# אנליזה מודרנית

# תוכן העניינים

# אנליזה מודרנית

## פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

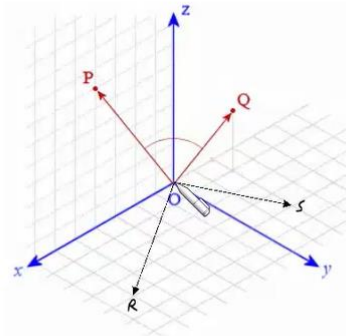
### תוכן העניינים

# וקטורים

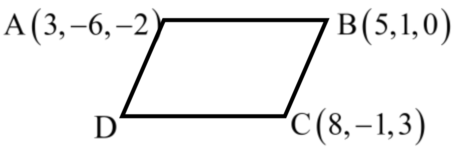
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור $u$ כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

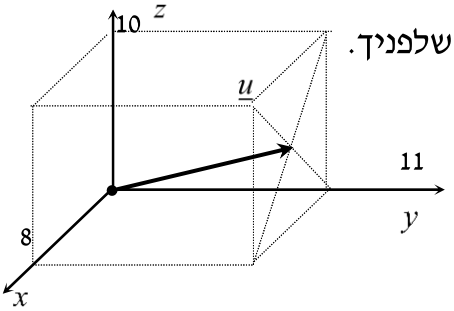
**1)** רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



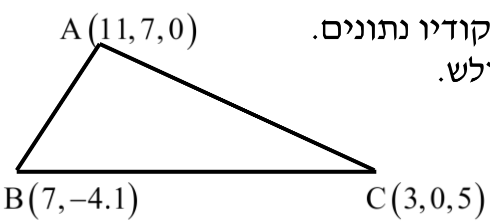

**2)** בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.




**3)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**4)** בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

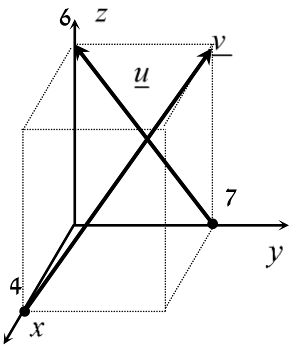


**5)** ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה $N$, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

**6)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



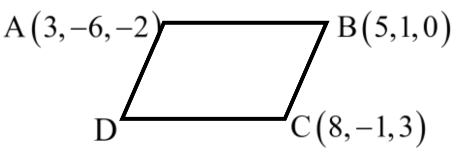

**7)** מצאו את $x$, $y$ ו- $z$, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$,
$\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

**8)** נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ? נמקו.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$ .

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

**10)** חשבון :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

**11)** חשבון :

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

**12)** $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** $\underline{u}/|\underline{u}|$

**14)** $d(\underline{u},\underline{v})$

**15)** $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

**16)** $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים :

**17)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

**18)** $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

**19)** $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**20)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$\text{A}(-4,2,1)$ , $\text{B}(0,2,-1)$ , $\text{C}(-3,-5,0)$ , $\text{D}(-7,-5,2)$ .
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

**21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$

**23)** מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$ , $B(0,3,2)$ , $C(5,-1,0)$.

**24)** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$ , $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

**25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

**26)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2 \Leftrightarrow u\perp v$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**27)** הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

**28)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם $\alpha$ היא הזווית בין $a$ ל- $b$, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

**29)** יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה $k$.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- $w_1$.
מהו המרחק של $v$ מ- $w_1$?

**30)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- $u$ ו- $v$ הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

## תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

**29)** $\frac{5}{4}k$

**30)** שאלת הוכחה.

# מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

## שאלות

**1)** נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

**2)** חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

**3)** נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

**4)** נתונים שני וקטורים $u,v$ במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $|(u+v)\times(u-v)|$.

**5)** נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

**6)** חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

**7)** חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
הוכיחו כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:
א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

## תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) $8$

5) א. $-3$ ב. $-3$ ג. $-3$

6) א. $6$ ב. $1$

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. $-4$ ב. $4$ ג. $4$ ד. $4$

11) אין לו נוסחה.

# שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

## שאלות

**1)** הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$ , $B(1,1,1)$ , $C=(2,1,2)$ , $D(2,2,2)$.

**2)** מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

**3)** נתונים שני ישרים:

$$L_1:\quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad\qquad L_2:\quad x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** $\sqrt{26}$

**3)** א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

# פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos \pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

**2)** רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור $xy$)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

**3)** נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to 1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

**4)** נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

**5)** נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

**6)** נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

**7)** נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה **(T)**, נורמל היחידה **(N)** והבינורמל **(B)** של $r$.

**8)** תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל $t$, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

**9)** נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

**10)** נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

**11)** חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

**12)** נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

**13)** חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע $t$.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

**14)** מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

**15)** תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי) ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

**16)** וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3,t-5,t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של $t$ גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים :
א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.
ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

**18)** הוכיחו : אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

**19)** חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r\left(t\right)=\left(t^2,0,t\right)$.

**20)** וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=\left(2,-1,-10t\right)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

**21)** וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=\left(8\cos 4t,8\sin 4t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

**22)** העקום $C$ הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(a,b)$ ורדיוס $R$.
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום $C$.
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא $(a,b)$ ורדיוס $R$.

**23)** נתון העקום $r(t)=(4\cos t,3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

**24)** נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

**25)** נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\dfrac{|y''(x)|}{\left(1+(y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

**26)** נתון העקום $y=\dfrac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.
ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?
ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

**27)** מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

**28)** נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\dfrac{125}{16}$.
ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

**29)** העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(a,b)$ ורדיוס $R$.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

**30)** נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.
ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.
ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

**31)** עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\left(x(t),y(t)\right)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

**32)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ \ (a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.
ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.
במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

**33)** הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא
$k(\theta)=\dfrac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

**34)** חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

**35)** חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.
במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

# תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$    א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$    ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$, $r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$    ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$, $r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$, $r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$    ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$, $r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$, $r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$    ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$    ג. $(7,6,10e-10)$    ד. כן.    ה. כן.

4) א. $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right),\ \left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6},\ \frac{d|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$

ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$    ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$    ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$    ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\ \ N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\ \ B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

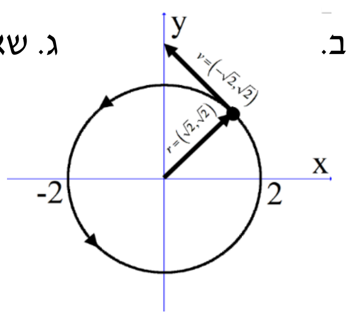
9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$, מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$    ב. $\sqrt{140}$    ג. $(0,-12,0)$    ד. $12$    ה. $120.46^\circ$

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$, $|v(t)|=2$    ב.




ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

16) $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$

**17)** א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha=45^{\circ}=\frac{\pi}{4}{}_{rad}$

**18)** שאלת הוכחה.

**19)** $\rho=\frac{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $\kappa=\frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

**20)** $\rho=\frac{21\sqrt{21}}{2}$

**21)** $\rho=6.5$, $\kappa=\frac{2}{13}$

**22)** א. $\rho=R,\ \kappa=1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho=R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa=\frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

**23)** העקמומיות **מקסימלית** עבור $t=0,\pi,2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa=\frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t=\pi/2,3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa=\frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

**26)** א. $\rho(x)=\frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2x^2\,|x|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

**27)** רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2=2/9$.

**28)** א. $y=\pm3,\ x=\frac{9}{8}$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2=(125/16)^2$

**29)** $\rho=R$, $\kappa=\frac{1}{R}$

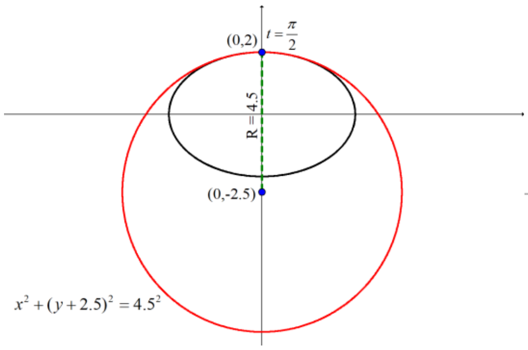
**30)** א. $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+\left(y+1\right)^2=\frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

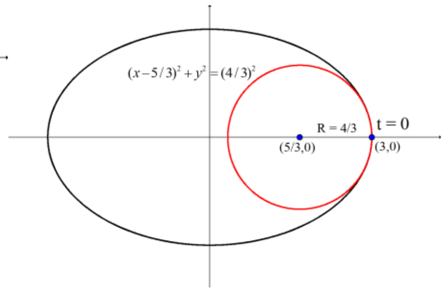
**31)** שאלת הוכחה.

**32)** א.

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}\qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a}\qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



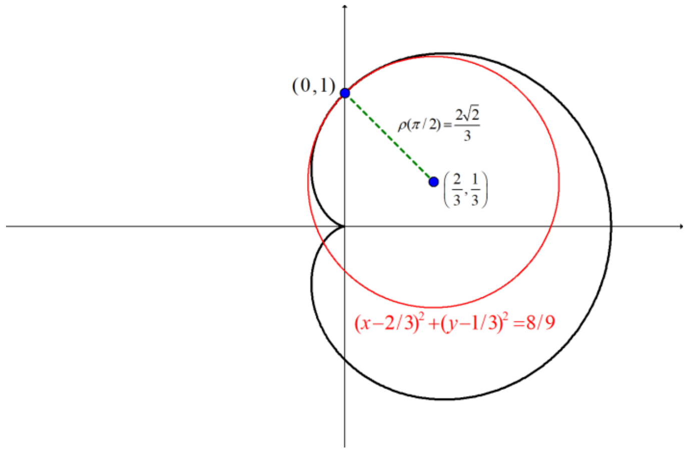




ב.

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $\kappa=\rho=1$

**35)** ראו שרטוט:



# גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

## שאלות

**1)** יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.
הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

**2)** יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

**3)** יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

**4)** יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

**5)** יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

## הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi=\varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של $\varphi$ המסומן $\mathrm{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה **(דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)**</u>

יהי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\mathrm{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}\\ &\mathrm{div}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h)\\ &\mathrm{div}\mathbf{F}=f_x+g_y+h_z\end{aligned}}\ .$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\mathrm{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{curlF}=\nabla\times\mathbf{F}\\ &\mathbf{curlF}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h)\\ &\mathbf{curlF}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f&g&h\end{vmatrix}\\ &\mathbf{curlF}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ g&h\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f&h\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ f&g\end{vmatrix}\\ &\mathbf{curlF}=(h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ במקום $\mathrm{curl}\mathbf{F}$.

# אנליזה מודרנית

## פרק 2 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

### תוכן העניינים

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

# הצגה פרמטרית של ישר

## שאלות

**1)** האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$ ?

**2)** האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x}=t(2,-1,5)$ ?

**3)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

**4)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

**5)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$ ומקביל לישר $\ell : \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

**6)** מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ ומאונך לישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות $x$, $y$ ו- $z$.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$ , $y=10$ , $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

**8)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- $y$ במרחב.

**9)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- $z$.

**10)** מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

**11)** ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

**12)** ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נקי' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

**13)** הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\ y=2t\\ z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\ y=4\\ z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-y+3z=3\end{cases}$

## תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(2,1,0)$

7) א. $x=1+4t\ ,\ y=2+5t\ ,\ z=3+6t$ ב. $\ell : \underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x}=t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell :\ \underline{x}=(1,-1,2)+t\cdot(3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+t \\ z=2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3}=y+1=2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x}=(1,4,0)+t(1,0,10)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z)=(1,-10,4)+t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z)=(2,1,0)+t(-2,-1,1)$

# מצב הדדי בין ישרים

## שאלות

**1)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$

**2)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$ , $\ell_4 : \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$

**3)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$ , $\ell_6 : \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$

**4)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$ , $\ell_8 : \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$

**5)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$ , $\ell_{10} : \underline{x}=s(6,0,-2)$

**6)** מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$ , $\ell_{12} : \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$

**7)** מצאו את ערכו של הפרמטר $k$, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

**8)** נתונות הנקודות $D(-2,3,k)$ , $C(-6,3,-1)$ , $B(k,-1,3)$ , $A(3,-1,5)$.
הראו כי לכל ערך של $k$, הישרים $\ell_{AB}$ ו- $\ell_{CD}$ מצטלבים.

## תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

# הצגה פרמטרית של מישור

## שאלות

**1)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$ , $B(3,6,2)$ , $C(0,-3,1)$.

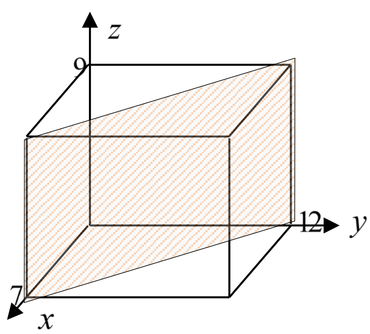
**2)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

**3)** נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$ , $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

**4)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- $x$.

**5)** מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

**6)** נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.




## תשובות סופיות

**1)** $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

**2)** $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

**3)** $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

**4)** $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

**5)** $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

**6)** $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

# משוואת מישור

## שאלות

**1)** קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$ :

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

**2)** מצאו את ערכו של $k$ שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$ .

**3)** נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$ .
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

**4)** נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$ .
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$ .

## תשובות סופיות

**1)** א. על המישור. ב. לא על המישור.

**2)** $k=3$

**3)** $(3,0,0)$ , $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$ , $(0,0,-9)$

**4)** $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

# מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

## שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור $\pi$ עובר בנקודות: $\mathrm{A}(1,0,-3)$ , $\mathrm{B}(2,0,0)$ , $\mathrm{C}(4,-1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$ , $(0,1,-2)$ , $(2,0,5)$.
1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

## תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi : -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi : x-3y+8z=0$

4) $\pi : 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$ , $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

# מישורים המקבילים לצירים

## שאלות

**1)** נתונה משוואת המישור $\pi : (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של $k$ המישור מקביל לציר ה- $y$ (ולא מכיל אותו)?

**2)** פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$ , $y=0$ , $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

## תשובות סופיות

**1)** $k=3$

**2)** 6 יח"נ.

# מצב הדדי בין ישר ומישור

**1)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$ , $\pi : 2x-y-3z+6=0$ .
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**2)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$ , $\pi : x-3y+2z-11=0$ .
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**3)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$ , $\pi : 2x+y+6z+11=0$ .
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

**4)** נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$ , $\pi : 2x-y+z-4=0$ .
מצאו את ערכי $a$ ו- $b$ , עבורם הישר מוכל במישור.

### תשובות סופיות

**1)** הישר חותך, $(1,-1,3)$ .

**2)** מקבילים.

**3)** הישר מוכל.

**4)** $a=1$ , $b=-7$

# מצב הדדי בין מישורים

## שאלות

**1)** בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

**א.** $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0\ ,\ \pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

**ב.** $\pi_3 : x+3y-z+1=0\ ,\ \pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

**ג.** $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0\ ,\ \pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

**2)** נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0\ ,\ \pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$$

מצאו את ערכי $k$ עבור המישורים:

א. נחתכים  ב. מקבילים  ג. מתלכדים

## תשובות סופיות

**1)** א. מתלכדים.  ב. מקבילים.  ג. נחתכים.

**2)** א. $k \neq 2,-3$  ב. $k=-3$  ג. $k=2$

# ישר חיתוך בין מישורים

## שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ , $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ , $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ , $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ , $\pi_8 : z - 2 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ , $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

## תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x} = (-2,6,0) + t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x} = (0,2,2) + t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x} = (0,4,10) + t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x} = (0,2,2) + t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x} = (-3,0,0) + t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x} = t(1,9,13)$

# זווית בין שני ישרים

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x}=(4,0,0)+t(6,8,1)\ ,\ \ell_2 : \underline{x}=s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x}=(10,17,-18)+t(3,0,-6)\ ,\ \ell_2 : \underline{x}=(6,5,4)+s(0,4,0)$

**2)** מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $\mathrm{B}(6,0,-2)$ , $\mathrm{A}(3,4,6)$ וישר העובר דרך הנקודות $\mathrm{D}(-1,4,2)$ , $\mathrm{C}(6,5,1)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.

**3)** נתונות הנקודות $\mathrm{C}(3,-1,2)$ , $\mathrm{B}(4,2,-1)$ , $\mathrm{A}(1,-3,0)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $\mathrm{D}(4,2,-1)$ ו- $\mathrm{E}(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

**4)** נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $\mathrm{B}(-2,y,-1)$ , $\mathrm{A}(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C=11$. מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $78.521°$ ב. $90°$

**2)** $63.37°$. הישרים מצטלבים.

**3)** א. 1. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x}=(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x}=(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

**4)** $\mathrm{C}(0,2,11)$ או $\mathrm{C}(0,28.45,11)$

# זווית בין ישר ומישור

## שאלות

**(1** מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$ , $\pi : 3x-2y+2z+9=0$ .

**(2** נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$ , $C(1,2,5)$ , $B(0,2,-1)$ , $A(1,-1,2)$ .
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

**(3** נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x+y-2z-6=0$ ,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$ .
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B=z_B=-1$ .

## תשובות סופיות

**(1** $18.87°$

**(2** $44.83°$

**(3** $14.9°$

# זווית בין שני מישורים

## שאלות

**1)** מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

**2)** נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$ , $B(3,-1,1)$ , $C(7,-1,-5)$ , $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

**3)** מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

## תשובות סופיות

**1)** $90^\circ$

**2)** $87.539^\circ$

**3)** $32.312^\circ$

# מרחק בין שתי נקודות במרחב

## שאלה

**1)** נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$ , $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי $k$ עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB=AC$.

## תשובה

**1)** $k=8$ או $k=12$.

# מרחק בין נקודה לישר

## שאלות

**1)** מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x}=t(2,0,-7)$.

**2)** נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$ , $B(2,-1,0)$ , $A(1,6,-1)$ .
חשבו את שטח המשולש ABC.

**3)** על הישר $\ell : \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{54}$

**2)** 12.75 יח"ש.

**3)** $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

# מרחק בין נקודה למישור

## שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi : 2x+4y-4z+15=0$ , $\ell : \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

## תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi : 3x-2y+z+21=0$ או $\pi : 3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

# מרחק בין ישרים מקבילים

## שאלות

**1)** נתונות הנקודות $D(12,11,-8)$ , $C(6,1,4)$ , $B(12,-5,2)$ , $A(15,0,-4)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

**2)** 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1 : \underline{x} = (2,0,-1) + t(1,-2,1) \quad , \quad l_2 : \underline{x} = (-8,-1,19) + s(-4,1,6)$$

$$l_3 : \underline{x} = (-2,7,-11) + r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4 : \underline{x} = (-2,1,5) + q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

## תשובות סופיות

**1)** א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

# מרחק בין ישר למישור

## שאלות

**1)** נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- $y$ ובין המישור הנתון.

**2)** נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$ , $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר $k$ שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

## תשובות סופיות

**1)** א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

# מרחק בין מישורים מקבילים

## שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_2: x-2y-2z-12=0$ , $\pi_1: x-2y-2z+6=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:

$$\pi_1: 2x+y-2z-11=0 \quad , \quad \pi_2: x+2y+2z+5=0 \quad , \quad \pi_3: 2x-2y+z+3=0$$

$$\pi_4: 2x+y-2z+7=0 \quad , \quad \pi_5: x+2y+2z-1=0 \quad , \quad \pi_6: kx+qy+z+p=0$$

מצאו את ערכי הפרמטרים $k$, $q$ ו- $p$, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

## תשובות סופיות

1) $\pi_1: 3x-4y+5z+10=0$ , $\pi_2: 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3: x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$ , $q=-2$ , $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

# מרחק בין ישרים מצטלבים

## שאלות

**1)** נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

**2)** נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

**3)** מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- $z$.

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

**2)** 1.567 יח"א.

**3)** $\sqrt{2}$ יח"א.

# היטלים ונקודות סימטריה

## שאלות

**1)** נתונה נקודה $A(1,-1,3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.

ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל-A ביחס לישר.

**2)** נתונה נקודה $A(0,0,1)$ ונתון מישור $7x+7y-z=8$.

א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.

ב. מצאו את הנקודה C, הסימטרית ל-A, ביחס למישור.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1,3,2)$ ביחס למישורי הצירים.

ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x,y,z)$ ביחס למישורי הצירים.

**4)** נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0,2,4),\ B(-2,6,-2),\ C(2,-4,8),\ D(10,2,0)$.

מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC.

## תשובות סופיות

**1)** א. $B(0,1.5,-1.5)$ ב. $C(-1,4,-6)$

**2)** א. $B\left(\frac{7}{11},\frac{7}{11},\frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11},\frac{14}{11},\frac{9}{11}\right)$

**3)** א. $B_{xy}(1,3,-2),\ C_{xz}(1,-3,2),\ D_{yz}(-1,3,2)$

ב. $B_{xy}(x,y,-z),\ C_{xz}(x,-y,z),\ D_{yz}(-x,y,z)$

**4)** $\underline{x}=(0,2,4)+t(0,1,1)$

# שאלות מסכמות

**1)** נתונות הנקודות $A(1,1,3)$ , $B(1,2,0)$ , $C(1,1,1)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

**2)** מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$ , $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$ , $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$ , $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$ , $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

**3)** מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$ , $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$ , $2x-14y+10z=-6$.

**4)** מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$ , $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$ , $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$ , $2x-14y+10z=-6$.

**5)** נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

**6)** הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

**7)** נתונים מישור וישר $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ , $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- $z$, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

**8)** נתונים שני מישורים $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ , $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור $\pi_1$ ובמרחק 6 ממישור $\pi_2$ (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

**9)** נתונים ישר ומישור $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ , $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, $\ell_2$, המקביל למישור $\pi$, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר $\ell_1$ בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור $\pi$, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות $t$ את וקטור הכיוון של $\ell_2$)

**10)** נתונים שני מישורים $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ , $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$.
$\ell_1$ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור $\pi_3$ מכיל את הישר $\ell_1$ ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור $\pi_3$.

## תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$ , $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

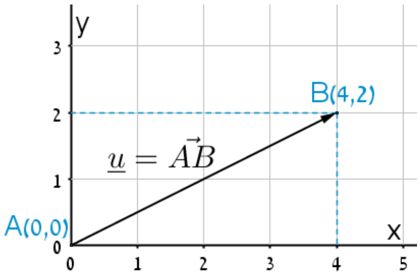
# סיכום כללי

## הגדרה כללית

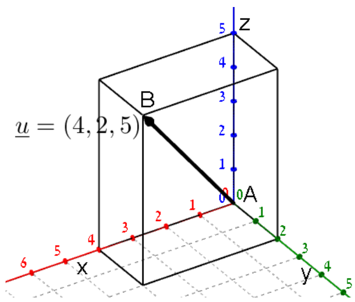
וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: $(x,y)$ במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.




- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.




## ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

## אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$
הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$ ; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ ; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

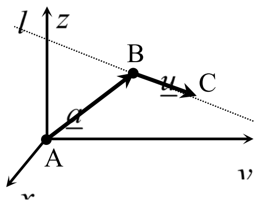
## מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\alpha$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר $\alpha$ היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

## הצגה פרמטרית של ישר




ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר**.
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר $t$ הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של $t$ שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר $l$.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$ , $B(5,3,1)$ ו-$C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overline{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$ ; $\underline{a}=\overline{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

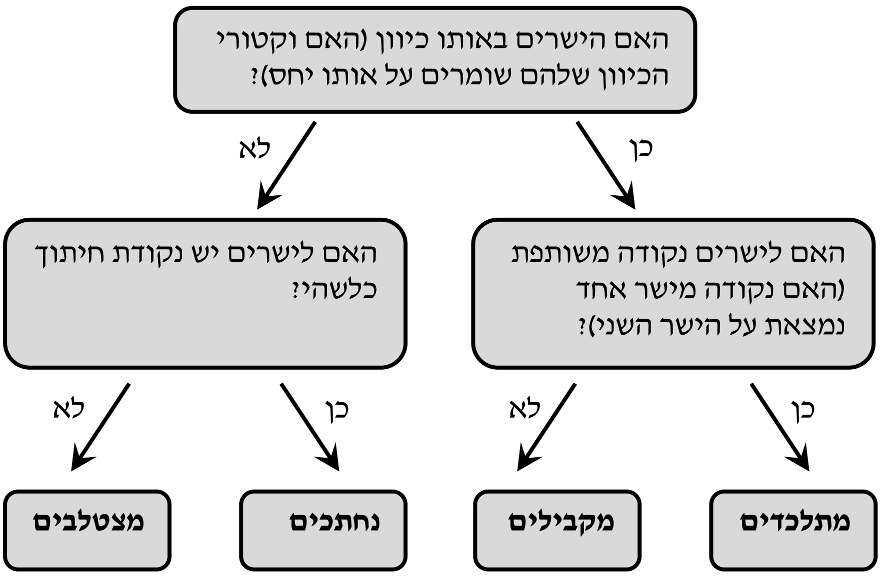
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת $t_0$ בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת $t_1$ בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## מצב הדדי בין ישרים

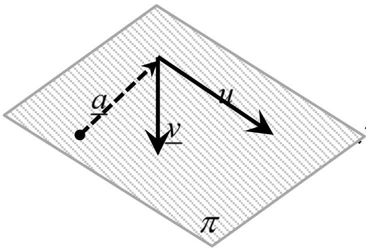
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## הצגה פרמטרית של מישור




מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi\ :\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}+s\underline{v}$

כאשר $t,s$ הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור $\pi$.

## משוואת מישור

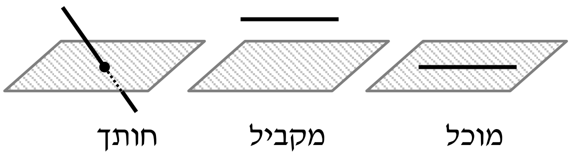
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: $(x,y,z)$ היא נקודה על המישור והמקדמים $a,b,c$ הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

## מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.




כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

## מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

| מתלכדים | מקבילים | נחתכים |
|---|---|---|
| $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ | $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ | כל מצב אחר |

## חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית $\alpha$ בין שני וקטורים $\underline{v}$ , $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה $\alpha$ בין שני ישרים $l_1=\underline{a_1}+t\underline{u_1}$ ו- $l_2=\underline{a_2}+s\underline{u_2}$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u_1}\cdot\underline{u_2}}{|\underline{u_1}|\cdot|\underline{u_2}|}\right|$.
- זווית חדה $\alpha$ בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה $\alpha$ בין שני מישורים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h_1}\cdot\underline{h_2}}{|\underline{h_1}|\cdot|\underline{h_2}|}\right|$.

## חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ .

2. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi: ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$ .

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\dfrac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$ .

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

# אנליזה מודרנית

## פרק 3 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

### תוכן העניינים

# קווים ותחומים במישור

## שאלות

**1)** שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

**2)** שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,|y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,|x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

**3)** מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

**4)** בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

ב. $S = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\right\}$

ג. $S = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\right\}$

ד. $S = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 4\right\}$

ה. $S = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

ב. $S = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}$

ג. $S = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$

ד. $S = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ y \geq 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\right\}$

ב. $S = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$

**9)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le \sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le \sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,||\,x-1|\le y\le \sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

**10)** נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

**11)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

**12)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\right\}$

**13)** שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x^2+y^2\le 16\right.\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ y\ge \frac{1}{4}x^2\right.\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ x^2+y^2\ge 4\right.\right\}$

## תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

# קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

## שאלות

**1)** עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\quad y=t^2$ $\qquad t\ge 0$

ב. $x=\sin t,\quad y=\cos^2 t$ $\qquad 0\le t\le \pi$

ג. $x=\cos t,\quad y=4\sin t$ $\qquad \pi\le t\le 2\pi$

**2)** להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר $t$, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים $x$ ו- $y$ בלבד:

א. $x=t-4\quad ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\quad ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\quad ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\quad ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\quad ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\quad ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ ($k$ קבוע).

**3)** נתון המעגל $x^2+y^2=8$ .

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2,2)$ לנקודה $B(-2,-2)$ .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום $D$, המוגבל מעל הישר $AB$ ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום $E$, המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$ .

**4)** נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, $A$ ו- $B$, ותהי הנקודה $A$ בעלת ערך ה- $y$ הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין $A$ לבין $B$.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

**5)** נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

**6)** נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

**7)** נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה $C$ היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את $C$ בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$ למסילה $C$.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

## תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$    ב. $y=1-x^2, -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1\ ,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$    ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$    ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$    ה. $x^2+y^2=25$    ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}$    ב. $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$ $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}$

ג. $0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le\frac{5\pi}{4}$ $\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v\end{cases}$

ד. $\sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$ $\begin{cases}x(u,v)=u\cos v\\ y(u,v)=u\sin v\end{cases}$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$ : מרכז: $(0,0)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}$

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$ $\begin{cases}x(u,v)=5u\cos v\\ y(u,v)=5u\sin v\end{cases}$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ : מרכז: $(8,4)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases}x(t)=8+5\cos t\\ y(t)=4+5\sin t\end{cases}$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$ $\begin{cases}x(u,v)=8+5u\cos v\\ y(u,v)=4+5u\sin v\end{cases}$.

ב. מקרה 1: $0\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$, $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}$,

מקרה 2 - $\pi\le t\le\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi$ , $\begin{cases}x=8+5\cos t\\ y=4+5\sin t\end{cases}$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le\sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases}x(t)=2\cos t,\ \ y(t)=\sqrt{2}\sin t & 0\le t\le 2\pi\\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ \ y(t)=2\sin t & 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ג. המסילה $DA$: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה $BC$ : $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$.

המסילה $AB$ : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

המסילה $CD$ : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le t\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

$$D_1:\begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3:\begin{cases} x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2:\begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

ד.

$$D_4:\begin{cases} x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v \\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v \end{cases}$$

$$0\le \mathbf{u}\le 1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le v\le \arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

**6)** א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$ , שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$ .

פרמטרית: ימנית $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=\cosh t\\ y=2\sinh t\end{cases}$ , שמאלית: $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=2\sinh t\end{cases}$ .

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $0\le u\le 1,\ \ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_1:\begin{cases}x(u,v)=u\cosh v\\ y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$

$0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_2:\begin{cases}x(u,v)=-u\cosh v\\ y(u,v)=2u\sinh v\end{cases}$

**7)** א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$ , שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$ .

פרמטרית: ענף ימני $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ וענף שמאלי $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ .

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ $\quad C:\begin{cases}x=-\cosh t\\ y=\sqrt{3}\sinh t\end{cases}$ $\qquad$ ד. 1

**8)** 8

**9)** $6\pi\sqrt{29}$

# קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

**5)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

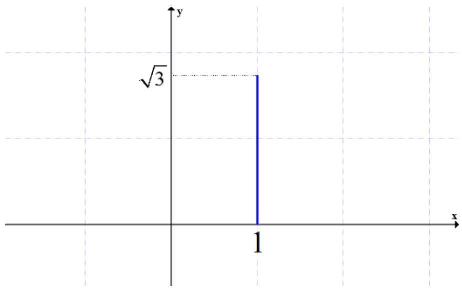
ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

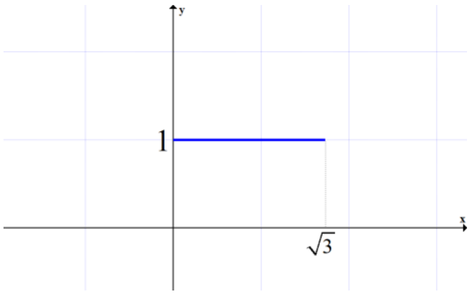
ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

**6)** להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א




איור ב




**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$

**8)** בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

**9)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

**10)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

**11)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

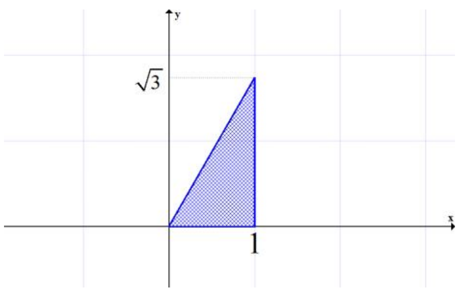
ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

**12)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

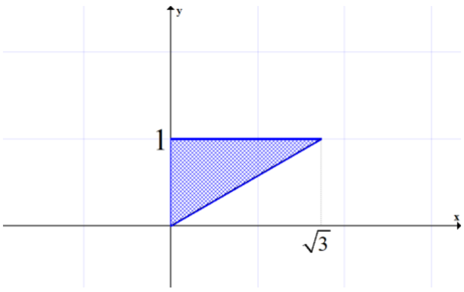
**13)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

**14)** להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

**איור א**




**איור ב**



## תשובות סופיות

**1)** א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

**2)** א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

**3)** א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

**4)** א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

**5)** א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

**6)** א. $r=\frac{1}{\cos\theta}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ ב. $r=\frac{1}{\sin\theta}\quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

**7)** א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

**8)** א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

**9)** א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

**10)** א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ $or$ $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

**11)** א. $\begin{matrix}1\le r\le2\\0.25\pi\le\theta\le\arctan2\end{matrix}$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

**12)** $\begin{matrix}\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi\end{matrix}$

**13)** $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

**14)** א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

# משטחים במרחב

## שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

**2)** $z=5x^2+1.25y^2$

**3)** $20x^2+45y^2=180+36z^2$

**4)** זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

**5)** זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

**6)** מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**7)** נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

**8)** מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**9)** נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטטו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

**10)** נתונים שני משטחים: $R:\ x^2-y^2+2z^2=3,\ \ Q: 2x^2-y^2+z^2=3$.
א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
ב. הראו כי החיתוך בין $R$ ו- $Q$ הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין $R$ ל- $Q$. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C.
כתבו את C בצורה פרמטרית.
ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- $y$ למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

## תשובות סופיות

**1)** אליפסואיד.
**2)** פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
**3)** היפרבולואיד חד יריעתי.
**4)** א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
**5)** א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
**6)** החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
**7)** א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.
**8)** החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
**9)** א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$.
ב. $\ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2:\ (x,y,z)=(3,2t,t)$
**10)** א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$
ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0\quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

# גופים במרחב

## שאלות

**1)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\right\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\right\}$

ז. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\right\}$

**2)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $D=\left\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$

ד. $D=\left\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\right\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

**3)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\right\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

**4)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

**5)** שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

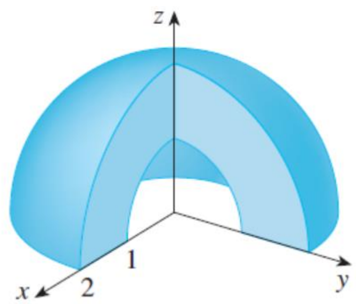
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

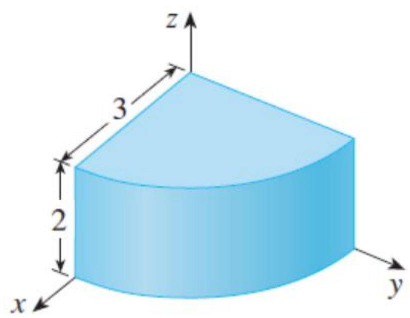
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

**6)** בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף $V$ במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

**א.**




**ב.**




**7)** נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

**8)** נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)\mid\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

**9)** תחומים תלת-ממדיים $M$ ו- $N$ נתונים על ידי $\begin{matrix} M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3 \\ N: 2x^2-y^2+z^2\le 3 \end{matrix}$.

תחום תלת-ממדי $W$ הוא החיתוך בין $M$ ל- $N$.

שרטטו את $D$, החיתוך של $W$ עם המישור $y=1$ (במערכת צירים $xz$), וכתבו את $D$ בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

# קואורדינטות גליליות וכדוריות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

**2)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

**3)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

**4)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2\sec\phi$

ה. $r = 4\cos\phi$

**5)** בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi = 1$

ב. $r\sin\phi = 2\cos\theta$

ג. $r - 2\sin\phi\cos\theta = 0$

**6)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \left\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2\right\}$

ב. $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}\right\}$

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 1 - x^2 - y^2\right\}$

ב. $V = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ \ x^2+y^2-2x \le 0\right\}$

**8)** בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4,\ \ x^2+y^2 \le 1\right\}$

ב. $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z \le 4,\ \ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2 \le 1\right\}$

ג. $V = \left\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2+y^2 \le 1\right\}$

ד. $U = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 10 - y,\ \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$

**תשובות סופיות**

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.
ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.
שם המשטח: פרבולואיד.
ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.
ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.
מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.
שם המשטח: מישור.
ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.
שם המשטח: גליל.
ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.
ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.
ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.
ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.
ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.
ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.
ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.
ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.
ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.
ה. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.
ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.
ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$
ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

**7)** א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

**8)** א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

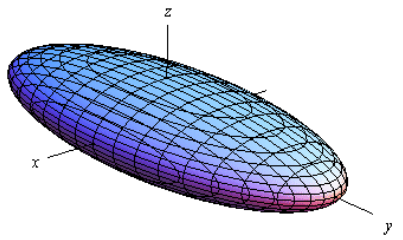
ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

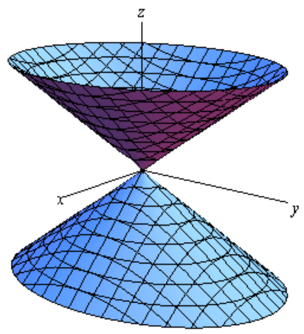
## אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## חרוט אליפטי

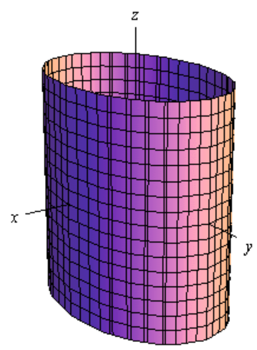



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## גליל אליפטי

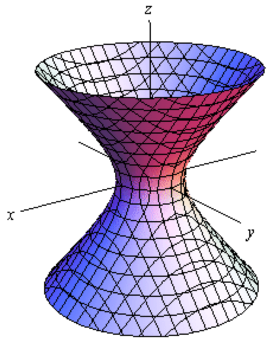



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

## היפרבולואיד חד-יריעתי

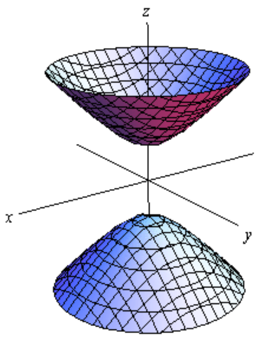



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו-$yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## היפרבולואיד דו-יריעתי

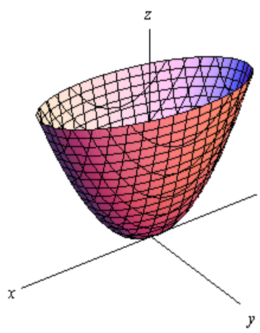



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו-$yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## פרבולואיד אליפטי



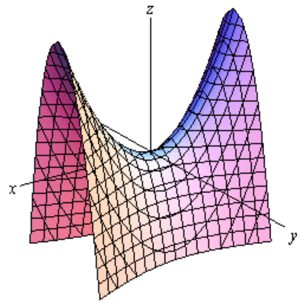

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו-$yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

## פרבולואיד היפרבולי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

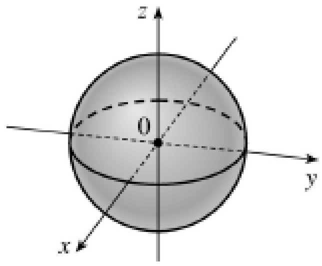
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.

החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

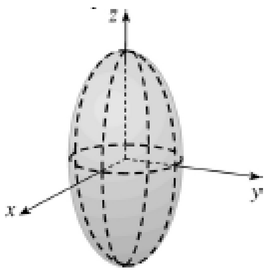
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

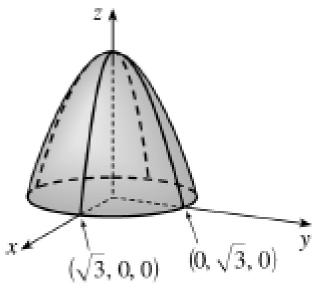
## דוגמאות שונות



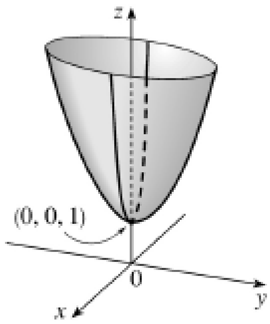

$x^2+y^2+z^2=1$



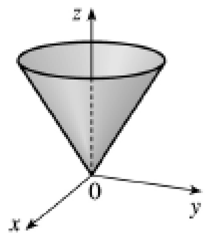

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



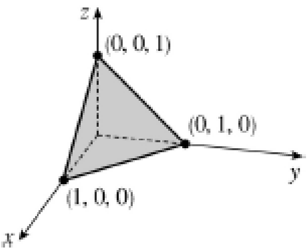

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$

# אנליזה מודרנית

## פרק 4 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

### תוכן העניינים

# מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$.

**1)** $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

**2)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**3)** $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\dfrac{x+y}{x-y}$

**4)** $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-4y}}$

**6)** $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

**8)** $z(x,y)=\dfrac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

**9)** $z(x,y)=\ln\left(\dfrac{x-4y}{x+4y}\right)$

**10)** $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

## תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

3) $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

6) $D=\left\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\right\}$

7) $D=\left\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\right\}$

8) $D=\left\{(x,y)\,|\ |x|+|y|<1\right\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

11) $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\right\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\left\{(x,y)\middle|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\right\}$

# קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו,
ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

**1)** $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$

**2)** $f(x,y)=\ln x+\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^2+y^2$

**4)** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

**5)** $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

**6)** $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

**7)** $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

**8)** $f(x,y)=e^{x-y}$

**9)** $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

**10)** $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה $k$:

**11)** $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

**12)** $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\} \quad (k=0,2)$

**13)** $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases} \quad (k=1)$

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$ .

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$ .

ב. לאילו ערכי $C$ קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

**הערות**

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

## תשובות סופיות

**1)** $x\neq 0$ , המישור ללא ציר ה- $y$ .

**2)** $x>0, y>0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.

**3)** כל המישור.

**4)** $x^2+y^2\le 1$ , עיגול היחידה.

**5)** $y<x^2$

**6)** $y\ge 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

# משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$ .
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$ .
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

**3)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

**4)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$ .
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$ .
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

**1)** חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

**2)** פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

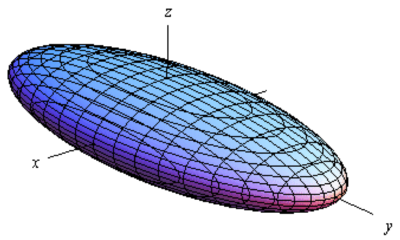
**3)** א. מישורים.
ב. משטח רמה $k$ הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

**4)** עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה $k$.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$.

**5)** עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

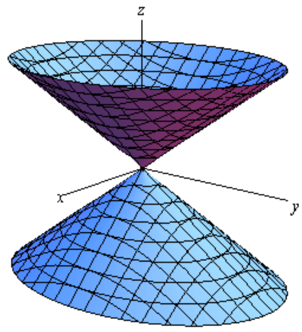
## **אליפסואיד**




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## **חרוט אליפטי**

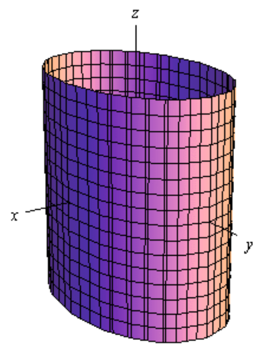



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## **גליל אליפטי**

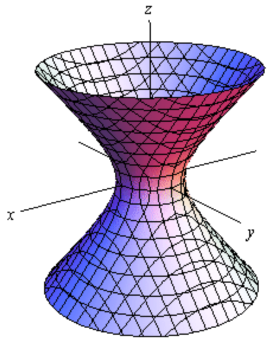



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

## היפרבולואיד חד-יריעתי

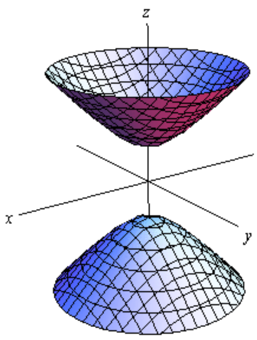



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## היפרבולואיד דו-יריעתי

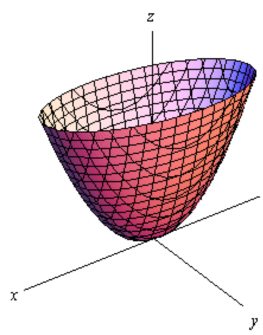



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

## פרבולואיד אליפטי



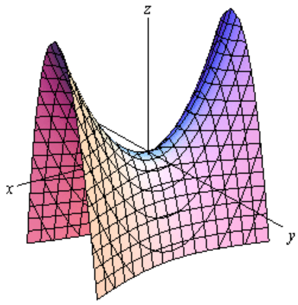

<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

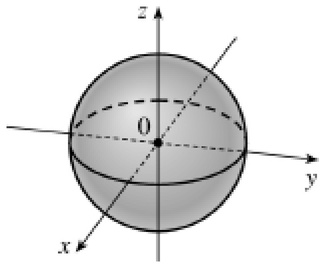
## פרבולואיד היפרבולי



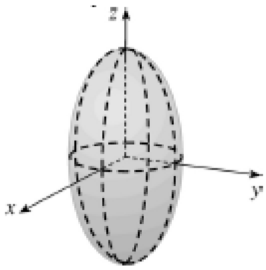

<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.
החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.
* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

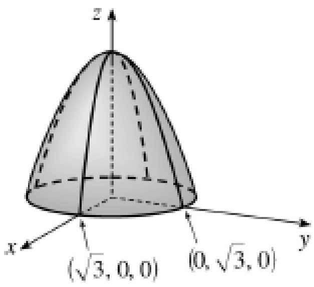
## דוגמאות שונות



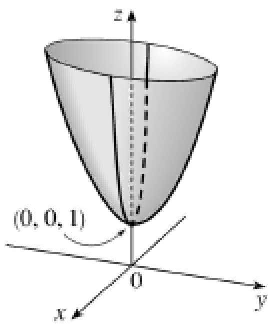

$x^2+y^2+z^2=1$



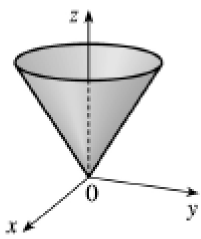

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



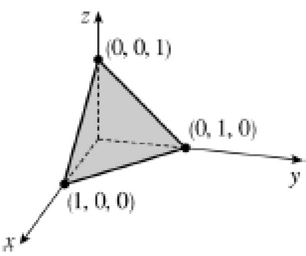

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$

# אנליזה מודרנית

## פרק 5 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

### תוכן העניינים

# גבול של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

**(1** $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y}$$

**(2** $$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$$

**(3** $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$$

**(4** $$\lim_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$$

**(5** $$\lim_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$$

**(6** $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$$

**(7** $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

**(8** $$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$$

**(9** $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

**10)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

**11)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

**12)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

**13)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$

**14)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

**15)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

**16)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

**17)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

**18)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

**19)** $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

**20)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**21)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

**22)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

**23)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

**24)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

**25)** $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא ייתן בגוף השאלה.

**27)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin x+\cos y)=1$.

**28)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}x^2y=4$.

**29)** הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}}2x^2y=8$.

## תשובות סופיות

**1)** 1
**2)** $\frac{1}{12}$
**3)** 1
**4)** 0
**5)** אינסוף.
**6)** $\frac{1}{2}$
**7)** 2
**8)** 5
**9)** 0
**10) – 17)** אין לפונקציה גבול.
**18)** 0
**19)** 0
**20)** 0
**21)** 0
**22)** 3
**23)** 0
**24)** 0
**25)** 0
**26)** א-ד. 0
**27)** שאלת הוכחה.
**28)** שאלת הוכחה.
**29)** שאלת הוכחה.

# רציפות של פונקציה של שני משתנים

## שאלות

בשאלות **1-3** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

**1)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **4-5** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

**4)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**5)** $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , כאשר $m$ קבוע.
עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

**7)** נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ .

האם הפונקציה $g$ רציפה בנקודה $(0,0)$ ?

**8)** הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = f(0,y)$ לכל $y$ ,

וגם $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = f(x,0)$ לכל $x$ ,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$ .

**9)** פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)|\leq \sin^2(x^4+y^4)$ , לכל $(x,y)$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$ .

**10)** מה צריך להיות הערך של הקבוע $k$ (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ k & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

**11)** נתון כי:

לכל $x$ מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leq|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $y$).

לכל $y$ מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\leq|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה $x$).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$ .

ידוע כי $z(1,14)<0,\ \ z(14,1)>0$ .

אז בתחום ההגדרה של $z$ קיימת נקודה $(c_1,c_2)$ , כך ש- $z(c_1,c_2)=0$ .

## תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$ , הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

# נוסחאות – גבולות

| | $x \to -\infty$ | $x \to 0$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty}=0$ | $\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$ | $\frac{1}{\infty}=0$ |
| $y=e^x$ | $e^{-\infty}=0$ | $e^0=1$ | $e^{\infty}=\infty$ |
| $y=\ln x$ | $---$ | $\ln(0^+)=-\infty$ | $\ln(\infty)=\infty$ |
| $y=\arctan x$ | $\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ | $\text{atan}(0)=0$ | $\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$ |
| $y=a^x, a>1$<br>$y=a^x, 0<a<1$ | $a^{-\infty}=0$<br>$a^{-\infty}=\infty$ | $a^0=1$<br>$a^0=1$ | $a^{\infty}=\infty$<br>$a^{\infty}=0$ |
| $y=\sin x$ | $---$ | $\sin 0=0$ | $---$ |
| $y=\cos x$ | $---$ | $\cos 0=1$ | $---$ |
| $y=\frac{\sin x}{x}$ | 0 | 1 | 0 |
| $y=\frac{\tan x}{x}$ | $---$ | 1 | $---$ |
| $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$<br>$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $e$<br>$---$ | (from right) 1<br>$e$ | $e$<br>1 |
| $y=\sqrt{x}$<br>$y=\sqrt[3]{x}$ | $---$<br>$-\infty$ | $\sqrt{0^+}=0$<br>$\sqrt[3]{0}=0$ | $\sqrt{\infty}=\infty$<br>$\sqrt[3]{\infty}=\infty$ |

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$ , $\infty(-\infty)=-\infty$ , $\infty+\infty=\infty$ , $\infty\pm a=\infty$ , $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$ , $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

# אנליזה מודרנית

## פרק 6 - נגזרות חלקיות דיפרנציאבליות

### תוכן העניינים

# נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

**1)** $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

**2)** $f(x,y)=x^5\ln y$

**3)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק $f_x$).

**4)** $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

**6)** $f(x,y)=\sin(xy)$

**7)** $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

**8)** $f(r,\theta)=r\cos\theta$

**9)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$

**10)** $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

**11)** נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

**12)** נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

### הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\ \Rightarrow\ f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

## תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ , $f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ , $f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ , $f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ , $f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ , $f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ , $f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ , $f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ , $f_y = 2xyz^3$ , $f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ , $f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ , $f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = 4$

### הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

# נגזרות חלקיות מסדר שני

## שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

**2)** $f(x,y)=x^4\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

**4)** $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

**5)** $f(x,y)=xy(x-y)$

**6)** $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

**8)** $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

**9)** $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

**10)** $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

**11)** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

**12)** $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

**13)** $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

**14)** $f(x,y,z)=xyz$

**15)** חשבון $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$ .

**16)** חשבון $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ .

**17)** חשבון $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**18)** נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$ .

חשבון $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$ .

**הערת סימון**

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

## תשובות סופיות

**1)** $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ , $f_{xx} = 8 - 2y^2$ , $f_y = -2x^2y + 10$
$f_{yy} = -2x^2$ , $f_{xy} = -4xy$ , $f_{yx} = -4xy$

**2)** $f_x = 4x^3 \ln y$ , $f_{xx} = 12x^2 \ln y$ , $f_y = \frac{x^4}{y}$
$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ , $f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ , $f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

**3)** $f_x = 3x^2 - 6y$ , $f_{xx} = 6x$ , $f_y = 3y^2 - 6x$
$f_{yy} = 6y$ , $f_{xy} = 6$ , $f_{yx} = -6$

**4)** $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ , $f_{xx} = 6x$ , $f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$
$f_{yy} = 6y - 6$ , $f_{xy} = -3$

**5)** $f_x = 2xy - y^2$ , $f_{xx} = 2y$ , $f_y = x^2 - 2xy$
$f_{yy} = -2x$ , $f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

**6)** $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$
$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$
$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$ , $f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0]$
$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$

**7)** $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ , $f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$
$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ , $f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$
$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

**8)** $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ , $f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$
$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$ ,
$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$
$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

**9)** $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ , $f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$
$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$
$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$
$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

(10
$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$
$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

(11
$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(12
$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$
$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

(13
$$f_x=10\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$$
$$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$$
$$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$$

(14
$$f_x=yz\qquad f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$
$$f_y=xz\qquad f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x$$
$$f_z=xy\qquad f_{zx}=y\qquad f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0$$

(15 $-2$

(16 $-1$

(17 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(18 $\dfrac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

# נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

**2)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**3)** מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

**6)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ .

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$ , על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$ ?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$ .

**הערה**

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאביליות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

## תשובות סופיות

**1)** א. $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$ .

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

**2)** $f_x(0,0)=1$ , $f_y(0,0)=0$

**3)** $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$ , $f_y(0,0)=0$

**5)** א. $f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ב. לא רציפות.

**6)** א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

# דיפרנציאביליות

## שאלות

בשאלות **1-4** בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

**1)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**2)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**3)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**4)**
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**5)** בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

**6)** נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?
ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

7) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ , $m$ קבוע.

א. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של $m$ הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי $f$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכיחו ש- $\phi$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדקו דיפרנציאביליות $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ ,

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$ , המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם $f$ דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$ ?

## תשובות סופיות

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל $m$ ג. $m<0.5$
8) שאלת הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.

# אנליזה מודרנית

## פרק 7 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

### תוכן העניינים

# כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

## שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^2$.
חשבו: $z_u,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $u=t^2+4m$, $v=4t+k$.
חשבו: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכיחו: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכיחו: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכיחו: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכיחו: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכיחו: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

**9)** נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$.

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

**10)** נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

**11)** נתון: $u(x,y,z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

**12)** נתון: $h(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$.

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

**13)** נתון: $u(x,y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0) = 2, \quad g'(0) = 1$.

**14)** נתון: $u = f(x,y)$ , $x = r\cos\theta$ , $y = r\sin\theta$.

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r$.

**15)** נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$ , $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y$ , $u_y=-v_x$.

הוכיחו כי:

א. $u,v$ מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

**16)** נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכיחו כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

**17)** פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר $n$, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכיחו כי אם $f$ הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2 f_{xx}+y^2 f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

**18)** נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ב. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.

ג. נתון $x=2t, y=t$.

חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.

ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

## תשובות סופיות

**1)** $z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2}(-2y) \cdot 2u$

**2)** $z_t = e^{u-v}(1) \cdot 2t + e^{u-v}(-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1) \cdot 1$

**13)** ג. $-e$

**18)** א. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. $0$ ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

# אנליזה מודרנית

## פרק 8 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### תוכן העניינים

# קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

**1)** $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

**2)** $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

**4)** $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

**5)** $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

**6)** $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

**7)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

**8)** $f(x,y)=e^x\cos y$

**9)** נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

**10)** מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

**11)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

**12)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש $Q_1$ למחשבון בארץ, ואת הביקוש $Q_2$
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $\quad Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, $P_1$ ו- $P_2$, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

**13)** נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$.
א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.
ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של $a$ הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

**14)** מצאו שני מספרים, $a < b$, כך ש- $\int_a^b \left(24 - 2x - x^2\right)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות

**1)** $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.

**2)** $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.

**3)** $(0,0)$אוכף; $(1,1)$ מינימום.

**4)** $(-1,\ 1)(-1,\ -1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ 0),(1,1),(1,\ -1)$ אוכף.

**5)** $(0,\ 2)$ מקסימום.

**6)** $(4,\ 4)$ מקסימום.

**7)** $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

**8)** אין נקודות קריטיות.

**9)** $z = 3, \quad z = 4$

**10)** רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

**11)** מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.

**12)** $P_2 = 12\$$, $\quad P_1 = 10\$$ רווח מקסימלי 288$.

**13)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a < -2$, $a > 2$
אוכף; $-2 < a < 2$ מינימום.

**14)** $b = 4$, $a = -6$

# אנליזה מודרנית

## פרק 9 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

# קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

## שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **1-5**:

**1)** $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

**2)** $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

**3)** $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

**4)** $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

**5)** $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$

**6)** מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **7-11** נתונות $n$ נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

**7)** $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

**8)** $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

**9)** $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

**10)** $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

**11)** $h(x)=ax^2+bx+c$ , הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$ .

**12)** נתונות $n$ נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ .
מצאו ישר $y=ax+b$ , כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור $a$ ו- $b$ .

הערה: בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- $a$ ו- $b$ , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$ , נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$ .

## תשובות סופיות

**1)** $(t,t)$ לכל $t$ ממשי, מקסימום.

**2)** $(0,0)$ מקסימום.

**3)** אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

**4)** אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

**5)** $(0.5,1,1)$ מינימום.

**6)** 0.375

**7)** $y=0.88x+0.3$

**8)** $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

**9)** $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

**10)** $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

**11)** $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

**12)** $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ , $a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

# אנליזה מודרנית

## פרק 10 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

**1)** $2x^2+3xy=1-2y^2 \quad f(x,y)=x^2+y^2;$

**2)** $x^2+y^2=1 \quad f(x,y)=x^2-y^2;$

**3)** $x^2+y^2=13 \quad f(x,y)=4x+6y;$

**4)** $x^2+2y^2=6 \quad f(x,y)=x^2y;$

**5)** נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$, כאשר $x,y>0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**6)** נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**7)** מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

**8)** מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

**9)** מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0)$ מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**10)** מוישל'ה קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, $(x, y)$, נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

**11)** דני קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל $(x, y)$ נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

**12)** עקומת התמורה בין מנגו, $(x)$, ואננס, $(y)$, היא $x^2 + y^2 = 13$.
לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = $(x, y)$, על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

**13)** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
המחירים ליחידת $K$ ו- $L$ הם $P_K = 2,\ P_L = 1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*, L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

**14)** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\}\ \ s.t.\ \ p_1 x + p_2 y = I$.
תהי $\left(x^*, y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' $\lambda$ מקיים $\lambda = \dfrac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

## תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

2) $\max\left(\pm1,0\right)$ $\min\left(0,\pm1\right)$

3) $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

4) $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

5) $\max\left(6,2\right)$

6) $\max\left(9,36\right)$

7) $\left(6,2\right)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max\left(6,2\right)$

12) $\max\left(2,3\right)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$; $\min\{2K+L\}$

14) שאלת הוכחה.

# אנליזה מודרנית

## פרק 11 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

# קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

## שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
   א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.
   ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.
   ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ מהמישור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

**הערה חשובה**

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

## תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.

2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.

3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$.

4) $(0,0,1)$ , $(0,0,-1)$

5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.

6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.

7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

# אנליזה מודרנית

## פרק 12 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

# קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה

## שאלות

1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

## תשובות סופיות

1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.
4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

# אנליזה מודרנית

## פרק 13 - אינטגרלים כפולים

### תוכן העניינים

# אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **3-1**:

**1)** $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

**2)** $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

**3)** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

**4)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

**5)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$.

**6)** $D$ – טרפז בעל הקודקודים: $O(0,0), A(1,0), B(1,2), C(0,1)$.

**7)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

**8)** $D$ – עיגול $x^2+y^2\le y$.

**9)** $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

**10)** $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**11)** $\iint_D xy^2dxdy$, כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

**12)** $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

**13)** $\iint_D |x\,y|dxdy$, כאשר $D$ עיגול בעל הרדיוס $a$, שמרכזו בראשית.

**14)** $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a, y=3a$ $(a>0)$.

**15)** $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר $D$ התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10)
$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx +$$
$$+\int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) $0$

# החלפת סדר אינטגרציה

## שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

**1)** $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

**2)** $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

**3)** $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

**4)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

**5)** $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

**6)** $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

**7)** $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

**8)** $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

**9)** $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

**10)** $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

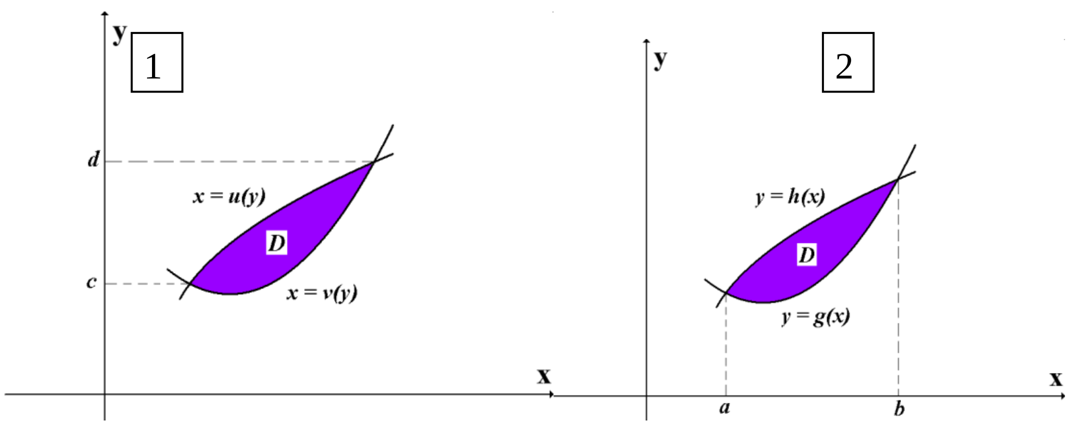
## הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

## תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$