) $b^2-4ac=0$
15) $4b^2-12ac<0$
16) $\frac{1}{ab}<-1\ ,\ \frac{1}{ab}>1$
17) $b^2(n-2)^2-4anc(n-4)<0$
18) אם $a=0$, למשוואה אין פתרון. אם $a\neq 0$, למשוואה יש פתרון יחיד.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) א. שאלת הוכחה. ב. שני שורשים שונים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון משוואות פולינומיאליות

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

פתרו את המשוואות הבאות:

4) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

5) $k^3+2k^2-3k+20=0$

6) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

7) $k^3-6k^2+12k-8=0$

8) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

9) $k^3-k^2+k-1=0$

10) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

11) $7x^3-33x^2+21x+61=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

5) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

6) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

7) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

8) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

9) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

10) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

11) פתרון מקורב: $x=0.8459$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

1) $1+4x^4=8x^3$

2) $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

תשובות סופיות

1) פתרון מדויק $x=-1$.

2) פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 17 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 216
2. מציאת פונקציה קדומה 219

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

28) $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

29) $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

32) $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

33) $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$,

ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$.

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

תשובות סופיות

1) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

2) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

3) $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

4) $f(x)=x^2-6x+14$

5) $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

6) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

7) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 18 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים 221

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2x dx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}x dx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

11) $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

12) $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3 dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)x dx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\ln\left|\sin x\right|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$

5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

11) $\sin\left(\sin x\right)+c$

12) $\sin\left(\ln x\right)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$

17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$

18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 19 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים..... 223

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

1) $\int xe^x dx$ **2)** $\int x^4 \ln x dx$ **3)** $\int x \sin x dx$

4) $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$ **5)** $\int x^2 \sin 4x dx$ **6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$ **8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **9)** $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$ **11)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ **12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **14)** $\int x \arctan x dx$ **15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$ **17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ **18)** $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$ **20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$ **21)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

22) $\int x \tan^2 x dx$ **23)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) $\frac{e^x}{x+1}+c$

22) $x(\tan x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+c$

23) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c$

24) $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

25) $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

26) $\frac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\}$

27) $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5(\cos x\sin x+x)\right)+c$

28) $\frac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right)$

29) $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5(x-\sin x\cos x)\right)+c$

30) $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}(2n-1)\right)$

31) $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

32) $\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$, $\int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 20 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 227

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin(\ln x)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23) $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 21 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 230
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 232
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 233

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

תשובות סופיות

1) x^3-x^2+2x+c

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) x^3-x^2+x+c

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

נוסחאות

$$(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 22 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)

2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 235

3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 237

4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 238

5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 239

6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 242

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ (x=\arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ (x=\arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ (t = \arcsin\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\tan t \\ (t = \arctan\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos\frac{a}{x}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

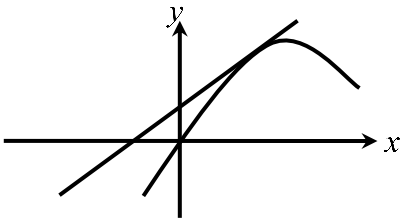
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

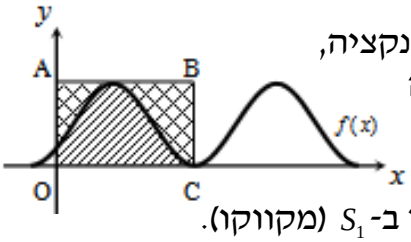


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

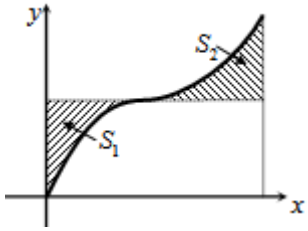
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

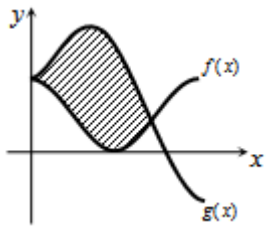
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.



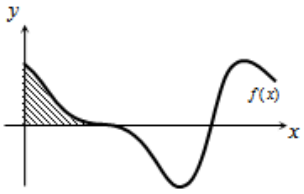
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$, בתחום $0\le x\le \pi$.



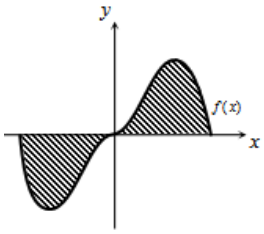
א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$, בתחום $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$, אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- x .
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.



א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$,
בתחום $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$, כאשר a,b פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

4) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

6) $b=-2$, $a=2$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 23 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א 246
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים 252
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות 255
4. משפטי האינטגרביליות 258

האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

1) $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

2) $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

3) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

4) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

5) $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

6) $\int_0^\pi \cos^2 10x dx$

7) $\int_0^4 f(x)dx$, כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

8) $\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|}dx$

9) $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה f:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

12) תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

14) חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

15) חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

16) נתונה פונקציה רציפה f. הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

17) $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

18) $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל x, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx \quad (n\in\mathbb{N})$

21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

22) הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

25) תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר x והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר x.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

26) הוכיחו:

אם f פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם T המחזור של f

אז לכל מספר ממשי a מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו- g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם f זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) -6

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) 0

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) 0

18) $2\arctan 4$

19) 0

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל x בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

2) $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

3) $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$

4) $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

5) $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

7) $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

8) $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

9) $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

11) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

12) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)|\le\int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

13) תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt=0$.
הוכיחו כי לכל x בקטע (a,b), מתקיים $g(x)=0$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx>1$.
הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0)>\frac{1}{b-a}$.

16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\le\int_1^n f(x)dx\le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

17) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע (a,b)

וגם $f'(x)\le M$ לכל x בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

19) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

8) חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

9) $\int_0^1 x\,dx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin x\,dx$

13) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

14) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},\ldots,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) -1

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) 2

13) 21

14) 0.5

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה f, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 24 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

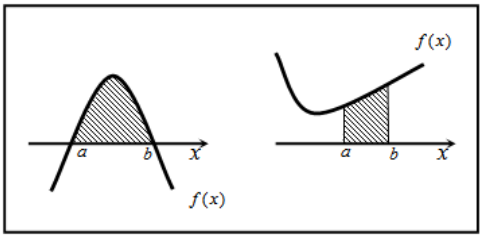
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים 259
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y 279
3. אורך קשת 280

חישוב שטחים

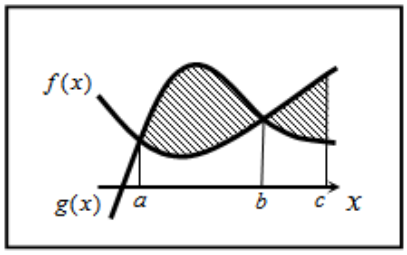
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

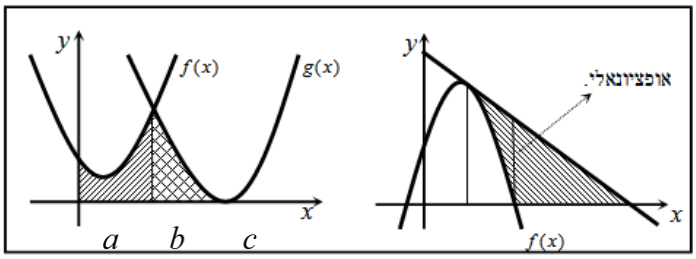


$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

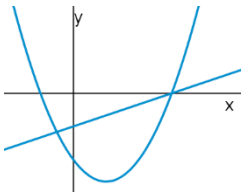
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



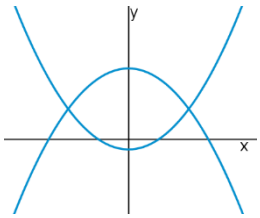
$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

שאלות

1) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



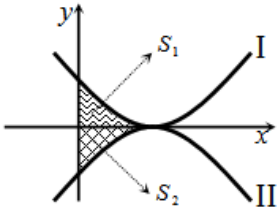
2) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1$, $g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



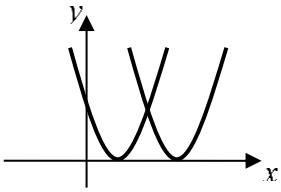
3) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



4) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.

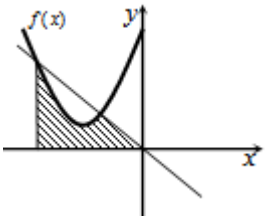


5) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

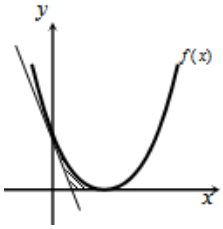
א. מצאו את משוואת הישר.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=-4$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

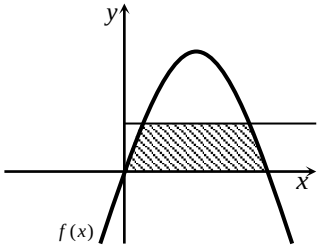


6) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).

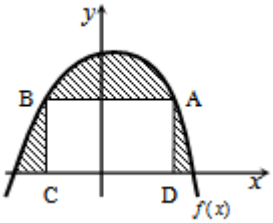


7) נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר k .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

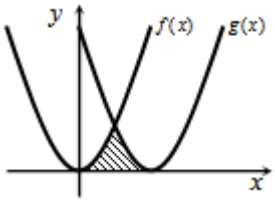
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$. ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x=4$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).

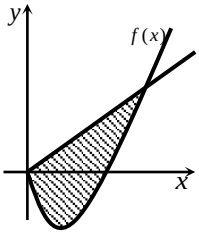


9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

10) באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



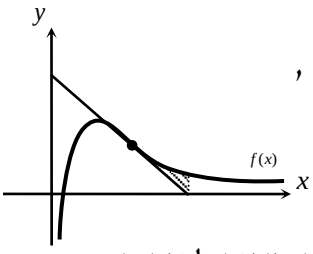
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

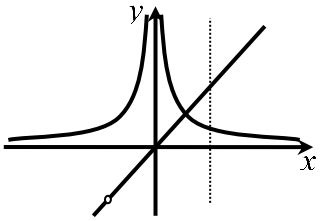
11) ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

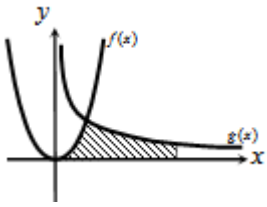
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.

12) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.



חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x.

13) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

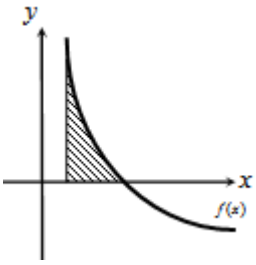


$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x=4$.

14) גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)



חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.

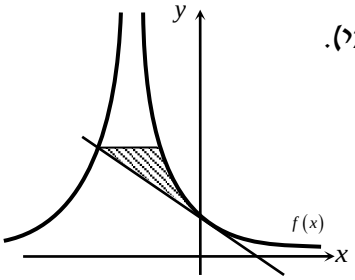
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והישר $x=2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y, הוא $-\frac{1}{9}$.



א. מצאו את ערך הפרמטר A.

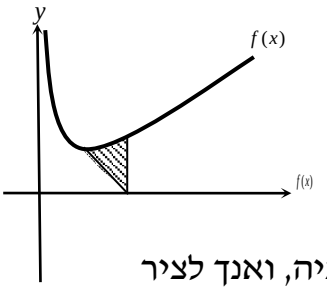
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

16) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

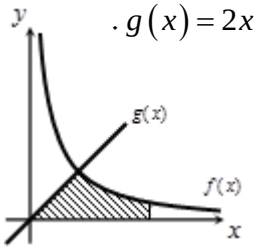


א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

17) באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.



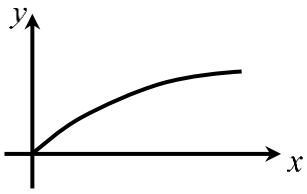
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x=9$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.



לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

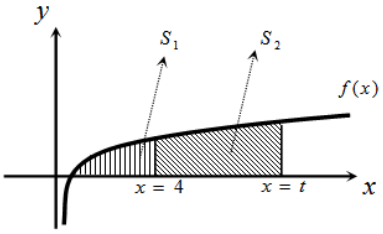
נעביר שני אנכים לציר ה- x, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2.

ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את t.



21) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

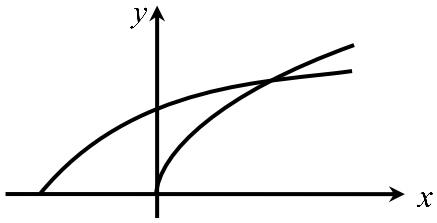
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b.



23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

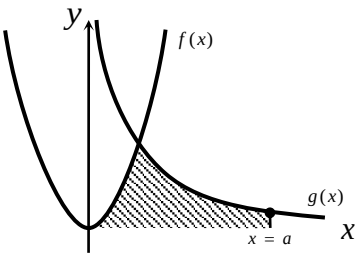
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את a.

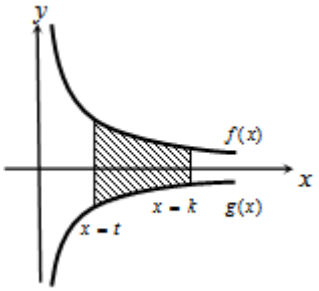


כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

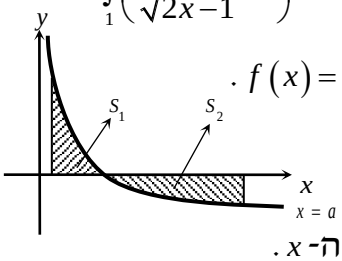


א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את t.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.

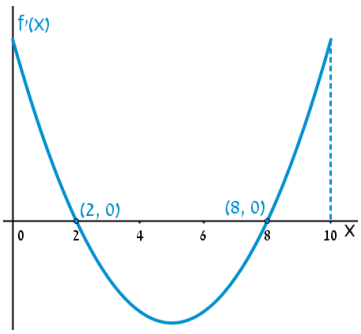
נעביר שני אנכים לציר ה-x, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנך $x=1$, כלומר את S_1.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2. נמקו.



26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

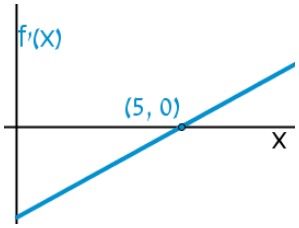
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.



א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

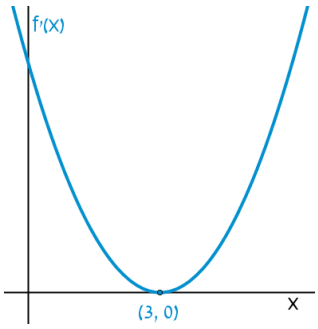
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

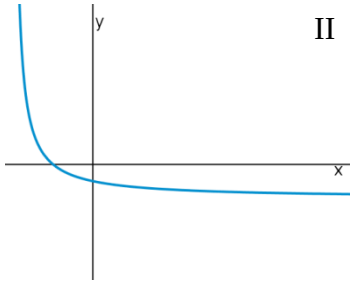


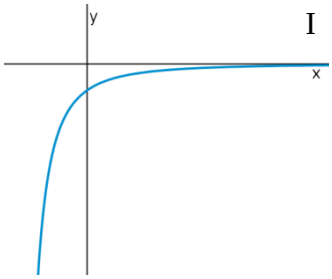
א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

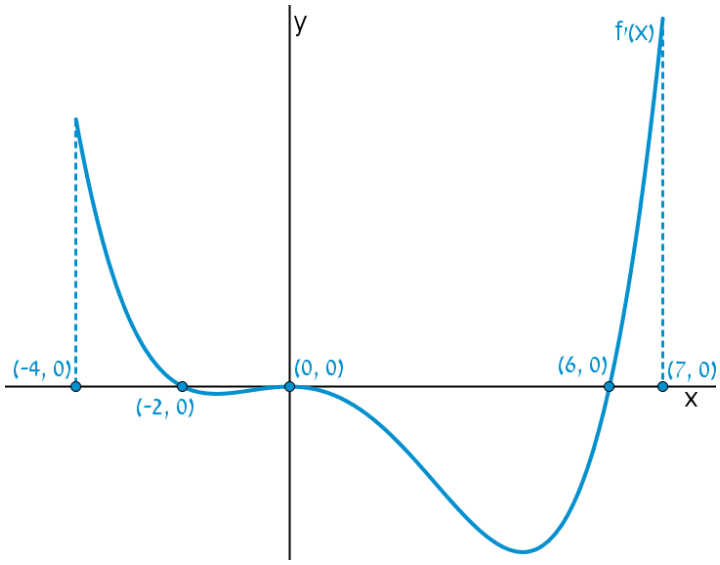




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע השלישי.

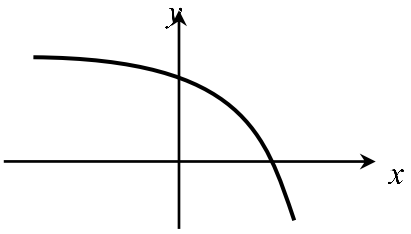
ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

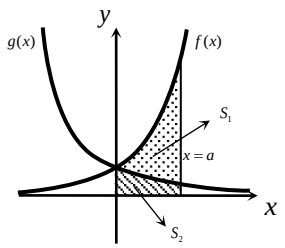
31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x.
ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.



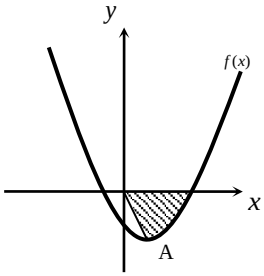
32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר b.

33) נתונות הפונקציות $g(x) = e^{-x}$ ו- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x = a$,
כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2.
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2.
מצאו את a.



35) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.



הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

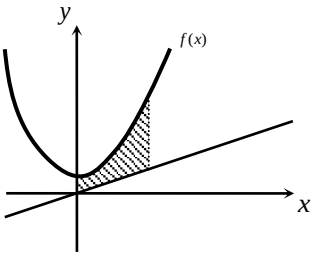
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.

36) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.



ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

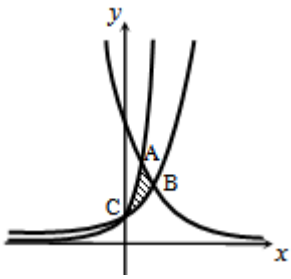
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.

37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

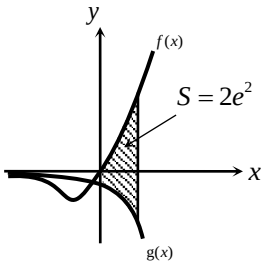


א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

38) ענו על הסעיפים הבאים:



א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$.

נעביר ישר $x=a$, כאשר $a>0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

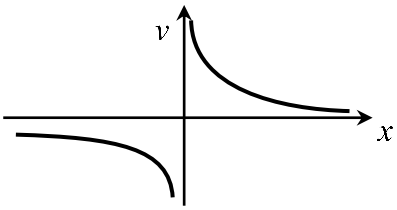
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות לוגריתמיות

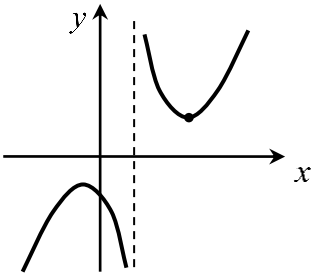
אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$

39) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-x.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



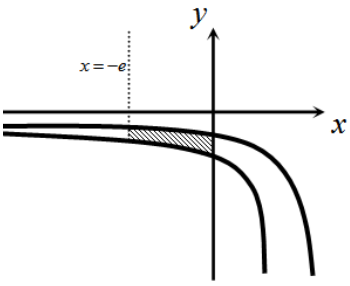
40) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-x העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.



41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.

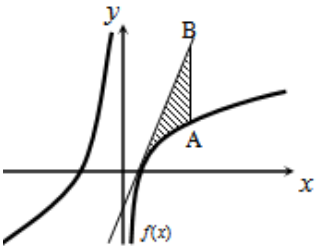
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=-e$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

42) נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y=18x-9$.



א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

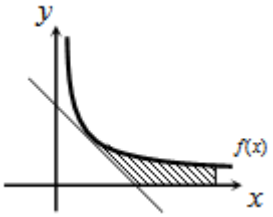
נעביר ישר המקביל לציר ה- y, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

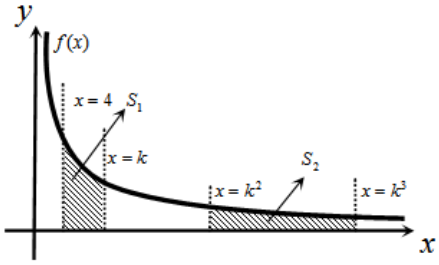


א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x=e^2$.

44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.

נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.



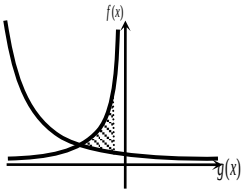
א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2.

ב. הראו כי ההפרש S_2-S_1 אינו תלוי ב- k, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1.
מצאו את k.

45) נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=0.4$.



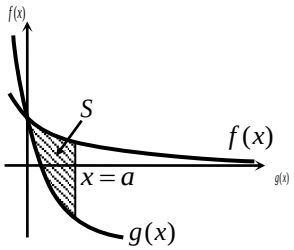
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

46) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\ge 0$.

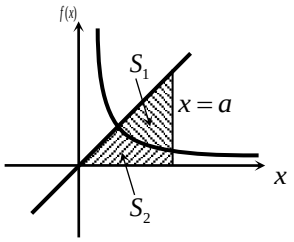


א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- x, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצאו את ערכו של a, עבורו מתקיים $S=4$.

47) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a, עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

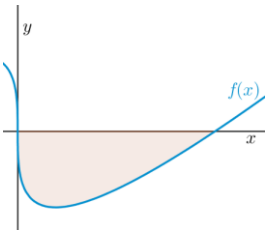
פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

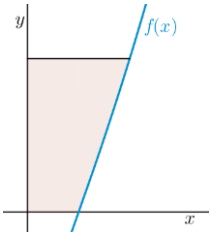
48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

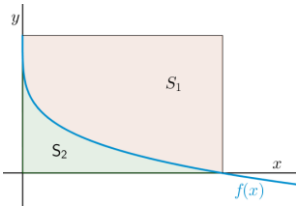


א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.

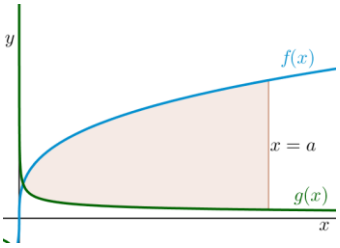


נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

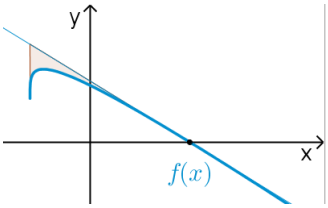
51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x, $x=a$ (a פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.
מצאו את a.

52) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, a פרמטר.



ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

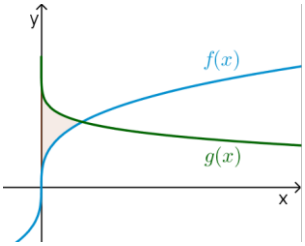
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

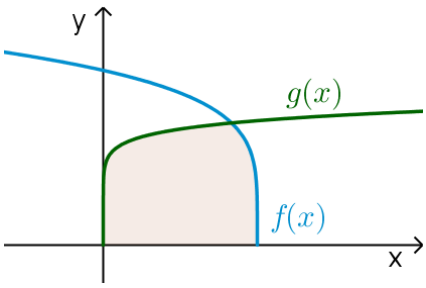
53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y.

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.



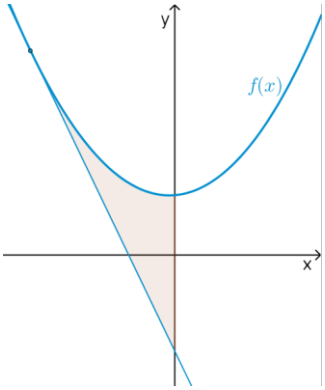
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- x.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

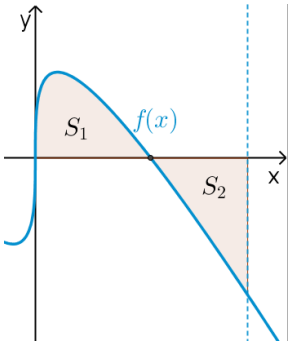
55) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.



א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .

56) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור.
מצאו את k , אם ידוע כי $S_1=S_2$.

תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

25) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

26) ב. 10 יח"ש.

27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

29) א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

31) $S=0.192$ יח"ש.

32) $b=2$

33) שאלת הוכחה.

34) $a=\ln 2$

35) א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

36) א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

37) ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

38) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

39) $S=\ln 4$ יח"ש.

40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

41) א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

42) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

43) א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

44) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

45) א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

46) ב. $a=2$

47) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

48) א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

49) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

50) $\frac{S_1}{S_2}=4$

51) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

52) א. $a=1$, $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

53) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

54) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

55) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

56) א. כל x. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

תשובות סופיות

1) $20\frac{5}{6}$

2) $20\frac{5}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 25 - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב 281
2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב 284
3. חישוב נפח גוף כללי 285

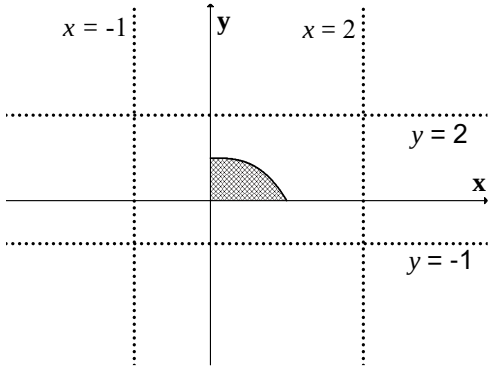
חישוב נפח גוף-סיבוב

שאלות

1) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- x.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- y.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:
א. שיטת הדיסקות (cavalieri).
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=1-x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות **3-8**:



3) ציר ה- x.

4) הישר $y=-1$.

5) הישר $y=2$.

6) ציר ה- y.

7) הישר $x=-1$.

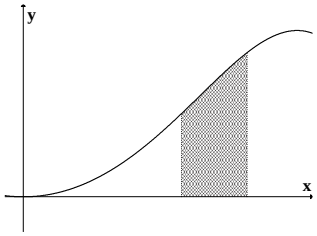
8) הישר $x=2$.

9) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

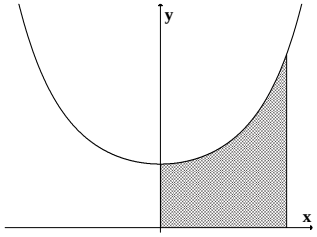
10) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

11) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.

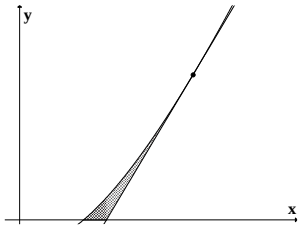
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



12) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$
והישרים $y=0$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$,
מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו נפח הגוף המתקבל?



13) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$
והישרים $y=0,\ x=0,\ x=1$,
מסתובב סביב ציר ה- y.
מהו נפח הגוף המתקבל?



14) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\ln x$,
המשיק לגרף בנקודה $\left(e,e\right)$ וציר ה- x,
מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו נפח הגוף המתקבל?

15) השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x)=x^2,\ f(x)=2x+8$, $x=0$
מסתובב סביב הישר $x=4$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\frac{64}{15}\pi$ ב. $\frac{64}{15}\pi$

2) א. $\frac{8}{3}\pi$ ב. $\frac{8}{3}\pi$

3) $\frac{9\pi}{14}$

4) $\frac{15\pi}{7}$

5) $\frac{33\pi}{14}$

6) $\frac{3\pi}{5}$

7) 2.1π

8) $\frac{12\pi}{5}$

9) $V=\pi R^2\cdot H$

10) $V=\frac{\pi R^2\cdot H}{3}$

11) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

12) $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

13) $\pi\left(e-1\right)$

14) $\frac{e^3-4}{54}\pi$

15) 128π

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

שאלות

1) הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$, עבור $-1\le x\le 1$, מסתובבת סביב ציר ה- x .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

2) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

3) נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

4) הפונקציה $x=\sqrt{9-y^2}$, עבור $-2\le y\le 2$, מסתובבת סביב ציר ה- y .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

תשובות סופיות

1) 8π
2) $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$
3) $S=4\pi R^2$
4) 24π

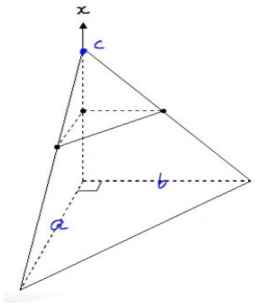
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב נפח גוף כללי

שאלות

1) מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו a.

2) חשבו את נפחה של פירמידה,
שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).



תשובות סופיות

1) $V=\frac{a^2h}{3}$

2) $\frac{abc}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 26 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי חישוב 286
2. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי תיאוריה 289
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים 292

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו"א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו-$b(x)$ גזירות, אזי:

1) $I(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)$

2) $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \Rightarrow I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

3) $I(x)=\int_2^x e^{-t^2}dt$

4) $I(x)=\int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

5) $I(x)=\int_2^{x^3+x} t\ln t\,dt$

6) $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

8) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_4^x e^{t^2}dt$

10) חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$, כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$.

חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי f רציפה).

13) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

14) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

15) תהי f פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$.

הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

16) מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$.

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$, בנקודה $x_0=2\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) $I'(x)=e^{-x^2}$

4) $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

5) $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

6) $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{3}$

9) $4e^{16}$

10) 0

11) תחום הגדרה: כל x.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$, $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$, $x<-1$.

12) 40

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

17) $y=x-2\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

2) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

3) נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

הוכיחו כי $F'=f$ ב- $[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(t)dt > 1$.

הוכיחו שקיים x_1, בקטע (a,b), עבורו $\int_a^{x_1} f(t)dt = 1$.

6) תהי f פונקציה רציפה ומחזורית לכל x, עם מחזור p.

הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x \in \mathbb{R}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי הפונקציה $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,

ומצאו את הקבוע הממשי C עבורו מתקיים $f(x) = C$ לכל $x \in (0,\infty)$.

ב. הוכיחו כי $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ לכל $x > 0$.

8) תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,1)$, כך ש- $f(c) = 3c^2$.

9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0,\pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt = 0$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c \in (0,\pi/2)$, כך ש- $f(c) = 2\cos 2c$.

10) תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שקיים $c \in [0,\pi/4]$, כך ש- $2\cos 2c\int_0^{\pi/4} f(t)dt = f(c)$.

11) תהי $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה.

הוכיחו שקיים $c \in (0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$.

12) תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נניח כי $\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$.

הוכיחו כי $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,
בקטע (a,b), שעבורן מתקיים $\int_a^{x_1} f(t)dt = \int_a^{x_2} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים c, בקטע (a,b), כך ש-$f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש- f רציפה ב-$[a,b]$,
ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש- f אינטגרבילית ב-$[a,b]$? נמקו.

14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,
ונניח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.
הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל x בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

7) א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

14) $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+D+2 & x\ge 0\\ e^{x}+D & x<0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

שאלות

1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

2) תהי f רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_1} f(t)dt=\int_a^{x_2} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים x, בקטע (a,b), שעבורו $f(x)=0$.

4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

6) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=g(c)$.

7) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נתון כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

10) ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

11) הוכח כי $\frac{3}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{6}{\ln 2}$.

12) הוכח כי $\frac{\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{2\pi^2}{9}$.

13) הוכח כי $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int_0^{\pi/4}e^{-x^2}\tan x dx\le\frac{1}{2}\ln 2$.

14) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

15) נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

אנליזה מתמטית 1

פרק 27 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון 294
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני 296
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי 297
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים 298
5. מבחני השוואה 299
6. התכנסות בהחלט 301
7. מבחן דיריכלה 302
8. התכנסות בתנאי 303

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-5**:

1) $\int_1^\infty \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

3) $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$

4) $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}dx$

5) $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$

6) הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, עבור $|\alpha|<1$.

7) הוכיחו כי $\int_0^\pi \frac{1}{\alpha-\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $|\alpha|>1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{1}{2e}$

4) מתבדר: ∞.

5) $\frac{5}{4e^2}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

תשובות סופיות

1) מתבדר: ∞.

2) מתבדר: ∞.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

1) מתבדר: ∞.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x , עבור $x\le 1$.

2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

3) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^{x^3}}$.
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0\le x\le k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x\ge k$.
מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}e^2$

2) $2\sqrt{5}$

3) $k=\sqrt[3]{\ln 2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$

3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$

4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$

7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$

8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

9) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x}dx$

10) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

12) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}dx$

14) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(x+\sqrt{x}\right)}$

16) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}\sqrt{(1+x)^5}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) מתבדר.
7) מתכנס.
8) מתכנס.
9) מתבדר.
10) מתכנס.
11) מתכנס.
12) מתבדר.
13) מתכנס.
14) מתבדר.
15) מתכנס.
16) מתכנס.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

1) $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$

2) $\int_0^\infty e^{-10x}\sin 4x dx$

3) $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

4) הוכיחו: אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

תשובות סופיות

1) מתכנס.

2) מתכנס.

3) מתכנס.

4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

1) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$

2) א. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p>0)$

ב. $\int_1^\infty \sin(x^2) dx$

3) $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p>0)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

1) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (p>1)$

2) א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

ג. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx \quad (0<p\le 1)$

3) א. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^p}dx$

4) $\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1}dx$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\left(\tan x\right)}{\cos x}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.

2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,

מתבדר עבור $p \geq 2$.

ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,

מתבדר עבור $p \geq 5$.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אנליזה מתמטית 1

פרק 28 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים - הכרות ותכונות בסיסיות 305
2. הצמוד המרוכב 307
3. הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית 310
4. נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב 312
5. תרגול נוסף במספרים מרוכבים 314
6. חילוק פולינומים 317
7. פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה 318
8. שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית 319

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את המשוואות ומצאו את z :

1) $z^2+9=0$ **2)** $z^2-4z+5=0$ **3)** $z^2-6z+13=0$

בשאלות **4-7** חשבו :

4) $(i\sqrt{2})^6$ **5)** $(i^5-i^{13})^2$

6) $(4+i)-(2+10i)$ **7)** $(-4-i)(2-3i)$

8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

ידוע כי z_1+z_2 ממשי וכי z_1-z_2 מדומה.

א. מצאו קשר בין a_1 ל-a_2 ובין z_1 ל-z_2 .

ב. הראו כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

9) יהיו $z_1,z_2,...,z_n$ מספרים מרוכבים.

א. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

ב. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|$

ג. הוכיחו כי $|z_1^n|=|z_1|^n$

10) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו : אם $z^{11}=1$ אז $z+\frac{1}{z}$ מספר ממשי.

11) יהי z מספר מרוכב.

הוכיחו : אם $|z+1|=|z-1|$ אז iz מספר ממשי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\pm 3i$
2) $2 \pm i$
3) $3 \pm 2i$
4) -8
5) 0
6) $2-9i$
7) $-11+10i$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

1) $\frac{5}{2+i}$ **2)** $\frac{1+i}{1-3i}$ **3)** $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

פתרו את המשוואות בשאלות **4-6** ומצאו את המספר המרוכב z:

4) $2z-6i=\bar{z}-1$ **5)** $z\bar{z}-\overline{5z}=10i$ **6)** $(1+i)z^2+2z-i+1=0$

7) פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו-w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$$

8) חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

9) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$

בשאלות **10-11** פתרו את המשוואות:

10) $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$

11) $z^2-i\bar{z}+6=0$

12) הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{\bar{z}}{z^2}-\frac{z}{\bar{z}^2}$ כאשר $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z-i|=1$.

הוכח:

א. $|z|^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)$

ב. $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.

מצאו את a.

15) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $2-i$

2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

3) $-\frac{1}{2}+i$

4) $z=-1+2i$

5) $z=1+2i, z=4+2i$

6) $z=i, z=-1$

7) $z=2-3i,\ \ w=5+i$

8) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$

9) א. $z_{1,2}=i, 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i,\ \ 2-5i$

10) $z_1=-2-5i,\ \ z_2=3i$

11) $z_1-3i,\ z_2=2i$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $a=-\frac{3}{4}$

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות **1-8** בצורה קוטבית:

1) $1+\sqrt{3}i$ **2)** $-1-i$ **3)** $-3-\sqrt{3}i$ **4)** $1-i$

5) $1+i$ **6)** $\sqrt{3}-i$ **7)** $\sqrt{3}i$ **8)** -8

9) נתון המספר המרוכב $z=Rcis\theta$.
הביעו באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\overline{z}$

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$

ה. iz

ו. $z\cdot\overline{z}$

10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\overline{z}$

ב. $z\cdot\overline{z}$

ג. $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\overline{z}^2$

ב. $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

12) הוכיחו:

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$

ב. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3) $\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

7) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

9) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$

ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90^\circ+\theta\right)$ ו. R^2

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות **1-6** חשבו:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ **2)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

4) $\sqrt[6]{-8}$ **5)** $\sqrt[5]{1}$ **6)** $\sqrt[3]{-8}$

7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי: $\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{32}i$

2) -2^9

3) -1

4) $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$

5) $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4$

6) $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right) \quad k=0,1,2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

2) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i.

ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $z^5=-16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

6) נתון $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3=w^3$.

ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה המשוואה $(z-1)^3=1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

8) נתונה המשוואה $z^3=-\sqrt{3}+i$.

א. מצאו את שורשי המשוואה: z_3, z_2, z_1.

ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3$.

ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9+(z_2)^9+(z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

9) נתונה המשוואה $z^2+|z|^2-2ti=18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו- z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t.

ב. נתון $z_1\cdot z_2=-18i$. מצאו את הפרמטרים s ו- t.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $\overline{z}\cdot i+(\overline{z})^2+|z|^2+z+\overline{z}=0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.

הפרש סדרה זו הוא $1+\frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$,
כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = cis60^\circ , z_2 = cis240^0 , z_3 = cis120^\circ , z_4 = cis300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

2) א. $z_1 = 1+\sqrt{3}i , z_2 = -\sqrt{3}+i ,\ z_3 = -1-\sqrt{3}i , z_4 = \sqrt{3}-i$ ב. שאלת הוכחה.

3) $z=0\ ,\ z=1\ ,\ z=-1$

4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i , z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i ,\ z_3 = -i$

ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

5) א. $n=1,2,3,4,5\ \ z_n = 2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]$ ב. $q = cis72^\circ$

6) א. $z_1 = cis45^\circ ,\ z_2 = cis165^\circ ,\ z_3 = cis285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ , z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ , z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

9) א. $z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i\ ,\ z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i$ ב. $t=9\ ,\ s=\pm 1$

10) א. $z_1 = 0\ ,\ z_2 = -0.5+0.5i$ ב. $a_1 = -8.5$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה לינארית

שאלות

בשאלות **1-4** נתון $v=(5+i,2-3i,7+2i)$, $u=(3-2i,4i,1+6i)$.
מצאו:

1) א. $4u+v$ ב. $2i\cdot u-v$ **2)** $u\cdot v$

3) א. $u\cdot u$ ב. $|u|$

4) $|v|$

בשאלות **5-6** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

$$z_1+iz_2+(1-i)z_3=1+4i$$

מעל **השדה** $\mathbf{F}$: $iz_1+z_2+(1+i)z_3=2+i$, כאשר:

$$(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3=5-i$$

5) $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

6) $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

בשאלות **7-8** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\overline{z}_1,z_3=z_1+\overline{z}_1\}$
הוא תת-מרחב של C^3:

7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות **9-10** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3:

9) מעל $\mathbb{C}$.

10) מעל $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

11) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

13) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$ ב. $(-1+5i, -10+3i, -19)$

2) א. $20+35i$ ב. 66

3) $\sqrt{66}$

4) $\sqrt{92}$

5) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{R}}{=} (2, 3, -1)$

6) $(z_1, z_2, z_3) \underset{F=\mathbb{C}}{=} ((-1+i)t+1+i, 3, t)$

7) כן

8) לא

9) תלויים.

10) בלתי תלויים.

11) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i, 2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i, 2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

12) ערכים עצמיים : $x=3$, וקטורים עצמיים : $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1, 1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

13) $x=1, x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i}, 1+\sqrt{3i}, -2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i}, 1-\sqrt{3i}, -2\right)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©