

# אנליזה הרמונית



## תוכן העניינים

|    |                                    |    |
|----|------------------------------------|----|
| 1. | מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים | 1  |
| 2. | טורי פורייה                        | 16 |
| 3. | התמרת פורייה                       | 40 |
| 4. | שאלות מסכמות ברמת בחינה (ללא ספר)  |    |

# אנליזה הרמונית

פרק 1 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים ..... 1
2. התכנסויות של פונקציות במרחביים נורמיים ..... 3
3. מערכות אורתונורמליות ..... 7
4. משפט קירוב מיטבי ..... 11
5. מערכת אורתונורמלית סגורה ..... 14
6. תרגילים מסכמים ..... 15

## מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים:

### שאלות:

- (1) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[a, b]$ .  
הוכיחו כי  $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$  מהווה נורמה במרחב זה.
- (2) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע  $[a, b]$ .  
הוכיחו כי  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$  מהווה נורמה במרחב זה.
- (3) יהי  $V = R_{\leq 2}[x]$  המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה / שווה מ-2 מעל הממשיים.  
לכל שני פולינומים  $p(x), q(x)$  ב- $V$  נגדיר:  
 $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$   
 הוכיחו כי  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  הינה מכפלה פנימית.
- (4) נגדיר את המרחב  $V = C^1[-1, 1]$  (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע  $[-1, 1]$ ).  
נגדיר:  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$   
 הוכיחו כי  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  הינה מכפלה פנימית.
- (5) הוכיחו כי בכל מרחב מכפלה פנימית  $E$  מתקיים לכל  $f, g \in E$ :  
 א.  $\forall u \in E \quad \langle u, f+g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle u, g \rangle$   
 ב.  $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$   
 ג.  $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2)$   
 ד.  $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\{\|f\|^2 + \|g\|^2\}$  (שוויון המקבילית).
- (6) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית.  
נסמן  $w = u + v$  וקטורים במרחב.  
הוכיחו כי אם  $\langle u, v \rangle = 0$  אזי  $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(7) נגדיר את המרחב  $V$  להיות מרחב הפונקציות  $f(x)$  הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע  $[a, b]$  (כלומר  $f''(x)$  רציפה ב- $[a, b]$ ).

בדקו האם  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f''(x)g''(x)dx$  מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

(8) נגדיר את המרחב  $V$  להיות מרחב של פונקציות  $f(x)$  ממשיות וגזירות ברציפות בקטע  $[-1, 1]$  (כלומר הנגזרת  $f'(x)$  רציפה בקטע  $[-1, 1]$ ) כך ש-  $f(-1) = 0$ .

נגדיר  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx$ .

הוכיחו כי  $\langle f, g \rangle$  מהווה מכפלה פנימית במרחב  $V$ .

(9) יהי  $V$  מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע  $[a, b]$ .

הוכיחו כי  $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx + \max_{[a,b]} |f(x)|$  מהווה נורמה במרחב  $V$ .

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7)  $f(x) = 1$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

## התכנסויות במרחבים נורמיים:

### שאלות:

(1) הוכיחו:

א. הוכיחו כי לכל  $f \in C[a, b]$  מתקיים  $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \sqrt{x-a} \cdot \|f\|_{L_2[a, b]}$

תזכורות:  $\|f\|_{L_2[a, b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$  ו-  $\langle f, g \rangle_{L_2[a, b]} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$

ב. הוכיחו כי אם  $f_n \rightarrow f$  בנורמה  $\|\cdot\|_{L_2[a, b]}$  במרחב  $C[a, b]$

אזי גם  $f_n \rightarrow f$  בנורמה  $\|\cdot\|_{L_1[a, b]}$

תזכורת:  $\|f\|_{L_1[a, b]} = \int_a^b |f(t)| dt$

ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

(2) יהי  $V$  מרחב נורמי.

א. הוכיחו כי לכל  $u, v \in V$  מתקיים  $\|u - v\| \geq \left| \|u\| - \|v\| \right|$  (אי שיוויון המשולש ההפוך).

ב. הוכיחו כי אם  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  בנורמה של  $V$  אזי  $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|$ .

(3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה:

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n} \cdot x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n} \cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \end{cases}$$

א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב- $[0, 10]$ ?

ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 10]$ ?

ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת ב- $L^1[0, 10]$ ?

ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת ב- $L^2[0, 10]$ ?

$$(4) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{נתונה סדרת פונקציות}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב- $[0,1]$ ? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$ ?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^1[0,1]$ ?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^2[0,1]$ ?

$$(5) \quad \text{נתונה} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?  
 ב. האם  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?  
 ג. האם  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^1(-\infty, \infty)$ ?  
 ד. האם  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^2(-\infty, \infty)$ ?

- (6) יהי  $V$  מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע  $[a,b]$  וגזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g'(x)dx$$

א. לכל  $x_0 \in [a,b]$  נגדיר את הפונקציה  $g_{x_0}(x) = \begin{cases} x-a+1 & a \leq x \leq x_0 \\ x_0-a+1 & x_0 \leq x \leq b \end{cases}$

- הוכיחו כי לכל  $f \in V$  מתקיים  $\langle f(x), g_{x_0}(x) \rangle = f(x_0)$ .  
 ב. הוכיחו כי לכל  $f \in V$  ולכל  $x_0 \in [a,b]$  מתקיים  $|f(x_0)| \leq \sqrt{b-a+1} \cdot \|f\|$ .  
 ג. נניח כי  $f_n(x) \in V$  סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת  $V$  אל  $f \in V$ . הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

$$(7) \quad \text{נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x)\right] \left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\cdot \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$  עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$ ?

אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$  עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$ ?

ג. מהם ערכי הפרמטר  $\alpha$  עבורם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  בנורמת  $L^1[1, \infty)$ ?

$$(8) \quad \text{נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \chi_{[2^k, 2^{k+1}]}(x)$$

$$\cdot \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

א. האם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^1(-\infty, \infty)$ ?

ב. האם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^2(-\infty, \infty)$ ?

$$(9) \quad \text{נגדיר את סדרת הפונקציות הבה במרחב } L^2[-\pi, \pi] : f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(kx)$$

א. האם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^2[-\pi, \pi]$  לפונקציה כלשהי?

ב. האם סדרת הפונקציות  $f_n(x)$  מתכנסת במידה שווה בקטע  $[-\pi, \pi]$ ?

$$\text{נגדיר } h_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

ג. האם  $h_n(x)$  מתכנסת במידה שווה בקטע  $[-\pi, \pi]$ ?

ד. האם  $h_n(x)$  מתכנסת בנורמת  $L^2[-\pi, \pi]$ ?

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) א.  $f(x) = 0$ 

$$\sup_{[0,10]} |f_n(x)| \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{ב.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \quad \text{ב.}$$

(4) א.  $f(x) = 0$ 

$$\frac{2n^2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ג.}$$

$$1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{ב.}$$

(5) א.  $f(x) = 0$ 

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ג.}$$

(6) הוכחה.

(7) א. לכל ערך של  $\alpha$  ממשי יש התכנסות נקודתית ב- $[1, \infty)$  והפונקציה הגבולית הינה  $\frac{1}{x}$ .

$$\max \left\{ n^\alpha - \frac{1}{n + \frac{1}{n^2}}, \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{ב.}$$

ג. אין התכנסות בנורמה כיוון שסדרת הפונקציות כלל אינה שייכת למרחב הנורמי.

(8) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty \quad \text{ב.}$$

(9) א. לא, סדרת הנורמות שואפת לאינסוף.

ב. לא, כי אם הייתה התכנסות במידה שווה אז הייתה התכנסות בנורמת

 $L^2[-\pi, \pi]$  (בקטע הקומפקטי).

$$\sup_{[-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(kx)}{k^{1.5}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k^{1.5}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ג.}$$

ד. כן, כי התכנסות במידה שווה (בקטע סופי) גוררת התכנסות בנורמת  $L^2[-\pi, \pi]$ 

(בקטע סופי).

## מערכות אורתונורמליות:

### שאלות:

(1) נתבונן במערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  כאשר  $\varphi_n(x) = \cos(nx)$  במרחב  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית.

(2) נתבונן במערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  כאשר  $\varphi_n(x) = \sin(nx)$  במרחב  $L^2[0, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

עם המכפלה הפנימית

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית.

(3) יהי מרחב מכפלה פנימית  $V$  ותהי  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  מערכת של פולינומים כך

ש- $\varphi_n(x)$  הינו פולינום ממעלה  $n$ .

$$\langle \varphi_n(x), x^m \rangle = 0 \quad \text{מתקיים } m < n$$

טבעיים כך ש- $n, m$

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  אורתוגונלית במרחב זה.

(4) יהי  $V$  מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע  $[e^{-\pi}, e^{\pi}]$  עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}} f(x) \overline{g(x)} \frac{1}{x} dx$$

הפנימית נגדיר  $\varphi_n(x) = \sin(n \ln(x))$

הוכיחו כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  אורתוגונלית במרחב זה.

(5) נניח כי המערכת  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב  $L^2[a, b]$  עם

המכפלה הפנימית  $\langle f, g \rangle_1 = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ . יהיו  $c > 0$  ו- $d$  ממשי כלשהוא.

הוכיחו כי המערכת  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  כאשר  $\psi_n(x) = \sqrt{c} \cdot \varphi_n(c \cdot x + d)$  הינה מערכת

אורתונורמלית סגורה במרחב  $L^2\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right]$  עם המכפלה

הפנימית  $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) \overline{g(x)} dx$ .

(6) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ותהי  $\{e_n\}_{n=1}^N$  מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכל  $v \in V$  מתקיים  $\left\| \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$ .

#### מערכת פולינומי צ'בישב:

(7) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע  $(-1, 1)$

ונגדיר ב- $K$  מכפלה פנימית:  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

הוכיחו כי אוסף הפונקציות  $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  כאשר  $T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ'בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב- $K$  ומצאו

קבועים  $\alpha_n$  כך שהמערכת  $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  היא מערכת אורתונורמלית.

#### מערכת פולינומי הרמיט:

(8) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

למקוטעין ומקיימות את התנאי  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x^2} dx < \infty$ .

נגדיר על  $K$  מכפלה פנימית  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \cdot e^{-x^2} dx$ .

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי הנוסחה  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית במרחב  $K$  ומצאו להם קבועי נרמול.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח כי לכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$

$$\text{מתקיים } \langle H_n, x^k \rangle = 0. \text{ ניתן להיעזר בעובדה כי } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

### מערכת פולינומי לג'נדר:

(9) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע  $(-1, 1)$

$$\text{ונגדיר ב- } K \text{ מכפלה פנימית: } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי נוסחת רודריגז } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

$$\text{מהווים מערכת אורתוגונלית ב- } K \text{ וכי } \langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1} \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$  מתקיים.

$$\langle P_n, x^k \rangle = 0$$

### מערכת פולינומי לגר:

(10) יהי  $K$  מרחב כל הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות

$$\text{למקוטעין ומקיימות את התנאי } \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \cdot e^{-x} dx < \infty$$

$$\text{נגדיר על } K \text{ מכפלה פנימית } \langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

$$\text{הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה } L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב  $K$ .

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל  $n, k$  טבעיים כך ש-  $k < n$  מתקיים.

$$\langle L_n, x^k \rangle = 0$$

$$\text{ניתן להיעזר בנוסחה } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

## תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) מערכת פולינומי צ'בישב : הוכחה.
- (8) מערכת פולינומי הרמיט : הוכחה.
- (9) מערכת פולינומי לג'נדר : הוכחה.
- (10) מערכת פולינומי לגר : הוכחה.

## קירוב מיטבי:

### שאלות:

(1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos(x) - \gamma \cos(10x)|^2 dx$$

א. כאשר  $f(x) = \cos^2(x)$

ב. כאשר  $f(x) = x^3$

ג. כאשר  $f(x) = \sin(x)$

(2) במרחב  $C[-\pi, \pi]$  נגדיר את המכפלה הפנימית  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ .

נגדיר תת מרחב  $W = \text{span}\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$  ופונקציה  $f(x) = |x|$ .

מצאו פונקציה  $g \in W$  כך ש- $\|f - g\|$  מינימלי.

הערה:

שימו לב שהמערכת  $\{1, \sin(x), \cos(x), x\}$  איננה אורתונורמלית.

(3) נתבונן במרחב  $C[-1, 1]$  מעל  $\mathbb{C}$ .

א. הוכיחו כי  $\langle f, g \rangle = f(-1) \overline{g(-1)} + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$  מהווה מכפלה פנימית.

ב. מצאו את כל הערכים של  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$|-1 - \alpha + \beta - \gamma|^2 + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

(4) נתבונן במרחב  $C[-1, 1]$  מעל  $\mathbb{C}$ .

נתון כי  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-1}^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$  מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

מצאו את כל הערכים של  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

$$(5) \quad \text{תהי } V \text{ קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty$$

א. הוכיחו כי  $V$  עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx$$

ב. הוכיחו כי כל הפולינומים שייכים ל- $V$ .

ג. מצאו את הקירוב המיטבי של  $x^3$  על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

הערה:

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$(6) \quad \text{יהי } L \text{ מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על הקטע } [1, \infty)$$

$$\text{המקיימות } \int_1^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\langle f, g \rangle = \int_1^{\infty} f(x) g(x) x dx$$

$$\text{נגדיר } W = \text{span} \left\{ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$\text{מצאו את ההיטל האורתוגונלי } P_W \left( \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \right)$$

$$(7) \quad \text{תהי } f \in C[-1, 1]$$

הוכיחו כי לכל פונקציה אי זוגית  $g \in C[-1, 1]$

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 |f(x) + f(-x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = \gamma = 0$     ב.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$     ג.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$

(2)  $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x)$

(3) א. הוכחה.    ב.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$

(4)  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = \frac{9}{10}$

(5) א. הוכחה.    ב. הוכחה.    ג.  $P_w(x^3) = \frac{3}{2}x$

(6)  $\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

(7) הוכחה.

## מערכת אורתונורמלית סגורה:

### שאלות:

(1) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ותהי  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. האם קיים  $v \in V$  כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ?

ב. נניח כי  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו  $u, v \in V$  כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{n}$  ו- $\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n+1}$ . חשבו את  $\langle u, v \rangle$ .

(2) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ותהי  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א. יהי  $u \in V$  כך ש- $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ .

מצאו את הקירובים המיטביים  $u_1, u_2, u_3$  ל- $u$  בתת המרחבים  $W_1 = \text{span}\{e_1\}$ ,

$W_2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ ,  $W_3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$  בהתאמה.

ב. נניח כי  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו  $\|u - u_1\|$ ,  $\|u - u_2\|$ ,  $\|u - u_3\|$  כאשר  $u_1, u_2, u_3$  הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

(3) יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית ותהי  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  מערכת אורתונורמלית סגורה ב- $V$ .

נגדיר  $g_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} + f_{2n}]$ ,  $g_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{2n-1} - f_{2n}]$ .

א. הוכיחו כי המערכת  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית ב- $V$ .

ב. הוכיחו כי המערכת  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  הינה מערכת אורתונורמלית סגורה ב- $V$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 \leq \|u\|^2 < \infty$  ב.  $\langle u, v \rangle = 1$

(2) א.  $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot e_3$ ,  $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot e_2$ ,  $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e_1$

ב.  $\|u - u_3\| = \sqrt{\frac{9}{40}}$ ,  $\|u - u_2\| = \sqrt{\frac{7}{24}}$ ,  $\|u - u_1\| = \sqrt{\frac{5}{12}}$

(3) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

- (1) יהי  $V$  מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ .  
 נגדיר על  $V$  מכפלה פנימית:  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx$ .  
 אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.  
 א. הוכיחו כי המערכת  $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב  $V$ .  
 מצאו נורמה של  $e^{inx}$  המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.  
 ב. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה  $f \in V$  המקיימת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - in \cdot f'(x)) e^{-inx} dx \right|^2}{1 + n^2} = 1$$

(2) נגדיר  $a_n = \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|\cos(x)|} - \alpha \cos(nx) \right|^2 dx \right]$ . חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(3) נגדיר  $R_n = \min_{a, b \in \mathbb{C}} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|x|^3} - a \sin(nx) - b \sin([n+1]x) \right|^2 dx \right]$ . חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ .

(4) נגדיר  $g(a, b) = \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \min\{1, |x|\} - a - b \sin(nx) \right|^2 dx \right]$ .

א. מצאו את הערכים  $a, b$  עבורם  $g(a, b)$  מינימלית.

ב. חשבו את  $g(a, b)$  עבור  $a, b$  אלו.

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2)  $\frac{4}{\pi}$

(3)  $\frac{\pi^3}{2}$

(4) א.  $a = 1 - \frac{1}{2\pi}$ ,  $b = 0$ . ב.  $g(a, b) = 2 - \frac{4}{3\pi} - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2\pi} \right]^2$ .

# אנליזה הרמונית

## פרק 2 - טורי פורייה

### תוכן העניינים

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| 1. הקדמה                             | (ללא ספר) |
| 2. טור פורייה ממשי                   | 16        |
| 3. טור פורייה מרוכב                  | 17        |
| 4. משפט פרסבל                        | 18        |
| 5. רימן לבג                          | 21        |
| 6. משפט דיריכלה                      | 22        |
| 7. המשכה זוגית ואי זוגית             | 24        |
| 8. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה   | 25        |
| 9. התכנסות במידה שווה של טורי פורייה | 28        |
| 10. טור פורייה בקטע כללי             | 29        |
| 11. משפט הקונבולוציה                 | 31        |
| 12. גרעין דיריכלה                    | 33        |
| 13. גרעין פייר וממוצעי סזארו         | 35        |
| 14. גרעין פוואסון                    | 37        |
| 15. תרגילים מסכמים                   | 38        |

## טור פורייה ממשי:

### שאלות:

- (1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .
- (2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ .
- (3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \sin(|x|)$ .
- (4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

- (1) 
$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$
- (2) 
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$
- (3) 
$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx)$$
- (4) 
$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx)$$

## טור פורייה מרוכב:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

(5) מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\pi \frac{(-1)^n}{in} + \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right\} e^{inx} \quad (2)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n \frac{\pi}{in} \right] e^{inx} \quad (3)$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{3}{\pi i (2k-1)} e^{i(2k-1)x} \quad (4)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4i} e^{ix} - \frac{1}{4i} e^{-ix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - (2k)^2} e^{i[2k]x} \quad (5)$$

## משפט פרסבל:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{באמצעות טור הפורייה } x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx), \text{ חשבו את הסכום } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$(2) \quad \text{נתון כי טור הפורייה הממשי של } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases} \text{ בקטע } [-\pi, \pi]$$

$$\text{הינו } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ הוכיחו כי } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$$(3) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ x + \pi & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = x$$

$$\text{מצאו להן טורי פורייה ממשיים והוכיחו באמצעותם כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(4) \quad \text{מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases} \text{ ובאמצעותו}$$

$$\text{חשבו את הסכום } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$(5) \quad \text{נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ e^{x^2} & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{נסמן את טורי פורייה המרוכבים שלהם ב- } f \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{inx}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \cdot \overline{g_n} = \frac{1}{8}$$

(6) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור  $2\pi$  :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\pi \leq x < \pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בקטע  $-3\pi < x < 3\pi$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ .

(7) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[-\pi, \pi]$  על ידי הנוסחה:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}} e^{inx}$ .

חשבו  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$ .

(8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{px}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $p \neq 0$

כדי להוכיח את הזהות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$ .

(9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} h^2 & h \leq x \leq \pi \\ 0 & -\pi \leq x \leq h \end{cases}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

כאשר  $0 \neq h \in [-\pi, \pi]$  ובשוויון פרסבל כדי לחשב  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n \cos(2n)}{n^2}$ .

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו טור פורייה מרוכב של  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ב. הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$ .

ג. הסיקו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{64}$ .

## תשובות סופיות:

$$\frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} \sin(nx) \quad \text{ב.} \quad (6) \quad \text{א. ראו סרטון.}$$

ג.  $\approx 0.769$ 

$$8\pi \quad (7)$$

(8) הוכחה.

$$\frac{\pi^2 - 4}{4} \quad (9)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx} \quad \text{א.} \quad (10) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

ג. ראו סרטון.

## רימן לבג:

### שאלות:

(1) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2+2x} \cos(\sqrt{|x|}) \sin(nx) dx$

(2) חשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{(nt)^2 + 1} e^{i \cdot n^2 t} dt$

(3) הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{se^{s^2}}{\sqrt{s^2 + 2017}} e^{inx} dx \right) = 0$

### תשובות סופיות:

(1) 0

(2) 0

(3) הוכחה.

## משפט דיריכלה:

### שאלות:

(1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  לטור פורייה

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ רמז: הציבו}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi} & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad (2) \text{ נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור } 2\pi$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ב. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ ג. הוכיחו כי}$$

(3) במרחב הפונקציות  $L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$ .

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $f(x)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ ב. חשבו את הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ ג. חשבו את הטור}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ד. חשבו את הטור}$$

(4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה  $f(x) = \cos(ax)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $a$

אינו מספר שלם כדי להוכיח את הזהויות:

$$\frac{1}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{\pi a + \pi n} + \frac{1}{\pi a - \pi n} \right] \text{ א.}$$

$$\cot(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi a + \pi n} - \frac{1}{\pi a - \pi n} \text{ ב.}$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. ראו סרטון.

ב.  $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$  ג. הוכחה.

(3) א.  $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$  ב.  $\frac{\pi^4}{90}$  ג.  $\frac{\pi^2}{-12}$  ד.  $\frac{\pi^2}{6}$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## המשכה זוגית ואי זוגית:

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור קוסינוסים:  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  והוכיחו כי לכל  $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = 1$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור סינוסים:  $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ לכל א.}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

### שאלות:

(1) תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$  ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח  $f'(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$ ).

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  אזי הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  מתכנס בהחלט.

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(\pi - x)$  בקטע  $[0, \pi]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?

שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ .

ד. הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ .

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של  $g(x) = \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  בקטע  $[0, \pi]$ .

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ . רמז: הציבו  $x=0$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{x^2}$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| e^{inx}$  פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$  מתכנס?

ב. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|$  מתכנס?

ג. האם הטור  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$  מתכנס?

(4) נתבונן בטור הפורייה  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(x+i)}$ .

כמה פעמים ניתן לגזור את  $f(x)$ ?

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$  בקטע  $(0, 2\pi)$ .

ב. נסמן  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ . מצאו את  $g(x)$  באופן מפורש (ללא טור) בקטע  $(0, 2\pi)$ .

(6) תהי  $f(x)$  גזירה ברציפות  $k-1$  פעמים בקטע  $[-\pi, \pi]$ , גזירה ברציפות למקוטעין  $k$

פעמים כך שמתקיים  $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$  לכל  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . נסמן  $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ .

הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k c_n) = 0$ .

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[-\pi, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(-\pi) = f(\pi)$

ו-  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . הראו כי מתקיים  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

ב. תהי  $f(x) \in L^2_{PC}[0, \pi]$  פונקציה גזירה ברציפות המקיימת  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

הראו כי מתקיים  $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$ .

(8) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} e^{in^2 x}$ .

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(9) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \sin(n^{2.5} x)$

א. הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה.

ב. הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה ברציפות.

(10) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א. האם  $f$  רציפה?

ב. האם  $f$  גזירה ברציפות?

(11) נגדיר  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ . הוכיחו כי  $f(x)$  אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

(12) נסמן  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3.1} + i \cdot n^{2.2}} \cdot e^{inx}$ . הוכיחו כי  $f$  גזירה ברציפות פעמיים.

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$(2) \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin([2k-1]x) \quad [0, \pi] \quad \text{א.}$$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

$$\text{ה.} \quad [0, \pi] \quad \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \sim \frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^4} \cos([2k-1]x) \quad \text{ו. הוכחה.}$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot n c_n \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n| < \infty$$

$$\text{ג.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2$$

(4) ראו סרטון.

$$(5) \quad \text{א. הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad -\frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{6} x$$

(6) הוכחה.

(7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

$$(10) \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2.8}} < \infty \quad \text{ב.} \quad \text{נניח בשלילה כי } f \text{ גזירה ברציפות.}$$

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

## התכנסות במידה שווה של טורי פורייה:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{תהי הפונקציה} \quad g(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

א. חשבו את טור פורייה הממשי של  $g(x)$ .

$$\text{ב. עבור } -\pi \leq x \leq \pi \text{ נגדיר את הפונקציה } h(x) = a \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$$

כאשר  $g(x)$  מוגדרת בסעיף א'.

עבור אילו ערכים של  $a$  מתכנס טור פורייה של  $h(x)$  במידה שווה ל- $h(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

$$(2) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) = |\sin(x)| \text{ במרחב } L_{PC}^2([-\pi, \pi]) \text{ ונסמן ב-} f'(x) \text{ את הנגזרת שלה.}$$

א. חשבו את טורי הפורייה הממשיים של  $f$  ושל  $f'$ .

ב. לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של פונקציות אלו בתחום  $[-3\pi, 3\pi]$ .

ג. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f$  במידה שווה?

ד. באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של  $f'$  במידה שווה?

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \cdot x) \quad \text{ב. } a = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$(2) \quad \text{א. } f(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} \right] \cos(2k \cdot x)$$

$$\text{ב. } f'(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{8k}{(2k+1)(2k-1)} \right] \sin(2k \cdot x)$$

ג.  $f(x)$  פונקציה רציפה, מחזורית- $2\pi$ , הנגזרת רציפה למקוטעין, ולכן טור פורייה שלה יתכנס אליה במידה שווה על פני כל הישר הממשי.

ד. טור פורייה של  $f'(x)$  יתכנס אליה במידה שווה בכל תת-קטע סגור שאינו מכיל

נקודות אי-רציפות של הפונקציה, כלומר בקטעים כאלו:  $[\pi n + \delta, \pi(n+1) - \delta]$  לכל  $0 < \delta < \pi$  ולכל  $n$  שלם.

## טור פורייה בקטע כללי:

### שאלות:

(1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

(2) תהי הפונקציה  $f(x) = \min\{1, |x|\}$ .

א. חשבו את מקדמי פורייה  $a_n$  ו- $b_n$  של טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-2, 2]$ .

ב. חשבו את  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$  בקטע  $[0, 2]$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$ .

(4) פתחו את  $f(x) = |x|$  לטור פורייה בקטע  $[-1, 1]$ .

(5) פתחו את  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$  לטור סינוסים בקטע  $[0, 2]$ .

(6) נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(x) = f(x+2)$  ובנוסף  $-1 \leq x < 1$   $f(x) = 2 - |x|$ .

א. פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי.

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ .

ג. חשבו את הסכום  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ .

ד. האם טור הפורייה של  $f(x)$  מתכנס במידה שווה בתחום  $[-1, 1]$ ?

(7) מצאו טור קוסינוסים  $f(x) = x$  בקטע  $[0, 3]$ .

(8) פתחו את  $f(x) = \cos(2x)$  לטור סינוסים בקטע  $[0, \pi]$ .

## תשובות סופיות:

$$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot \cos nx - \frac{4\pi}{n} \cdot \sin nx \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1)$$

$$b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 [2k-1]^2} & n = 2k-1 \\ \frac{-8}{\pi^2 [4k-2]^2} & n = 4k-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[2k-1]^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2in\pi)}{1|4n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג.  $\frac{3-e}{4(e-1)}$  ב. ראו סרטון.

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(\pi[2k-1]x) \quad (4)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2 [2k-1]^2} \sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right) \quad (5)$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos([2k-1]\pi x) \quad \text{א.} \quad (6)$$

ג.  $\frac{\pi^2}{8}$  ב.  $\frac{\pi^4}{96}$

ד. אם  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$ , ו- $f'$  רציפה למקוטעין אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל- $f$  בקטע  $[a, b]$ .

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right) \quad (7)$$

$$\cos(2x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{4[2k-1]}{4-[2k-1]^2} \sin([2k-1]x) \quad (8)$$

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

- (1) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  אז  $(f * g)_{(x)}$  מחזוריות- $2\pi$ .
- (2) הוכח את הטענה כי אם  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין, מחזוריות- $2\pi$  ופונקציות זוגיות אז  $(f * g)_{(x)}$  זוגית.
- (3) נתונה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$ .  
הערה:  $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- (4) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \cos(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .
- (5) נתונות  $f(x)$ ,  $g(x)$  רציפות למקוטעין ומחזוריות- $2\pi$  כך שלכל  $x \in [-\pi, \pi]$  מתקיים  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .  
חשבו לכל  $x$  ממשי את הקונבולוציה  $(f * g)_{(x)}$ .

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3)  $\pi - x$ (4) לכל  $x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$   $(f * g)_{(x)} = -2 \cos(x)$ 

$$(f * g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (x^2 - (x-1)^2) & -\pi+1 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4\pi} [x^2 - (x+(2\pi-1))^2] & -\pi \leq x \leq -\pi+1 \end{cases} \quad (5)$$

## גרעין דיריכלה:

### שאלות:

(1) נגדיר  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$  (גרעין דיריכלה).

א. הוכיחו כי  $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

ב. הוכיחו כי  $D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$  עבור  $x \neq 2\pi m$ .

(2) חשבו לכל ערך של  $n$  שלם את ערכו של הביטוי  $I(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin(100x) dx$ .

(3) הוכיחו כי  $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx = 2(n+1)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(4) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין בקטע  $[-\pi, \pi]$ . נסמן  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  טור פורייה חלקי.

הוכיחו כי  $(f * D_n)_x = S_n(x)$ .

(5) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\arctg(x-1) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{e^{(x-1)^2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx$ .

$$(6) \quad \text{נגדיר } S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2001}{2} t}{\sin t} 2 \cos \frac{t}{2} \cos^{17} \left( e^{\sqrt{|x-t|}} \right) dt$$

יהיו  $a_n$ ,  $b_n$  מקדמי פורייה הממשיים ו- $c_n$  מקדמי פורייה המרוכבים, של הפונקציה  $S(x)$ .  
חשבו את  $b_{500}$ ,  $c_{1001}$ .

רמז:  $S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x-t) dt$  כאשר  $D_N(t)$  גרעין דיריכלה מסדר  $N$  ו- $S_N$  טור פורייה החלקי ה- $N$  של  $f$ .

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(2) 0

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5)  $-\frac{\pi^2}{2e}$

(6)  $c_{1001} = 0$ ,  $b_{500} = 0$

## גרעין פייר וממוצעי סזארו:

### שאלות:

(1) נסמן  $D_n(x)$  גרעין דיריכלה. נגדיר את גרעין פייר כך:  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ .

א. הראו כי לכל  $x \neq 2\pi m$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ב. הראו כי  $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$

(2) הוכיחו כי  $K_n(x) \geq 0$  לכל  $x$  כאשר  $K_n(x)$  גרעין פייר.

(3) הוכיחו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$

(4) הוכיחו כי לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_n(x) dx = 0$

(5) נניח כי  $f(x)$  רציפה למקוטעין, מחזורית- $2\pi$  וכי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  ממשי. הוכיחו כי  $m \leq \sigma_n(x) \leq M$  לכל  $n$  טבעי ולכל  $x$  ממשי כאשר  $\sigma_n(x)$  סדרת ממוצעי סזארו של הפונקציה  $f(x)$ .

(6) תהי  $\varphi(x)$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  ונניח כי:

i.  $\varphi(x) \geq 0$

ii.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 1$

iii. קיים  $0 < \delta_0 < \pi$  כך שלכל  $|x| > \delta_0$  מתקיים  $\varphi(x) = 0$ .

נגדיר  $F_n(x) = n\varphi(nx)$  ונרחיב אותה באופן מחזורי.

הוכיחו כי  $F_n(x)$  מהווה גרעין חיובי.

**תשובות סופיות:**

- |   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| 1 | א. הוכחה. | ב. הוכחה. |
| 2 | הוכחה.    |           |
| 3 | הוכחה.    |           |
| 4 | הוכחה.    |           |
| 5 | הוכחה.    |           |
| 6 | הוכחה.    |           |

## גרעין פוואסון:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל  $0 < r < 1$  מתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$

ב. גרעין פוואסון נתון על ידי  $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}$ . תהי  $f(x)$  פונקציה

רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$  וטור פורייה שלה נתון על ידי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

הראו כי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$

ג. הוכיחו את התכונות הבאות של גרעין פוואסון:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$

בתחום  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$

ד. תהי  $f(x)$  רציפה ומחזורית  $2\pi$  ועם טור פורייה  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

הוכיחו כי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

**הערה: ניתן להיעזר במשפט הבא:** אם סדרת פונקציות  $P_r(x)$  מקיימת את

התכונות הבאות:

i.  $P_r(x) \geq 0$  לכל  $x$  ממשי.

ii. לכל  $0 < \delta < \pi$  מתקיים  $P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  במידה שווה לפי  $x$  בתחום

$[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

iii. מתקיים  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$

אזי  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f(x)$  במידה שווה.

### תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

#### 1) טור פורייה:

א. מצאו טור פורייה של הפונקציה  $f(t) = e^{iat}$  בתחום  $-\pi \leq t \leq \pi$  כאשר  $\alpha$  הוא מספר ממשי לא שלם.

ב. הראו שמתקיים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$

ג. הראו שמתקיים  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\alpha - n]^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

ד. הראו שמתקיים  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - \alpha^2)} = \frac{\pi}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right)$

#### 2) נגדיר $f(x) = |x|$ במרחב $L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ ונסמן ב- $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א. חשבו טור פורייה ממשי של  $f$ .

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור הבא נקודתית בתחום  $(-\infty, \infty)$ ?

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$$

ג. חשבו את הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} \right)^2$

#### 3) תהי $f \in L_{PC}^2([-\pi, \pi])$ .

נסמן ב- $c_n$  את מקדמי פורייה (המרוכבים) של  $f$ .

נסמן  $d_n = \operatorname{Re}\{c_n\}$  ובנוסף נתון כי:

•  $f$  ממשית.

•  $f$  מתאפסת על הקטע  $[-\pi, 0]$ .

• מתקיים השוויון  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = x^2 e^{|x|} \cos(x)$

מצאו את  $f$ .

(4) תהי  $f$  פונקציה זוגית בעלת מחזור  $2\pi$  המקיימת  $f(x) = \cos(2x)$

בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ו-  $f(x) = -1$  בתחום  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

מצאו את טור פורייה הממשי של  $f$  וחשבו את הסכום  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)}$ .  
האם טור פורייה של  $f$  מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

(5) נתונה פונקציה  $f(x)$  רציפה למקוטעין ומחזורית  $2\pi$ .

נסמן  $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$  ויהי  $h > 0$  פרמטר כלשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של  $h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(t+x) dt$  כתלות ב-  $f_n$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $e^{i\alpha t} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha - n]\pi} \cdot e^{in \cdot t}$ . ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

(2) א.  $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$ .

ב.  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$ , כאשר  $k$  מספר שלם. ג.  $\frac{\pi^2}{8}$ .

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|} \cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(4) התכנסות במידה שווה בקטע  $[-\pi, \pi]$  אם  $f$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

ו-  $f' \in E[-\pi, \pi]$  אזי טור פורייה של  $f$  מתכנס במ"ש ל-  $f$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

(5)  $f_0$

# אנליזה הרמונית

## פרק 3 - התמרת פורייה

### תוכן העניינים

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 1. מבוא כללי.....                       | 40 |
| 2. נוסחת כיווץ והזזה.....               | 42 |
| 3. נוסחת הנגזרת.....                    | 44 |
| 4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה..... | 45 |
| 5. נוסחת המומנט.....                    | 47 |
| 6. נוסחת ההתמרה ההפוכה.....             | 49 |
| 7. נוסחת התמרה כפולה..... (ללא ספר)     | 49 |
| 8. משפט פלנשראל.....                    | 50 |
| 9. משפט הקונבולוציה.....                | 51 |
| 10. תרגילים מסכמים.....                 | 55 |

## מבוא כללי:

### שאלות:

$$(1) \quad \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים הינה}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור}$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הינה } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$$

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של}$$

$$(11) \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של } f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ עבור } a > 0$$

$$(12) \quad \text{האם קיימת } f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \text{ כך ש-} f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (5)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (9)$$

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\text{לא. אינה רציפה בנקודות } \omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12)$$

## נוסחת כיווץ והזזה:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  כאשר  $r > 0$ .

(2) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$  על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) נתונה פונקציה  $g(x) \in G(R)$  בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)$ .

מצאו פונקציה  $f(x)$  (כתלות ב- $g(x)$ ) בעלת התמרת פורייה  $g(\omega)\cos(\omega)$ .

(4) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-ax^2}$  כאשר  $a > 0$ .

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ .

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

## נוסחת הנגזרת:

### שאלות:

(1) נניח כי  $f(x) \in G$ , גזירה, מקיימת  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f'(x) \in G$  ו-  $f(\omega) = \frac{\omega}{1 + \omega^{30}}$ . מצאו התמרת פורייה של  $f'(x) \cos(2x)$ .

(2) יהי  $a$  ממשי כלשהו. הוכיחו כי  $F \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right\}_\omega = \left( -\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$ .

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$ . רמז:  $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ .

### תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

## נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

### שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \left[ \frac{2c \cdot \omega}{1 + (\omega - c)^2} \right] \left[ \frac{1}{1 + (\omega + c)^2} \right]$$

$$(2) \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)}{\omega - 1} - \frac{\sin(\omega + 1)}{\omega + 1}$$

$$(3) \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של } g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ כאשר } a, b > 0 \text{ קבועים,}$$

$$\text{הינה } g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$$

$$(4) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \cos(2x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה}$$

$$\text{כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(5) \quad \text{מצאו התמרת פורייה של } g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x) \text{ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה}$$

$$\text{ובעובדה כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}$$

$$(6) \quad \text{נניח כי } f(x) \in G(R) \text{ ונגדיר } g(x) = f(3x - 2) \cdot \cos(x) \text{ . בטאו את } g(\omega) \text{ על ידי } f(\omega)$$

$$(7) \quad \text{מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא } f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega - 2|} \text{ . רמז: } F\left\{\frac{1}{1 + x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$(8) \quad \text{תהי } H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } H(x)e^{-ax} \text{ כאשר } a > 0$$

$$\text{ב. } H(x)e^{-ax} \cos(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

$$\text{ג. } H(x)e^{-ax} \sin(bx) \text{ כאשר } a, b > 0$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[ \frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[ e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left( \frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

## נוסחת המומנט:

### שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  על ידי שימוש

$$\text{בנוסחה } F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x^2 e^{-x^2}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\text{כי } F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של  $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$  על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$\text{כי } F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של  $f(x) = e^{-x^2}$

(5) מצאו התמרת פורייה של  $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$

(6) תהי  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי  $f(\omega)$  גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של  $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה היא  $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$  מתבדר.

## תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F \left\{ x^2 e^{-x^2} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\omega^2}{2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F \left\{ x \cdot e^{-|x|} \right\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

## נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi \omega} d\omega$  לכל  $x$  ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

## משפט פלנשראלי:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$  עבור  $a > 0$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$  עבור  $a, b > 0$ .

(2) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$ . תוכלו להיעזר בעובדה:  $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$ .

(3) הוכיחו כי  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$  כך ש-  $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$ .

### תשובות סופיות:

(1) א.  $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$  ב.  $\pi \cdot \min\{a, b\}$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

## משפט הקונבולוציה:

### שאלות:

$$(1) \text{ חשבו את הקונבולוציה } (\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$$

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

רמז: חלקו למקרים.

$$(2) \text{ חשבו את הקונבולוציה } (f * f)_{(x)} \text{ כאשר } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

רמז: חלקו למקרים  $x > 0$  ו-  $x \leq 0$ .

$$(3) \text{ מצאו פונקציה } f \in G \text{ כך ש- } f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$$

$$(4) \text{ נסמן ב- } E \text{ את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים } f(t)$$

$$\text{המקיימות } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \text{ וגם } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

מצאו פונקציה  $g(x)$  כך שלכל  $f(t) \in E$  מתקיים השוויון.

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

$$(5) \text{ נגדיר } f(x) = \frac{1}{x^2+4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}. \text{ מצאו את הקונבולוציה } (f * g)_{(x)}.$$

$$\cdot F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|} \quad \text{תזכורת:}$$

$$(6) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. חשבו התמרת פורייה של } (1+|x|)e^{-|x|}.$$

$$\text{ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}.$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ .

ב. הוכיחו כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$ .

(8) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ .(9) חשבו את הקונבולוציה  $(f * f)_{(x)}$  כאשר  $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$ .(10) חשבו את הקונבולוציה  $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$ .(11) חשבו את הקונבולוציה  $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$ .

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$ .(13) נניח כי  $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$  רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$ .

## תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2, 0] \\ 2-x & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2, 0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2 + 9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (6) \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.}$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (7) \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4 - x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left( \chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x) \right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

## תרגילים מסכמים:

### שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של  $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות  $h(y)$  המקיימות

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$$

(3) יהי  $A > 0$  קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה  $g(x) \in G$  המקיימת  $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$ . מצאו במפורש את  $g(x)$ .

(4) נניח כי  $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$  כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$  ומתקיים  $f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$  לכל  $x$  ממשי.

א. הוכיחו כי  $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את  $f(\omega)$  אם נתון כי  $f(0) = 1$

ג. מצאו את  $f(x)$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי}$$

א. חשבו את  $f(\omega)$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_0^\infty \frac{[2\sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$ .

ג. חשבו את האינטגרל  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2\sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$ .

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים:  $\int_0^\infty \left( \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו-  $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר  $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ . הוכיחו כי המערכת  $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$  מהווה מערכת

אורתונורמלית ב-  $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$ .

(8) תהי  $f \in G$  פונקציה כך ש-  $f' \in G$  פונקציה רציפה. מצאו פונקציה  $g \in G$

המקיימת את המשוואה  $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$ .

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא  $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$ .

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית  $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$(11) \text{ נגדיר } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור  $f(x)$ .

$$\text{תזכורת: } \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$(12) \text{ השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx$$

כאשר  $a, b > 0$ .

$$(13) \text{ מצאו את התמרת הפורייה של } f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)}$$

$$(14) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \text{ לכל } a, b > 0 \text{ קבועים.}$$

$$(15) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

$$(16) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25}$$

## תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{ב.} \quad 2 \frac{\sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (7)$$

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad (10)$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (13)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (14)$$

15) הוכחה.

16) הוכחה.

# אנליזה הרמונית

פרק 4 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים ..... (ללא ספר)