אלקטרומגנטיות אנליטית 1

תוכן העניינים

תוכן העניינים

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 1 - אנליזה וקטורית

תוכן העניינים

הסבר ותרגילים:

שאלות:

1) שטח דיסקה

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

2) חישוב נפח כדור

חשב נפח של כדור באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות כדוריות.

3) דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג בצורה אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

4) מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען: $\rho(r)=\rho_0\frac{r}{R}$.

5) פירוק וקטור לרכיבים גליליים

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר a , b , c קבועים נתונים.

א. האם $\vec{A}$ וקטור קבוע?

ב. מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות גליליות ובטא אותן בעזרת: z , θ , r.

6) פירוק וקטור לרכיבים בקואורדינטות כדוריות

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר a , b , c קבועים נתונים.

מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות כדוריות ובטא אותן בעזרת: θ , φ , r.

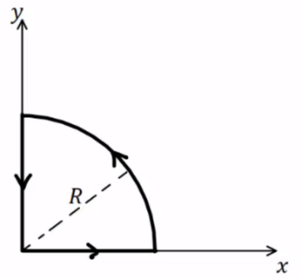
7) divr

חשב את $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור המיקום. בצע את החישוב בקואורדינטות קרטזיות גליליות וכדוריות.

8) הוכחה של דיברגנט של סקלרית כפול וקטורית

הוכח את הזהות הבאה: $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right)=f\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$ כאשר $\vec{A}$ היא פונקציה וקטורית כלשהיא ו- f היא פונקציה סקלרית כלשהיא.

9) אינטגרל קווי על רבע מעגל



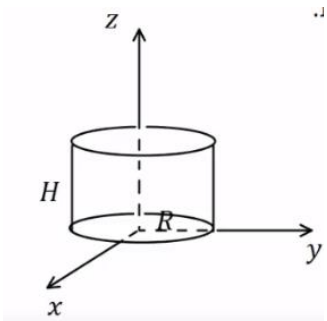
נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=2\hat{r}+3\hat{\varphi}-5\hat{\theta}$

בקואורדינטות כדוריות כאשר φ היא הזווית עם ציר z.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול הרבע מעגלי באיור.

ב. חשב את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על השטח שכלוא בתוך המסלול.

10) אינטגרל על מעטפת גלילית



נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=ar\hat{r}+b\hat{\theta}+czz$,
בקואורדינטות גליליות, כאשר a , b , c קבועים נתונים.
נתונה מעטפת גלילית ברדיוס R וגובה H הנמצאת כך שציר הסימטריה שלה הוא ציר ה-z ובסיסה מונח על מישור xy.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על כל שטח המעטפת הגלילית.

ב. חשב בצורה מפורשת את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv$ על הנפח הכלוא בתוך המעטפת.

11) מצא וקטור יחידה מאונך לפונקציה

מצא וקטור יחידה המאונך לפונקציה: $f=ax^2+by^2+cz^2$.
הוקטור צריך להיות פונקציה של: x , y , z .

12) מציאת רכיב בכיוון הגרדיאנט

נתונה הפונקציה הסקלרית: $f\left(x,y,z\right)=2xy$,

והפונקציה הוקטורית: $\vec{A}=2\hat{x}+5\hat{y}-4\hat{z}$.

א. חשב את: $\vec{\nabla}f$.

ב. מצא את הרכיב של $\vec{A}$ בכיוון של $\vec{\nabla}f$ בנקודה המתאימה ל- $f=12$, $x=2$.

13) הוכחה של דיב-רוט שווה לאפס

הוכח כי: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$.

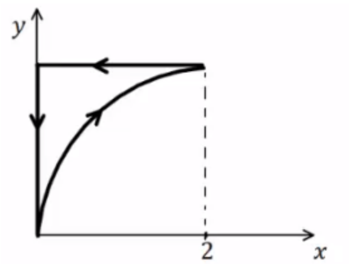
14) חוק סטוקס על מסלול של קווים ישרים

נתון השדה הוקטורי: $\vec{A}=y\hat{x}-x\hat{y}$.

א. חשב את האינטגרל הקווי: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול המתואר ע"י הקווים הישרים המחברים בין הנקודות הבאות במישור xy:
$(0,0)\rightarrow(2,0)\rightarrow(0,1)\rightarrow(0,0)$.

ב. חשב את האינטגרל המשטחי: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח הסגור בתוך המסלול של סעיף א'.

15) חוק סטוקס על מסלול פרבולי



נתון שדה וקטורי: $\vec{A}=x^2y\hat{x}+y^2x\hat{y}+C\cos\left(\beta y\right)\hat{z}$

כאשר β ו- C קבועים נתונים.

א. חשב את האינטגרל: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ על המסלול המתואר באיור.

משוואת העקום היא: $y^2=bx$ כאשר b קבוע נתון.

ב. חשב את האינטגרל: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח התחום ע"י המסלול.

תשובות סופיות:

1) $S=\pi R^2$.

2) $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

3) $q=Q\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$, $\sigma=\dfrac{Q}{\pi R^2}$.

4) $Q=\rho_0\pi R^3$.

5) א. כן. ב. $A_r=a\cos\theta+b\sin\theta$, $A_Q=-a\sin\theta+b\cos\theta$, $A_z=C$.

6) $A_r=a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+C\cos\varphi$, $A_\varphi=a\cos\varphi\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta-C\sin\varphi$,
$A_\theta=-a\sin\theta rb\cos\theta$.

7) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$.

8) הוכחה.

9) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}=-5R\dfrac{\pi}{2}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}=-5R\dfrac{\pi}{2}$.

10) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}=(2a+C)\pi R^2H$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv=(2a+C)\pi R^2H$.

11) $\hat{n}=\dfrac{1}{\sqrt{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}}(ax,by,cz)$.

12) א. $\vec{\nabla}f=2y\hat{x}+2x\hat{y}+0\cdot\hat{z}$. ב. $\dfrac{16}{13}(3,2)$.

13) הוכחה.

14) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-2$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot=-2$.

15) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{1}{21}2^{\frac{7}{2}}b^{\frac{1}{2}}+\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{5}b^{\frac{3}{2}}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}=\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{5}b^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2^{\frac{7}{2}}}{21}b^{\frac{1}{2}}$.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 2 - חוק גאוס- מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

הסברים בסיסיים:

רקע:

חוק גאוס:

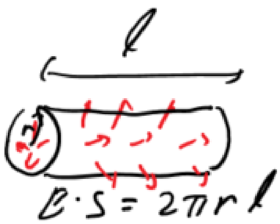
$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{in}$$

$$Q_{in} = \int \rho \, \mathrm{d}V$$

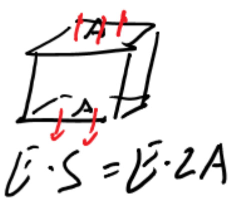
$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ נקרא השטף של השדה החשמלי ומסומן ב ϕ_E

המקרים של חוק גאוס:

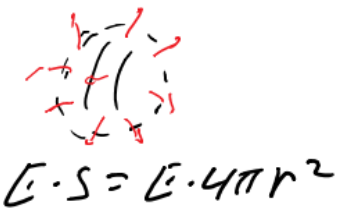
1. תיל / גליל / מעטפת גלילית אינסופיים.
במקרים האלו נבנה מעטפת גלילית והשטף
יהיה $E2\pi rl$, כאשר l ו- r הם אורך ורדיוס המעטפת.



2. מישור אינסופי.
במקרים האלו נבנה מעטפת בצורת קובייה והשטף
יהיה $E2A$, כאשר A זה שטח הפאות המקבילות למשטח.



3. כדור / קליפה כדורית.
במקרים האלו נבנה מעטפת כדורית והשטף
יהיה $E4\pi r^2$, כאשר r זה רדיוס המעטפת.



שדה של תיל אינסופי:

$$\vec{E} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

λ צפיפות מטען ליחידת אורך של התיל.

שדה של מישור אינסופי (דק):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

σ צפיפות מטען ליחידת שטח של הלוח.

שדה מחוץ לכדור / קליפה כדורית:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

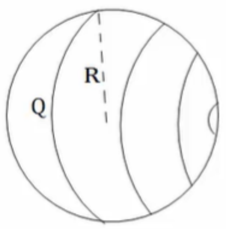
כמו מטען נקודתי.

חוק דאוס הדיפרנציאלי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

שאלות:

1) שדה של קליפה כדורית

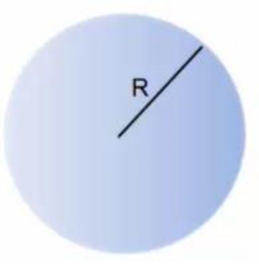


נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס R.
מצאו את השדה בכל המרחב.

2) שדה של כדור

נתון כדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען פחית אחידה ρ.
מצאו את השדה בכל המרחב.

3) שדה של כדור עם צפיפות לא אחידה

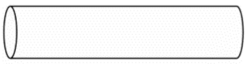


נתון כדור בעל רדיוס R וצפיפות התלויה במרחק ממרכז הכדור. r קבוע ונתון: $\rho(r)=\rho_0\frac{r}{R}$.
מצאו את התפלגות השדה במרחב (בתוך ומחוץ לכדור).

4) שדה של תיל אינסופי

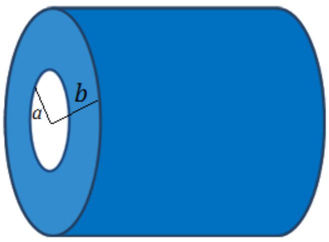
נתון תיל אינסופי בעל צפיפות λ.
מצאו את השדה במרחב.

5) שדה של גליל אינסופי



נתון גליל אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת נפח ρ ורדיוס ב-R.
מצאו את השדה במרחב.

6) קליפה גלילית עבה



קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי a,
רדיוס חיצוני b וגובה H טעונה בצפיפות מטען
נפחית $\rho(r)=\frac{c}{r}$, כאשר c קבוע נתון ו-r הוא
המרחק מציר הסימטריה של הקליפה.

א. מצא את המטען הכולל בקליפה.

ב. מצא את השדה בכל המרחב אם: $H \gg a\ ,\ b$.

7) שדה של לוח אינסופי

נתון משטח אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת שטח σ.
מצאו את השדה במרחב.

8) לוח עם עובי

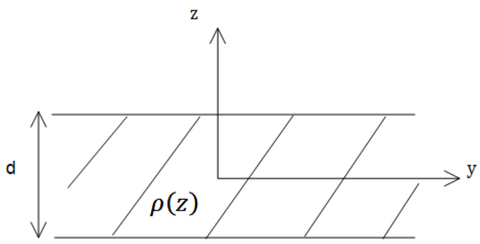
נתון מישור בעל שטח A ועובי d.
המישור טעון בצפיפות מטען קבועה
ליחידת נפח ρ .

א. מצאו את השדה רחוק מאוד מהמישור.

ב. מצאו את השדה קרוב מאוד למישור ובתוכו (השתמש בקירובים).

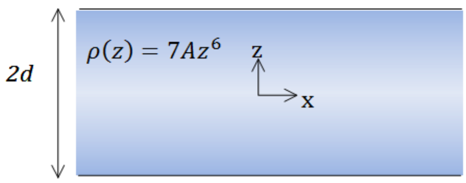
ג. מניחים אלקטרון בגובה $Z_0 < \frac{d}{2}$, מצאו את מיקום האלקטרון כפונקציה של הזמן בהנחה שצפיפות המטען במישור חיובית.

9) מישור עבה עם צפיפות אנטי סימטרית



מישור אינסופי בעל עובי d טעון בצפיפות מטען
כתלות במרחק ממרכז המישור $\rho(z) = Az$,
A קבוע נתון.
מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב
שיוצר המטען במישור.

10) מישור עבה עם צפיפות משתנה



מישור אינסופי בעובי 2d טעון בצפיפות מטען
משתנה $\rho(z) = 7Az^6$, כאשר A קבוע נתון.
ציר ה-z אנך למישור וראשיתו במרכז המישור
(המישור אינסופי ב-y , x , ראה ציור).

א. מצאו את השדה החשמלי בכל המרחב.

ב. הראו שחוק גאוס הדיפרנציאלי מתקיים בכל המרחב.

ג. מצאו את הרוטור של השדה החשמלי $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ בכל המרחב, והסבר את התוצאה.

תשובות סופיות:

1) $$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \frac{KQ}{r^2}\hat{r} & R<r\end{cases}$$

2) $$E=\begin{cases}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r<R\\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & R<r\end{cases}$$

3) $$E=\begin{cases}\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} & r<R\\ \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

4) $$\vec{E}=\frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$$

5) $$\vec{E}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

6) $$\vec{E}=\frac{c\,(b\text{-}a)}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

7) $$\vec{E}=\begin{cases}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z>0\\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z<0\end{cases}$$

8) א. $\vec{E}=\frac{kpdA}{r^2}\hat{r}$ ב. $\vec{E}=\begin{cases}\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z>\frac{d}{2}\\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z<-\frac{d}{2}\end{cases}$ ג. $z(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{|e|\rho}{\varepsilon_0 m}}t\right)$

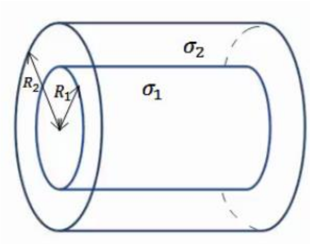
9) $$\vec{E}=-\frac{A}{\varepsilon_0 z}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2\right]\hat{z}$$

10) א. $\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}A\cdot z^7\hat{z}$ ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

תרגול נוסף:

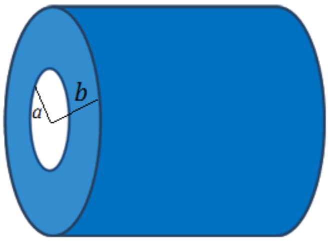
שאלות:

1) שתי קליפות גליליות חלולות



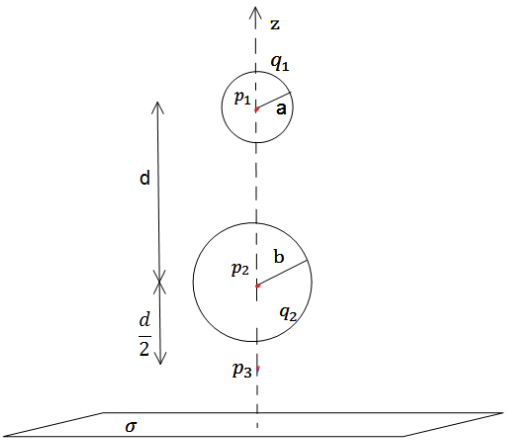
נתונות שתי קליפות (חלולות) גליליות אינסופיות
בעלות ציר סימטריה משותף.
רדיוס הקליפה הפנימית הוא R_1
וצפיפות המטען המשטחית בה היא σ_1.
רדיוס הקליפה החיצונית הוא R_2 וצפיפות המטען בה היא σ_2.
מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

2) קליפה גלילית עבה



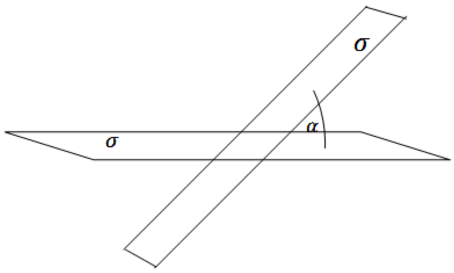
קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי a,
רדיוס חיצוני b וגובה H טעונה בצפיפות מטען
נפחית $\rho(r)=\frac{c}{r}$, כאשר c קבוע נתון ו-r הוא
המרחק מציר הסימטריה של הקליפה.
א. מצא את המטען הכולל בקליפה.
ב. מצא את השדה בכל המרחב אם: $H \gg a\ ,\ b$.

3) משטח ושתי קליפות כדוריות



שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים
שונים $a<b$, נמצאות במרחק $d>2b$
אחת מעל השנייה.
הקליפות טעונות במטענים $q_2\ ,\ q_1$ בהתאמה.
במאונך לציר המחבר בין הקליפות ומתחת
לקליפה התחתונה (עם רדיוס b) מונח מישור
אינסופי הטעון בצפיפות מטען ליחידת שטח σ.
מצא את השדה בנקודות הבאות.
א. p_1 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס a.
ב. p_2 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס b.
ג. p_3 הנמצאת במרחק $\frac{d}{2}$ מתחת למרכז הקליפה התחתונה אך מעל המישור.

4) שני מישורים בזווית

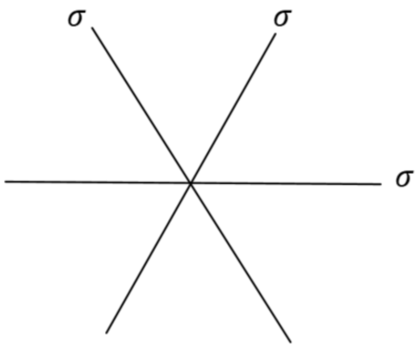


שני מישורים אינסופיים טעונים בצפיפות מטען ליחידת שטח σ. המישורים נמצאים בזווית α אחד מהשני.

א. מצא את השדה החשמלי בין המישורים ומעל המישור האופקי.

ב. מצא את השדה מעל שני המישורים.

5) שלושה לוחות בזווית



באיור מתוארת מערכת של שלושה לוחות אינסופיים (אינסופיים פנימה והחוצה מהדף) בעלי צפיפות מטען משטחית זהה σ .

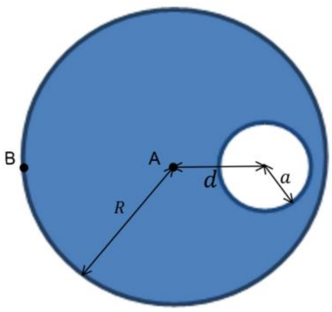
א. חשבו את השדה בכל נקודה במרחב על ידי סופרפוזיציה של השדות של כל לוח בנפרד.

ב. חשבו את השדה החשמלי על ידי שימוש בחוק גאוס, הסבירו מדוע חוק גאוס ישים במקרה זה.

ג. חשבו את השדה החשמלי במרחב עבור המקרה של N משטחים המחלקים את המרחב בזוויות שוות.
למה תצטמצם תשובתכם עבור $N \gg 1$?
השתמשו ב- $\sin\theta \approx \theta$, כאשר $\theta \ll 1$.

ד. כאשר N גדול מאוד, המערכת הופכת להיות מערכת עם צפיפות מטען נפחית התלויה במרחק מנקודה (או קו החיתוך).
מהי צפיפות המטען כתלות במרחק מנקודה (או קו החיתוך) $\rho(r)$?

6) כדור עם חור



בתוך כדור הטעון בצפיפות מטען אחידה ρ קיים חלל כדורי בעל רדיוס a. המרחק של מרכז החלל ממרכז הכדור הוא d , רדיוס הכדור הגדול הוא R

א. מצאו את השדה בנקודה A .

ב. מצאו את השדה בנקודה B .

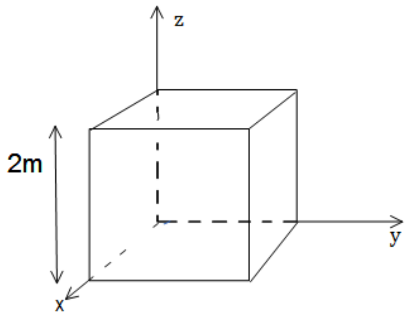
ג*. מצאו את השדה החשמלי בתוך החלל (בכל נקודה).

7) שטף דרך קובייה

נתון שדה במרחב: $\vec{E}=-6\hat{x}+(2-3y)\hat{y}$.

א. חשב את השטף העובר דרך צלעות קובייה הנמצאת ברביע הראשון כך שאחד מקדקודיה בראשית ואורך צלעה $2m$.

ב. מהו המטען הכלוא בתוך הקובייה?

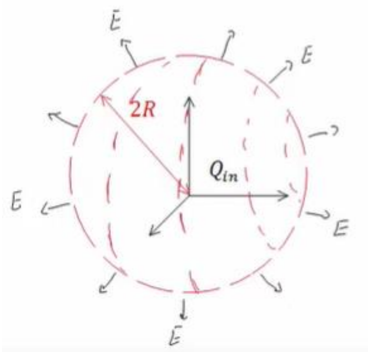


8) מטען כלוא

נתונה פונקציית השדה החשמלי

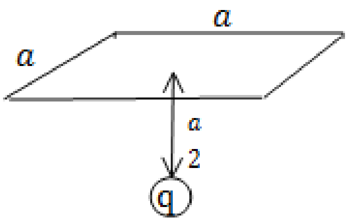
במרחב: $\vec{E}=\dfrac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0(r^2+R^2)}\hat{r}$.

כאשר R , ρ_0 קבועים נתונים, ו-r הוא המרחק מהראשית בקואורדינטות כדוריות, מצא את כמות המטען הכלואה בתוך מעטפת כדורית בעלת רדיוס $2R$.



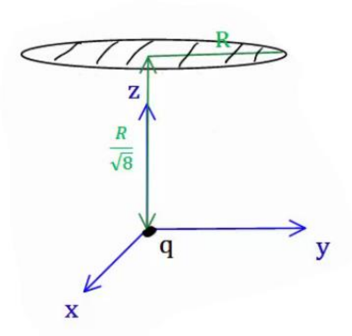
9) שטף דרך משטח ריבועי

מצא את השטף העובר דרך משטח ריבועי (לא טעון) בעל צלע באורך a הנמצא בגובה $\frac{a}{2}$ מעל מטען נקודתי q.



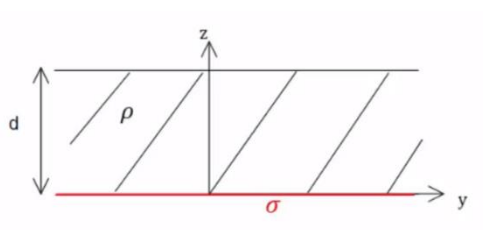
10) שטף דרך מעגל

מטען q נמצא בראשית הצירים.
מהו השטף החשמלי העובר דרך עיגול ברדיוס R המקביל למישור x-y ומרכזו נמצא בנקודה $\left(0,0,\frac{R}{\sqrt{8}}\right)$?

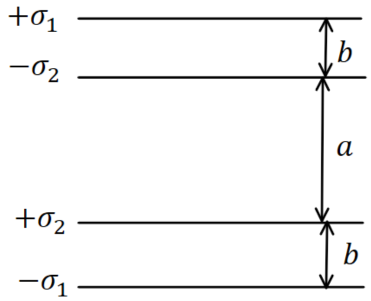


11) מישור עבה צמוד למישור דק

מישור אינסופי דק בעל צפיפות מטען אחידה σ נמצא על מישור x-y.
מישור אינסופי נוסף בעל עובי d טעון בצפיפות מטען אחידה ρ, מונח מעל המישור הדק (תחתית המישור העבה נמצא גם על מישור x-y).
מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.



12) ארבעה לוחות



במערכת הבאה ישנם ארבעה לוחות הטעונים
בצפיפויות מטען $\sigma_2 = 0.02\ \frac{c}{m^2}$, $\sigma_1 = 0.05\ \frac{c}{m^2}$.
המרחקים בין הלוחות הם: $a = 3\,c.m$, $b = 1\,c.m$
כפי שמצוין בציור וניתן להניח כי מרחקים אלו קטנים
בהרבה מצלעות הלוחות.

א. מצא את השדה החשמלי בכל מקום במרחב
(בין הלוחות ומעליהן, אין צורך להתייחס למה שקורה בצידי הלוחות).

ב. משחררים פרוטון ממנוחה מהלוח $-\sigma_2$. כמה אנרגיה קינטית "ירוויח" מן המערכת? (הנח שהפרוטון עובר דרך הלוחות ללא הפרעה).

ג. מצא את מהירות הפרוטון ביציאה מן המערכת.

13) מלוח אל לוח

שני לוחות ריבועיים נמצאים אחד מעל השני. אורך הצלע של כל לוח היא 6 ס"מ והמרחק בין הלוחות הוא 2 מ"מ. הלוחות טעונים בצפיפות מטען אחידה.
המטען הכולל על הלוח התחתון הוא: $Q = 6\cdot10^{-6}c$ והמטען הכולל על הלוח העליון זהה בגודלו והפוך בסימנו. משחררים אלקטרון ממנוחה קרוב מאוד ומתחת ללוח העליון: $\left(q_e = -1.6\cdot10^{-19}c\ ,\ m_e = 9.1\cdot10^{-31}kg\right)$.

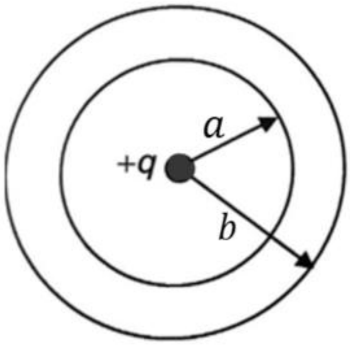
א. כמה זמן ייקח לאלקטרון להגיע אל הלוח התחתון?

ב. מהי מהירותו בזמן פגיעתו בלוח?

ג. מהי האנרגיה הקינטית של האלקטרון ברגע הפגיעה?

14) קליפה כדורית עבה עם צפיפות משתנה

קליפה כדורית עבה שרדיוסיה הפנימי והחיצוני הם a ו- b נושאת מטען
בצפיפות נפחית לא אחידה, $\rho(r) = \frac{\alpha}{r}$, כאשר $\alpha > 0$ הינו קבוע מספרי.
במרכזו של החלל הכדורי $(r = 0)$ מצוי מטען נקודתי $+q$.
מה צריך להיות ערכו של הקבוע המספרי α על מנת שהשדה בתחום $a < r < b$ יהיה קבוע, כלומר בלתי תלוי במרחק.



תשובות סופיות:

1) $\vec{E}=\left(\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2\right)\frac{1}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$

2) $\vec{E}=\frac{C\left(b-a\right)}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$

3) א. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+\frac{kq_2\hat{z}}{d^2}+0$ ב. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}+0+\left(-\frac{kq_1}{d^2}\hat{z}\right)$

ג. $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}-\frac{kq_2}{\frac{d^2}{4}}\hat{z}-\frac{kq_1}{\frac{9d^2}{4}}\hat{z}$

4) בין המישורים: $\vec{E}_T=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\left(1+\cos\alpha\right)+\sin\alpha\hat{y}\right)$

מעל המישורים: $\vec{E}_T=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\left(1+\cos\alpha\right)-\sin\alpha\hat{y}\right)$

5) א. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

ב. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, חוק גאוס ישים מכיוון שניתן למצא מעטפת גאוס שהרכיב המאונך של השדה על המעטפת אחיד.

ג. $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}\approx\frac{\sigma N}{2\pi\varepsilon_0}$

ד. $\rho(r)=\frac{\sigma N}{2\pi r}$.

6) א. $\frac{4\pi k\rho a^3}{3d^2}\hat{x}$ ב. $\frac{4\pi k\rho}{3}\left(\frac{a^3}{(d+R)^2}-R\right)\hat{x}$ ג. $\frac{4\pi k\rho d}{3}\hat{x}$

7) א. ‎-24 ב. $\frac{Qin}{\varepsilon_0}$

8) $\frac{16}{5}\pi\rho_0 R^3$

9) $\frac{q}{6\varepsilon_0}$

10) $\phi=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{kqa}{2\left(x^2+y^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

11) $\frac{q}{3\varepsilon_0}$

12) א. $\vec{E}=-5.65\cdot10^{q}\frac{N}{C}\hat{y}$ ב. $2.53\cdot10^{-11}J$ ג. $v=1.04\cdot10^{8}\frac{m}{sec}$

13) א. $t\approx1.1\cdot10^{-12}\sec$ ב. $V(t)=3.65\cdot10^{9}\frac{m}{sec}$

ג. $E_k=6.06\cdot10^{-12}J$

14) $\alpha=\frac{q}{2\pi a^2}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 3 - פוטנציאל- מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

מהו פוטנציאל:

רקע:

פוטנציאל:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

אנרגיה פוטנציאלית חשמלית:

$$U = q\varphi$$

מתח:

$$V = \Delta\varphi$$

עבודה של הכוח החשמלי:

$$W = -\Delta U = -q\Delta\varphi$$

עבודה להזיז מטען:

$$W = \Delta U = q\Delta\varphi$$

פוטנציאל של מטען נקודתי:

$$\varphi = \frac{kq}{r}$$

מוליכים:

- מטענים חופשיים לזוז.
- השדה (או ליתר דיוק הכוח) יהיה אפס בתוך המוליך.
- על השפה יכול להיות שדה מאונך לשפה.
- המטען הכולל בתוך המוליך הוא אפס (במצב סטטי) למעט על השפה.
- הפוטנציאל במוליך אחיד (קבוע).

הארקה - חיבור לקרקע , מאפסת את הפוטנציאל.

שאלות:

1) עבודה להביא מטען מהאינסוף

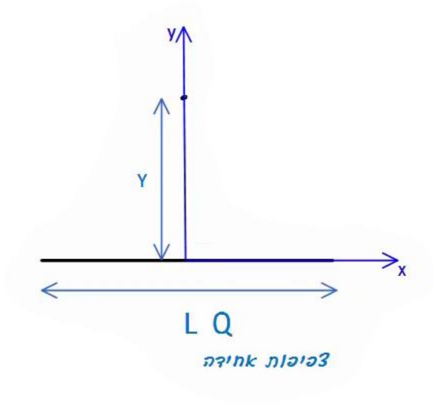
מהי העבודה הדרושה להביא מטען $Q = 2 \cdot 10^{-6} c$ מהאינסוף למרחק $r = 50c.m$ ממטען $Q = 3 \cdot 10^{-6} c$ המקובע במקום?

תשובות סופיות:

1) $W = 108 \cdot 10^{-3} J$

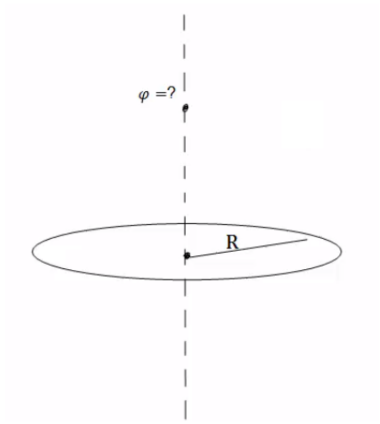
שיטה 1, סופרפוזיציה:

שאלות:



1) שיטה ראשונה, סופרפוזיציה

תיל באורך L טעון במטען כולל Q המפולג בתיל בצורה אחידה. התיל מונח על ציר ה-x.
מצא את הפוטנציאל על ציר ה-y העובר במרכז התיל.



2) פוטנציאל של טבעת לאורך ציר הסימטריה

מצא את הפוטנציאל של טבעת ברדיוס R עם צפיפות מטען ליחידת אורך λ לאורך ציר הסימטריה.

תשובות סופיות:

1) $$\varphi = k\lambda \ln \left| \frac{\frac{\mathrm{L}}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)^2 + y^2}}{-\frac{\mathrm{L}}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)^2 + y^2}} \right|$$

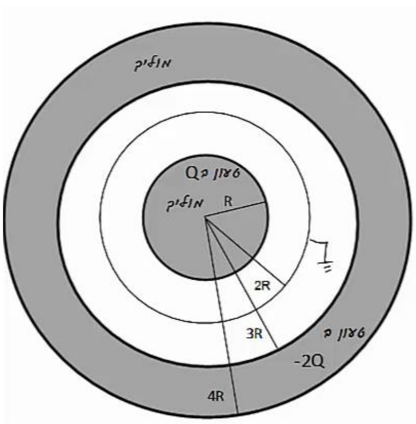
2) $$\varphi = \frac{2\pi k\lambda \mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + z^2}}$$

שיטה 2, שאלות חוק גאוס:

שאלות:

1) **דרך שניה, שאלות חוק גאוס**

כדור מוליך בעל רדיוס R טעון במטען Q.
מסביב לכדור ברדיוס 2R, נמצאת מעטפת כדורית דקה, מוליכה ומוארקת.
כל המערכת מוקפת במעטפת עבה ומוליכה עם רדיוס פנימי 3R ורדיוס חיצוני 4R.
המעטפת החיצונית טעונה במטען 2Q- (ראה ציור).
לכדור ולמעטפות מרכז משותף, Q , R נתונים.



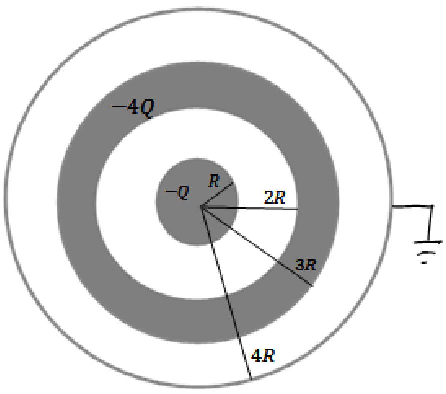
א. מהו הפוטנציאל בכל המרחב?
ומהי התפלגות המטען בכל המרחב?

2) **פוטנציאל של קליפה כדורית**

מצא את הפוטנציאל בכל המרחב של קליפה כדורית ברדיוס R הטעונה במטען כולל Q. הנח שהמטען מפוזר בצורה אחידה על השפה.

3) **קליפות גליליות מוליכות**

גליל מוליך בעל רדיוס R ואורך L טעון במטען Q-.
סביב הגליל נמצאת קליפה גלילית עבה מוליכה, בעלת רדיוס פנימי 2R ורדיוס חיצוני 3R.
אורך הקליפה הוא L גם כן.
הקליפה טעונה במטען כולל של 4Q-.
מסביב לקליפה העבה נמצאת קליפה דקה מוליכה ומוארקת ברדיוס 4R ואורך זהה.
הנח כי $R \ll L$ ולקליפות ציר מרכזי משותף.



א. כיצד מתפלג המטען במערכת?
ב. מה הפוטנציאל בכל המרחב?
ג. פרוטון בעל מסה m_p ומטען |e| משוחרר ממנוחה במרחק r=2R.
מהי מהירות הפרוטון לאחר שעבר מרחק R?

4) **שדה ופוטנציאל של כדור מלא**

נתון כדור מלא בעל רדיוס R וצפיפות מטען נפחית אחידה p .

א. מצא את פונקציית השדה בכל המרחב.
ב. מצא את פונקציית הפוטנציאל בכל במרחב.

תשובות סופיות:

1) א. פוטנציאל:

$$\varphi=\begin{cases} C_1 & r<R \\ \dfrac{kQ}{r}+C_2 & R<r<2R \\ \dfrac{k(Q+q)}{r}+C_3 & 2R<r<3R \\ C_4 & 3R<r<4R \\ \dfrac{k(q-Q)}{r}+C_5 & 4R<r \end{cases}$$

התפלגות: ראה סרטון

2)

$$\varphi=\begin{cases} \dfrac{KQ}{R} & r<R \\ \dfrac{KQ}{r} & R>r \end{cases}$$

3) א. ראה סרטון

ב.

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\cdot\begin{cases} \ln\dfrac{1}{2}+5\ln\dfrac{3}{4} & r<R \\ \ln\dfrac{r}{2R}+5\ln\dfrac{3}{4} & R<r<2R \\ 5\ln\dfrac{3}{4} & 2R<r<3R \\ 5\ln\dfrac{r}{4R} & 3R<r<4R \\ 0 & 4R<r \end{cases}$$

ג.

$$v=\sqrt{\frac{|e|Q\ln 2}{\pi L\varepsilon_0 m_p}}$$

4) א.

$$E=\begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o}\hat{r} & r<R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & R<r \end{cases}$$

ב.

$$\varphi=\begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_o}+C_1 & r<R \\ -\left(-\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\right)+C_2 & R<r \end{cases}$$

שיטה 3, חישוב מפורש:

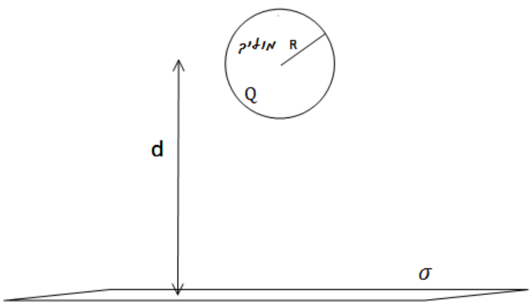
שאלות:

1) **דרך שלישית, חישוב מפורש**

נתון משטח אינסופי הטעון בצפיפות מטען משטחית σ.

במרחק d מעל המשטח ממוקם כדור מוליך בעל רדיוס R ומטען Q.

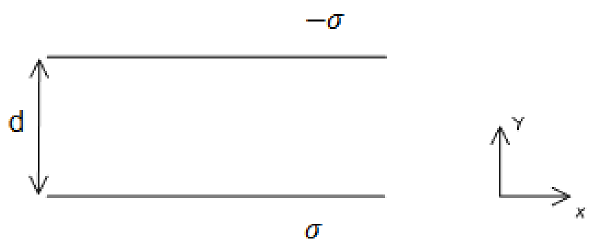
מצא את הפרש הפוטנציאלים בין המישור לבין שפת הכדור.



2) **מתח בין לוחות**

מצא את הפרש הפוטנציאלים בין שני לוחות, כאשר לוח אחד טעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת שטח σ והלוח השני טעון בצפיפות אחידה ליחידת שטח $-\sigma$.

נתון כי המרחק בין הלוחות הוא d וכי שטח הלוחות גדול בהרבה מהמרחק ביניהם.



תשובות סופיות:

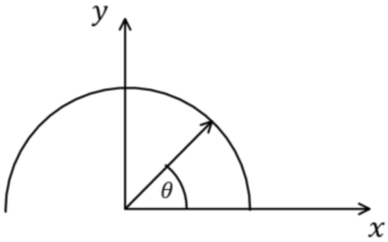
1) $$\Delta\varphi_{B\to A}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(d-R)+\frac{kQ}{R}-\left[Q+\frac{KQ}{\lambda}\right]$$

2) $$V=|E|d$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) חישוב פוטנציאל במרכז חצי טבעת עם צפיפות משתנה



תיל מכופף לחצי טבעת ברדיוס R. מרכז הטבעת (או מרכז המעגל השלם) הוא בראשית הצירים וחצי הטבעת נמצאת בחלק החיובי של ציר ה-y (ראו איור).

חצי הטבעת טעונה בצפיפות מטען לא אחידה ליחידת אורך: $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin\theta$ כאשר θ והיא הזווית עם ציר ה-x החיובי ו- $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-12} \frac{C}{m}$.

מצאו את הפוטנציאל בראשית.

2) יצירת היסוד קיריום

בשנת 1944 המדענים גלן סיבורג (חתן פרס נובל לכימיה), ראלף ג'יימס ואלברט גיורסו ייצרו לראשונה את היסוד הכימי שמספרו 96 וקראו לו "קיריום" על שם מארי קירי. לשם כך הם "הפציצו" גרעינים של פלוטוניום (שמספרו האטומי 94 , כלומר יש לו 94 פרוטונים) בגרעיני הליום – 4 (בהם יש 2 פרוטונים ושני ניטרונים), והמסה שלו היא: $M = 6.6 \times 10^{-27}\,kg$.

א. אפשר להתייחס בקירוב אל גרעין הפלוטוניום כאל כדור ברדיוס: $R = 7 \times 10^{-15}\,m$, בו המטען של 94 הפרוטונים מפוזר באופן אחיד בנפחו.
אם כך, מה הפוטנציאל על פניו (יחסית לאינסוף)?

ב. מה צריכה להיות האנרגיה של גרעין ההליום בשביל שהוא יוכל להגיע אל פני גרעין הפלוטוניום?
תנו את התשובה גם ביחידות eV וגם ביחידות J.

ג. מה צריכה להיות המהירות שלו רחוק מהגרעין ("באינסוף")?

ד. באיזה מרחק ממרכז הגרעין המהירות שלו יורדת ל-80% מהמהירות בסעיף ג'?

3) דיפול

במרחב נמצאים שני מטענים:

$q_1=-q$ בנקודה $\vec{r}_1=-a\hat{y}=(-a,0,0)$

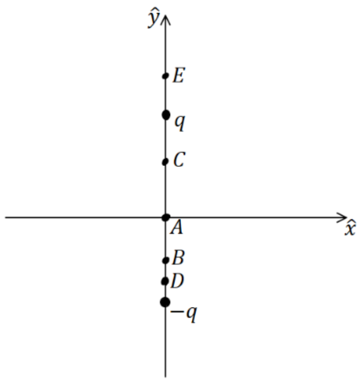
$q_2=-q$ בנקודה $\vec{r}_2=a\hat{y}=(a,0,0)$

א. מה הפוטנציאל (יחסית לאינסוף), ומה השדה החשמלי בכל אחת מהנקודות הבאות: $\vec{r}_E=\frac{3}{2}a\hat{y}$, $\vec{r}_D=-\frac{3}{4}a\hat{y}$, $\vec{r}_C=\frac{1}{2}a\hat{y}$, $\vec{r}_B=-\frac{1}{2}a\hat{y}$, $\vec{r}_A=0$?

ב. היכן הפוטנציאל (יחסית לאינסוף) מתאפס? תארו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות בהן זה קורה.

ג. ציירו גרפים סכמתיים של הפוטנציאל לאורך ציר y ולאורך שני צירים שמקבילים לציר y בשני מרחקים שונים.

ד. ציירו את קווי השדה ואת המשטחים שווי הפוטנציאל.



4) מטען q ומטען 3q

במרחב נמצאים שני מטענים.

מטען 3q בנקודה $(a,0,0)$ ומטען $-$q בנקודה $(-a,0,0)$.

א. מה הפוטנציאל φ (יחסית לאינסוף) ומה השדה החשמלי בראשית הצירים.

ב. מצאו על ציר x שתי נקודות בהן הפוטנציאל מתאפס.

ג. מה השדה החשמלי בשתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב'?

ד. הראו שהמקום הגאומטרי של כל הנקודות בהן הפוטנציאל יחסית לאינסוף מתאפס הוא כדור.
מצאו את הרדיוס שלו ואת מרכזו (בשביל למצוא את הרדיוס והמרכז אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף ב').

ה. מצאו איפה השדה החשמלי מתאפס. מה הפוטנציאל שם?

ו. ציירו גרף סכמתי של הפוטנציאל לאורך ציר x.
ציינו את המיקומים של נקודות בהן הפוטנציאל ידוע ואת ערכו בהן.

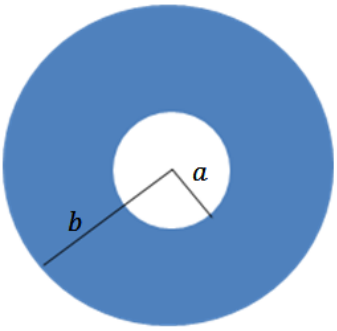
5) מטען על השפה בצורה לא אחידה

מטען Q מפוזר בצורה לא אחידה על שפה של קליפה כדורית ברדיוס R.

א. מה הפוטנציאל במרכז הקליפה?

ב. האם ניתן לחשב את הפוטנציאל על השפה?

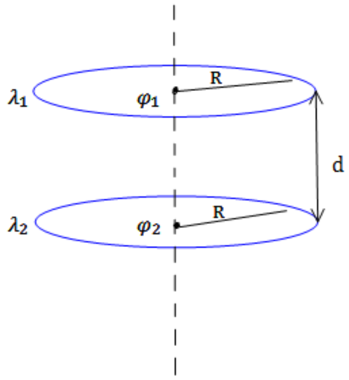
6) דסקה עם חור



בדסקה בעלת רדיוס b קדחו חור במרכזה ברדיוס a.
הדסקה טעונה בצפיפות מטען ליחידת
שטח: $\sigma(r) = \frac{D}{r^2}$, D קבוע לא נתון.

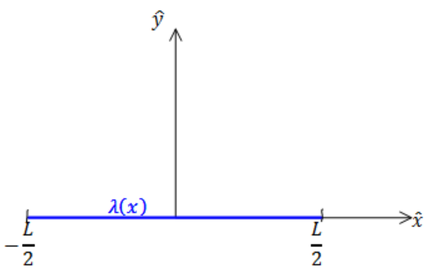
א. מצא את היחידות של D.
ב. מצא את D אם נתון גם המטען הכולל בדסקה Q.
ג. מצא את הפוטנציאל במרכז הדסקה.
ד. בדוק מה קורה בגבול של $b \to a$.

7) טבעת מעל טבעת



שתי טבעות זהות בעלות רדיוס R מונחות האחת מעל ובמקביל לשנייה כך שהמרחק בניהן הוא d.
הטבעת העליונה טעונה בצפיפות מטען ליחידת אורך λ_1 ונתון כי הפוטנציאל במרכזה הוא φ_1 .
הטבעת התחתונה טעונה בצפיפות מטען ליחידת אורך λ_2 ונתון כי הפוטנציאל במרכזה הוא φ_2 .
מצא את צפיפויות המטען של הטבעות אם נתון כי הפוטנציאל באינסוף מתאפס.

8) תיל עם צפיפות משתנה



תיל דק מונח על ציר ה- x כך שמרכזו בראשית הצירים. אורך התיל הוא L והוא טעון בצפיפות מטען ליחידת אורך: $\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L}$.

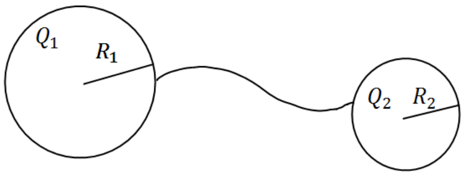
א. מצא את המטען הכולל בתיל.
ב. מצא את הפוטנציאל על ציר ה- x למעט בתחום בו נמצא התיל.

9) כדור זז מחבר בין שני כדורים

הכדורים 1 ו-2 בתמונה הם מוליכים המקובעים במקומם וטעונים במטען זהה. הנח שהכדורים מאוד מרוחקים זה מזה וידוע שהכוח הפועל עליהם הוא F. הכדור השלישי גם הוא זהה אך אינו טעון. מצמידים את הכדור השלישי לכדור הראשון וממתינים עד שהמערכת תתייצב. לאחר מכן מנתקים את הכדור השלישי ומצמידים אותו לכדור השני. שוב ממתינים עד שהמערכת תתייצב.
לבסוף מרחיקים את הכדור השלישי לגמרי.
מהו הכוח בין הכדורים 1 ו-2 לאחר כל התהליך?

10) שני כדורים מוליכים מחוברים בחוט

שני כדורים מוליכים טעונים ונמצאים במרחק גדול מאוד זה מזה.
רדיוסי הכדורים והמטענים שלהם הם: R_1, R_2, Q_1, Q_2.
מחברים בין הכדורים באמצעות חוט מוליך.

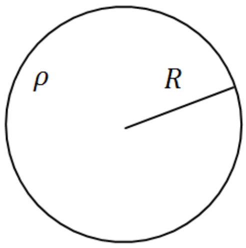


א. מה יהיה המטען על כל כדור לאחר זמן רב?

ב. כמה מטען זרם דרך החוט ולאיזה כיוון?

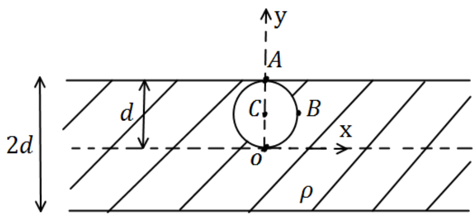
11) פוטנציאל של גליל מלא טעון בצפיפות אחידה

מצא את הפוטנציאל בכל המרחב של גליל אינסופי ברדיוס R וצפיפות מטען אחידה ונתונה ρ.



12) חור במישור

לוח אינסופי בעובי 2d טעון בצפיפות מטען אחידה וחיובית ליחידת נפח ρ.
בתוך הלוח ישנו חלל כדורי בקוטר d.



א. חשב את השדה החשמלי בנקודות: $O(0,0)$, $A(0,d)$, $B(0.5d,0.5d)$, $C(0,0.5d)$.

ב. מצא את הפרש הפוטנציאלים בין הנקודות A ו-B.

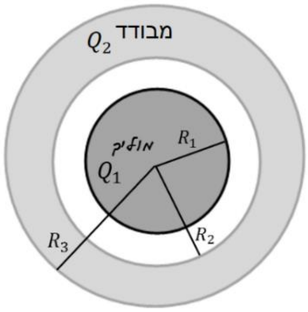
ג. משחררים מטען $q>0$ בעל מסה m מהנקודה C.

i. לאיזה כיוון יתחיל לנוע המטען אם מתעלמים מהשפעת כוח הכובד?

ii. מהי מהירות המטען רגע לפני שהוא מגיע לדופן החלל?

13) כדור מוליך מוקף בקליפה מבודדת

כדור מוליך בעל רדיוס R_1 טעון במטען Q_1.
הכדור נמצא במרכזה של קליפה כדורית מבודדת בעלת רדיוס פנימי R_2 ורדיוס חיצוני R_3.
הקליפה טעונה באופן הומוגני במטען Q_2.



א. חשב את השדה החשמלי והפוטנציאל בכל המרחב.

ב. חזור על החישוב הזה במקרה שבו הכדור מוארק.

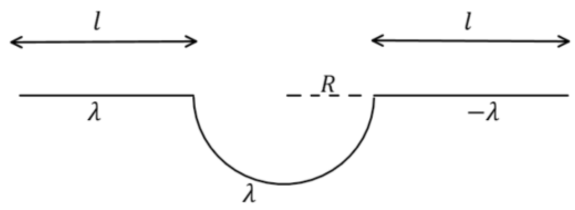
14) שדה ופוטנציאל במרכז של תיל עם חצי עיגול

תיל טעון מורכב משלושה חלקים, שני קווים ישרים בעלי אורך l וחצי עיגול ברדיוס R שמחבר ביניהם, ראו איור. החלק הישר השמאלי וחצי העיגול טעונים בצפיפות מטען אחידה λ שאינה נתונה. החלק הישר הימני טעון ב $-\lambda$.

א. מצאו את λ אם ידוע שסך כל המטען במערכת הוא Q.

ב. חשבו את השדה החשמלי במרכז חצי העיגול.

ג. חשבו את הפוטנציאל החשמלי במרכז חצי העיגול.



תשובות סופיות:

1) $3.6\cdot10^{-2}$

2) א. $1.93\cdot10^{7}\,\mathrm{V}$ ב. $6.17\cdot10^{-12}\,\mathrm{J}$

ג. $v=4.32\cdot10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ ד. $r=1.95\cdot10^{-14}\,\mathrm{m}$

3) א. ראה סרטון ב. $y=0$

ג. ראה סרטון ד. ראה סרטון

4) א. פוטנציאל: $\frac{2kq}{\alpha}$, שדה חשמלי: $-\frac{k4q}{d^2}\hat{x}$ ב. $x_1=-\frac{1}{2}a\,,\ x_2=-2a$

ג. $x_1=-\frac{kq}{a^2}\cdot\frac{16}{3}\hat{x}\,,\ x_2=\frac{kq}{a^2}\cdot\frac{2}{3}\hat{x}$ ד. רדיוס: $R=\frac{3}{4}a$, מרכז: $\left(-\frac{5}{4}a,0,0\right)$

ה. איפוס השדה: $x_2=-3.73a$, הפוטנציאל בנקודה זו: $0.27\frac{kq}{a}$

ו. ראו סרטון.

5) א. $\frac{kQ}{R}$ ב. לא

6) א. $\lceil D\rceil=\lceil c\rceil$ ב. $D=\frac{Q}{2\pi\ln\frac{b}{a}}$ ג. $\varphi=\frac{kQ}{\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

ד. $\frac{kQ}{a}$

7) $$\varphi_1=2\pi k\lambda_1+\frac{2\pi k\lambda_2 R}{\sqrt{R^2+d^2}}\ ,\ \varphi_2=2\pi k\lambda_2+\frac{2\pi k\lambda_1 R}{\sqrt{R^2+\left(-d^2\right)}}$$

8) א. 0 ב. $\varphi=\frac{k\lambda_0}{L}\left(-L+x\ln\left(\frac{x+\frac{L}{2}}{x-\frac{L}{2}}\right)\right)$

9) $\frac{3}{8}F$

10) א. $q_2'=\frac{R_2\left(Q_1+Q_2\right)}{R_1+R_2}$ ב. אם $\frac{Q_1}{Q_2}>\frac{R_1}{R_2}$ אז המטען עבר משמאל לימין,

אם $\frac{Q_1}{Q_2}<\frac{R_1}{R_2}$ אז עבר מימין לשמאל.

11) $$\varphi=\begin{cases}-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(r^2-R^2\right) & r\le R\\ -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} & r\ge R\end{cases}$$

12) א. $\vec{E}_O=\frac{\rho d}{6\varepsilon_0}\hat{z}\ ,\ \vec{E}_A=\frac{5\rho d}{6\varepsilon_0}\hat{z}\ ,\ \vec{E}_B=\frac{\rho d}{6\varepsilon_0}\hat{x}\ ,\ \vec{E}_C=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

ב. $\frac{3\rho d}{8\varepsilon_0}$ ג. i. למעלה. ii. $V=\sqrt{\frac{2q\rho d^2}{3\varepsilon_0 m}}$

13) א.
$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \frac{kQ_1}{r^2}\hat{r} & R_1<r<R_2\\ \frac{k}{r^2}\left(Q_1+Q_2\left(\frac{r^3-R_2^3}{R_3^3-R_2^3}\right)\right)\hat{r} & R_2<r<R_3\\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r} & R_3<r\end{cases}$$

ב.
$$\varphi(r)=\begin{cases}C_1 & r<R_1\\ \frac{kQ_1}{r}+C_2 & R_1<r<R_2\\ \frac{kQ_1}{r}-\frac{kQ_2r^2}{2(R_3^3-R_2^3)}-\frac{kQ_2R_2^3}{(R_3^3-R_2^3)r}+C_3 & R_2<r<R_3\\ \frac{k(Q_1+Q_2)}{r}+C_4 & R_3<r\end{cases}$$

14) א. $\lambda=\frac{Q}{\pi R}$ ב. $\vec{E}=\frac{2K\lambda}{R}\hat{y}+2K\lambda\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{l+R}\right)\hat{x}$

ג. $\varphi=K\lambda\pi$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 4 - דיפול קוואדרופול ופיתוח מולטיפולי לפוטנציאל

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

שאלות:

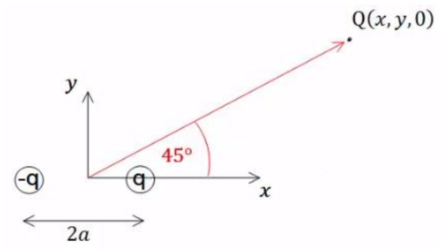
1) דיפול בראשית מזיז אלקטרון

נתון דיפול $\vec{p}=(p,0,0)$ הנמצא בראשית.

א. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $(a,0,0)$ עם מהירות $(v,0,0)$ ייעצר בנקודה $(b,0,0)$.

ב. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $\left(a,-\sqrt{2}a,0\right)$ עם מהירות $(0,0,v)$ יבצע תנועה מעגלית.

2) תרגיל ופיתוח הנוסחה של דיפול מהשדה



שני מטענים בעלי מטען q ו- $-q$ ממוקמים ב- $x=a$ ו- $x=-a$.

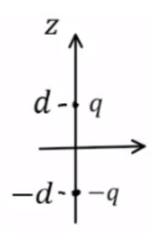
א. חשב את הכוח הפועל על מטען שלישי Q הנמצא בנקודה $(x,y,0)$.

ב. הנח שמרחק המטען מהראשית גדול בהרבה מהמרחק בין המטענים והזווית של וקטור מיקום המטען עם ציר ה- x היא 45 מעלות. השתמש בתשובה של סעיף א' ובקירובים, וחשב מה הכוח הפועל על המטען.

ג. חשב את וקטור מומנט הדיפול שיוצרים המטענים.

ד. חשב שוב את הכוח הפועל על המטען, הפעם השתמש בנוסחה של שדה של דיפול והראה כי התשובה זהה לתשובה של סעיף ב'.

3) חישוב שגיאה



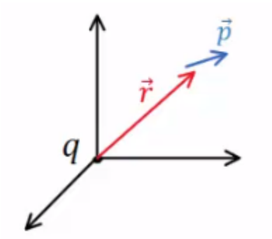
מטען q נמצא ב- $(0,0,d)$ ומטען $-q$ נמצא ב- $(0,0,-d)$.

א. חשב את הפוטנציאל המדויק בנקודה כלשהיא על ציר z.

ב. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של הפוטנציאל של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהפוטנציאל האמיתי?

ג. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של השדה של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהשדה האמיתי?

4) מטען נקודתי ודיפול (כולל אנרגיה וכוח)



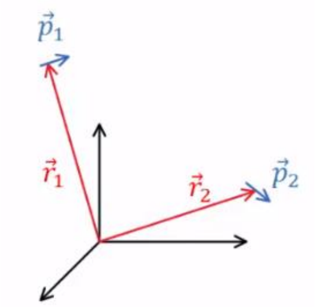
דיפול חשמלי בעל מומנט דיפול $\vec p$ נמצא במיקום $\vec r$.
מטען נקודתי q נמצא בראשית.
התייחס ל-q , $\vec p$ ו- $\vec r$ כנתונים.

א. חשב את מומנט הכוח שפועל על הדיפול.

ב. חשב את האנרגיה של הדיפול.

ג. הראה כי הכוח הפועל על הדיפול הוא: $\vec F = \frac{k\left(\vec p \cdot r^2 - (\vec p \cdot \vec r)\cdot \vec r\right)}{r^5}$.

5) אנרגיית דיפול-דיפול



דיפול $\vec p_1$ ממוקם ב-$\vec r_1$ ודיפול $\vec p_2$ ממוקם ב-$\vec r_2$.

א. הראה שהאנרגיה של $\vec p_2$ בשדה של $\vec p_2$

היא: $U = \frac{k}{\tilde r^3}\left(\vec p_1 \cdot \vec p_2 - 3\left(\vec p_1 \cdot \hat{\tilde r}\right)\left(\vec p_2 \cdot \hat{\tilde r}\right)\right)$

כאשר: $\tilde{\vec r} = \vec r_2 - \vec r_1$, $\tilde r = \left|\tilde{\vec r}\right|$ ו- $\hat{\tilde r} = \frac{\tilde{\vec r}}{\tilde r}$.

ב. אנרגיה זו היא בעצם אנרגיה של מערכת דיפול-דיפול, הראה שאם היינו מחשבים את האנרגיה של $\vec p_1$ בשדה של $\vec p_2$ היינו מקבלים תוצאה זהה.

ג. מצא את הכוח הפועל על $\vec p_2$ והכוח על $\vec p_1$.

ד. מה שווה הכוח על $\vec p_2$ במקרה ש-$\vec p_2$ מקביל ל-$\vec p_1$ ומקביל ל-$\tilde{\vec r}$? ומה הכוח אם $\vec p_2$ מקביל ל-$\vec p_1$ ומאונך ל-$\tilde{\vec r}$.

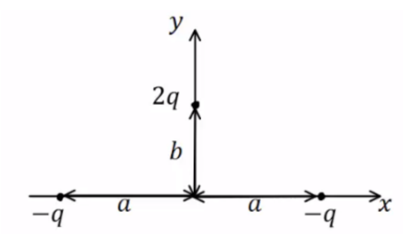
6) קוואדרופול של מטען בודד

מטען נקודתי בודד q ממוקם בנקודה נתונה (x_0, y_0, z_0).

א. מצא את ה-Q הכולל את $\vec p$ ואת כל הרכיבים של Q_{ij} למערכת.

ב. מניחים מטען נוסף $-q$ בראשית הצירים, כיצד ישתנו הגדלים שחישבת בסעיף א'.

7) משולש מטענים

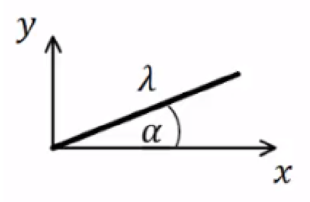


באיור הבא מתוארת התפלגות מטענים.
חשב את הפוטנציאל רחוק מאוד מההתפלגות עד הסדר הקוואדרופולי.

$V(\vec r) = k\left(\frac{Q_T}{r} + \frac{\vec p \cdot \hat r}{r^2} + \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j} r_i r_j Q_{ij}\right)$.

8) מטען קווי בזווית

מוט דק באורך L טעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת אורך λ. המוט מונח על מישור xy כך שקצה אחד שלו נמצא בראשית.
המוט יוצר זווית α עם ציר ה- x.
מצא את: $\vec{p}$, Q_T ו- Q_{ij} ורשום את הפוטנציאל עד לסדר הקוואדרופולי.



9) קליפה כדורית טעונה

קליפה כדורית ברדיוס R טעונה בצפיפות מטען משטחית: $\sigma(\varphi)=\sigma_0\cos\varphi$
כאשר φ היא הזווית עם ציר ה- z ו- σ_0 קבוע נתון.
מצא את $\vec{p}$, Q_T ואת Q_{ij} ובטא את הפוטנציאל עד הסדר הקוואדרופולי בקואורדינטות כדוריות.

10) מערכת למדידת קיטוביות

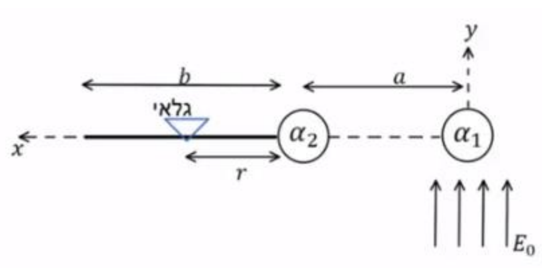
המערכת הבאה מיועדת למדידת הקיטוביות של חלקיק. מניחים חלקיק עם קיטוביות ידועה α_1 בראשית ומפעילים רק עליו שדה חשמלי אחיד: $\vec{E}=E_0\hat{y}$.
החלקיק הנמדד נמצא על ציר ה- x ובמרחק a מהראשית.
ניתן להניח שהחלקיקים מאוד קטנים ביחס למרחק ביניהם.
מניחים על ציר ה- x בתחום: $a<x<a+b$ מסילה ועליה גלאי המודד את עוצמת השדה החשמלי. נסמן את המרחק של הגלאי מהחלקיק הנמדד ב- r.

א. מה צריך להיות כיוון הדיפולים שנוצרים בחלקיקים במצב היציב?

ב. הנח ש- α_1 ו- α_2 נתונים וכתוב באמצעותם זוג משוואות מהן ניתן למצא את $\vec{p}_1$ ו- $\vec{p}_2$.

ג. הנח שמומנטי הדיפול ידועים וכתוב ביטוי לשדה החשמלי במיקום של הגלאי.

ד. כאשר הגלאי נמצא ב- $r=r_0$ נתון כי השדה הנמדד הוא אפס.
מצא את α_2.
האם הכרחי לדעת מהו α_1?



תשובות סופיות:

1) א. $p=\frac{1}{2}mV^2ek\left(\frac{a^2\cdot b^2}{b^2-a^2}\right)$. ב. ראה סרטון.

2) א. $\vec{F}=Q\vec{E}_T$. ב. ראה סרטון. ג. $\vec{P}=q2a\hat{x}$. ד. ראה סרטון.

3) א. $\varphi=\frac{kq2d}{z^2-d^2}$. ב. $z_{\min}=10d$. ג. $z_{\min}\approx 14.14d$.

4) א. $\vec{\tau}=\frac{kq}{r^3}(\vec{p}\times\vec{r})$. ב. $U=-\frac{kq}{r^3}(\vec{p}\cdot\vec{r})$. ג. הוכחה.

5) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$, $\vec{F}_2=\frac{3k}{\tilde{r}^4}\left(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}+\left(\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\cdot\vec{p}_1+\left(\vec{p}_1\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\cdot\vec{p}_2-5\left(\vec{p}_1\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\left(\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\hat{\tilde{r}}\right)$.

ד. $\vec{F}_2=\frac{3k}{\tilde{r}^4}\left(p_1p_2\hat{\tilde{r}}\right)$, $\vec{F}_2=-\frac{6k}{\tilde{r}^4}p_1p_2\hat{\tilde{r}}$.

6) א. $Q_T=q$, $\vec{p}=q(x_0,y_0,z_0)$, $Q_{11}=q\left(2x_0'^2-y_0'^2-z_0'^2\right)$, $Q_{12}=\left(3x_0'y_0'-0\right)q$,
$Q_{13}=3x_0'z_0'q$, $Q_{21}=3x_0'y_0'q$, $Q_{22}=\left(2y_0'^2-x_0'^2-z_0'^2\right)q$, $Q_{23}=3y_0'z_0'q$,
$Q_{31}=3x_0'z_0'q$, $Q_{32}=3y_0'z_0'q$, $Q_{33}=\left(2z_0'^2-x_0'^2-y_0'^2\right)q$.

ב. $Q_T=0$, $\vec{p}=$ לא משתנה , $Q_{ij}=$ לא משתנה.

7) $V(\vec{r})=\frac{k2qby}{r^2}+\frac{kq}{r^5}\left(-x^2\left(2a^2+b^2\right)+y^2\left(a^2+2b^2\right)+z^2\left(a^2-b^2\right)\right)$.

8) $Q_T=\lambda L$, $\vec{p}=\frac{\lambda L^2}{2}(\cos\alpha\hat{x}+\sin\alpha\hat{y})$, $Q_{xx}=\lambda\left(3\cos^2\alpha-1\right)\frac{L^3}{3}$,
$Q_{xy}=L^3\cos\alpha\sin\alpha$, $Q_{xz}=0$, $Q_{yx}=Q_{xy}$, $Q_{yy}=\frac{\lambda L^3}{3}\left(3\sin^2\alpha-1\right)$, $Q_{yz}=0$,
$Q_{zx}=0$, $Q_{zz}=-\lambda\frac{L^3}{3}$.

$$V(\vec{r})=k\left(\frac{\lambda L}{r}+\frac{\lambda L^2}{2r^3}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+\frac{1}{2r^5}\left(x^2\frac{\lambda L^3}{3}\left(3\cos^2\alpha-1\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.xyL^3\cos\alpha\sin\alpha\cdot 2+y^2\frac{\lambda L^3}{3}\left(3\sin^2\alpha-1\right)+z^2\left(-\lambda\frac{L^3}{3}\right)\right)\right)$$

9) $Q_T=0$, $\vec{p}_x=\vec{p}_y=0$, $\vec{p}_z=4\pi\sigma_0R^3\cdot\frac{1}{3}$, $Q_{xx}=Q_{yy}=Q_{zz}=0$, $V(\vec{r})=\frac{4k\pi\sigma_0R^3\cos\varphi}{3r^2}$.

10) א. שני הדיפולים בכיוון $\hat{y}$. ב. $\vec{p}_1=\varepsilon_0\alpha_1\left(E_0\hat{y}-\frac{k\vec{p}_2}{a^3}\right)$, $\vec{p}_2=\varepsilon_0\alpha_2\left(-\frac{k\vec{p}_1}{a^3}\right)$.

ג. $\vec{E}=\frac{k(-\vec{p}_1)}{(a+r)^3}+\frac{k(-\vec{p}_2)}{r^3}$. ד. $\alpha_2=\frac{4\pi a^3r_0^3}{(a+r)^3}$, לא.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 5 - מציאת התפלגות מטען- מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

מציאת התפלגות מטען:

רקע:

<u>צפיפות נפחית</u>:

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של חוק גאוס)

<u>צפיפות משטחית</u>:

$$\sigma = \varepsilon_0 \Delta E_{\perp}$$

<u>מטען נקודתי</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ (בקורדינטות **כדוריות**) באזור הכולל את הראשית אז יש מטען נקודתי כך ש $q = \frac{\alpha}{\mathrm{k}}$.

<u>צפיפות מטען אורכית</u>: אם יש שדה מהצורה $\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\hat{r}$ (בקורדינטות **גליליות**) באזור הכולל את הראשית אז יש צפיפות מטען אורכית כך ש $\lambda = 2\pi\varepsilon_0\alpha$.

<u>מציאת שדה מהפוטנציאל</u>:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

(הנוסחה הופיעה גם בפרק של פוטנציאל)

	קרטזיות	גליליות	כדוריות
grad $\vec{\nabla} f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{z}$
div $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi \sin\varphi)$
Rot/curl $\vec{\nabla} \times \vec{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_\theta)\right)\hat{\varphi}$

(הטבלה הופיע גם בפרק המבוא המתמטי)

שאלות:

1) מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית

נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r)=\begin{cases} Ar^2, & r<a \\ B\,ln(r)+C, & a<r<b \\ D\,ln(r)\,, & b<r \end{cases}$$

A , B , C , D נתונים.

א. מצאו קשר בין הקבועים.

ב. מצאו את התפלגות המטען במרחב.

ג. כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c>b$. מצאו את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

2) שדה התלוי בזווית

השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E}=\frac{C}{r}\left(\hat{r}+\cos\theta\,\hat{\theta}+\sin\theta\cos\varphi\hat{\varphi}\right)$$

א. מצאו את צפיפות המטען במרחב.

ב. מצאו את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על צפיפות המטען.

ג. מצאו שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

3) התפלגות בכדוריות

השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$:\vec{E}(r)=\begin{cases} -\frac{72\pi\cdot 10^5\left(N\cdot\frac{m}{C}\right)}{r}\hat{r}, & r<1 \\ -\frac{144\pi\cdot 10^5\left(N\cdot\frac{m^2}{C}\right)}{r^2}\hat{r}, & r>1 \end{cases}$$

הקואורדינטות כדוריות.

מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

תשובות סופיות:

1) ראה סרטון.

2) א. $\vec{\nabla}\vec{E}=\frac{\varepsilon_0 c}{r^2}\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}+\frac{\sin\theta\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right)$ ב. $4\pi\varepsilon_0 cR$ ג. $4\pi\varepsilon_0 cR$.

3) $\rho(r)=\begin{cases}-\dfrac{2\cdot10^{-4}\left(\frac{c}{m}\right)}{r^2} & r<1\\ 0 & 1<r\end{cases}$, $\sigma(r=1)=-2\cdot10^{-4}\frac{c}{m^2}$.

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 6 - אנרגיה הדרושה לבניית מערכת

תוכן העניינים

הרצאה:

רקע:

$$U = \Sigma \frac{1}{2}\varphi_i q_i = \int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \, dv$$

- הסכום הוא על כל המטענים כפול הפוטנציאל שהם נמצאים בו.
- בנוסחה עם האינטגרל על השדה אפשר להשתמש רק אם אין מטענים נקודתיים או התפלגות קווית.

$\mu_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ נקראת צפיפות האנרגיה החשמלית .

שאלות:

1) הסבר נוסחאות ודוגמה

מצא את האנרגיה הדרושה לבניית קליפה כדורית בעלת רדיוס R וצפיפות מטען משטחית σ.

תשובות סופיות:

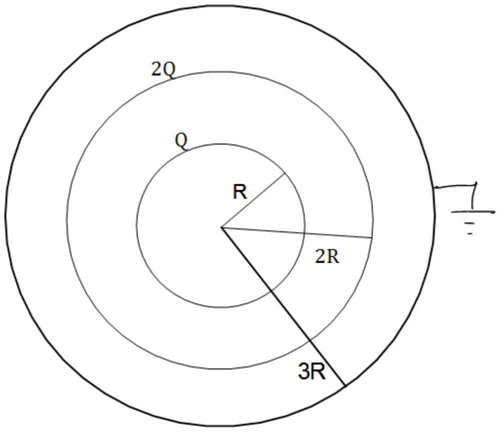
1) $U = \frac{1}{2}\frac{KQ^2}{R}$

תרגילים:

שאלות:

1) אנרגיה של מערכת שלוש קליפות

קליפה כדורית ברדיוס R טעונה במטען Q המפלג בצורה אחידה. הקליפה מוקפת קליפה נוספת ברדיוס 2R הטעונה במטען 2Q.
שתי הקליפות מוקפות בקליפה שלישית מוליכה ומוארקת ברדיוס 3R.
מצא את האנרגיה הדרושה לבניית המערכת.



2) שתי טיפות מים כדוריות וזהות בעלות רדיוס R טעונות כל אחת במטען Q המפולג באופן אחיד על פניהן. מחברים את הטיפות ויוצרים טיפה אחת חדשה וגדולה שגם בה המטען מפולג באופן אחיד על השפה.

א. מהי האנרגיה העצמית של הטיפות לפני שהתחברו?

ב. מהי האנרגיה העצמית של הטיפה החדשה?

ג. מהי האנרגיה העצמית של מערכת שתי הטיפות בדיוק לפני ההתחברות (כלומר, הטיפות כמעט נוגעות אחת בשניה)?
הנח שהתפלגות המטען על כל טיפה עדיין אחידה.

ד. מהו היחס בין האנרגיה שחישבת בסעיף ב' לסעיף ג'?

תשובות סופיות:

1) $\frac{KQ^2}{R}$

2) א. $\frac{KQ^2}{R}$ ב. $\frac{2KQ^2}{\sqrt[3]{2}R}$ ג. $\frac{3}{2}\frac{KQ^2}{R}$ ד. ≈ 1.058

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 7 - תנאי שפה לשדה החשמלי

תוכן העניינים

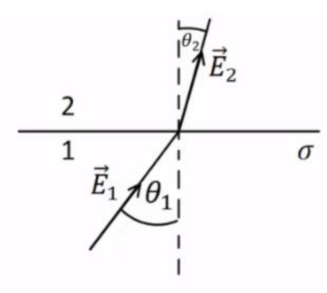
הרצאות ותרגילים:

שאלות:

1) קפיצה על שפת כדור

נתון כדור שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו R. השדה החשמלי בתוך הכדור וקרוב לשפת הכדור הוא: $\vec{E}_{in} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$ כאשר: a , b , c קבועים נתונים.
על מעטפת הכדור קיימת צפיפות מטען משטחית: $\sigma(\varphi) = \sigma_0 \sin\varphi$ כאשר σ_0 קבוע נתון ו- φ היא הזווית עם ציר ה-z.
מצא את השדה מחוץ לשפת הכדור וקרוב אליה בקואורדינטות קרטזיות.

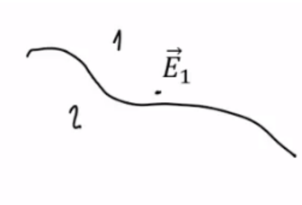
2) שינוי זווית משני צידי משטח טעון



שפה של משטח טעונה בצפיפות מטען σ ומפרידה בין שני אזורים. הראה שהקשר בין הזוויות: θ_1, θ_2

שבאיור הוא: $\tan\theta_2 = \dfrac{\tan\theta_1}{1 + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 E_1 \cos\theta_1}}$ כאשר E_1 הוא גודל השדה השקול בתחום 1.

3) מציאת נורמל למשטח



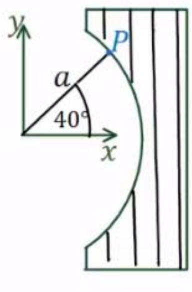
המשטח שמפריד בין שני אזורים נתון ע"י המשוואה: $2x + 4y - z = 3$.

א. מצא וקטור הנורמל למשטח $\hat{n}$.

ב. נתון השדה באחד האזורים קרוב למשטח: $\vec{E}_1 = 2\hat{x} + 5\hat{y} - 3\hat{z}$, מהו הרכיב של השדה שמאונך למשטח?

ג. מהו רכיב השדה שמקביל למשטח?

4) עדשה דיאלקטרית



האיור מתאר "עדשה דיאלקטרית". צד שמאל של העדשה הוא חלק מגליל שצירו חוף עם ציר z ורדיוסו a. צד ימין הוא מישור ישר המקביל למישור xz. השדה החשמלי בנקודה P הנמצאת ב- $\vec{r}_P = (a, 40°, z)$ ומחוץ לעדשה הוא: $\vec{E}(\vec{r}_P) = 4\hat{r} - 3\hat{\theta}$ ביחידות $\frac{N}{m}$ ובקואורדינטות גליליות.

מה צריך להיות המקדם הדיאלקטרי של החומר ממנו עשויה העדשה כך שהשדה החשמלי היוצא מהצד הימני של העדשה יהיה מקביל לציר x?

תשובות סופיות:

1) $$E_{out}=\left(a+\frac{\sigma_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)x}{\varepsilon_0R^2}\ ,\ b+\frac{\sigma_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)y}{\varepsilon_0R^2}\ ,\ c+\frac{\sigma_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)z}{\varepsilon_0R^2}\right).$$

2) הוכחה.

3) א. $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,-1)$. ב. $\frac{27}{21}(2,4,-1)$. ג. $-\frac{1}{7}(4,1,12)$.

4) $\varepsilon_r\approx 1.2$.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 8 - שיטת התמונות-מטעני דמות

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

שיטת מטעני דמות היא שיטה למצא פוטנציאל בבעיות בהם יש מוליכים עם התפלגות מטען שאינה אחידה.

השיטה:

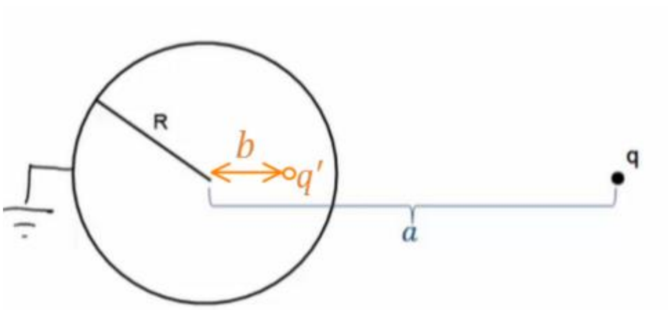
נבנה בעיה מקבילה ללא המוליך .

בבעיה המקבילה נשאיר את אותה התפלגות המטען שיש בתחום בו אנחנו מחפשים את הפוטנציאל.

בתחום הנוסף (שבו אנחנו לא מחפשים את הפוטנציאל) נוסיף מטענים כך שתנאי השפה בבעיה המקבילה יהיו זהים לתנאי השפה בבעיה המקורית.

לפי משפט הקיום והיחידות הפוטנציאל בבעיה המקבילה (בתחום שאנחנו מחפשים) זהה לפוטנציאל בבעיה המקורית.

המקרה של קליפה כדורית ומטען נקודתי:

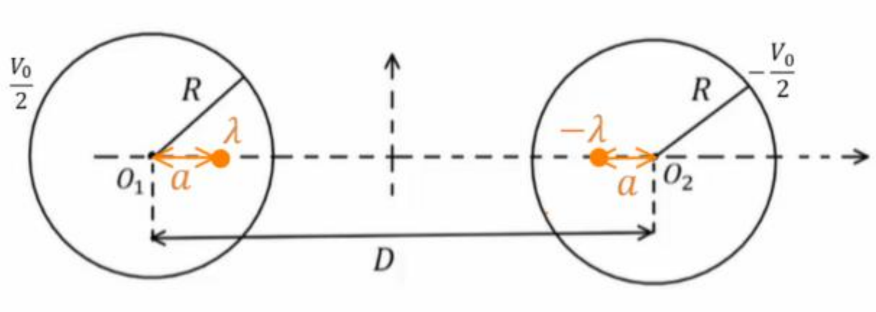


$$b = \frac{R^2}{a} \qquad\qquad q' = -\frac{R}{a}q$$

אם הקליפה נמצאת בפוטנציאל V_0 אז נוסיף מטען q'' במרכז הקליפה כך ש:

$$q'' = \frac{V_0 R}{k}$$

המקרה של שני גלילים אינסופיים:



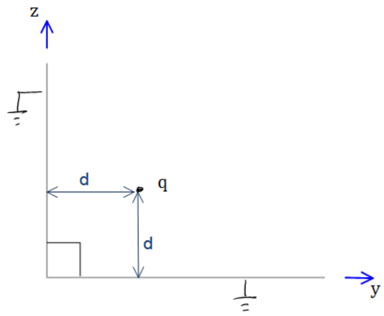
$$\lambda = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0}{\ln\left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1}\right)}$$

$$a = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R}$$

שאלות:

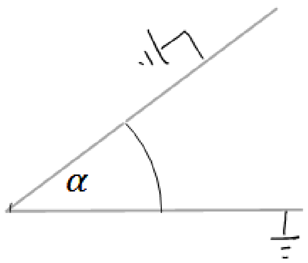
1) לוחות בזווית 90 מעלות

נתונים שני מישורים מוארכים המחוברים בזווית ישרה. במרחק d משני המישורים ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.
מצא את מטעני הדמות שמהם ניתן להסיק את פונקציית הפוטנציאל במרחב.



2) לוחות בזווית אלפה

נתונים שני מישורים מוארכים המחוברים בזווית α. במרחק d משני המישורים ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.
מצא את מטעני הדמות שמהם ניתן להסיק את פונקציית הפוטנציאל במרחב.



3) מציאת התפלגות המטען על שפת המוליך

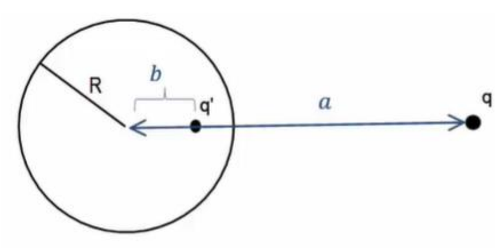
נתון מישור אינסופי מוארק.
במרחק z מעל המישור נמצא חלקיק בעל מטען q.
מצא את התפלגות המטען σ על שפת המישור.

4) כוח ואנרגיה במטעני דמות

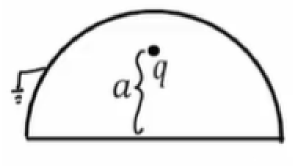
נתון מישור אינסופי מוארק ובמרחק z מעליו נמצא חלקיק בעל מטען q.
מהו הכוח שמרגיש החלקיק?

5) מציאת התפלגות מטען עם ספירה

נתונה ספירה מוליכה ומוארקת ברדיוס R. מול הספירה ישנו מטען נקודתי q במרחק a ממרכז הספירה.
מצא את התפלגות המטען על השפה של הספירה.



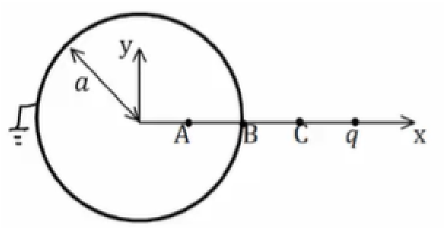
6) מטען בתוך חצי ספירה



מטען נקודתי q נמצא בתוך חצי ספירה כדורית, מוארקת ברדיוס R.

המטען נמצא בגובה a מעל מרכז הספירה.
מצאו את מטעני הדמות בעזרתם נוכל לחשב את הפוטנציאל בכל המרחב.

7) ספירה, מטען ושלוש נקודות



קליפה כדורית ברדיוס a מוארקת.
מטען q נמצא במרחק 2a ממרכז הקליפה ועל ציר ה- x כך ש: $x_C = \frac{3a}{2}$, $x_B = a$, $x_A = \frac{a}{2}$.

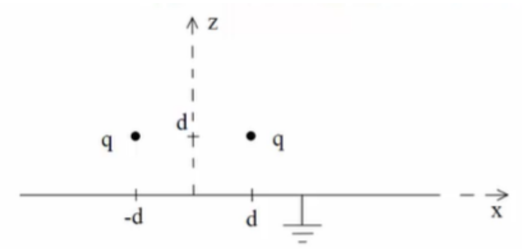
א. מצאו את הפוטנציאל בנקודות: A , B , C.

ב. מהי התפלגות המטען המשטחית בנקודה B?

ג. מה הכוח הפועל על המטען q?

ד. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

8) שני מטענים מעל מישור



נתונים שני מטענים q במיקומים $(d,0,d)$ ו- $(-d,0,d)$ מעל משטח אינסופי מוארק כבאיור.

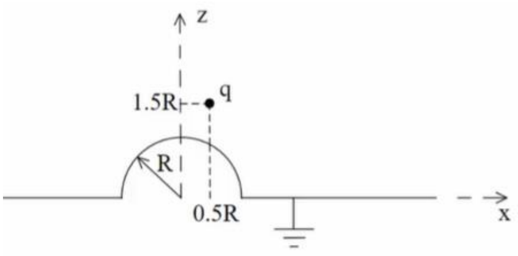
א. אילו מטעני שיקוף דרושים כדי לבטא פוטנציאל ושדה ב- $z>0$?

ב. איזה כוח ירגיש המטען הימני (גודל וכיוון)?
יש לנרמל $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 1$ ולהגיע לתשובה מספרית.

ג. מהי התפלגות המטען על המוליך?
ומהו המטען הכולל על המוליך?

ד. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

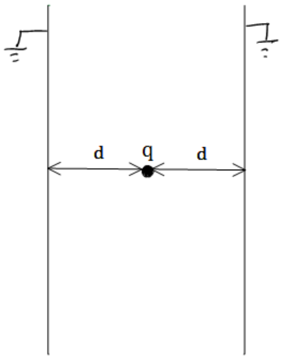
9) מטען מעל חצי ספירה ולא במרכז



נתון חצי כדור מוליך מושלם בעל רדיוס R המונח על חצי מרחב מישור מוליך מושלם, כבאיור.
מעל המוליך יש מטען q בקואורדינטה $(0.5R,0,1.5R)$.

א. מצאו את גודל ומיקום מטעני השיקוף הדרושים בשביל לבטא את הפוטנציאל במרחב שמעל המבנה.
ב. מצאו את הפוטנציאל בנקודות $(0,0,1.5R)$, $(0,0,0.5R)$.
ג. מהי צפיפות המטען המשטחית על שפת המוליך בנקודה $\left(\frac{R}{2},0,\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$?
ד. מה הכוח הפועל על המטען?
ה. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

10) מטען בין שני לוחות אינסופיים

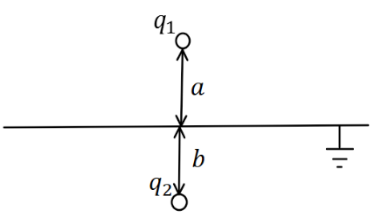


נתונים שני לוחות אינסופיים מוארקים במרחק 2d זה מזה. בדיוק באמצע ביניהם ממוקם חלקיק בעל מטען q כמתואר בשרטוט.

א. מצאו את פונקציית הפוטנציאל במרחב.
ב. מצאו את העבודה הדרושה לבניית המערכת.

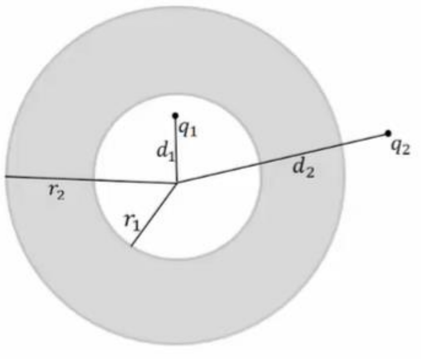
11) מטענים משני צידי מישור מוארק

מטען q_1 נמצא במרחק a מעל מישור אינסופי מוארק.
מטען q_2 נמצא במרחק b מתחת למישור.



א. מצאו את השדה והפוטנציאל בכל המרחב.
ב. מהי התפלגות המטען על המישור? ומהו המטען הכולל על המישור?

12) קליפה עבה עם מטען בפנים ובחוץ



נתונה קליפה כדורית עבה ומוליכה בעלת רדיוס פנימי r_1 ורדיוס חיצוני r_2.

מטען q_1 נמצא במרחק d_1 ממרכז הקליפה כך ש- $d_1 < r_1$.

מטען q_2 נמצא במרחק d_2 ממרכז הקליפה כך ש- $d_2 > r_2$.

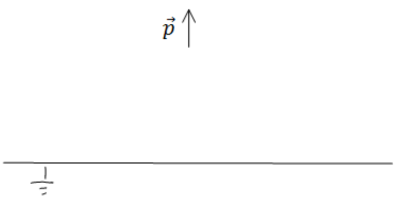
המטענים לא נמצאים על אותו רדיוס.

א. מצאו את הפוטנציאל בו נמצאת הקליפה.

ב. מצאו את הכוח הפועל על המטען q_2.

ג. מהי האנרגיה הדרושה לבניית המערכת?

13) דיפול מעל מישור



דיפול מונח במרחק z_0 מלוח אינסופי מוארק.

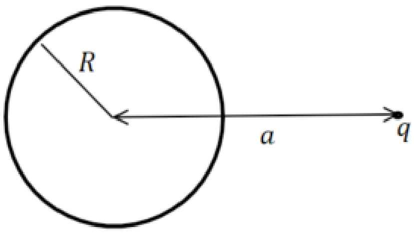
מומנט הדיפול הוא: $\vec{p} = (0,0,p)$.

א. מצאו את השדה בכל המרחב.

ב. מצאו את צפיפות המטען על המישור.

ג. מצאו את סך המטען על המישור.

14) ספירה ניטרלית



מטען נקודתי q מונח במרחק a מספירה מוליכה ברדיוס R.

הספירה אינה מוארקת ואינה מחוברת לפוטנציאל כלשהו.

ניתן להניח כי הספירה נייטרלית.

מהו הפוטנציאל על הספירה?

ומהם מטעני הדמות המתאימים לפתרון הבעיה?

רמז: השתמשו בחוק שימור המטען.

תשובות סופיות:

1) $\varphi = \frac{kq}{r_1} - \frac{kq}{r_2}$

2) ראו סרטון.

3) $\sigma = -kq\varepsilon_0 \frac{2d}{\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

4) $F = -\frac{q^2}{(2d)^2}$

5) $$E(r,\theta) = \frac{kq(r-a\cos\theta)}{\left(r^2+a^2-2ra\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-kq\left(r\left(\frac{a}{R}\right)^2 - a\cos\theta\right)}{\left(R^2+\left(\frac{ra}{R}\right)^2-2ra\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

6) ראו סרטון.

7) א. $\varphi_A = \varphi_B = 0\ ,\ \varphi_C = \frac{3kq}{2a}$ ב. $\sigma_B = \varepsilon_0\left(-\frac{3kq}{a^2}\right)$ ג. $\vec{F} = \frac{2kq^2}{qa^2}(-\hat{x})$

ד. $U = \frac{-kq^2}{6a}$

8) א. $(-d,0,d)\ ,\ (d,0,-d)$ ב. $-0.338\hat{z}+0.162\hat{x}$

ג. $\sigma = -\frac{1}{2\pi}qd\left(\frac{1}{\left((x-d)^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left((x+d)^2+y^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\ ,\quad Q_T = -2q$

ד. $U = \frac{-kq^2}{\sqrt{2}\cdot 2d}$

9) א. $q_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}q\ ,\ \vec{r}_3 = \left(\frac{R}{5},0,-\frac{3}{5}R\right)\ ,\ q_4 = -q\ ,\ \vec{r}_4 = (0.5R,0,-1.5R)$

ב. $(0,0,1.5R)$: $\varphi \approx 0.71\frac{kq}{R}\ ,\ (0,0,0.5R)$: 0 ג. $\frac{kq}{R^2}1.04\varepsilon_0$

ד. $\vec{F} = \frac{kq^2}{R^2}(-0.2,0,-0.64)$ ה. $U = \frac{kq^2}{2R}(-0.7)$

10) א. $V_T = \frac{k(-1)^n q}{\left((x-2dn)^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ ב. $\frac{kq^2}{2d}(-\ln(2))$

11) א. $E_{up}=\frac{kq_1}{|r_+|^2}\hat{r}_+ + \frac{-kq_1}{|r_-|^2}\hat{r}_-$

ב. $\sigma_T=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{q_1a}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{q_2b}{\left(r^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$

12) א. $\varphi_2\left(r_2\right)=\frac{kq_1}{r_2}+\frac{kq_2}{d_2}$

ב. $\vec{F}=\frac{-k\frac{r_2}{d_2}q_2^2\hat{r}}{\left(d_2-\frac{r_2^2}{d_2}\right)^2}+\frac{k\left(q_1+\frac{r_2q_2}{d_2}\right)q_2\hat{r}}{d_2^2}$

ג. $U=\frac{1}{2}\left[\frac{-k\frac{r_2}{d_2}q_2^2}{\left(d_2-\frac{r_2^2}{d_2}\right)}+\frac{k\left(q_1+\frac{r_2q_2}{d_2}\right)q_2}{d_2}-\frac{kq_1^2\cdot\frac{r_1}{d_1}}{\left(\frac{r_1^2}{d_1}-d_1\right)}+\frac{kq_1^2}{r_2}+\frac{kq_1q_2}{d_2}\right]$

13) א. $\vec{E}_T=\frac{k\left(3p\left(z-z_0\right)r,0,-pr^2+2p\left(z-z_0\right)^2\right)}{\left(r^2+\left(z-z_0\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{k\left(3p\left(z+z_0\right)r,0,-pr^2+2p\left(z+z_0\right)^2\right)}{\left(r^2+\left(z+z_0\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

ב. $\sigma\left(r\right)=\frac{\left(-2pr^2+4pz_0^2\right)}{4\pi\left(r^2+z_0^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

ג. 0

14) פוטנציאל על הספירה: $\varphi=\frac{kq}{a}$

מטעני הדמות הם: $q'=-q\frac{R}{a}$ במיקום $b=\frac{R^2}{a}$, $q'=q\frac{R}{a}$ במרכז

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 9 - חומרים דיאלקטריים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים בסיסיים:

רקע:

חומר דיאלקטרי - חומר שמכיל דיפולים

במצב רגיל כל דיפול לכיוון שונה והשדה הממוצע בחומר הוא אפס.

כשמכנסים את החומר לשדה חצוני הדיפולים מתיישרים ויוצרים שדה מנוגד לשדה החיצוני.

נסמן:

$\vec{E}_0$ או $\vec{E}_{free}$ - השדה החיצוני

$\vec{E}$ - השדה הכולל

ε_r או κ - מקדם דיאלקטרי של החומר -תכונה של החומר בדר״כ קבוע וידוע.

$$\varepsilon_r > 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

השדה בתוך החומר יהיה:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

(בהנחה שהחומר לינארי ואיזוטרופי).

σ_i - צפיפות מטען מושרית /קשורה. צפיפות מטען שנוצרת על שפת החומר הדיאלקטרי מהקיטוב של הדיפולים.

σ_{free} - צפיפות המטען שיוצרת את השדה החיצוני.

$$\sigma_{free} = \varepsilon_0 \Delta E_{0_\perp}$$

σ_T - צפיפות המטען הכוללת.

$$\sigma_T = \varepsilon_0 \Delta E_\perp$$

$$\sigma_i = \sigma_T - \sigma_{free}$$

$\vec{P}$ - וקטור הפולריזציה. צפיפות הדיפולים ליחידת נפח.

$$\vec{P} = N\vec{p}_1$$

$\vec{p}_1$ - מומנט הדיפול של דיפול יחיד בחומר.

N - מספר הדיפולים ביחידת נפח. יחידות של $\left[\frac{1}{m^3}\right]$.

מומנט הדיפול הכולל בחומר:

$$\vec{p} = \int \vec{P}\, \mathrm{d}V$$

על השפה:

$$\sigma_i \equiv \sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה המאונך לשפה כלפי חוץ מהגוף.

אם $\vec{P}$ לא אחיד אז יש גם צפיפות מטען מושרית נפחית בתוך החומר:

$$\rho_i \equiv \rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

וקטור העתקה:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Leftrightarrow \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{in_f}$$

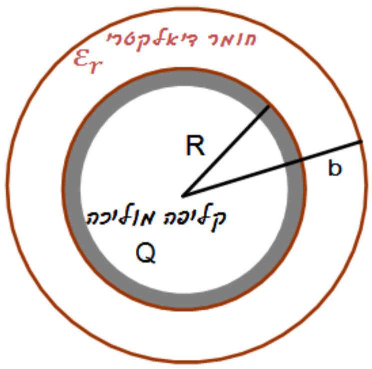
בחומרים ליניארים:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

חומר איזוטרופי:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$$

שאלות:



1) חומר דיאלקטרי מסביב לקליפה מוליכה

קליפה מוליכה (דקה) ברדיוס R טעונה במטען Q.
מסביב לקליפה נמצאת קליפה נוספת עבה עם רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני b.
מצא את השדה בכל המרחב ואת התפלגות המטען המושרית (קשורה).

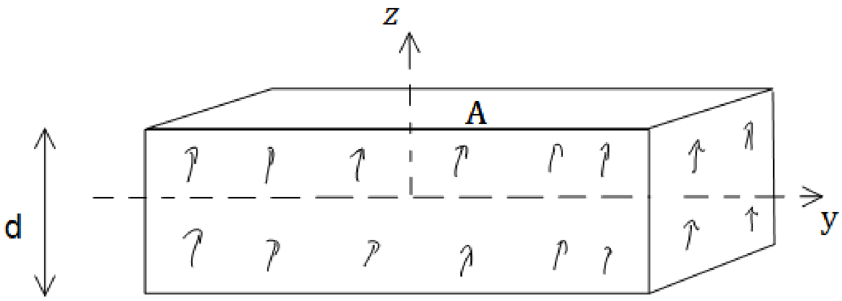
2) תיבה מקוטבת

תיבה בעלת שטח A ועובי d מקוטבת עם צפיפות קיטוב נתונה: $\vec{P} = P_0 \frac{z}{d} \hat{z}$

כאשר ראשית הצירים במרכז התיבה.

א. מצא את צפיפות המטען הקשורה (משטחית נפחית) בתיבה.

ב. מצא את סך המטען הקשור בתיבה.



3) כדור מקוטב רדיאלית

כדור ברדיוס R מקוטב לפי: $\vec{P} = A\vec{r}$ כאשר A קבוע ו- $\vec{r}$ הוא וקטור ממרכז הכדור.

א. מצא את צפיפות המטען הקשורה (משטחית ונפחית).

ב. מצא את השדה מחוץ ובתוך הכדור.

4) גליל מקוטב באופן אחיד

גליל מקוטב באופן אחיד ובמקביל לציר הסימטריה. רדיוס הגליל הוא R ואורכו L.
חשב את התפלגות המטען הקשור וצייר את קווי השדה במקרים הבאים:

א. $R \ll L$

ב. $L \ll R$

ג. $R \approx L$

5) שדה של כדור עם צפיפות קיטוב אחידה

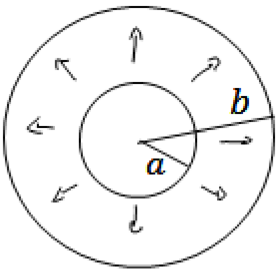
חשב את השדה של כדור מלא עם צפיפות קיטוב אחידה.

<u>הדרכה</u>: חשב את צפיפות המטען הקשור.

ניתן לתאר צפיפות מטען כזו באמצעות שני כדורים הטעונים בצפיפות מטען אחידה ליחידת נפח הנמצאים במרחק קטן אחד מהשני.

מצא מה צריכה להיות הצפיפות של כל כדור (תלויה גם במרחק הקטן) ולאחר מכן חשב את השדה בכל המרחב כסופרפוזיציה של השדות של שני הכדורים.

6) קליפה כדורית דיאלקטרית



קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b עשויה מחומר דיאלקטרי בעל צפיפות קיטוב

נתונה: $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{A}{r}\hat{r}$ כאשר A קבוע ו- r הוא המרחק ממרכז הקליפה.

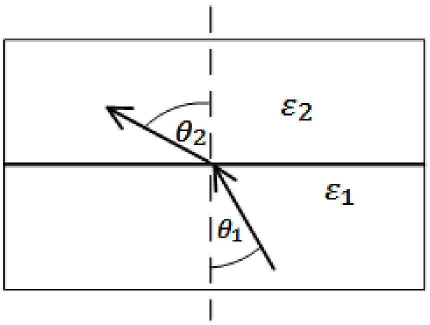
מצא את השדה בכל המרחב פעם בעזרת צפיפות המטען המושרה ופעם באמצעות השימוש בשדה ההעתקה.

7) חוק סנל

קרן אור מורכבת משדה חשמלי ושדה מגנטי המתקדמים במרחב, הראה כי אם קרן האור עוברת מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε_1 לחומר בעל מקדם דיאלקטרי ε_2 אז מתקיים חוק סנל (התעלם מהשדה המגנטי).

חוק סנל: $\tan\theta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2$

כאשר θ_1 היא זווית הפגיעה של הקרן עם האנך ו- θ_2 היא זווית השבירה עם האנך בחומר.



תשובות סופיות:

1) השדה במרחב: $\vec{E}(r)=\begin{cases}0 & r<\mathrm{R}\\ \dfrac{\mathrm{kQ}}{\varepsilon_{\mathrm{r}} r^2}\hat{r} & \mathrm{R}<r<\mathrm{b}\\ \dfrac{\mathrm{kQ}}{r^2} & \mathrm{b}<r\end{cases}$

התפלגות המטען המושרית: $\sigma_i(\mathrm{R})=\dfrac{\varepsilon_0\mathrm{kQ}}{\mathrm{R}^2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}-1\right)$, $\sigma_i(\mathrm{b})=\varepsilon_0\left(\dfrac{\mathrm{kQ}}{\mathrm{b}^2}-\dfrac{\mathrm{kQ}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathrm{b}^2}\right)$

2) א. צפיפות המטען משטחית: $\sigma_{\mathrm{b}}=\dfrac{P_0}{2}$, נפחית: $\rho_{\mathrm{b}}=-\dfrac{P_0}{\mathrm{d}}$ ב. 0

3) א. צפיפות המטען משטחית: $\sigma_{\mathrm{b}}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{R}$, נפחית: $\rho_{\mathrm{b}}=-3\mathrm{A}$

ב. שדה בתוך הכדור: $\vec{E}=\dfrac{\mathrm{A}r}{\varepsilon_0}\hat{r}$, מחוץ לכדור: 0.

4) א. $\vec{p}=q\mathrm{L}\hat{z}$ ב. $\vec{E}=\dfrac{P_0}{\varepsilon_0}\hat{z}$ ג. ראה סרטון

5) $\vec{E}=\begin{cases}-\dfrac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{z} & r<\mathrm{R}\\ \dfrac{\mathrm{k}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}\right)}{r^3} & r>\mathrm{R}\end{cases}$

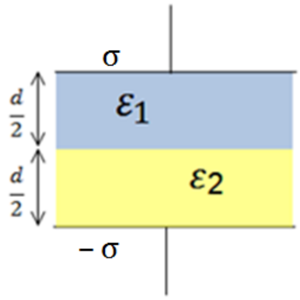
6) $\vec{E}=0$

7) שאלת הוכחה

תרגול נוסף:

שאלות:

1) חומר דיאלקטרי מפוצל בין שני לוחות



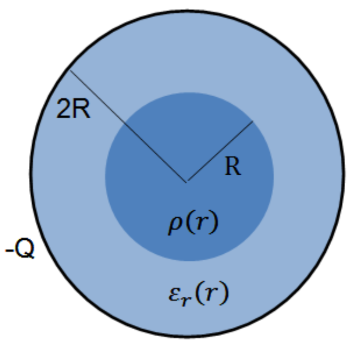
שני לוחות אינסופיים נמצאים במרחק d ביניהם,
הלוח העליון טעון σ והלוח התחתון טעון σ − .
בין הלוחות ישנם שני סוגים של חומרים דיאלקטריים ליניאריים כפי שנראה בציור.
נתון המקדם הדיאלקטרי של כל חומר ε_1 ו-ε_2.

א. מצאו את וקטור העתקה D בכל אחד מהחומרים.
ב. מצאו את השדה החשמלי בכל מקום בין לוחות.
ג. מצאו את הפולריזציה P בכל אחד מהחומרים.
ד. מצאו את הפרש הפוטנציאל בין הלוחות.
ה. מצאו את גודל ומיקום המטען הקשור בחומרים הדיאלקטריים.
ו. מצאו שוב את השדה בכל המרחב ע"י שימוש במטענים הקשורים והחופשיים.

2) כדור דיאלקטרי טעון

כדור ברדיוס R מורכב מחומר דיאלקטרי ליניארי בעל קבוע דיאלקטרי אחיד ε_r.
בתוך החומר הדיאלקטרי ישנה צפיפות של מטען חופשי (בנוסף לחומר הדיאלקטרי עצמו) מפוזרת באופן אחיד ושווה ל- ρ.
מצאו את השדה בכל המרחב. (רמז: מצאו קודם כל את D).

3) כדור מבודד וקליפה מוליכה



כדור מבודד ברדיוס R טעון בצפיפות מטען משתנה השווה ל- $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{\text{R}}$.
מסביב לכדור ישנה קליפה מבודדת עבה בעלת רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני 2R.
הקליפה עשויה מחומר דיאלקטרי עם מקדם דיאלקטרי משתנה: $\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{r}{\text{R}}$.
מסביב לקליפה הדיאלקטרית ישנה קליפה מוליכה דקה ברדיוס 2R הטעונה במטען כולל $\vec{\text{E}}$Q-.

א. מצא את וקטור ההעתקה $\vec{\text{D}}$ בין כל המרחב.
ב. מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

ג. מהי צפיפות המטען המושרה (או קשור) בתוך החומר הדיאלקטרי (משטחית ונפחית)?

ד. מצא באמצעות סכימה מפורשת על צפיפות המטען המושרה, את סך המטען המושרה.

4) חישוב קיבול דרך אנרגיה

קבל גלילי מורכב משתי קליפות גליליות ברדיוסים R, $3R$ ובאורך $L >> 3R$. ממלאים את הקבל (המרווח בין הקליפות) בחומרים דיאלקטרים.

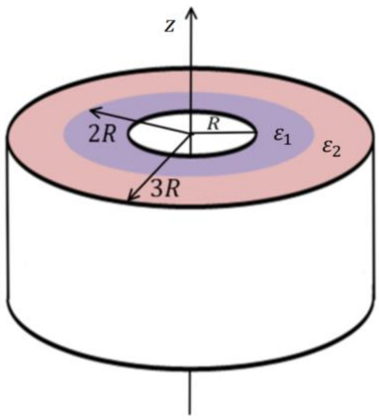
חומר בעל מקדם ε_1 ממלא את התווך בין R ל- $2R$ וחומר בעל מקדם ε_2 את התווך בין $2R$ ל- $3R$. טוענים את הקליפה הפנימית במטען Q ואת החיצונית במטען $-Q$.

א. מהי צפיפות האנרגיה בתוך הקבל כתלות במרחק ממרכז הקבל?

ב. מהי האנרגיה האגורה בקבל?

ג. חשבו את הקיבול של הקבל מתוך סעיף ב'.

ד. ניתן להתייחס לקבל כאל שני קבלים המלאים כל אחד בחומר דיאלקטרי שונה. האם הקבלים מחוברים בטור או במקביל? חשב את הקיבול של כל קבל.



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{D}=\sigma\hat{z}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_1} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\sigma\hat{z}}{\varepsilon_2} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ג. $\vec{p}=\begin{cases}\left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_1}\right)\hat{z} & 0<z<\dfrac{d}{2}\\ \left(\sigma-\dfrac{\varepsilon_0\sigma}{\varepsilon_2}\right)\hat{z} & \dfrac{d}{2}<z<d\end{cases}$

ד. $V=-\dfrac{d}{2}\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)$

ה. $\sigma_b(z=0)=\sigma\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)$, $\sigma_b\left(z=\dfrac{d}{2}\right)=\varepsilon_0\sigma\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)$, $\sigma_b(z=d)=\sigma\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)$

ו. $E_T=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{z}$

2) $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0} & r<R\\ \dfrac{k\rho 4\pi R^3}{3r^2} & r>R\end{cases}$

3) א. $\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4r}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 4\pi R^3}{16\pi r^2}\hat{r} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2}\hat{r} & 2R<r<\infty\end{cases}$

ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 r^2}{4R\varepsilon_0}\hat{r} & r<R\\ \dfrac{\rho_0 R^3\hat{r}}{4r^2\varepsilon_0\left(\dfrac{r}{R}\right)} & R<r<2R\\ \dfrac{\rho_0\pi R^3-Q}{4\pi r^2\varepsilon_0} & 2R<r\end{cases}$

ג. $\rho_b=\dfrac{-\rho_0 R^2}{4r^2\left(1+\dfrac{r}{R}\right)^2}$, $\sigma_b(r=R)=\dfrac{-\rho_0 R}{8}$, $\sigma_b(r=2R)=\dfrac{\rho_0 R^2}{4(2R)(3)}$

ד. 0

4) א. $u=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{(2\pi rL)^2}\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_1} & R<r<2R\\ \dfrac{1}{\varepsilon_2} & 2R<r<3R\end{cases}$

ב. $U=\dfrac{Q^2}{4\pi L}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}\right)$

ג. $C=\dfrac{2\pi L}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln 2+\dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{3}{2}}$

ד. $c_2=\dfrac{2\pi L\varepsilon_2}{\ln\dfrac{3}{2}}$, $c_1=\dfrac{2\pi L\varepsilon_1}{\ln 2}$.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 10 - קבלים-מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

הגדרות, חישובי קיבול, אנרגיה והתנהגות במעגל חשמלי:

רקע:

הגדרת הקיבול:

$$C = \frac{|q|}{|V|}$$

הקיבול היא תכונה קבועה ותלויה רק במבנה הגיאומטרי של הגוף (ולא במתח או במטען על הרכיב).

קיבול של קבל לוחות:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

A - שטח כל לוח. d - מרחק בין הלוחות, $d \ll \sqrt{A}$.

שדה בתוך קבל לוחות:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V}{d}$$

σ - צפיפות המטען ליחידת שטח בכל לוח.

V - המתח בין הלוחות. d - מרחק בין הלוחות.

קיבול של קבל גלילי:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

a ו- b - רדיוס הגליל הפנימי והחיצוני בהתאמה.

L - אורך הגלילים, $a, b \ll L$

הקיבול של קבל המלא בחומר דיאלקטרי אחיד:

$$C' = kC_0$$

k (או ε_r) - המקדם הדיאלקטרי של החומר.

C_0 - הקיבול ללא החומר הדיאלקטרי.

חיבור קבלים בטור (קבלים עם מטען זהה):

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

כאשר $Q_T = Q_1 = Q_2$ ו- $V_T = V_1 + V_2$

חיבור קבלים במקביל (מתח זהה):

$$C_T = C_1 + C_2$$

כאשר $Q_T = Q_1 + Q_2$ ו- $V_T = V_1 = V_2$

שיטה 1 לחישוב קיבול - לפי הגדרה:

א. נניח שיש מטען Q על לוחות הקבל.

ב. נחשב את השדה בין הלוחות

ג. נחשב את המתח בין הלוחות

ד. נציב בנוסחה (בדר״כ Q יצטמצם)

שיטה 2 לחישוב קיבול - פירוק הקבל לקבלים חלקיים:

א. נפרק את הקבל לקבלים שמחוברים בטור או במקביל

ב. נחשב את הקיבול של כל אחד

ג. נחבר חזרה באמצעות הנוסחאות

אנרגיה האגורה בקבל:

$$U_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

העבודה שמבצעת הסוללה:

$$W_s = \Delta q V_s = -2\Delta U_c$$

Δq הוא המטען שעבר דרכה (וזה המטען שקיבל הקבל)

הכוח הפועל על חומר דיאלקטרי בקבל:

$$F = \left|\frac{dU_c}{dx}\right|$$

הכוח תמיד מושך את החומר פנימה.

שאלות:

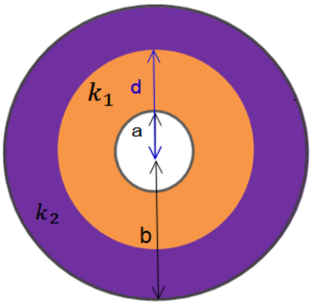
1) קבל גלילי

קבל גלילי מורכב משתי קליפות גליליות מוליכות באורך L ורדיוסים b , a .

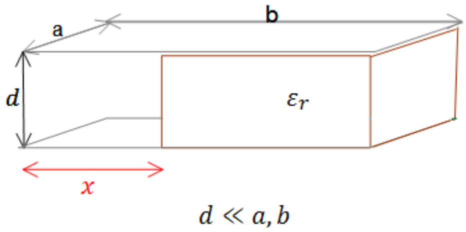
א. מצא את הקיבול של הקבל $L >> a , b$.

ב. כעת ממלאים את הקבל בחומר דיאלקטרי בעל קבוע משתנה.
k_1 כאשר $a < r < d$ ו-k_2 כאשר $d < r < b$.
מצא את הקיבול החדש.

ג. טוענים את הקבל במטען Q, מצא את התפלגות המטען במרחב (חופשי ומושרה).



2) דרך שניה לחשב קיבול וחיבור קבלים



קבל לוחות מורכב משני לוחות מלבנים בעלי אורך b ורוחב a. המרחק בין הלוחות הוא d. לתוך הקבל מכניסים חומר דיאלקטרי הממלא את כל החלל בין הלוחות עד למרחק x מקצה הלוחות. הקבוע הדיאלקטרי של החומר נתון ε_r.

א. מצא את הקיבול של הקבל כתלות ב-x.

ב. מחברים את הקבל למקור מתח V, מה תהיה התפלגות המטען החופשי על הלוחות? ומהי צפיפות המטען המושרה בחומר?

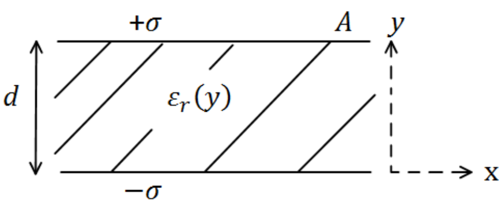
3) קבל לוחות עם חומר דיאלקטרי התלוי בגובה

קבל לוחות טעון בצפיפות מטען $\pm\sigma$.

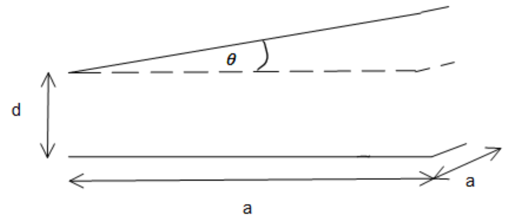
שטח הלוחות הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d. בין הלוחות ישנו חומר דיאלקטרי בעל מקדם דיאלקטרי המשתנה עם המרחק בין הלוחות: $\varepsilon_r(y) = 1 + \left(\frac{y}{d}\right)^2$,

כאשר הלוח התחתון נמצא ב-$y = 0$.

מצא את הקיבול של הקבל.



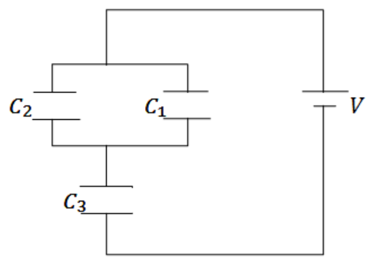
4) קבל לוחות בזווית



נתון קבל לוחות בעל שטח A ומטען Q.
אורך כל צלע בלוחות הקבל הינה a.
עקב טעות בייצור נוצרה זווית θ קטנה מאוד בין הלוחות.

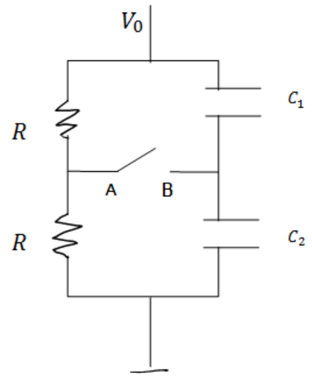
א. חשב את קיבולו של הקבל כפונקציה של θ.
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V, מצא את התפלגות המטען המשטחית על לוחות הקבל.

5) שלושה קבלים



במעגל הבא נתון מתח הסוללה $V = 3v$.
והקיבול של כל קבל: $C_1 = 2\mu F, C_2 = 3\mu F, C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען על כל קבל.

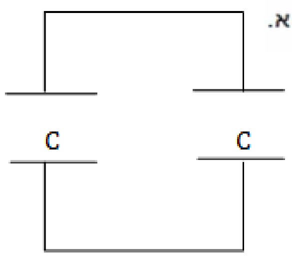
6) קבלים עם מפסק



במעגל הבא מחזיקים את הקצה העליון בפוטנציאל קבוע ונתון V_0. הקצה התחתון מוארק.
נתון: הקיבול של כל קבל, ההתנגדות הזהה של הנגדים.

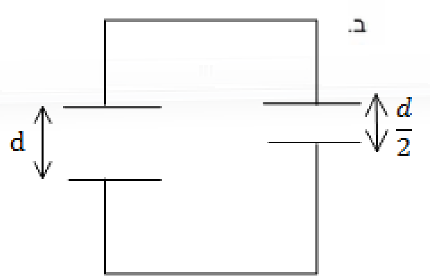
א. מצא את המתח (הפרש הפוטנציאלים) בין הנקודה A לנקודה B.
ב. סוגרים את המפסק AB, כמה מטען עבר דרך המפסק עד שהמערכת התייצבה?

7) שני קבלים טעונים מחוברים אחד לשני



טוענים בנפרד שני קבלי לוחות זהים ע"י מקור מתח V_0.
לאחר הטעינה מנתקים את הקבלים ומחברים אותם אחד לשני, הדק חיובי לחיובי ושלילי לשלילי.

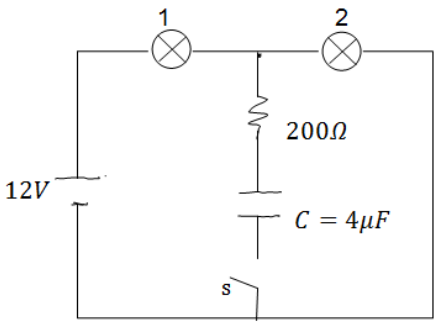
א. מצא את האנרגיה של המערכת אם קיבול הקבלים הוא C.



כעת מקטינים את המרחק בין אחד הקבלים פי 2.

ב. מצא את המתח על כל קבל לאחר זמן רב, ואת האנרגיה של המערכת.
ג. חשב את שינוי האנרגיה והסבר לאן עברה?

8) שתי נורות

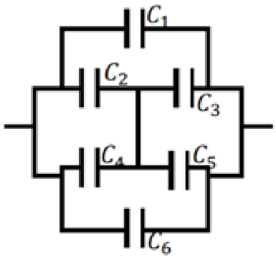


במעגל הבא הספק נורה מס' 1 במתח של 10V הוא 0.5W. ההספק של נורה מס' 2 באותו המתח הוא 0.4W. התנגדות הנגד היא 200Ω.

א. חשב את ההתנגדות, המתח וההספק החשמלי של כל נורה כאשר המפסק פתוח.

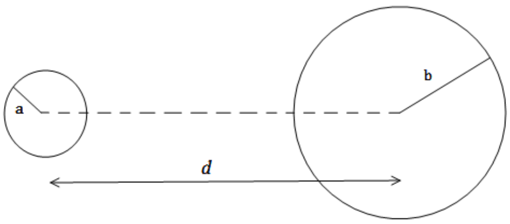
ב. חשב את המתח על הקבל אם המפסק סגור והמערכת התייצבה.

9) חיבור קונפיגורציית קבלים



נתונה מערכת קבלים המחוברים על פי השרטוט. מצא את הקיבול השקול של המערכת.

10) שני כדורים מרוחקים



שני כדורים מוליכים, בעלי רדיוסים שונים ונתונים a , b טעונים במטענים שווים ומנוגדים q- , q+.

המרחק בין מרכזי הכדורים הוא d.

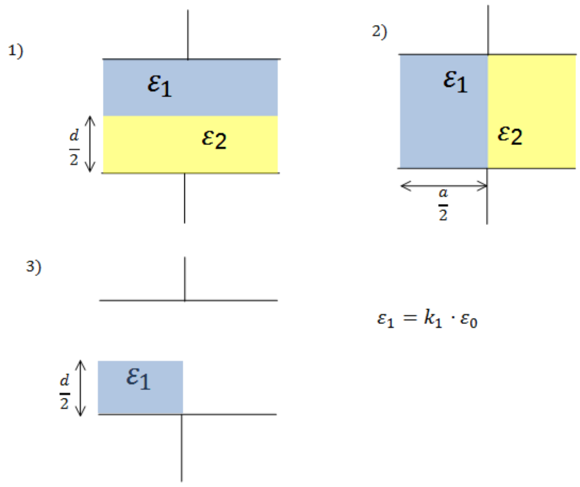
נתון כי $d \gg a, b$

א. מהו השדה החשמלי לאורך הציר המחבר בין הכדורים (ומחוצה להם)?

ב. מצא את הפרש הפוטנציאלים בין משטחי הכדורים.

ג. הראה כי קיבול המערכת הוא: $C \approx \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}}$.

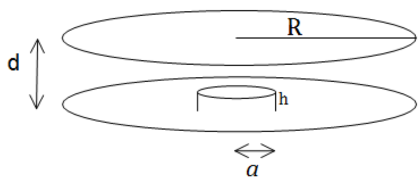
11) חומרים דיאלקטרים בתוך קבל



נתון קבל לוחות ריבועיים בעל צלע a ומרחק בין הלוחות d.
אל הקבל מכניסים חומרים דיאלקטרים שונים עם מקדמים נתונים.
החומרים מוכנסים בשלוש צורות שונות כפי שמוצג בציור (במצב השלישי מוכנס רק חומר אחד, החומרים ממלאים את כל הצלע שנכנסת ללוח).

א. מצא עבור כל מצב את הקיבול של הקבל.
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V נתון, מהו השדה החשמלי בתוך הקבל בכל אחד מהמצבים?
ג. מצא את התפלגות המטען החופשית והמושרית בכל אחד מהמצבים.

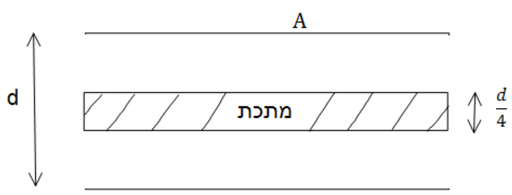
12) קבל לוחות עם בליטה



במערכת הבאה ישנו קבל לוחות עם לוחות מעגליים ברדיוס R, ומרחק בין הלוחות d ‏($d \ll R$).
בלוח התחתון ישנה בליטה בצורת גליל ברדיוס a ‏($a \gg d$) ועובי h.
מרכז הבליטה במרכז הלוח התחתון.

א. מצא את הקיבול של הקבל.
ב. מהו השדה בכל מקום בתוך הקבל אם נתון שהקבל מחובר למקור מתח V.
ג. מצא את התפלגות המטען על הלוחות.

13) קבל עם פיסת מתכת

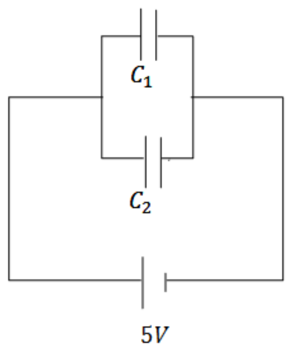


קבל לוחות מחובר למקור מתח V.
שטח כל לוח בקבל הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d, ‏($d \ll \sqrt{A}$).

א. מצא את המטען על הקבל, את השדה בתוך הקבל ואת האנרגיה של המערכת.
ב. כעת מכניסים לקבל פיסת מתכת בעובי $\frac{d}{4}$ עם שטח A ממרכז הקבל.
חזור על סעיף א.
ג. כעת מוציאים את המתכת, מחכים שהקבל יטען שוב ומנתקים את מקור המתח. לאחר הניתוק מכניסים את המתכת חזרה פעם שניה.
חזור על סעיף א' (סעיף ב' אינו משפיע על סעיף ג').

14) שני קבלים טעונים מחוברים לקבל שלישי

במעגל הבא קיבול הקבלים הוא: $C_1 = 3\mu F, C_2 = 2\mu F$
והמתח בסוללה הוא 5V.
לאחר שהקבלים נטענים מנתקים את המקור
ומחליפים אותו בקבל של $C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען, המתח והאנרגיה של הקבל החדש
לאחר שהמערכת מתייצבת.



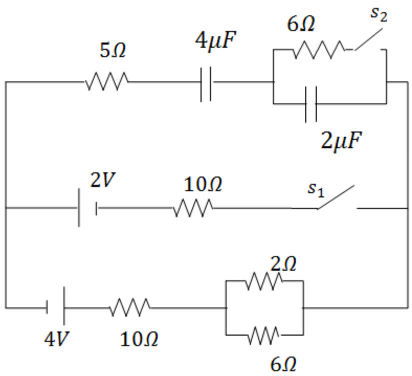
15) מעגל עם קבלים

חשב את כל הזרמים במעגל ואת המטען על כל
קבל במצב היציב כאשר המפסקים במצב הבא:

א. s_1 פתוח ו-s_2 סגור.

ב. s_2 פתוח ו-s_1 סגור.

ג. שני המפסקים סגורים.



תשובות סופיות:

1) א. $C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$ ב. $C=\frac{Q}{V}$ ג. $\sigma_i=\frac{Q}{2\pi bc}\left(1-\frac{1}{k_2}\right)$

2) א. $C_T=\frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(x+\varepsilon_r\left(b-x\right)\right)$

ב. $q_1=\frac{\varepsilon_0 axV_0}{d}\ ,\ q_2=\frac{\varepsilon_0 a\left(b-x\right)V_0\varepsilon_r}{d}E\ ,\ \sigma_1=\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\ ,\ \sigma_2=\frac{\varepsilon_0 V_0\varepsilon_r}{d}$

3) $\frac{\pi d}{4\varepsilon_0 A}$

4) א. $\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1+\frac{a}{b}\theta\right)$ ב. $\sigma_{(x)}=\frac{\varepsilon_0 V_0}{d+xty\theta}$

5) $q_1=3\mu C\ ,\ q_2=4.5\mu C\ ,\ q_3=7.5\mu C$

6) א. $V_{AB}=\frac{V_0}{2}-\frac{V_0 C_2}{C_1+C_2}$ ב. $\Delta q=\frac{V_0}{2}\left(C_2-C_1\right)$

7) א. $U_T=2U_1=CV_0^2$ ב. $U'_T=\frac{2}{3}CV_0^2\ ,\ V'=\frac{2}{3}V_0$

8) א. נורה 1: $R_1=200\Omega\ ,\ V_1=5.34V\ ,\ P_1=0.143W$

נורה 2: $R_2=250\Omega\ ,\ V_2=6.68V\ ,\ P_2=0.178W$

ב. $V_0=V_2=6.68V$

9) $C_T=C_1+C_6+C_{2345}$

10) א. $\vec{E}=\left(\frac{kq}{x^2}+\frac{kq}{\left(d-x\right)^2}\right)\hat{x}$ ב. $\Delta\varphi\approx kq\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ ג. הוכחה.

11) מצב 1:

א. $C_T=\frac{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)a^2}{2d}$ ב. $E_1=E_2=\frac{V}{d}$

ג. $\sigma_{free_1}=\frac{\varepsilon_1}{d}V\ ,\ \sigma_{i_1}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_1\right)\frac{V}{d}\ ,\ \sigma_{free_2}=\frac{\varepsilon_2}{d}V\ ,\ \sigma_{i_2}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_2\right)\frac{V}{d}$

מצב 2:

א. $C_T=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 a^2\cdot 2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$ ב. $E_1=\frac{2\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ E_2=\frac{2\varepsilon_1}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

ג. לוח עליון- $\sigma_{free_1}=\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ \sigma_{i_1}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_1\right)\frac{2\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

לוח תחתון- $\sigma_{free_2}=\frac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ \sigma_{i_2}=-\left(\varepsilon_0-\varepsilon_2\right)\frac{2\varepsilon_1}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

בין החומרים- $\sigma_{free_3}=0\ ,\ \sigma_{i_3}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)2\varepsilon_0}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

מצב 3 :

א. $C_T=\frac{\varepsilon_0 a^2}{a}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}+\frac{1}{2}\right)$ ב. $E_1=\frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}\ ,E_2=\frac{2\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}\ ,E_3=\frac{V}{d}$

ג. לוח עליון צד ימין- $\sigma_T=\sigma_{free}=\varepsilon_0\frac{V}{d}$

לוח עליון צד שמאל- $\sigma_T=\sigma_{free}=\varepsilon_0\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}$

לוח תחתון צד ימין- $\sigma_{T_{down}}=-\varepsilon_0\frac{V}{d}$

לוח תחתון צד שמאל- $\sigma_i=\frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)$

באמצע- $\sigma_T=\frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\ ,\ \sigma_{free}=0$

12) א. $C_T=\varepsilon_0\pi\left(\frac{a^2}{d-h}+\frac{R^2-a^2}{d}\right)$ ב. $E_1=\frac{V}{d-h}\ ,E_2=\frac{V}{d}$

ג. $\sigma_1=\varepsilon_0\frac{V}{d-h}\ ,\ \sigma_2=\varepsilon_0\frac{V}{d}$

13) א. $q=\frac{\varepsilon_0 A}{d}V\ ,\ E=\frac{V}{d}\ ,\ U=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}V^2$

ב. $q_T=\frac{4\varepsilon_0 AV}{3d}\ ,\ E_1=E_2=\frac{4V}{3d}\ ,\ U=\frac{2\varepsilon_0 A}{3d}V^2$

ג. $q_T=\frac{\varepsilon_0 A}{d}V\ ,\ E_1=E_2=\frac{V}{d}\ ,\ U=\frac{3\varepsilon_0 AV^2}{8d}$

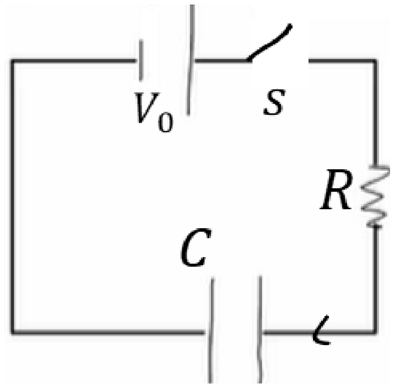
14) $q'_3=12.5\mu C\ ,\ V'_3=2.5V\ ,\ U=15.625J$

15) א. $q_1=16\mu C$, זרם=0. ב. $q_1=\frac{136}{129}\mu C\ ,\ I=\frac{12}{43}A$ ג. $q_1=\frac{136}{43}\mu C\ ,\ I=\frac{12}{43}A$

פריקה וטעינה של קבל - מעגלי RC :

רקע:

מעגל טעינה :



- משוואת המתחים :

$$V_0 - \frac{q}{C} - IR = 0$$

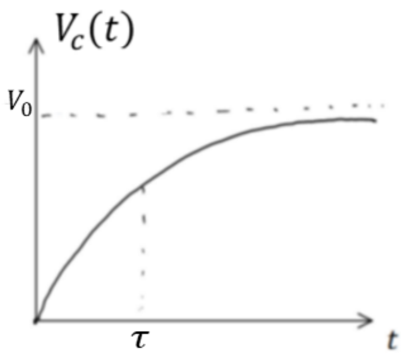
$$I = \frac{dq}{dt}$$

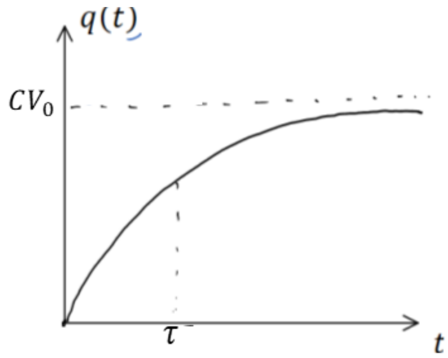
- המטען והמתח על הקבל כתלות בזמן :

$$q(t) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$V_c(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

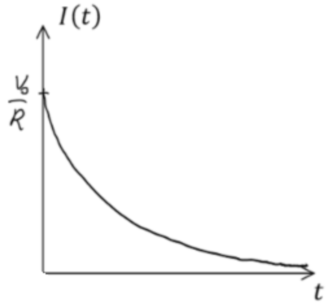
$\tau = RC$ הוא קבוע הזמן אופייני





- הזרם כתלות בזמן :

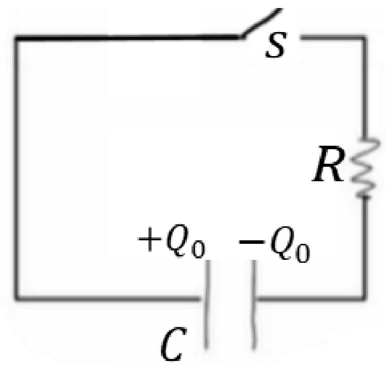
$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



בהתחלה $(t = 0)$ הקבל מתנהג כמו קצר, המתח והמטען על הקבל הם אפס והזרם הוא $\frac{V_0}{R}$.

לאחר זמן רב $(t > 5\tau)$ הקבל מתנהג כמו נתק, המטען והמתח קבועים והזרם מתאפס.

מעגל פריקה :



- משוואת המתחים :

$$\frac{q}{C} - IR = 0$$

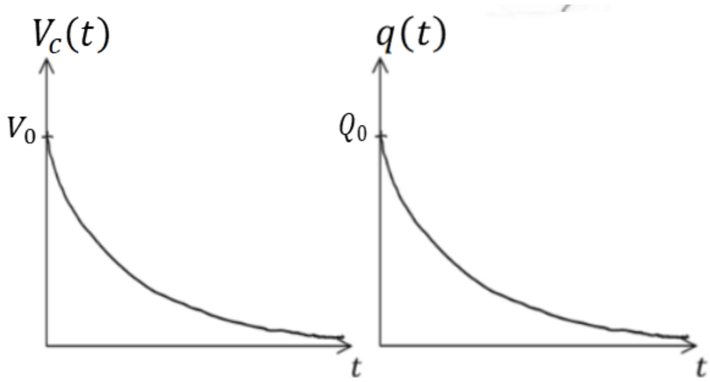
$$I = -\frac{dq}{dt}$$

- המטען והמתח על הקבל כתלות בזמן :

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

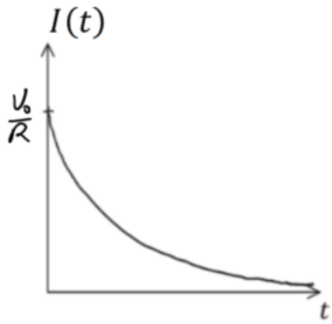
$$V_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Q_0 = CV_0$$



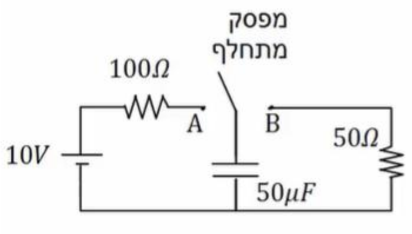
- הזרם כתלות בזמן :

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



שאלות:

1) מתג מתחלף



במעגל הבא מחברים ב- $t = 0$ את המפסק המתחלף לנקודה A. ב- $t = 0.01$ מעבירים את המפסק לנקודה B.

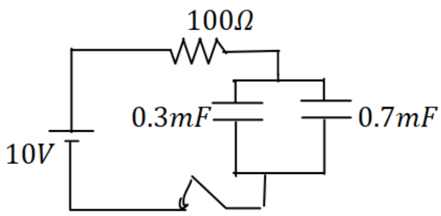
א. רשום את המתח על הקבל כתלות בזמן.

ב. מה המטען על הקבל ב- $t = 0.02$.

ג. רשום שוב את הזרם כתלות בזמן.

ד. צייר גרפים עבור המתח והזרם כתלות בזמן.

2) טעינה של שני קבלים

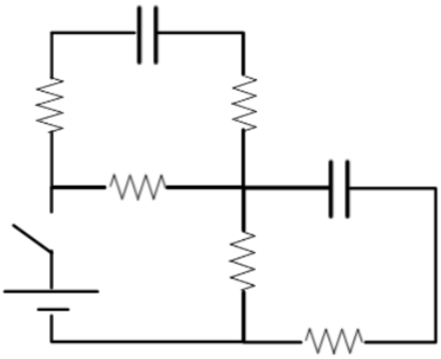


במעגל הבא סוגרים את המפסק ב- $t = 0$.

א. מהו הזמן האופייני במעגל?

ב. מצא את המתח והמטען בכל קבל בזמנים: $t = 0.2\sec\ ,\ 0.8\sec$.

3) קבלים בהתחלה ובסוף



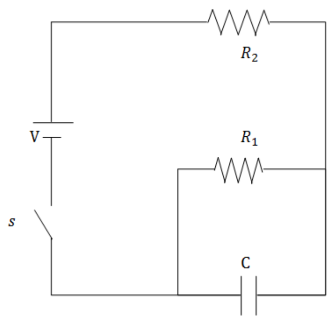
במעגל הבא הקיבול של הקבלים זהה ושווה ל-C התנגדות הנגדים זהה ושווה ל-R ומתח הסוללה הוא V.
הקבלים אינם טעונים כאשר המפסק פתוח.

א. מצאו את הזרם בסוללה ברגע סגירת המתג.

ב. מצאו את הזרם בסוללה והמתח על כל קבל לאחר זמן רב.

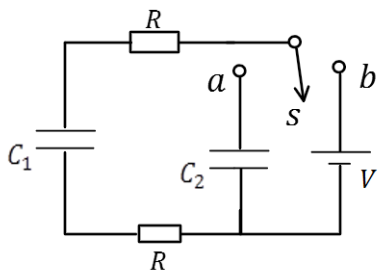
ג. מהו המטען על כל קבל לאחר זמן רב?

4) מטען על קבל במקביל לפי הזמן



במעגל הבא סוגרים את המפסק ב- $t = 0$
כאשר הקבל אינו טעון.
מצא את המטען על הקבל והזרם בכל נגד
כפונקציה של הזמן.
נתון: V, R_1, R_2, C.

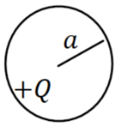
5) פריקה בין שני קבלים



במעגל הבא הקבל C_1 טעון במטען Q_0 לפני
סגירת המתג s לנקודה a.

א. רשום את המשוואה ממנה ניתן לקבל את המטען על הקבל C_1 כתלות בזמן.
ב. פתור את המשוואה ומצא את המטען על כל קבל כתלות בזמן.
ג. מהם הזרמים בשני הנגדים כתלות בזמן?

6) קבל של שני כדורים



שני כדורים בעלי רדיוסים a ו- b מרוחקים
מאוד זה מזה.
טוענים את הכדורים במטענים $+Q$ ו- $-Q$
בהתאמה.

א. חשב את האנרגיה האלקטרוסטטית הכוללת של המערכת.
ב. חשב את הקיבול של המערכת דרך התוצאה שקיבלת עבור האנרגיה.
ג. אם מחברים את הכדורים בחוט ארוך מאוד עם התנגדות כוללת R, מה זמן הפריקה האופייני של המערכת?

תשובות סופיות:

1) א.
$$V_C(t)=\begin{cases}10\left(1-e^{-\frac{t}{0.05}}\right) & 0<t<0.01\\ 8.65\cdot e^{-\frac{t-0.01}{0.0025}} & 0.1<t\end{cases}$$

ב. $q_0(t=0.02)\approx 7.92\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$

ג.
$$I(t)=\begin{cases}\frac{10}{100}\cdot e^{\frac{-t}{0.005}} & 0<t<0.01\\ \frac{8.65}{50}\cdot e^{-\frac{t-0.01}{0.0025}} & 0.1<t\end{cases}$$

ד. ראה סרטון

2) א. $0.1\sec$ ב. $0.8\sec$: $V_1=V_2=10V\ ,\ q_1=3\cdot 10^{-3}C\ ,\ q_2=7\cdot 10^{-3}C$

$0.2\sec$: $V_1=V_2\approx 8.65V\ ,\ q_1=2.6\cdot 10^{-3}C\ ,\ q_2=6.01\cdot 10^{-3}C$

3) א. $\frac{6V}{7R}$ ב. זרם סוללה: $\frac{V}{2R}$, מתח קבלים: $\frac{V}{2}$.

ג. מטען קבלים: $\frac{CV}{2}$

4) $q(t)=\frac{VR_1\cdot C}{R_2+R_1}\left(1-e^{\frac{R_2+R_1}{R_1C\cdot R_2}t}\right)$

5) א. $\frac{C_1+C_2}{2RC_1C_2}\cdot q_1+q_1-\frac{Q_0}{2RC_2}=0$ ב. $q_1(t)=(\tau\cdot A-Q_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$,

$q_2(t)=(-\tau\cdot A+Q_0)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ג. $I=\left(\frac{Q_0}{\tau}-A\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

6) א. $U=\frac{KQ^2}{2}\left(\frac{b+a}{a\cdot b}\right)$ ב. $C=\frac{a\cdot b}{K(a+b)}$ ג. $\tau=RC=\frac{Rab}{K(a+b)}$

הגדרות, חישובי קיבול, אנרגיה והתנהגות במעגל חשמלי:

רקע:

הגדרת הקיבול:

$$C = \frac{|q|}{|V|}$$

הקיבול היא תכונה קבועה ותלויה רק במבנה הגיאומטרי של הגוף (ולא במתח או במטען על הרכיב).

קיבול של קבל לוחות:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

A - שטח כל לוח. d - מרחק בין הלוחות, $d \ll \sqrt{A}$.

שדה בתוך קבל לוחות:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V}{d}$$

σ - צפיפות המטען ליחידת שטח בכל לוח.

V - המתח בין הלוחות. d - מרחק בין הלוחות.

קיבול של קבל גלילי:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

a ו- b - רדיוס הגליל הפנימי והחיצוני בהתאמה.

L - אורך הגלילים, $a, b \ll L$

הקיבול של קבל המלא בחומר דיאלקטרי אחיד:

$$C' = kC_0$$

k (או ε_r) - המקדם הדיאלקטרי של החומר.

C_0 - הקיבול ללא החומר הדיאלקטרי.

חיבור קבלים בטור (קבלים עם מטען זהה):

$$\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

כאשר $Q_T=Q_1=Q_2$ ו- $V_T=V_1+V_2$

חיבור קבלים במקביל (<u>מתח זהה</u>):

$$C_T=C_1+C_2$$

כאשר $Q_T=Q_1+Q_2$ ו- $V_T=V_1=V_2$

שיטה 1 לחישוב קיבול - לפי הגדרה:

א. נניח שיש מטען Q על לוחות הקבל.

ב. נחשב את השדה בין הלוחות

ג. נחשב את המתח בין הלוחות

ד. נציב בנוסחה (בדר״כ Q יצטמצם)

שיטה 2 לחישוב קיבול - פירוק הקבל לקבלים חלקיים:

א. נפרק את הקבל לקבלים שמחוברים בטור או במקביל

ב. נחשב את הקיבול של כל אחד

ג. נחבר חזרה באמצעות הנוסחאות

אנרגיה האגורה בקבל:

$$U_c=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV$$

העבודה שמבצעת הסוללה:

$$W_s=\Delta qV_s=-2\Delta U_c$$

Δq הוא המטען שעבר דרכה (וזה המטען שקיבל הקבל)

הכוח הפועל על חומר דיאלקטרי בקבל:

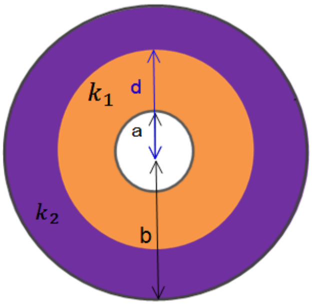
$$F = \left|\frac{dU_c}{dx}\right|$$

הכוח תמיד מושך את החומר פנימה.

שאלות:

1) קבל גלילי

קבל גלילי מורכב משתי קליפות גליליות מוליכות באורך L ורדיוסים b , a .

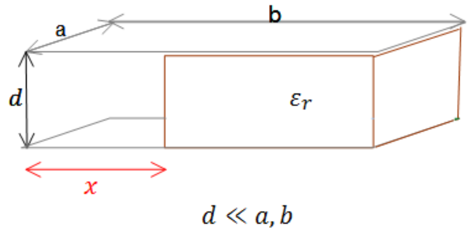


א. מצא את הקיבול של הקבל $L >> a , b$.

ב. כעת ממלאים את הקבל בחומר דיאלקטרי בעל קבוע משתנה.
k_1 כאשר $a < r < d$ ו-k_2 כאשר $d < r < b$.
מצא את הקיבול החדש.

ג. טוענים את הקבל במטען Q, מצא את התפלגות המטען במרחב (חופשי ומושרה).

2) דרך שניה לחשב קיבול וחיבור קבלים

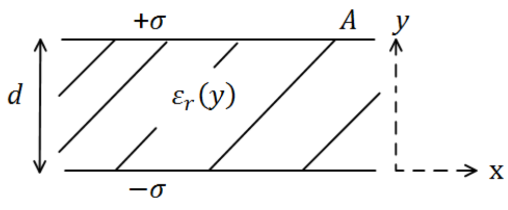


קבל לוחות מורכב משני לוחות מלבנים בעלי אורך b ורוחב a. המרחק בין הלוחות הוא d. לתוך הקבל מכניסים חומר דיאלקטרי הממלא את כל החלל בין הלוחות עד למרחק x מקצה הלוחות. הקבוע הדיאלקטרי של החומר נתון ε_r.

א. מצא את הקיבול של הקבל כתלות ב-x.

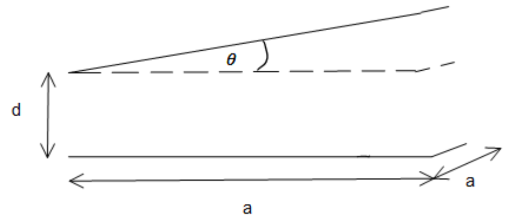
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V, מה תהיה התפלגות המטען החופשי על הלוחות? ומהי צפיפות המטען המושרה בחומר?

3) קבל לוחות עם חומר דיאלקטרי התלוי בגובה



קבל לוחות טעון בצפיפות מטען $\pm\sigma$.
שטח הלוחות הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d. בין הלוחות ישנו חומר דיאלקטרי בעל מקדם דיאלקטרי המשתנה עם המרחק בין הלוחות: $\varepsilon_r(y) = 1 + \left(\frac{y}{d}\right)^2$,
כאשר הלוח התחתון נמצא ב-$y = 0$.
מצא את הקיבול של הקבל.

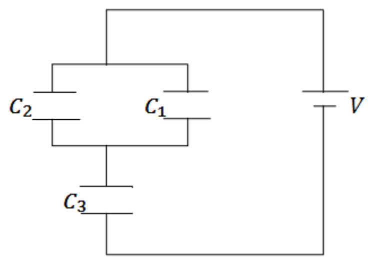
4) קבל לוחות בזווית



נתון קבל לוחות בעל שטח A ומטען Q.
אורך כל צלע בלוחות הקבל הינה a.
עקב טעות בייצור נוצרה זווית θ קטנה מאוד בין הלוחות.

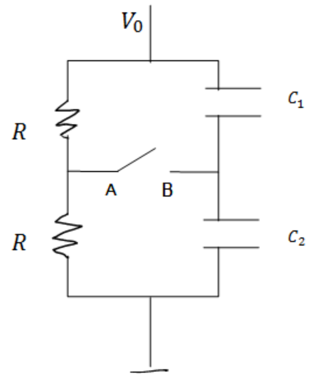
א. חשב את קיבולו של הקבל כפונקציה של θ.
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V, מצא את התפלגות המטען המשטחית על לוחות הקבל.

5) שלושה קבלים



במעגל הבא נתון מתח הסוללה $V = 3v$.
והקיבול של כל קבל: $C_1 = 2\mu F, C_2 = 3\mu F, C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען על כל קבל.

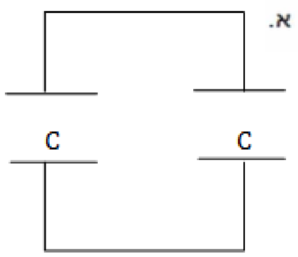
6) קבלים עם מפסק



במעגל הבא מחזיקים את הקצה העליון בפוטנציאל קבוע ונתון V_0. הקצה התחתון מוארק.
נתון: הקיבול של כל קבל, ההתנגדות הזהה של הנגדים.

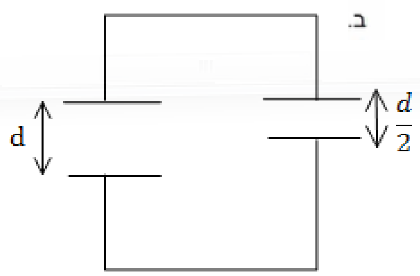
א. מצא את המתח (הפרש הפוטנציאלים) בין הנקודה A לנקודה B.
ב. סוגרים את המפסק AB, כמה מטען עבר דרך המפסק עד שהמערכת התייצבה?

7) שני קבלים טעונים מחוברים אחד לשני



טוענים בנפרד שני קבלי לוחות זהים ע"י מקור מתח V_0.
לאחר הטעינה מנתקים את הקבלים ומחברים אותם אחד לשני, הדק חיובי לחיובי ושלילי לשלילי.

א. מצא את האנרגיה של המערכת אם קיבול הקבלים הוא C.



כעת מקטינים את המרחק בין אחד הקבלים פי 2.

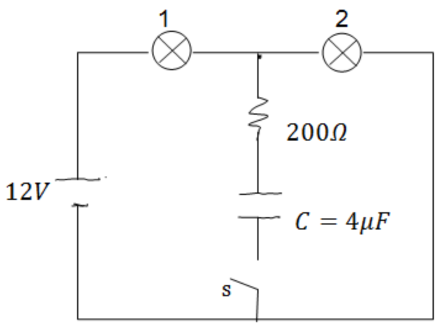
ב. מצא את המתח על כל קבל לאחר זמן רב, ואת האנרגיה של המערכת.
ג. חשב את שינוי האנרגיה והסבר לאן עברה?

8) שתי נורות

במעגל הבא הספק נורה מס' 1 במתח של 10V הוא 0.5W. ההספק של נורה מס' 2 באותו המתח הוא 0.4W. התנגדות הנגד היא 200Ω.

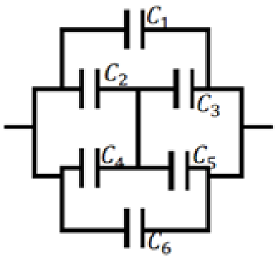
א. חשב את ההתנגדות, המתח וההספק החשמלי של כל נורה כאשר המפסק פתוח.

ב. חשב את המתח על הקבל אם המפסק סגור והמערכת התייצבה.



9) חיבור קונפיגורציית קבלים

נתונה מערכת קבלים המחוברים על פי השרטוט. מצא את הקיבול השקול של המערכת.

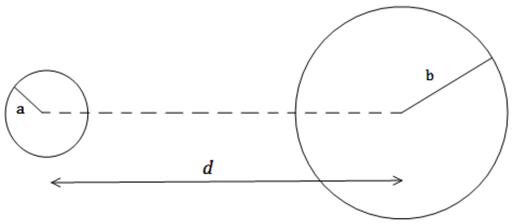


10) שני כדורים מרוחקים

שני כדורים מוליכים, בעלי רדיוסים שונים ונתונים a , b טעונים במטענים שווים ומנוגדים -q , +q.

המרחק בין מרכזי הכדורים הוא d.

נתון כי $d \gg a, b$

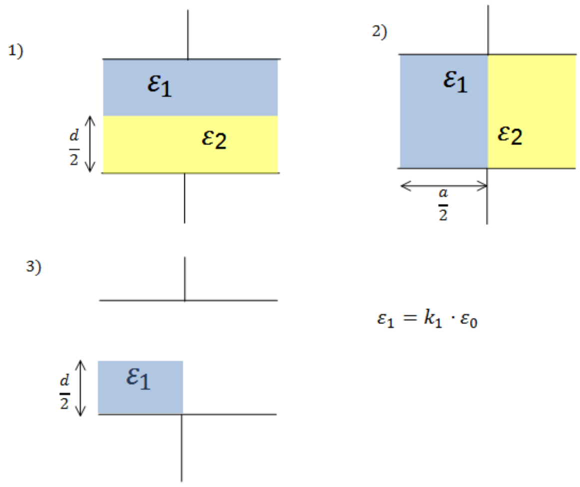


א. מהו השדה החשמלי לאורך הציר המחבר בין הכדורים (ומחוצה להם)?

ב. מצא את הפרש הפוטנציאלים בין משטחי הכדורים.

ג. הראה כי קיבול המערכת הוא: $C \approx \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}}$.

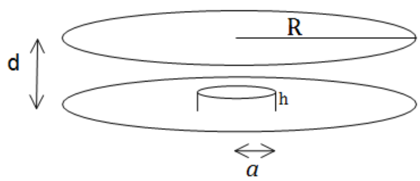
11) חומרים דיאלקטרים בתוך קבל



נתון קבל לוחות ריבועיים בעל צלע a ומרחק בין הלוחות d.
אל הקבל מכניסים חומרים דיאלקטרים שונים עם מקדמים נתונים.
החומרים מוכנסים בשלוש צורות שונות כפי שמוצג בציור (במצב השלישי מוכנס רק חומר אחד, החומרים ממלאים את כל הצלע שנכנסת ללוח).

א. מצא עבור כל מצב את הקיבול של הקבל.
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V נתון, מהו השדה החשמלי בתוך הקבל בכל אחד מהמצבים?
ג. מצא את התפלגות המטען החופשית והמושרית בכל אחד מהמצבים.

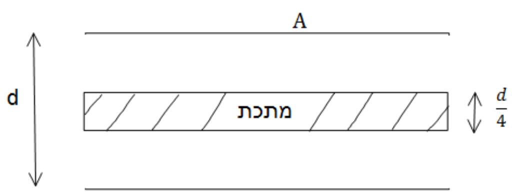
12) קבל לוחות עם בליטה



במערכת הבאה ישנו קבל לוחות עם לוחות מעגליים ברדיוס R, ומרחק בין הלוחות d ($d \ll R$).
בלוח התחתון ישנה בליטה בצורת גליל ברדיוס a ($a \gg d$) ועובי h.
מרכז הבליטה במרכז הלוח התחתון.

א. מצא את הקיבול של הקבל.
ב. מהו השדה בכל מקום בתוך הקבל אם נתון שהקבל מחובר למקור מתח V.
ג. מצא את התפלגות המטען על הלוחות.

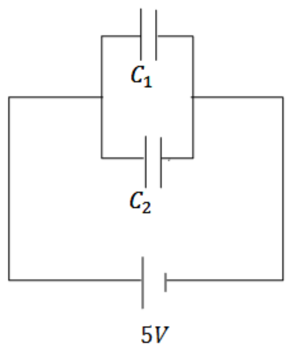
13) קבל עם פיסת מתכת



קבל לוחות מחובר למקור מתח V.
שטח כל לוח בקבל הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d, ($d \ll \sqrt{A}$).

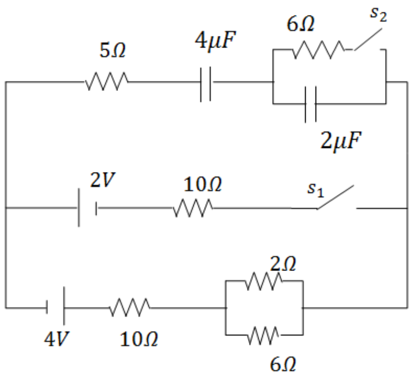
א. מצא את המטען על הקבל, את השדה בתוך הקבל ואת האנרגיה של המערכת.
ב. כעת מכניסים לקבל פיסת מתכת בעובי $\frac{d}{4}$ עם שטח A ממרכז הקבל.
חזור על סעיף א.
ג. כעת מוציאים את המתכת, מחכים שהקבל יטען שוב ומנתקים את מקור המתח. לאחר הניתוק מכניסים את המתכת חזרה פעם שניה.
חזור על סעיף א' (סעיף ב' אינו משפיע על סעיף ג').

14) שני קבלים טעונים מחוברים לקבל שלישי



במעגל הבא קיבול הקבלים הוא: $C_1 = 3\mu F, C_2 = 2\mu F$
והמתח בסוללה הוא 5V.
לאחר שהקבלים נטענים מנתקים את המקור ומחליפים אותו בקבל של $C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען, המתח והאנרגיה של הקבל החדש לאחר שהמערכת מתייצבת.

15) מעגל עם קבלים



חשב את כל הזרמים במעגל ואת המטען על כל קבל במצב היציב כאשר המפסקים במצב הבא:

א. s_1 פתוח ו-s_2 סגור.

ב. s_2 פתוח ו-s_1 סגור.

ג. שני המפסקים סגורים.

תשובות סופיות:

1) א. $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$ ב. $C=\dfrac{Q}{V}$ ג. $\sigma_i=\dfrac{Q}{2\pi bc}\left(1-\dfrac{1}{k_2}\right)$

2) א. $C_T=\dfrac{\varepsilon_0 a}{d}\left(x+\varepsilon_r\left(b-x\right)\right)$

ב. $\sigma_2=\dfrac{\varepsilon_0 V_0\varepsilon_r}{d}\ ,\ \sigma_1=\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{d}\ ,\ E\ ,\ q_2=\dfrac{\varepsilon_0 a\left(b-x\right)V_0\varepsilon_r}{d}\ ,\ q_1=\dfrac{\varepsilon_0 axV_0}{d}$

3) $\dfrac{\pi d}{4\varepsilon_0 A}$

4) א. $\dfrac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\theta\right)$ ב. $\sigma_{(x)}=\dfrac{\varepsilon_0 V_0}{d+xty\theta}$

5) $q_1=3\mu C\ ,\ q_2=4.5\mu C\ ,\ q_3=7.5\mu C$

6) א. $V_{AB}=\dfrac{V_0}{2}-\dfrac{V_0C_2}{C_1+C_2}$ ב. $\Delta q=\dfrac{V_0}{2}\left(C_2-C_1\right)$

7) א. $U_T=2U_1=CV_0^2$ ב. $U'_T=\dfrac{2}{3}CV_0^2\ ,\ V'=\dfrac{2}{3}V_0$

8) א. נורה 1: $R_1=200\Omega\ ,\ V_1=5.34V\ ,\ P_1=0.143W$

נורה 2: $R_2=250\Omega\ ,\ V_2=6.68V\ ,\ P_2=0.178W$

ב. $V_0=V_2=6.68V$

9) $C_T=C_1+C_6+C_{2345}$

10) א. $\vec{E}=\left(\dfrac{kq}{x^2}+\dfrac{kq}{\left(d-x\right)^2}\right)\hat{x}$ ב. $\Delta\varphi\approx kq\left(\dfrac{2}{d}-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$ ג. הוכחה.

11) מצב 1:

א. $C_T=\dfrac{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)a^2}{2d}$ ב. $E_1=E_2=\dfrac{V}{d}$

ג. $\sigma_{i_2}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_2\right)\dfrac{V}{d}\ ,\ \sigma_{free_2}=\dfrac{\varepsilon_2}{d}V\ ,\ \sigma_{i_1}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_1\right)\dfrac{V}{d}\ ,\ \sigma_{free_1}=\dfrac{\varepsilon_1}{d}V$

מצב 2:

א. $C_T=\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 a^2\cdot 2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$ ב. $E_1=\dfrac{2\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ E_2=\dfrac{2\varepsilon_1}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

ג. לוח עליון- $\sigma_{free_1}=\dfrac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ \sigma_{i_1}=\left(\varepsilon_0-\varepsilon_1\right)\dfrac{2\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

לוח תחתון- $\sigma_{free_2}=\dfrac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V\ ,\ \sigma_{i_2}=-\left(\varepsilon_0-\varepsilon_2\right)\dfrac{2\varepsilon_1}{d\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}V$

בין החומרים- $\sigma_{free_3}=0\ ,\ \sigma_{i_3}=\dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)2\varepsilon_0}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

מצב 3 :

א. $C_T=\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{a}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}+\dfrac{1}{2}\right)$ ב. $E_3=\dfrac{V}{d}\ ,\ E_2=\dfrac{2\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}\ ,\ E_1=\dfrac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}$

ג. לוח עליון צד ימין- $\sigma_T=\sigma_{free}=\varepsilon_0\dfrac{V}{d}$

לוח עליון צד שמאל- $\sigma_T=\sigma_{free}=\varepsilon_0\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}$

לוח תחתון צד ימין- $\sigma_{T_{down}}=-\varepsilon_0\dfrac{V}{d}$

לוח תחתון צד שמאל- $\sigma_i=\dfrac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)$

באמצע- $\sigma_{free}=0\ ,\ \sigma_T=\dfrac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)$

12) א. $C_T=\varepsilon_0\pi\left(\dfrac{a^2}{d-h}+\dfrac{R^2-a^2}{d}\right)$ ב. $E_2=\dfrac{V}{d}\ ,\ E_1=\dfrac{V}{d-h}$

ג. $\sigma_2=\varepsilon_0\dfrac{V}{d}\ ,\ \sigma_1=\varepsilon_0\dfrac{V}{d-h}$

13) א. $q=\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}V\ ,\ E=\dfrac{V}{d}\ ,\ U=\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}V^2$

ב. $q_T=\dfrac{4\varepsilon_0 AV}{3d}\ ,\ E_1=E_2=\dfrac{4V}{3d}\ ,\ U=\dfrac{2\varepsilon_0 A}{3d}V^2$

ג. $q_T=\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}V\ ,\ E_1=E_2=\dfrac{V}{d}\ ,\ U=\dfrac{3\varepsilon_0 AV^2}{8d}$

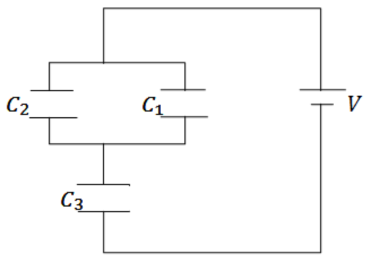
14) $q'_3=12.5\mu C\ ,\ V'_3=2.5V\ ,\ U=15.625J$

15) א. $q_1=16\mu C$, זרם=0. ב. $q_1=\dfrac{136}{129}\mu C\ ,\ I=\dfrac{12}{43}A$ ג. $q_1=\dfrac{136}{43}\mu C\ ,\ I=\dfrac{12}{43}A$

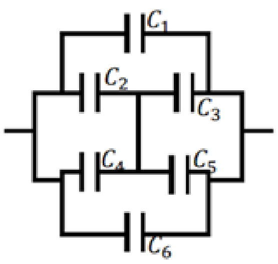
תרגילים נוספים בקבלים:

שאלות:

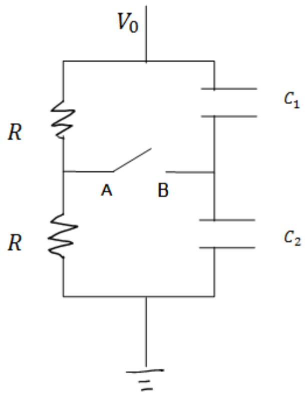
1) שלושה קבלים
במעגל הבא נתון מתח הסוללה $V = 3v$.
והקיבול של כל קבל: $C_1 = 2\mu F, C_2 = 3\mu F, C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען על כל קבל.



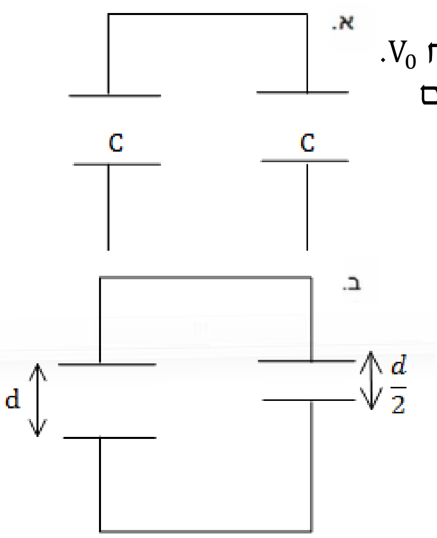
2) חיבור קונפיגורציית קבלים
נתונה מערכת קבלים המחוברים על פי השרטוט.
מצא את הקיבול השקול של המערכת.



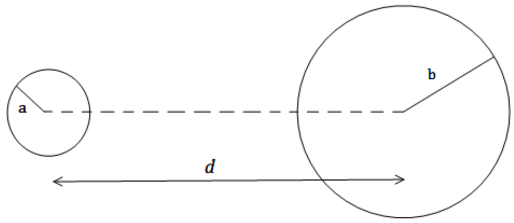
3) קבלים עם מפסק
במעגל הבא מחזיקים את הקצה העליון בפוטנציאל קבוע ונתון V_0. הקצה התחתון מוארק.
נתון: הקיבול של כל קבל, ההתנגדות הזהה של הנגדים.
א. מצא את המתח (הפרש הפוטנציאלים) בין הנקודה A לנקודה B.
ב. סוגרים את המפסק AB, כמה מטען עבר דרך המפסק עד שהמערכת התייצבה?



4) שני קבלים טעונים מחוברים אחד לשני
טוענים בנפרד שני קבלי לוחות זהים ע"י מקור מתח V_0.
לאחר הטעינה מנתקים את הקבלים ומחברים אותם אחד לשני, הדק חיובי לחיובי ושלילי לשלילי.
א. מצא את האנרגיה של המערכת אם קיבול הקבלים הוא C.
כעת מקטינים את המרחק בין אחד הקבלים פי 2.
ב. מצא את המתח על כל קבל לאחר זמן רב, ואת האנרגיה של המערכת.
ג. חשב את שינוי האנרגיה והסבר לאן עברה?



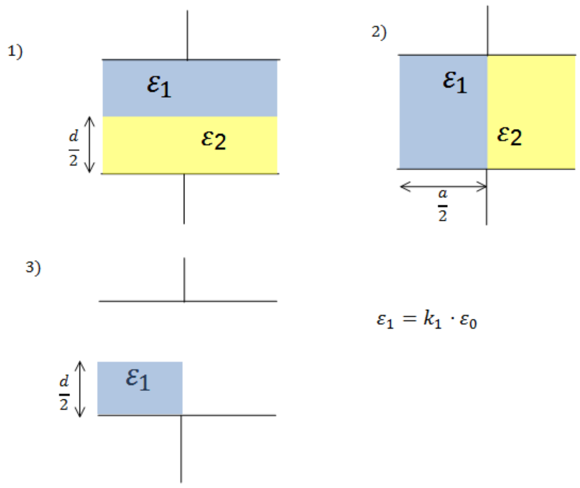
5) שני כדורים מרוחקים



שני כדורים מוליכים, בעלי רדיוסים שונים ונתונים a , b טעונים במטענים שווים ומנוגדים -q , +q.
המרחק בין מרכזי הכדורים הוא d.
נתון כי $d \gg a, b$

א. מהו השדה החשמלי לאורך הציר המחבר בין הכדורים (ומחוצה להם)?
ב. מצא את הפרש הפוטנציאלים בין משטחי הכדורים.
ג. הראה כי קיבול המערכת הוא: $C \approx \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{d}}$.

6) חומרים דיאלקטרים בתוך קבל

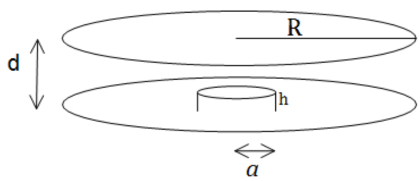


נתון קבל לוחות ריבועיים בעל צלע a ומרחק בין הלוחות d.
אל הקבל מכניסים חומרים דיאלקטרים שונים עם מקדמים נתונים.
החומרים מוכנסים בשלוש צורות שונות כפי שמוצג בציור (במצב השלישי מוכנס רק חומר אחד, החומרים ממלאים את כל הצלע שנכנסת ללוח).

א. מצא עבור כל מצב את הקיבול של הקבל.
ב. מחברים את הקבל למקור מתח V נתון, מהו השדה החשמלי בתוך הקבל בכל אחד מהמצבים?
ג. מצא את התפלגות המטען החופשית והמושרית בכל אחד מהמצבים.

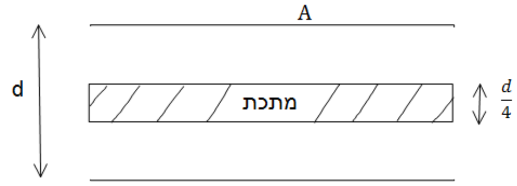
7) קבל לוחות עם בליטה

במערכת הבאה ישנו קבל לוחות עם לוחות מעגליים ברדיוס R, ומרחק בין הלוחות d ($d \ll R$).
בלוח התחתון ישנה בליטה בצורת גליל ברדיוס a ($a \gg d$) ועובי h.
מרכז הבליטה במרכז הלוח התחתון.



א. מצא את הקיבול של הקבל.
ב. מהו השדה בכל מקום בתוך הקבל אם נתון שהקבל מחובר למקור מתח V.
ג. מצא את התפלגות המטען על הלוחות.

8) קבל עם פיסת מתכת



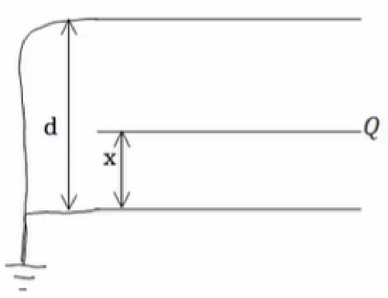
קבל לוחות מחובר למקור מתח V.
שטח כל לוח בקבל הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d, ($d \ll \sqrt{A}$).

א. מצא את המטען על הקבל, את השדה בתוך הקבל ואת האנרגיה של המערכת.

ב. כעת מכניסים לקבל פיסת מתכת בעובי $\frac{d}{4}$ עם שטח A ממרכז הקבל. חזור על סעיף א.

ג. כעת מוציאים את המתכת, מחכים שהקבל יטען שוב ומנתקים את מקור המתח. לאחר הניתוק מכניסים את המתכת חזרה פעם שניה. חזור על סעיף א' (סעיף ב' אינו משפיע על סעיף ג').

9) שלושה לוחות



נתונה מערכת המורכבת משני לוחות מוארקים במרחק d. בין הלוחות, במרחק x מהלוח התחתון, מכניסים לוח נוסף זהה עם מטען Q.
שטח הלוחות הוא $A \gg d^2$.

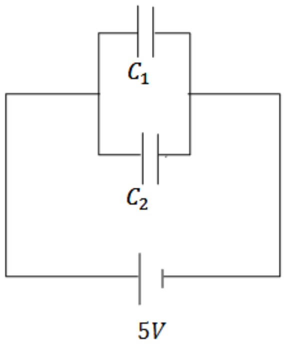
א. מצא את הקיבול של המערכת.

ב. מצא את המטען על כל לוח.

ג. מצא את האנרגיה של המערכת כפונקציה של x.

ד. מהו הכוח הפועל על הלוח?

10) שני קבלים טעונים מחוברים לקבל שלישי



במעגל הבא קיבול הקבלים הוא: $C_1 = 3\mu F, C_2 = 2\mu F$
והמתח בסוללה הוא 5V.
לאחר שהקבלים נטענים מנתקים את המקור ומחליפים אותו בקבל של $C_3 = 5\mu F$.
מצא את המטען, המתח והאנרגיה של הקבל החדש לאחר שהמערכת מתייצבת.

11) קבל כדורי עם חומר דיאלקטרי מפוצל

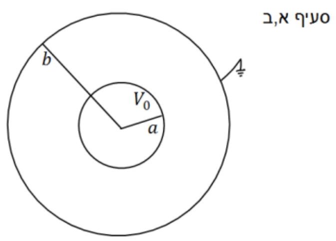
קבל כדורי מורכב משתי קליפות כדוריות מוליכות דקות ברדיוסים b , a.
הקליפה הפנימית מוחזקת במתח V_0 והקליפה החיצונית מוארקת.

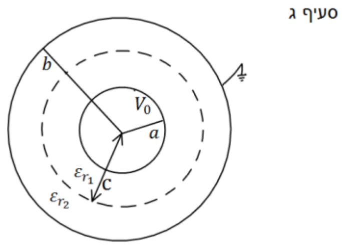
א. חשב את המטען על כל קליפה.

ב. חשב את הקיבול של הקבל.

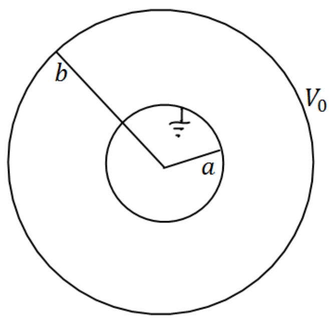
ממלאים את הקבל בשני חומרים דיאלקטריים.
חומר אחד בעל מקדם ε_{r_1} הממלא את החלל בין הרדיוסים a ל-c
וחומר שני בעל מקדם ε_{r_2} הממלא את החלל בין הרדיוסים c ל-b.

ג. חשב את הקיבול החדש.





12) קבל לא אידיאלי



קבל כדורי מורכב משתי קליפות כדוריות מוליכות דקות ברדיוסים b , a.
הקליפה החיצונית מוחזקת במתח V_0 והקליפה הפנימית מוארקת.

א. חשב את המטען על כל קליפה, שים לב שיש שדה מחוץ לקבל!

ב. חשב את הקיבול של הקבל.

מכניסים לקבל חומר דיאלקטרי בעל מקדם ε_r הממלא את החלל בין הרדיוסים a ל-b.

ג. חשב את הקיבול החדש וחשב את המטען החופשי על הקליפה המוארקת.

13) מרחיקים לוחות בקבל לוחות

קבל לוחות בעל אורך צלע $a = 2\,c.m.$ ומרחק בין הלוחות $d = 1\,mm$ נטען ע"י סוללה במתח $3V$. לאחר שהקבל נטען במלואו מנתקים את הסוללה ומרחיקים את הלוחות למרחק $3d$.

א. מצא את הפרש הפוטנציאל החדש על הקבל .

ב. מצא את האנרגיה ההתחלתית והסופית האגורה בקבל.

ג. מצא את העבודה הנדרשת ע״מ להרחיק את הלוחות ע״י הגדרת העבודה.

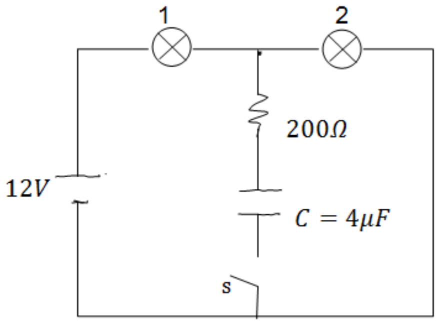
14) מושכים לוח מקבל גלילי

קבל גלילי עשוי משני קליפות גליליות באורך L ורדיוסים $a < b \ll L$.
נתון כי הגליל הפנימי טעון במטען Q והחיצוני ב- $-Q$.

א. מצא את הקיבול של הקבל.

ב. מושכים את הגליל הפנימי כלפי מעלה לאורך הציר המשותף כך שהוא בולט בשיעור $\Delta L \ll L$ בחלקו העליון.
מהו הכוח החשמלי הפועל על הגליל הפנימי? (ניתן להניח כי השדה החשמלי מתאפס באזורים בהם אין חפיפה בין הגלילים).

15) שתי נורות

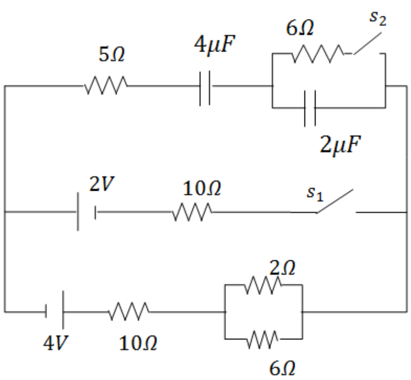


במעגל הבא הספק נורה מס' 1 במתח של 10V הוא 0.5W. ההספק של נורה מס' 2 באותו המתח הוא 0.4W. התנגדות הנגד היא 200Ω.

א. חשב את ההתנגדות, המתח וההספק החשמלי של כל נורה כאשר המפסק פתוח.

ב. חשב את המתח על הקבל אם המפסק סגור והמערכת התייצבה.

16) מעגל עם קבלים



חשב את כל הזרמים במעגל ואת המטען על כל קבל במצב היציב כאשר המפסקים במצב הבא:

א. s_1 פתוח ו- s_2 סגור.

ב. s_2 פתוח ו- s_1 סגור.

ג. שני המפסקים סגורים.

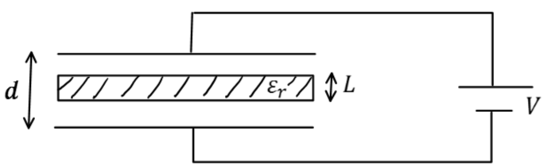
17) קבל לוחות עם חומר דיאלקטרי הממלא רק חלק מהקבל

קבל לוחות בנוי משני לוחות ריבועיים בעלי צלעות a המרוחקים מרחק d זה מזה.
בין לוחות הקבל הוכנס חומר דיאלקטרי בעובי $L < d$ ומקדם דיאלקטרי ε_r.
מחברים את הקבל למקור מתח V.

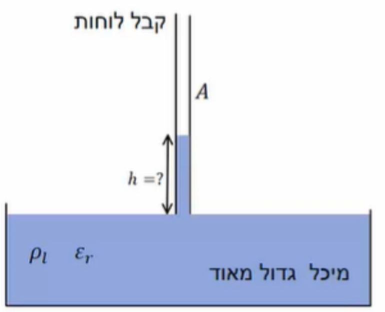
א. מהו השדה החשמלי באזור ללא החומר הדיאלקטרי?

ב. מהו השדה החשמלי בתוך החומר הדיאלקטרי?

ג. מהו המטען המושרה על השפה של החומר הדיאלקטרי?



18) גובה נוזל בתוך קבל



קבל לוחות ריבועיים מחובר למקור מתח V.
שטח כל לוח הוא A והמרחק בין הלוחות הוא d.
מחזיקים את הקבל כך שקצהו טבול במיכל גדול
מאוד המכיל נוזל בעל מקדם דיאלקטרי ε_r
וצפיפות מסה ליחידת נפח ρ_l.
המטרה היא למצא עד איזה גובה עולה הנוזל בקבל.

א. הנח שהגובה ידוע ומצא את האנרגיה כובדית של המים והאנרגיה הפוטנציאלית של הקבל.
ב. מצא מה השינוי באנרגיה של הסוללה ע״י חישוב העבודה שביצעה הסוללה (התייחס לגובה כנתון עדיין).
ג. מצא באיזה גובה המערכת תתייצב? השתמש בשיקול שמערכת שואפת להתייצב במינימום של האנרגיה שלה.

19) קבל לוחות עם חומר לא אחיד

בקבל לוחות שטח הלוחות הוא A והמרחק ביניהם הוא d.
בין הלוחות ישנו חומר דיאלקטרי בעל מקדם דיאלקטרי המשתנה
עם המרחק בין הלוחות $\varepsilon_r(y) = \frac{2d}{y+d}$ כאשר הלוח התחתון נמצא ב-$y = 0$.
הקבל מחובר למקור מתח V.

א. מצאו את הקיבול של הקבל.
ב. חשבו את צפיפות המטען על לוחות הקבל.
ג. חשבו את השדה החשמלי בין לוחות הקבל, גודל וכיוון.
ד. מהי האנרגיה האגורה בקבל.

תשובות סופיות:

1) $q_1 = 3\mu C\ ,\ q_2 = 4.5\mu C\ ,\ q_3 = 7.5\mu C$

2) $C_T = C_1 + C_6 + C_{2345}$

3) א. $V_{AB} = \frac{V_0}{2} - \frac{V_0 C_2}{C_1 + C_2}$ ב. $\Delta q = \frac{V_0}{2}(C_2 - C_1)$

4) א. $U_T = 2U_1 = CV_0^2$ ב. $U'_T = \frac{2}{3}CV_0^2\ ,\ V' = \frac{2}{3}V_0$

ג. $\Delta U = \frac{1}{3}CV_0^2$, האנרגיה ירדה ועברה לכוח שהזיז את הלוחות.

5) א. $\vec{E} = \left(\frac{kq}{x^2} + \frac{kq}{(d-x)^2}\right)\hat{x}$ ב. $\Delta\varphi \approx kq\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$ ג. הוכחה

6) מצב 1:

א. $C_T = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2}{2d}$ ב. $E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$

ג. $\sigma_{free_1} = \frac{\varepsilon_1}{d}V\ ,\ \sigma_{i_1} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\frac{V}{d}\ ,\ \sigma_{free_2} = \frac{\varepsilon_2}{d}V\ ,\ \sigma_{i_2} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\frac{V}{d}$

מצב 2:

א. $C_T = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 a^2 \cdot 2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ ב. $E_1 = \frac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V\ ,\ E_2 = \frac{2\varepsilon_1}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V$

ג. לוח עליון- $\sigma_{free_1} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V\ ,\ \sigma_{i_1} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\frac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V$

לוח תחתון- $\sigma_{free_2} = \frac{-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V\ ,\ \sigma_{i_2} = -(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\frac{2\varepsilon_1}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}V$

בין החומרים- $\sigma_{free_3} = 0\ ,\ \sigma_{i_3} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)2\varepsilon_0}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$

מצב 3:

א. $C_T = \frac{\varepsilon_0 a^2}{a}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0} + \frac{1}{2}\right)$ ב. $E_1 = \frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)}\ ,\ E_2 = \frac{2\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)}\ ,\ E_3 = \frac{V}{d}$

ג. לוח עליון צד ימין- $\sigma_T = \sigma_{free} = \varepsilon_0\frac{V}{d}$

לוח עליון צד שמאל- $\sigma_T = \sigma_{free} = \varepsilon_0\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 V}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)}$

לוח תחתון צד ימין- $\sigma_{T_{down}} = -\varepsilon_0\frac{V}{d}$

לוח תחתון צד שמאל- $\sigma_i=\frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)$

באמצע- $\sigma_T=\frac{2\varepsilon_0 V}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_0)}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)$, $\sigma_{free}=0$

7) א. $C_T=\varepsilon_0\pi\left(\frac{a^2}{d-h}+\frac{R^2-a^2}{d}\right)$ ב. $E_1=\frac{V}{d-h}$, $E_2=\frac{V}{d}$

ג. $\sigma_1=\varepsilon_0\frac{V}{d-h}$, $\sigma_2=\varepsilon_0\frac{V}{d}$

8) א. $q=\frac{\varepsilon_0 A}{d}V$, $E=\frac{V}{d}$, $U=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}V^2$

ב. $q_T=\frac{4\varepsilon_0 AV}{3d}$, $E_1=E_2=\frac{4V}{3d}$, $U=\frac{2\varepsilon_0 A}{3d}V^2$

ג. $q_T=\frac{\varepsilon_0 A}{d}V$, $E_1=E_2=\frac{V}{d}$, $U=\frac{3\varepsilon_0 AV^2}{8d}$

9) א. $C_T=\varepsilon_0 A\left(\frac{d}{x(d-x)}\right)$ ב. $q_1=Q\frac{d-x}{d}$, $q_2=Q\left(\frac{x}{d}\right)$

ג. $U(x)=\frac{Q^2\cdot x(d-x)}{2\varepsilon_0 Ad}$ ד. $\vec{F}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Ad}(d-2x)$

10) $q'_3=12.5\mu C$, $V'_3=2.5V$, $U=15.625J$

11) א. $q_1=\frac{V_0}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$, $q_2=-q_1$ ב. $C=\frac{1}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

ג. $C=\frac{q}{\left|kq\left(\frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\varepsilon_{r_2}}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right)\right|}$

12) א. $q_1=\frac{V_0}{k\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$, $q_2=\frac{bV_0}{ak\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$ ב. $C_T=\frac{1}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}+\frac{b}{k}$

ג. $q_1=\frac{-\varepsilon_r}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}V_0$, $C_T=\frac{\varepsilon_r}{k\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}+\frac{b}{k}$

13) א. $V'=9V$ ב. $U_{C_i}=15.93\cdot10^{-12}J$, $U_{C_p}=47.79\cdot10^{-12}J$

ג. $W=31.86\cdot10^{-12}J$

14) א. $C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{b}{a}}$ ב. $|F|=\dfrac{q^2\ln\dfrac{b}{a}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(L-x)^2}$

15) א. נורה 1: $R_1=200\Omega$, $V_1=5.34V$, $P_1=0.143W$

נורה 2: $R_2=250\Omega$, $V_2=6.68V$, $P_2=0.178W$

ב. $V_0=V_2=6.68V$

16) א. $q_1=16\mu C$, זרם=0. ב. $I=\dfrac{12}{43}A$, $q_1=\dfrac{136}{129}\mu C$ ג. $I=\dfrac{12}{43}A$, $q_1=\dfrac{136}{43}\mu C$

17) א. $E_0=\dfrac{q}{\varepsilon_0 a^2}=\dfrac{V}{d-L\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)}$ ב. $E=\dfrac{V}{d\cdot\varepsilon_r-L(\varepsilon_r-1)}$

ג. $\sigma_T=\varepsilon_0\left(\dfrac{V}{\varepsilon_r d-L(\varepsilon_r-1)}-\dfrac{V}{d-L\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)}\right)$

18) א. $U_g=\rho_l adg\dfrac{1}{2}h^2$, $U_C=\dfrac{1}{2}C_{(h)}U^2$ ב. $\Delta U=-\Delta C_{(h)}V^2$

ג. $h=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)V^2}{2d^2\rho_l g}$

19) א. $\dfrac{4\varepsilon_0 A}{3d}$ ב. $\dfrac{4\varepsilon_0 V}{3d}$, חיובי ב- $y=d$ ושלילי ב- $y=0$.

ג. $\dfrac{2V(y+d)}{3d^2}$ ד. $\dfrac{2\varepsilon_0 AV^2}{3d}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 11 - בעיות שפה בקואורדינטות קרטזיות

תוכן העניינים

הסבר ותרגילים:

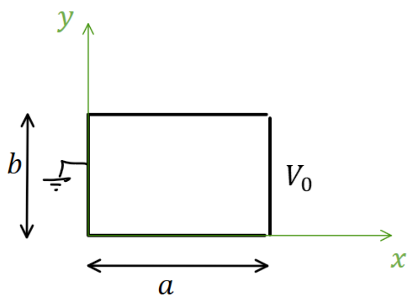
שאלות:

1) פתרון הדוגמה מהסרטון הקודם

תיבה מלבנית מורכבת מארבעה לוחות מוליכים אינסופיים. ממדי הלוחות נתונים באיור והתיבה אינסופית לאורך ציר Z.

הלוח הימני מוחזק בפוטנציאל V_0 ושאר הלוחות מוארקים (הנח שיש מבודדים קטנים מאוד בין הלוח הימני לשאר הלוחות).

מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה.

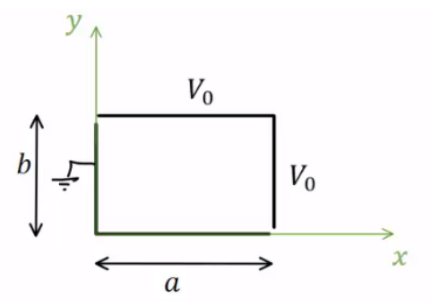


2) תיבה דו ממדית וסופרפוזיציה

תיבה מלבנית מורכבת מארבעה לוחות מוליכים אינסופיים. ממדי הלוחות נתונים באיור והתיבה אינסופית לאורך ציר Z.

הלוח הימני והלוח העליון מוחזקים בפוטנציאל V_0, שאר הלוחות מוארקים (הנח שיש מבודדים קטנים מאוד בין הלוחות המוארקים ללוחות המוחזקים ב-V_0).

מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה.

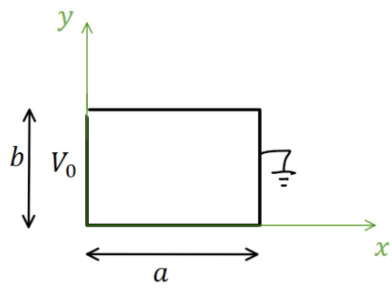


3) תיבה דו ממדית פתרון עם החלפת צירים

תיבה מלבנית מורכבת מארבעה לוחות מוליכים אינסופיים. ממדי הלוחות נתונים באיור והתיבה אינסופית לאורך ציר Z.

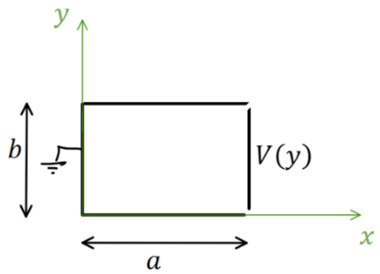
הלוח השמאלי מוחזק בפוטנציאל V_0, שאר הלוחות מוארקים (הנח שיש מבודדים קטנים מאוד בין הלוחות המוארקים ללוח השמאלי).

מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה.



4) **תיבה דו-ממדית עם פונקציית פוטנציאל כללית בשפה**

תיבה מלבנית מורכבת מארבעה לוחות מוליכים אינסופיים.
ממדי הלוחות נתונים באיור והתיבה אינסופית
לאורך ציר Z.
הלוח הימני מוחזק בפוטנציאל $V(y)$ כללי, שאר
הלוחות מוארקים (הנח שיש מבודדים קטנים
מאוד בין הלוחות המוארקים ללוח הימני).
מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה במקרים
הבאים:



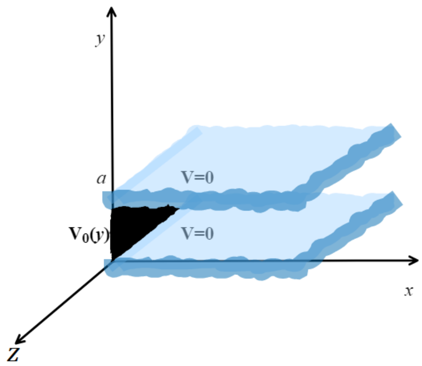
א. בצורה כללית עם הביטוי $V(y)$ בתשובה.

ב. כאשר $V(y)=\begin{cases} V_0 & 0\le y\le \frac{b}{2} \\ -V_0 & \frac{b}{2}<y\le b\end{cases}$.

ג. כאשר $V(y)=V_0\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$.

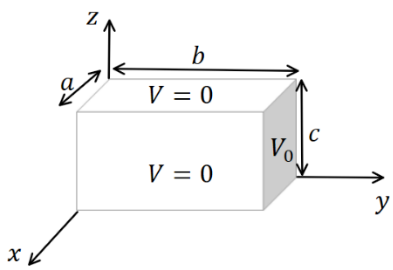
5) **שני לוחות מקבילים ולוח מאונך**

שני מישורים אינסופיים מוארקים נמצאים
במקביל למישור xz ובמרחק a ביניהם.
לוח מוליך נמצא על מישור yz בין $0<y<a$.
הלוח נמצא בפוטנציאל $V_0(y)=V_0\sin\left(\frac{6\pi}{a}y\right)$.
מצא את הפוטנציאל בין המישורים

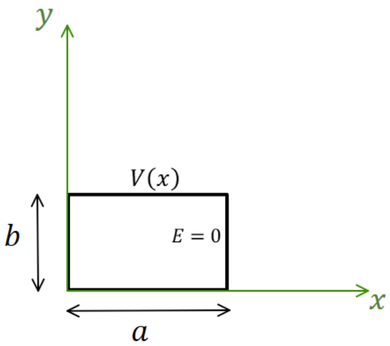


6) **תיבה תלת ממדית**

תיבה בגודל $a\times b\times c$ עשויה מלוחות מוליכים.
כל הלוחות מוארקים למעט הלוח הימני באיור
הנמצא בפוטנציאל V_0.
מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה (אין מטענים
בתוך התיבה).



7) בעיית ניומן דו ממדית קרטזית



תיבה מלבנית מורכבת מארבעה לוחות מוליכים אינסופיים. ממדי הלוחות נתונים באיור והתיבה אינסופית לאורך ציר Z. הלוח העליון מוחזק בפוטנציאל: $V(\mathrm{x}) = V_0 \sin\left(\frac{3\pi}{2a}x\right)$.

השדה ב-0 $E(x = a) =$ ושאר הלוחות מוארקים.

מצא את הפוטנציאל בתוך התיבה.

תשובות סופיות:

1) $\varphi(x,y)=\sum_n C_n \sinh\left(\frac{\pi n}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right)$.

2) $\varphi(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4V_0}{\pi n}\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)\sinh\left(\frac{\pi nx}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)+\frac{4V_0}{\pi n}\sinh\left(\frac{\pi nb}{a}\right)\sinh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\right]$.

3) $\varphi(x,y,z)=\sum_n C_n \sinh\left(\frac{\pi n}{b}(-x+a)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{b}y\right)$.

4) א. $C_n=\frac{2}{b}\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)}\cdot\int_y^b v(y)\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)dy$.

ב. $C_n=\frac{8V_0}{\pi n\sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)}\cdot\begin{cases}1 & odd\ \frac{n}{2}\\ 0 & else\end{cases}$

ג. $C_n=\frac{8nV_0}{(4n^2-1)\pi\, sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)}$.

5) $\varphi(x,y)=V_0\sin\left(\frac{\pi b}{a}y\right)e^{-\frac{\pi b}{a}x}$.

6) $\varphi(x,y,z)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{16V_0}{\pi^2 mn}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{c}z\right)\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{c}\right)^2}y\right)}{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{c}\right)^2}b\right)}$.

7) $\varphi(x,y)=\frac{V_0}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{2a}\right)}\sin\left(\frac{3\pi}{2a}x\right)\sinh\left(\frac{3\pi}{2a}y\right)$.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 12 - בעיות שפה בקואורדינטות גליליות

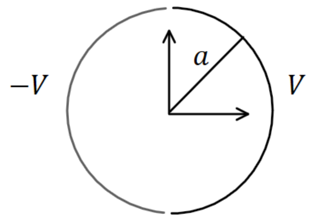
תוכן העניינים

הסבר ותרגילים:

שאלות:

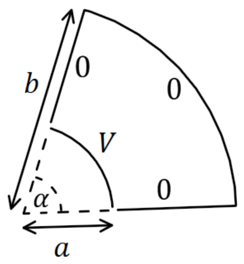
1) גליל חצי חצי

גליל דק ואינסופי ברדיוס a מחולק לשני חצאים.
החצי הימני מוחזק בפוטנציאל קבוע V והחצי השמאלי ב-$-V$.
מצא את הפוטנציאל בתוך ומחוץ לגליל.



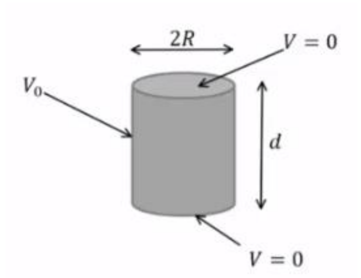
2) גזרה בזווית אלפה

נתונה גזרה בזווית α מתוך מעגל.
הרדיוס הפנימי של הגזרה הוא a והחיצוני b.
הדופן ב-$r = a$ מוחזקת בפוטנציאל V וכל שאר הדפנות מוארקות.
מצא את הפוטנציאל בתוך הגזרה בלבד.
הנח שהבעיה דו ממדית.



3) גליל סופי מתאפס בבסיסים

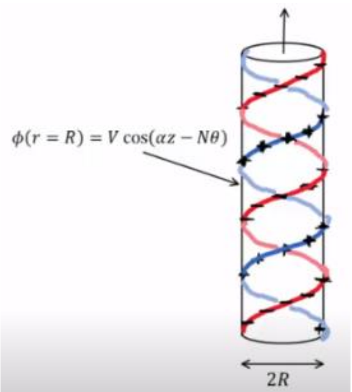
נתונה קליפה גלילית באורך d ורדיוס R.
נתון שהפוטנציאל בשני הבסיסים הוא אפס ובדופן העגולה הפוטנציאל הוא V_0.
מצא את פונקציית הפוטנציאל בתוך הגליל.



4) מולקולת DNA

מבנה ספירלי של דיפולים זעירים יוצר על שפת גליל שרדיוסו R פילוג פוטנציאל הנתון על ידי: $\phi(r = R) = V\cos(\alpha z - N\theta)$.
כאשר המספר השלם N והקבועים V ו-α נתונים.
המערכת אינסופית בציר z ומתוארת באיור עבור $N = 1$.

א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל בכל המרחב.
ב. מצאו את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב.
ג. מהו מרחק הדעיכה האופייני של השדה החשמלי מחוץ לספירלות?
ד. מהי צפיפות המטען המשטחית על המעטפת?



ה. המבנה הוא חלק ממודל של מולקולת DNA.
מבחינה חשמלית מולקולת DNA מורכבת מזוג סלילים כבציור כאשר שניהם בעלי מטען שלילי.
מודל פשוט למבנה זה מתקבל על ידי הוספת פילוג מטען משטחי שלילי אחיד $-\eta_0$ למעטפת הגלילית של הבעיה בסעיפים הקודמים עם $N=2$,
וכך שבכל נקודה על המעטפת המטען המשטחי החדש יהיה שלילי או אפס.
מהו הערך המינימלי של η_0 המבטיח שלא יהיה מטען חיובי במקרה זה?
מצאו את השדה של המערכת בתוספת צפיפות מטען זו.

תשובות סופיות:

1) $V(r,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi l a^l}r^l\cos(l\theta) \quad ,r<a$, $V(r,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi l}\left(\frac{a}{r}\right)^l\cos(l\theta) \quad ,r>a$.

2) $K_n=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}$, $V(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V}{\pi m K_n}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}+\left(\frac{b}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\theta\right)$.

3) $K_n=\frac{\pi n}{d}$, $V(r,z)=\sum_{n}\frac{4V_0}{\pi n I_0\left(\frac{\pi n R}{\alpha}\right)}I_0\left(\frac{\pi n}{d}r\right)\sin\left(\frac{\pi n}{d}z\right)$.

4) א. לא מתבדר $\phi_2(r=\infty)=$, $\phi_1(r>R)=\phi_2(R)$, $\phi_1(r=0)\neq\infty$.

ב. $\phi_2=\frac{V}{K_N(\alpha R)}K_N(\alpha r)\cos(\alpha z-N\theta)$, $\phi_1=\frac{V}{I_N(\alpha R)}I_N(\alpha r)\cos(\alpha z-N\theta)$.

ג. $\frac{1}{\alpha}$.

ד. $\eta=\varepsilon_0 V\alpha\cdot C\cdot\cos(\alpha z-N\theta)$.

ה. $\eta_0=\varepsilon_0 V\alpha C$, $\vec{E}=\begin{cases}-\vec{\nabla}\theta_1 & r<R\\ -\vec{\Delta}\theta_2 & R<r\end{cases}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 13 - בעיות שפה בקואורדינטות כדוריות

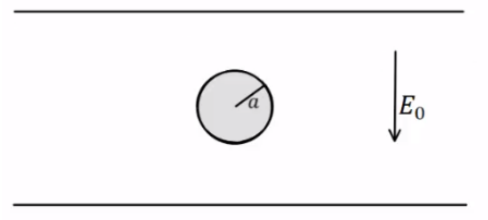
תוכן העניינים

הסבר ותרגילים:

שאלות:

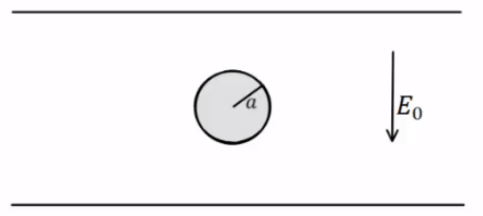
1) דוגמה – כדור מוליך בתוך קבל

כדור מוליך ברדיוס a נמצא בתוך קבל לוחות.
השדה בין הלוחות הוא E_0 כלפי מטה ונתון
ש- $a << d$.
מצא את הפוטנציאל בכל נקודה בתוך הלוחות.



2) דוגמה – מצא את צפיפות המטען על שפת הכדור

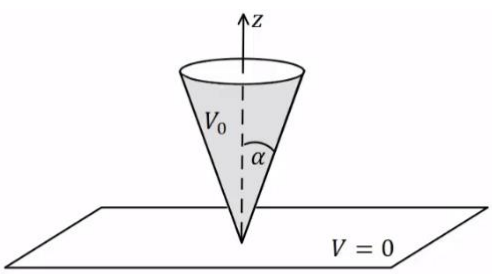
כדור מוליך ברדיוס a נמצא בתוך קבל לוחות.
השדה בין הלוחות הוא E_0 כלפי מטה ונתון
ש- $a << d$.
השתמש בפוטנציאל שמצאת בדוגמה הקודמת
ומצא את התפלגות המטען על שפת הכדור.



3) חרוט מעל מישור

חרוט אינסופי בעל זווית פתיחה α עשוי חומר
מוליך ומוחזק בפוטנציאל V_0.
החרוט נמצא מעל מישור מוארק (הנח כי יש
מבודד בין קודקוד החרוט למישור).
מצא את הפוטנציאל בכל המרחב.

נתון כי: $Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.



תשובות סופיות:

1) $V(r,\varphi)=E_0\left(r-a^3r^{-2}\right)\cos\varphi$.

2) $\sigma_a=-3\varepsilon_0E_0\cos\varphi$.

3) $V(\varphi)=V_0\left(\frac{\ln\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{\ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}\right)$.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 14 - חוק לורנץ וכוח על תייל נושא זרם- מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

חוק לורנץ:

רקע:

כאשר שני מטענים נעים פועל ביניהם כוח נוסף הנקרא הכוח המגנטי.

ניתן לחלק את האינטראקציה לשני חלקים, מטען 1 יוצר שדה מגנטי. מטען 2 שנע בשדה המגנטי מרגיש כוח כתוצאה מהשדה המגנטי.

חוק לורנץ - הכוח המגנטי הפועל על מטען הנע בשדה מגנטי:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

ניתן לחשב את הכוח בשתי דרכים:

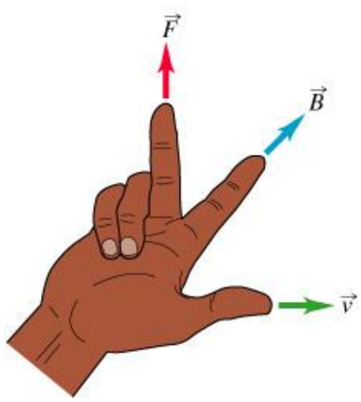
דרך דטרמיננטה:

$$\vec{F}_B = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

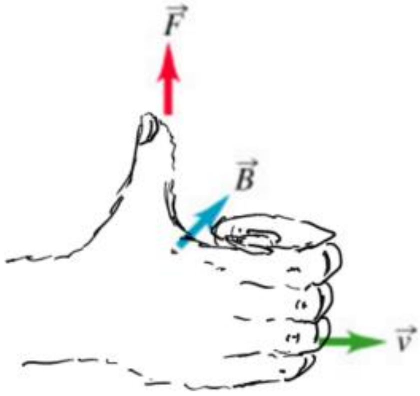
דרך גודל וכיוון בנפרד:

הגודל הוא $F_B = qvB\sin\alpha$ כאשר α היא הזווית בין המהירות לשדה

הכיוון לפי כלל יד ימין:



אופציה נוספת לכלל יד ימין :



שימו לב :

לעשות רק עם יד ימין!

כיוון הכוח הוא עבור **מטען חיובי** (עבור מטען שלילי הכוח בכיוון הפוך).

לא להפוך את הסדר של האצבע והאמה בצורה הראשונה (עדיף לעשות קודם אקדח).

תנועה בשדה אחיד :

מטען q בעל מסה m הנע במהירות v בשדה מגנטי אחיד (המאונך למהירות) עושה תנועה מעגלית, רדיוס המעגל הוא :

$$R = \frac{mv}{qB}$$

אם v לא מאונך למהירות אז התנועה תהיה בורגית כאשר המעגל יהיה מסביב לשדה, רדיוס המעגל יהיה :

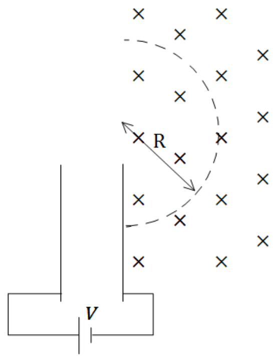
$$R = \frac{mv \sin\alpha}{qB}$$

ו- $v \cos\alpha$ היא מהירות ההתקדמות לאורך ציר השדה.

עבודת הכוח המגנטי תמיד מתאפסת (כי הוא מאונך לתנועה).

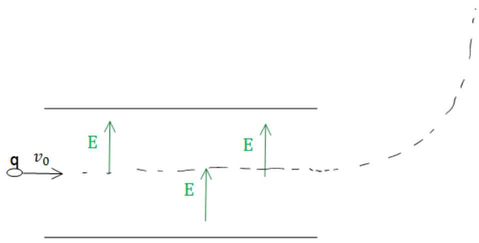
שאלות:

1) ספקטוגרף המסות של דמפסטר



המערכת הבאה מתארת את ספקטוגרף המסות של דמפסטר.
מטרתה היא להפריד בין חלקיקים בעלי מסות שונות.
חלקיקים עם מטען חיובי משוחררים ממנוחה ליד לוח
הקבל החיובי. החלקיקים מואצים ע״י מקור מתח V
המחבר בין הלוחות. החלקיקים עוברים דרך הלוח
השלילי ונכנסים לשדה מגנטי אחיד הפועל לתוך הדף.
מצא את רדיוס הסיבוב כתלות במסת החלקיק.
נתונים: V, q, B.

2) מטען עובר קבל

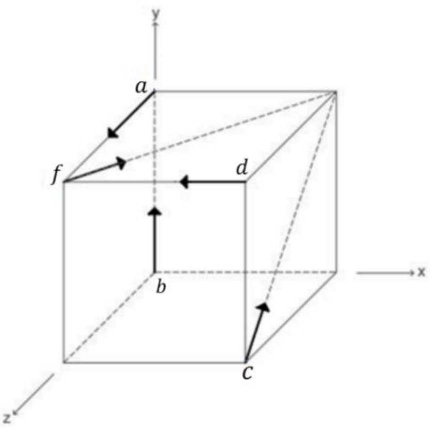


מטען נע בתוך קבל לוחות עם מהירות
קבועה V_0 בקו ישר ובמקביל ללוחות הקבל.
בתוך הקבל (ורק בתוכו) ישנו שדה חשמלי
אחיד ונתון E. כאשר המטען יוצא מהקבל
הוא מבצע תנועה מעגלית כלפי מעלה.
ידוע כי בכל המרחב (בתוך ומחוץ לקבל) יש
שדה מגנטי אחיד אך לא ידוע מה גודלו וכיוונו.
הזנח את כוח הכובד הפועל על המטען.

א. מה הסימן של המטען?

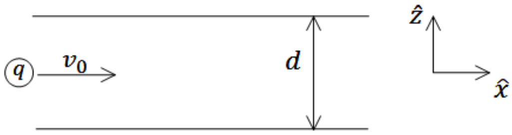
ב. מצא את כיוון וגודל השדה המגנטי.

3) מצאו את הכוח על כל חלקיק



החיצים בציור מציינים מהירויות של
חלקיקים חיוביים שונים.
החלקיקים נמצאים בשדה מגנטי אחיד
שכיוונו הוא $\hat{x}$.
עבור כל חלקיק מצא:
מהו כיוון הכוח ברגע הנתון באיור?
מהי צורת המסלול?

4) מטען פוגע בלוחות קבל



חלקיק בעל מסה m ומטען $q > 0$ נכנס במרכזו של קבל לוחות עם מהירות $\vec{v} = v_0\hat{x}$.
לוחות הקבל מקבילים למישור xy והמרחק ביניהם הוא d.
הקבל מחובר למקור מתח V, כאשר הלוח העליון נמצא בפוטנציאל הגבוה.

א. מצא את המרחק מקצה הלוח של הקבל בו יפגע המטען.
ב. כעת הנח שהקבל אינו מחובר למקור ואינו טעון אך במרחב קיים שדה מגנטי אחיד $\vec{B} = B_0\hat{y}$.
מצא את המרחק מקצה הלוח בו יפגע המטען.
ג. לאיזה כיוון יסטה המטען אם הקבל מחובר למקור מתח ובמרחב קיים שדה מגנטי.

5) חלקיק זז בשדה מגנטי

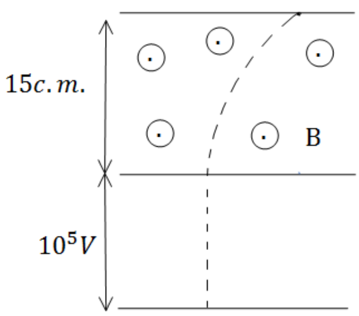
חלקיק הטעון במטען q נע במהירות $\vec{v}$ באזור בו שורר שדה מגנטי $\vec{B} = -2\hat{x} + 3\hat{y}$ טסלה.
חשב את הכוח המגנטי שיפעל על החלקיק אם נתון:

א. $\vec{v} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$ מטר לשניה ו-$q = 2C$
ב. $\vec{v} = -\hat{x} + 2\hat{z}$ מטר לשניה ו-$q = -1\mu C$

6) פרוטון בזווית

פרוטון נכנס בזווית של 30 מעלות לשדה מגנטי אחיד בעוצמה של $0.15T$.
מצא את רדיוס הסיבוב של הפרוטון אם ידוע שגודל מהירותו $V = 10^6 \frac{m}{sec}$.

7) פרוטון פוגע במסך



פרוטון מואץ בקבל הנמצא במתח של 10^5V.
לאחר מכן הפרוטון עובר בשדה מגנטי אחיד עד לפגיעתו במסך הנמצא במרחק $15c.m.$ מהקבל.
עוצמת השדה המגנטי היא $0.2T$.

א. מצא את המרחק האופקי שעבר הפרוטון עד לפגיעתו במסך.
ב. מצא את הזמן עד לפגיעה במסך.
ג. מהו המתח המינימלי הדרוש על מנת שהפרוטון יפגע במסך?

8) **מטען בשדה מגנטי וחשמלי**

שדה חשמלי קיים בתחום $x<0$ כך שמעל ציר ה-x ($y>0$)

השדה הוא: $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ ומתחת לציר ה-x ($y<0$)

השדה הוא: $\vec{E} = E_0\hat{y}$, ראה שרטוט.

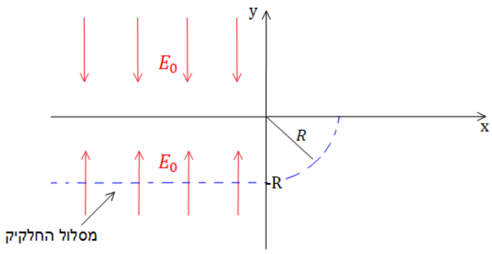
בכל המרחב קיים גם שדה מגנטי אחיד,

שכיוונו וגודלו אינם ידועים.

חלקיק בעל מסה m ומטען $|q|$ מגיע

מ- $x = -\infty$ ונע בקו ישר ובמהירות קבועה.

גובה המסלול של החלקיק הוא $y = -R$.



כאשר החלקיק חוצה את ציר ה-y הוא מבצע רבע מעגל ברדיוס R (ראה ציור).

נתון: R, m, $|q|$, E_0.

א. שרטט את המשך מסלול המטען.

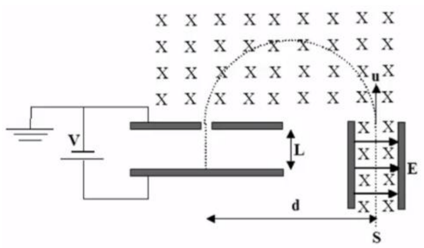
ב. מה סימן המטען?

ג. מצא את המהירות של המטען, והשדה המגנטי.

ד. מצא את המסה הדרושה על מנת לבצע אותו מסלול בשדה מגנטי הגדול פי 3 מהשדה הקיים, כאשר שאר התנאים אינם משתנים.

9) **בורר מהירויות ומתח עצירה**

חלקיקים בעלי מטען $+q$ ומסה m נפלטים ממקור S במהירויות שונות ונכנסים אל בין לוחות קבל.



בין לוחות הקבל פועלים שדה חשמלי אחיד $\vec{E}$ וכיוונו ימינה ושדה מגנטי אחיד $\vec{B}$ והמכוון אל תוך הדף, כמוראה בתרשים.

השדה המגנטי פועל על החלקיקים גם לאחר יציאתם מהקבל.

במרחק d מנקודת היציאה של החלקיקים מהקבל, נמצא נקב קטן דרכו נכנסים החלקיקים אל תוך הקבל השני אשר בין לוחותיו לא פועל שדה מגנטי.

על הקבל השני מופעל מתח עצירה V.ידוע כי המרחק בין לוחות הקבל השני הינו L.

ניתן להזניח את כוח הכובד הפועל על החלקיקים.

נתונים: L, q, m, $\vec{E}$, $\vec{B}$.

א. באיזו מהירות v יוצאים החלקיקים מהקבל הראשון?

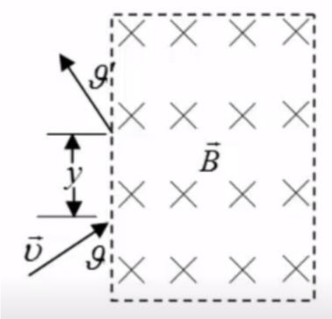
ב. מהו המרחק d (ראה ציור)?

ג. תוך כמה זמן משלים החלקיק את חצי הסיבוב?

ד. מה צריך להיות ערכו המינימלי של מתח העוצר V המופעל על הקבל השני כדי שהחלקיקים הנכנסים לתוכו יעצרו לחלוטין?

ה. מחברים את הקבל השני לסוללה שמתחה גדול פי שתיים ממה שחישבת בסעיף ד'. תוך כמה זמן יעצור החלקיק מרגע כניסתו אל בין לוחות הקבל השני כעת?

10) מטען נכנס ויוצא משדה מגנטי בזווית

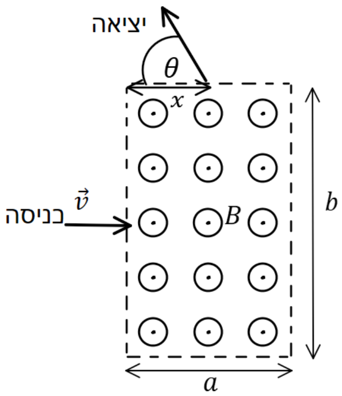


אלומות חלקיקים בעלי מסה m ומטען q נקלעות לאזור בו שורר שדה מגנטי אחיד $\vec{B}$ המאונך למישור הדף במגמה פנימה. לחלקיקים אנרגיה קינטית E_k והם נכנסים לאזור המגנטי בזווית ϑ, כמתואר בציור.

א. חשבו את המרחק האנכי y אותו יעברו החלקיקים מנקודת כניסתם לאזור המגנטי ועד ליציאתם ממנו.

ב. חשבו את זווית היציאה ϑ' (ראו איור).

11) עוד מטען נכנס ויוצא משדה מגנטי בזווית



שדה מגנטי אחיד B נמצא בתחום מלבני בגודל a × b.
מחוץ לתחום השדה הוא אפס. כיוון השדה החוצה מהדף.
מטען |q| נכנס לתחום המלבני בדיוק במרכז המלבן, במהירות שגודלה v וכיוונה מאונך לשפת המלבן (ראה איור).
ידוע שהמטען יוצא מהצלע העליונה של המלבן.

א. מהו סימן המטען? ומהו גודל מהירותו ביציאה?

ב. מהו המרחק x מקצה המלבן בו יוצא המטען?

ג. מהי הזווית θ של וקטור המהירות ביציאה ביחס לצלע המלבן?

תשובות סופיות:

1) $R=\sqrt{\frac{2V}{qB^2}}\cdot\sqrt{m}$

2) א. שלילי   ב. $B=\frac{E}{V}$, Be

3) $\vec{F}_a=qvB\hat{y}$, $\vec{F}_b=qvB(-\hat{z})$, $\vec{F}_c=\frac{qvB}{\sqrt{2}}(-\hat{y}-\hat{z})$, $\vec{F}_d=0$, $\vec{F}_f=\frac{qvB}{\sqrt{2}}(-\hat{y})$

$\vec{F}_a$: מעגל אנכי במישור yz , $\vec{F}_b$: מעגל אנכי במישור yz , $\vec{F}_c$: מעגל אנכי במישור yz , $\vec{F}_d$: תנועה בקו ישר , $\vec{F}_f$: ספירלה במישור yz שמתקדמת סביב ציר x.

4) א. $x=V_0\sqrt{\frac{md^2}{qV}}$ ב. $x^2=R^2-\left(R-\frac{d}{2}\right)^2$

ג. המטען יסטה למעלה אם: $\varepsilon F_z=q\left(V_0B_0-\frac{V}{d}\right)>0$

המטען יסטה למטה אם: $\varepsilon F_z=q\left(V_0B_0-\frac{V}{d}\right)<0$

5) א. $\vec{F}=24N\hat{z}$ ב. $\vec{F}=(6\hat{x}+4\hat{y}+3\hat{z})\mu N$

6) $R\approx 3.48\cdot 10^{-2}m$

7) א. $\Delta x=0.0315$ ב. $t=3.371\sec$ ג. $V=4.312\cdot 10^4 V$

8) א. ראה סרטוט   ב. $\text{sign}(q)=-1$ ג. $\vec{B}=\sqrt{\frac{mE_0}{qR}}\hat{z}$, $V=\sqrt{\frac{qRE_0}{m}}$

ד. $m_2=qm_1$

9) א. $\frac{E}{B}$ ב. $\frac{2mE}{qB^2}$ ג. $\frac{\pi m}{qB}$ ד. $\frac{mE^2}{2qB^2}$ ה. $\frac{2BL}{E}$

10) א. $y=\frac{\sqrt{8mE_k}\sin\vartheta}{Bq}$ ב. $\vartheta'=\vartheta$

11) א. אם כיוון הכוח הפוך לכיוון המכפלה $\vec{V}\times\vec{B}$ אז המטען שלילי.
$\vec{F}$ תמיד מאונך ל- $\vec{V}$ ול- $\vec{B}$ לכן ה- $\vec{F}_B$ אף פעם לא ישנה את גודל המהירות, רק את הכיוון (V כניסה= V יציאה).

ב. $x=\sqrt{b\left(\frac{b}{4}-\frac{mV}{qB}\right)}$ ג. $\cos\theta=\frac{b}{2R}-1$

כוח על תיל נושא זרם:

רקע:

הכוח הפועל על חתיכת תיל קטנה באורך dl עם זרם I הנמצאת בשדה מגנטי B הוא:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

גודל הכוח הפועל על **<u>תיל ישר</u>** **<u>בשדה אחיד</u>** הוא:

$$F = BIL\sin\alpha$$

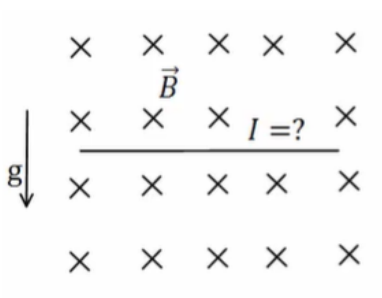
את כיוון הכוח יש למצא לפי כלל יד ימין כמו בחוק לורנץ על מטען בודד כאשר כיוון הזרם (או כיוון ה- dl) מחליף את המהירות.

הכוח על לולאה סגורה בשדה אחיד מתאפס.

הכוח על תיל בשדה אחיד אינו תלוי בצורת התיל, הכוח יהיה זהה לכוח הפועל על תיל ישר המתחיל ומסתיים באותם נקודות.

שאלות:

1) **דוגמה-תיל מרחף**



תיל ישר נמצא במאונך לשדה מגנטי אחיד $B = 10^{-2}\,T$ לתוך הדף.
צפיפות המסה של התיל ליחידת אורך היא: $\lambda = 20\frac{gr}{c.m}$.
מצא מה צריך להיות גודל וכיוון הזרם בתיל כך שהתיל ירחף באוויר?

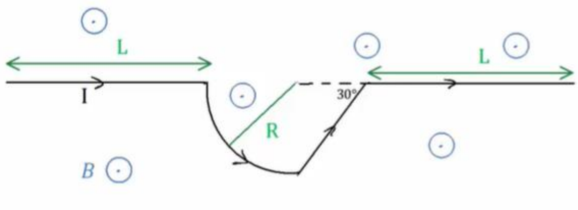
2) **דוגמה-מסגרת מלבנית בשדה לא אחיד**

מסגרת מלבנית בעלת צלעות a , b נמצאת במישור של הדף ובתוך שדה מגנטי שכיוונו לתוך הדף. גודלו של השדה המגנטי אינו אחיד.
המסגרת מונחת כך שחלק מהמסגרת נמצא בשדה $B_1 = 4T$

והחלק השני נמצא בשדה $B_2 = 3T$.
במסגרת זורם זרם $I = 2A$ עם כיוון השעון. נתון: $a = 0.5m$.
מצא את הכוח השקול הפועל על המסגרת?

3) כוח על תיל מכופף

תיל הנושא זרם I מכופף כפי שנראה באיור.
החלק העגול הוא רבע מעגל
בעל רדיוס R.
בכל המרחב יש שדה מגנטי
אחיד B החוצה מהדף.
מצא את הכוח השקול על התיל
אם R, B, I, L נתונים.



4) כוח על תיל מכופף עם חלוקה לחתיכות

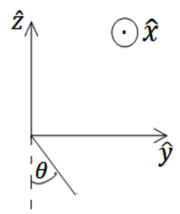
הנח נתונים זהים לשאלה קודמת.
מצא את הכוח השקול על התיל ע״י חלוקה לחתיכות,
חישוב הכוח ע״י כל חתיכה בנפרד וסכימה.

5) לולאה תלויה

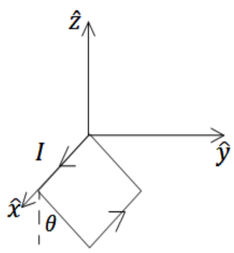
לולאה ריבועית בעלת צלע a ומסה m תלויה על ציר ה-x
(הצלע שנמצאת על הציר מקובעת לציר) ויכולה להסתובב סביבו.
בלולאה זורם זרם I כך שהזרם בצלע שנמצאת על ציר ה-x
חיובי (זורם בכיוון ציר ה-x).

א. מצא את גודל השדה המגנטי שדרוש להפעיל בכיוון ציר ה-z על מנת שהלולאה תתייצב במנוחה בזווית θ ביחס לציר ה-z.

ב. מצא את גודל השדה המגנטי שדרוש להפעיל בכיוון ציר ה-y על מנת שהלולאה תתייצב במנוחה בזווית θ ביחס לציר ה-z.



מבט דו-מימדי



מבט תלת מימדי

6) כוח על לולאה סגורה

הראו כי:

א. הכוח המגנטי על לולאת זרם ריבועית בשדה אחיד הניצב למישור הלולאה מתאפס.

ב. הכוח המגנטי על לולאת זרם ריבועית בשדה אחיד המקביל למישור הלולאה מתאפס.

ג. הכוח המגנטי על לולאת זרם ריבועית בשדה אחיד מתאפס.

ד. הכוח המגנטי על לולאת זרם סגורה בעלת כל צורה שהיא בשדה אחיד מתאפס.

7) לולאה בצורת חצי גליל ותיל אינסופי - סמי שמעון

לולאה מורכבת משני חצאי עיגול מקבילים ושני קווים ישרים מקבילים כך שנוצרת השפה של חצי גליל, ראו איור.
תיל אינסופי עובר לאורך ציר הסימטריה של גליל.
רדיוס חצאי העיגול הוא R ואורך הקווים הישרים הוא h.
בלולאה ובתיל זורמים הזרמים I_1 ו-I_2 וכיוונם מתואר באיור.

א. חשבו את הכוח שמפעיל התיל על כל חצי מעגל של הלולאה.

ב. חשבו את הכוח שמפעיל התיל על כל אחד מהקווים הישרים (גודל וכיוון).

ג. מה הכוח השקול שמפעיל התיל על הלולאה?

תשובות סופיות:

1) $I = 2\cdot10^3\,\text{A}$, ימינה.

2) $F = 1\text{N}$, ימינה.

3) $F = BI\left(2L + \left(1+\sqrt{3}\right)R\right)$

4) $F_x = 0\ ,\ F_y = IB\left(2L + \left(1+\sqrt{3}\right)R\right)(-1)\hat{y}$

5) א. $B = \frac{mg}{2aI}\tan\theta\hat{z}$ ב. $\vec{B} = -\frac{mg}{2aI}\hat{y}$

6) שאלת הוכחה.

7) א. 0.   ב. עבור שניהם, שמאלה, $\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi R}$ ג. שמאלה, $\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{\pi R}$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) מטען בשדה מגנטי עם משוואות דיפרנציאליות

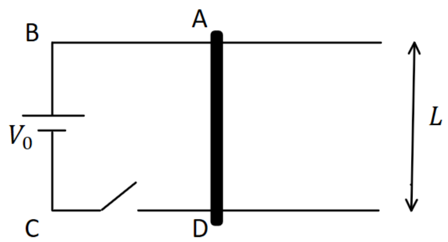
נתון שדה חשמלי $\vec{E}=\alpha x\hat{x}$ ושדה מגנטי קבוע ואחיד $\vec{B}=B_0\hat{z}$.
חלקיק בעל מסה m ומטען q נמצא בראשית בזמן $t=0$.
מהירותו ההתחלתית היא: $\vec{v}=v_0\hat{x}$.

א. מהו מיקום החלקיק כתלות בזמן בכל אחד מהמקרים הבאים:
$\alpha>\frac{q}{m}B_0^2,\quad \alpha<\frac{q}{m}B_0^2\,,\quad \alpha=\frac{q}{m}B_0^2$.

2) מטען בשדה חשמלי רדיאלי

נתון שדה חשמלי $\vec{E}=\alpha(x\hat{x}+y\hat{y})$ ושדה מגנטי קבוע ואחיד $\vec{B}=B_0\hat{z}$.
חלקיק בעל מסה m ומטען q נמצא בראשית בזמן $t=0$.
מהירותו ההתחלתית היא: $\vec{v}=v_0\hat{x}$.
כתוב 4 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון עבור המיקום והמהירות.
הסבר את דרך הפתרון, אין צורך לפתור.

3) מוט נע על מסילה עם חיכוך וסוללה



מקור מתח V_0 מחובר לשני תילים מוליכים
ומקבילים במרחק L אחד מהשני.
לתילים התנגדות ליחידת אורך r.
על התילים מניחים מוט מוליך בעל מסה m
וחסר התנגדות המחבר בין הנקודות A ו-D באיור.
המערכת נמצאת בתוך שדה מגנטי B המאונך לדף אך לא ידוע האם הוא לתוך או החוצה מהדף.
ברגע $t=0$ סוגרים את המתג והמוט מתחיל לנוע ימינה.
על המוט פועל חיכוך קינטי ומקדם החיכוך הוא μ.
התנגדות הקטע ABCD (כולל המקור) היא R_0.
ניתן להזניח השפעות של השראות מגנטיות.

א. מהו כיוון השדה המגנטי?
ב. מהו הזרם במעגל כתלות במרחק אותו עבר המוט מתחילת התנועה?
ג. באיזה מרחק תתאפס תאוצת המוט?
ד. תאר את תנועת המוט במילים.

תשובות סופיות:

1) $\alpha = \frac{q}{m}\mathrm{B}_0^2$: $x(t) = V_0 \cdot t \ , y = \frac{1}{2}\left(-\frac{q\mathrm{B}_0 V_0}{m}\right)t^2$.

$\alpha < \frac{q}{m}\mathrm{B}_0^2$: $x(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{q}{m}\left(\frac{q\mathrm{B}_0^2}{m} - \alpha\right)}} \sin\left(\sqrt{\frac{q}{m}\left(\frac{q\mathrm{B}_0^2}{m} - \alpha\right)} \cdot t\right)$.

$\alpha > \frac{q}{m}\mathrm{B}_0^2$: $x(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{q}{m}\left(\alpha - \frac{q\mathrm{B}_0^2}{m}\right)}} \sinh\left(\sqrt{\frac{q}{m}\left(\alpha - \frac{q\mathrm{B}_0^2}{m}\right) \cdot t}\right)$.

2) $\begin{cases} q\mathrm{B}_0 V_y + q\alpha x = m\dot{V}_x \\ -q\mathrm{B}_0 V_x + q\alpha y = m\dot{V}_y \\ \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \end{cases}$.

3) א. B לתוך הדף. ב. $\mathrm{I} = \frac{V_0}{R_0 + 2rx}$. ג. $x = \frac{1}{2r}\left(\frac{\mathrm{B}LV_0}{\mu mg} - R_0\right)$.

ד. ראה סרטון.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 15 - חוק ביו סבר-מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

חוק ביו-סבר:

השדה המגנטי שיוצרת חתיכת זרם

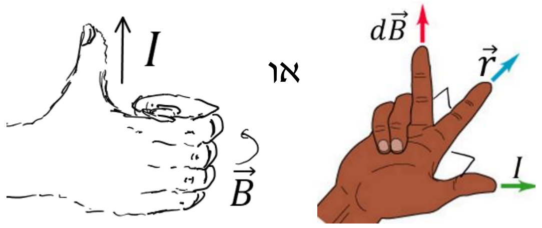
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \vec{r}}{|r|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{|r|^2}$$

$\vec{r}$ - הוא הוקטור מהחתיכה לנקודה בה מחפשים את השדה.

$d\vec{l}$ - אורך החתיכה וכיוונו בכיוון הזרם.

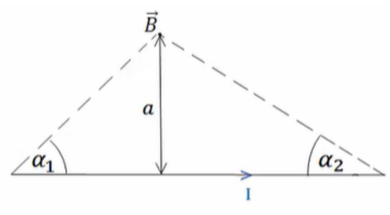
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, {}^{N}/{}_{A^2}$ - מקדם הפרמביליות של הריק

- חישוב הכיוון:



השדה של תיל סופי:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$



במרכז התיל:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{L}{((\frac{L}{2})^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

כאשר L הוא אורך התיל.

השדה של תיל אינסופי:

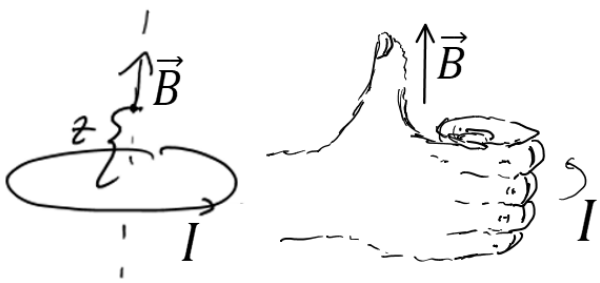
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

כאשר r הוא המרחק מהתיל.

שדה של טבעת לאורך ציר הסימטריה:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- כיוון השדה לפי כלל הבורג:



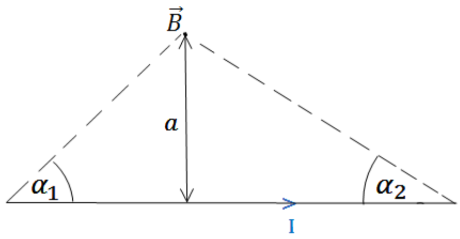
כוח ליחידת אורך בין שני תיילים מקבילים:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

הכוח הוא כוח משיכה אם הזרמים באותו כיוון, ודחייה אם כיוון הזרמים הפוך.

שאלות:

1) חישוב שדה של תיל סופי לפי זוויות

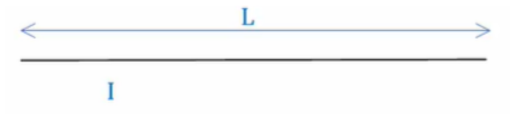


הראה כי גודלו של השדה המגנטי שיוצר תיל בנקודה הנמצאת במרחק a מהתיל הוא:

$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$.

כאשר I הוא הזרם בתיל.

2) חישוב שדה של תיל סופי לפי וקטורים

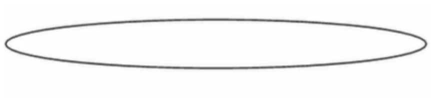


נתון תיל סופי באורך L וזרם I.

השדה נמצא במרחק y מהראשית.

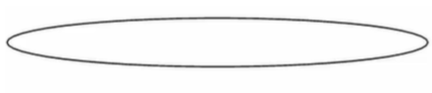
חשב את השדה המגנטי של תיל סופי.

3) חישוב שדה של טבעת



חשב את השדה המגנטי לאורך ציר הסימטריה של טבעת ברדיוס R כאשר בטבעת זורם זרם I.

4) חישוב שדה של דיסקה

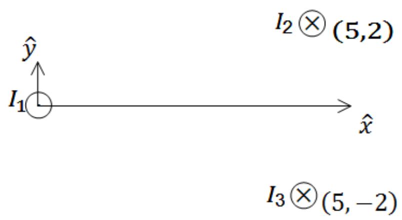


דיסקה ברדיוס R טעונה בצפיפות מטען משטחית σ.

הדיסקה מסתובבת במהירות זוויתית ω סביב ציר הסימטריה שלה.

מצא את השדה המגנטי לאורך ציר הסימטריה.

5) שדה של שלושה תילים אינסופיים



שלושה תילים אינסופיים המקבילים לציר ה-z

מונחים במיקומים הבאים:

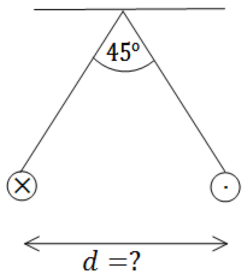
$\vec{r}_1(0,0)$, $\vec{r}_2(5,2)$, $\vec{r}_3(5,-2)$.

הזרמים בתילים הם:

$I_1 = 3A$ החוצה מהדף, $I_2 = 5A$ לתוך הדף, $I_3 = 4A$ גם כן לתוך הדף.

מצא באיזה נקודה לאורך ציר ה-x מתאפס הרכיב של השדה המגנטי בכיוון y?

6) שני תילים תלויים



שני תילים ארוכים מאוד תלויים מהתקרה באמצעות חוטים באורך זהה ולא ידוע.
בתילים זורם זרם של 100 אמפר בכיוונים מנוגדים.
הזווית בין החוטים היא 45 מעלות ומסתם ליחידת אורך היא: $\mu = 2\frac{\text{gr}}{\text{m}}$.
מצא את המרחק בין התילים.

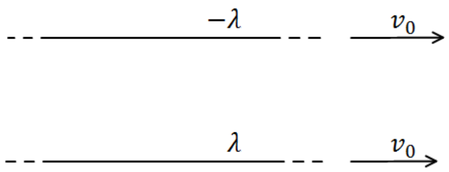
7) מצולע עם אן צלעות

במצולע משוכלל (כל הצלעות שוות) בעל n צלעות זורם זרם I.
נתון כי המצולע חסום ע״י מעגל ברדיוס R.

א. מהו השדה המגנטי במרכז המצולע?

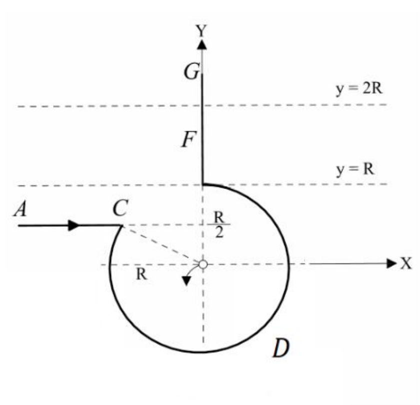
ב. בדוק עבור $n \to \infty$.

8) כוח מגנטי מתבטל עם חשמלי



שני תילים אינסופיים טעונים בצפיפות מטען λ ו-$-\lambda$.
התילים מקבילים ונמשכים במהירות קבועה v_0 ימינה.
מצא את גודל המהירות כך שהכוח המגנטי יתבטל עם הכוח החשמלי?

9) חישוב שדה של תיל מיוחד



תיל ACDFG כולל חלק מעגלי שרדיוסו R ושני קטעים ישרים אינסופיים.
המשך הקו AC חותך את רדיוס המעגל במרכזו (ראו בשרטוט).
בתיל זורם זרם I, כיוון הזרם מסומן בשרטוט.

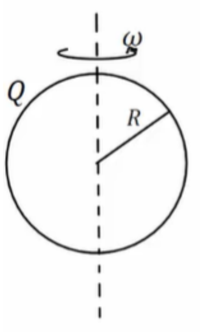
א. מהו גודלו וכיוונו של וקטור השדה המגנטי במרכז החלק המעגלי של התיל?

ב. חלקיק טעון עובר דרך מרכז החלק המעגלי של התיל מסלולו מתעקם עקב השפעת השדה המגנטי של התיל.
צורת המסלול וכיוון התנועה נתונים בשרטוט.
מהו סימן מטענו של החלקיק?

ג. בניסוי נוסף יוצרים שדה מגנטי לא אחיד בכל התחום $R < y < 2R$.
חלק של התיל FG נמצא בתוך תחום זה (ראו בשרטוט).
נתון וקטור השדה $\vec{B}(0,0,\ ay^2)$, כאשר הקבוע a נתון.
מהו הכוח המגנטי ששדה זה מפעיל על התיל?

10) שדה במרכז קליפה כדורית מסתובבת

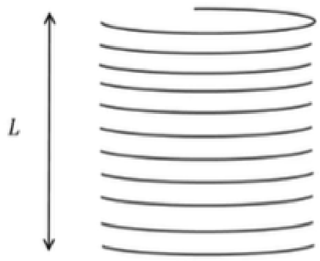
קליפה כדורית ברדיוס R טעונה במטען Q המפולג באופן אחיד על פני הקליפה.
הקליפה מסתובבת סביב צירה במהירות זוויתית קבועה ω.
הנח כי הסיבוב אינו משפיע על התפלגות המטען וחשב את השדה המגנטי במרכז הקליפה.



11) שדה של סליל סופי

בסליל סופי באורך L, רדיוס R וצפיפות ליפופים אחידה ליחידת אורך n זורם זרם I .
חשבו את השדה המגנטי ב:

א. מרכז הסליל.
ב. הקצה העליון של הסליל.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi y}\frac{IL\hat{z}}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

3) $Bx=By=0\ ,\ Bz=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

4) $\vec{B}_T=\frac{\mu_0\sigma w}{2}\left(\left(R^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}+z^2\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}-2z\right)$

5) $x_1=-2.76\ ,\ x_2=5.26$

6) $d=0.241m$

7) א. $B=\frac{n\mu_0 I}{2\pi R}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ב. $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$

8) $V=3\cdot10^8\ \frac{m}{sec}$

9) א. $Bz=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(2-\sqrt{3}\right)$ ב. שלילי ג. $\vec{F}=\frac{Ia}{3}7R^3\hat{x}$

10) $B_z=\frac{\mu_0 Qw}{6\pi R}$

11) א. $\frac{\mu_0 InL}{2\left(R^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ ב. $\frac{\mu_0 InL}{2\left(R^2+(L)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 16 - חוק אמפר-מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

חוק אמפר:

$$C_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in}$$

$$I_{in} = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ מקדם המגנטיות של הריק

כאשר האינטגרל הוא על הרכיב המשיק של B לאורך מסלול סגור. בדרך, נבחר מקרים שבהם B אחיד לאורך המסלול והאינטגרל יהיה B כפול אורך המסלול.

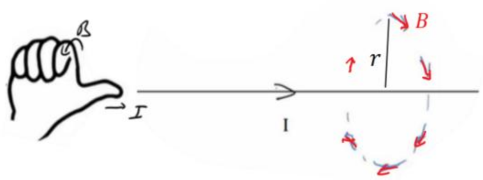
הזרם הוא סך הזרם שעובר דרך השטח הסגור במסלול.

המקרים הנפוצים של חוק אמפר:

1. תיל / גליל / מעטפת גלילית אינסופיים
2. מישור אינסופי
3. סליל אינסופי / טורואיד

שדה של תיל אינסופי (ראינו גם בחוק ביו-סבר):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



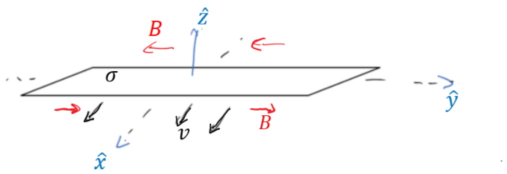
כאשר r הוא המרחק מהתיל.

כיוון השדה מעגלי מסביב לזרם ולפי כלל הבורג כאשר הזרם בכיוון האגודל והשדה בכיוון האצבעות, ניתן להגיד שכיוון השדה הוא בכיוון $\hat{\theta}$ כאשר הזרם בכיוון $\hat{z}$.

שדה של מישור אינסופי:

עבור מישור דק הטעון בצפיפות מטען ליחידת שטח σ ונע בכיוון $\hat{x}$ במהירות v.

$$\vec{B}=\frac{\mu_0\sigma v}{2}\begin{cases}-\hat{y}, & z>0\\ \hat{y}, & z<0\end{cases}$$

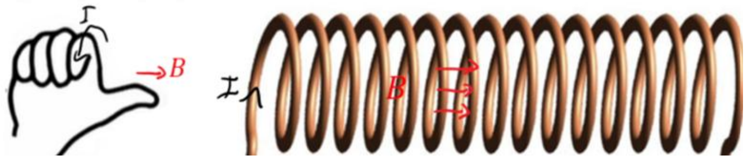


שדה של סליל אינסופי:

$$B=\mu_0 In$$

כאשר n הוא מספר הליפופים ליחידת אורך של הסליל.

כיוון, לפי כלל הבורג כאשר האצבעות בכיוון הזרם והאגודל בכיוון השדה.

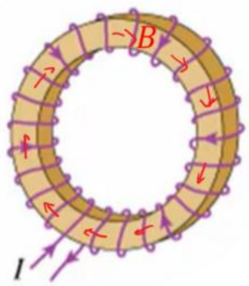


טורואיד:

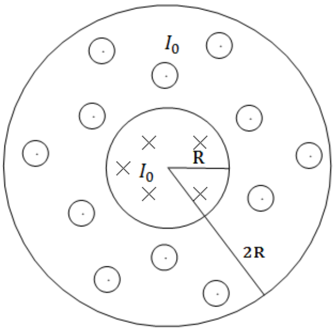
$$B=\frac{\mu_0 IN}{2\pi r}$$

N - מספר הליפופים הכולל.

r - המרחק ממרכז הטורואיד.



שאלות:



1) כבל קו-אקסיאלי

כבל קו-אקסיאלי מורכב מגליל מוליך בעל רדיוס R ומעטפת מוליכה עבה בעלת רדיוס פנימי R ורדיוס חיצוני 2R (ניתן להניח כי קיים מבודד דק בין הגליל הפנימי למעטפת).

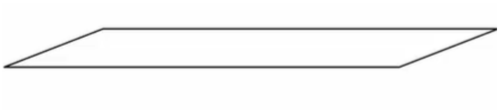
בגליל הפנימי זורם זרם I_0 בצפיפות זרם אחידה לתוך הדף.

במעטפת זורם גם כן זרם I_0 בצפיפות אחידה החוצה מהדף.

א. מצא את צפיפות הזרם בגליל ובמעטפת.

ב. מהו השדה המגנטי בכל המרחב?

2) שדה של מישור דק אינסופי



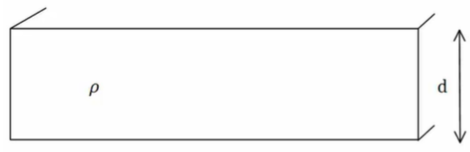
נתון מישור אינסופי דק אשר זורם בו זרם.

נניח שהמישור טעון בצפיפות מטען σ.

המישור מתחיל לנוע בכיוון ציר ה-x במהירות קבועה V_0.

חשב את השדה המגנטי.

3) שדה של מישור עבה



מישור אינסופי בעובי d טעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת נפח ρ.

המישור מונח במקביל למישור xy וראשית הצירים במרכזו.

המישור מתחיל לנוע בכיוון ציר ה-x (החוצה מהדף) במהירות קבועה V_0.

מצא את השדה המגנטי מחוץ ובתוך המישור.

4) שדה של סליל אינסופי

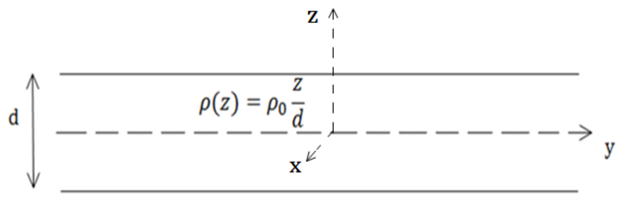
נניח אורך סליל l ומספר ליפופים כולל של סליל N.

צפיפות הליפופים n, רדיוס טבעת a ושטח חתך הסליל של כל טבעת הינו S.

קיימת סימטריה בציר ה-z.

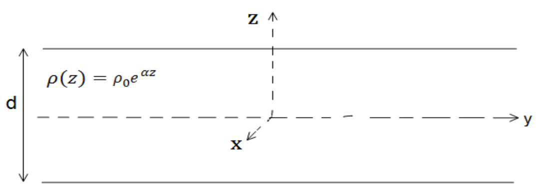
חשב את השדה המגנטי.

5) מישור עם צפיפות מטען משתנה



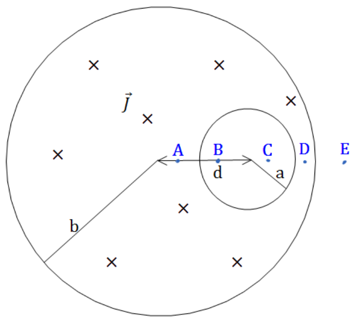
מישור אינסופי בעובי d טעון
בצפיפות מטען משתנה ליחידת
נפח $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{d}$.
המישור מונח במקביל למישור xy
וראשית הצירים במרכזו.
המישור מתחיל לנוע בכיוון ציר ה-x (החוצה מהדף) במהירות קבועה V_0 .
מצא את השדה המגנטי מחוץ ובתוך המישור.

6) מישור אינסופי עם צפיפות אקספוננציאלית



מישור אינסופי בעובי d טעון בצפיפות מטען
משתנה ליחידת נפח $\rho(z) = \rho_0 e^{\alpha z}$
כאשר אלפה קבוע.
המישור מונח במקביל למישור xy וראשית
המישור מתחיל לנוע בכיוון ציר ה-x
(החוצה מהדף) במהירות קבועה V_0 .
מצא את השדה המגנטי מחוץ ובתוך המישור.

7) חור בגליל

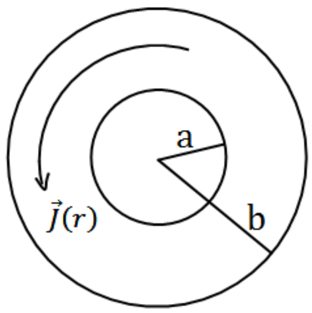


בגליל אינסופי ברדיוס a קודחים חור גלילי ברדיוס b.
מרכז החור נמצא במרחק d ממרכז הגליל.
בגליל זורם זרם לתוך הדף בצפיפות זרם אחידה
ונתונה J .

א. מצא את השדה המגנטי בנקודות A , B , C , D , E
המסומנות בסרטוט.
הנח כי מרחק הנקודות מהמרכז ידוע וכי כל
הנקודות נמצאות על הציר העובר בשני מרכזי הגלילים.

ב. מצא את השדה המגנטי בכל נקודה בתוך החור.
רמז: $\hat{\theta} = \hat{z} \times \hat{r}$ והשדה בתוך החור אחיד.

8) שדה מגנטי של זרם היקפי



בגליל אינסופי בעל רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b
זורם זרם היקפי בעל צפיפות זרם $\vec{J}(r) = Ar^3\hat{\theta}$.
מצא את השדה המגנטי בכל המרחב.
A קבוע נתון.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{J}_{in}=\frac{I_0}{\pi R^2}\hat{z}\quad r<R\,,\ \vec{J}=\frac{-I_0}{\pi 3R^2}\hat{z}\quad R<r<2R$

ב. $\vec{B}=\frac{I_0 r}{2\pi R^2}\theta\quad r<R\,,\ B=0\quad R<r<2R$

2) $\vec{B}=\frac{\sigma V_0\mu_0}{2}\begin{cases}(-\hat{y}) & z>0\\ (+\hat{y}) & z<0\end{cases}$

3) $\vec{B}=\rho_0 V_0 z(-\hat{y})\ ,\quad \vec{B}=\frac{\rho V_0 d\mu_0}{2}\begin{cases}-\hat{y} & z>\frac{d}{2}\\ \hat{y} & z<-\frac{d}{2}\end{cases}$

4) $\vec{B}=\mu_0 In\hat{z}$

5) $\vec{B}=0\quad z>\frac{d}{2}\,,\ \vec{B}=0\quad z<-\frac{d}{2}\,,\ \vec{B}=\frac{\mu_0\rho_0V_0}{2d}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2-z^2\right)\hat{y}\quad -\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2}$

6) $,\ \vec{B}=\frac{\rho_0V_0}{2\alpha}\left(e^{-\alpha\frac{d}{2}}-e^{\alpha\frac{d}{2}}\right)\hat{y}\cdot\begin{cases}(+1) & z>\frac{d}{2}\\ (-1) & z<-\frac{d}{2}\end{cases}$

$\vec{B}=\frac{\rho_0V_0}{2\alpha}\left(e^{-\alpha\frac{d}{2}}+e^{\alpha\frac{d}{2}}-2e^{\alpha z}\right)\hat{y}\quad -\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2}$

7) א. $\vec{B}_A=\frac{\mu_0 J}{2}\left(r+\frac{b^2}{d-r}\right)\hat{\theta}\,,\ \vec{B}_B=\frac{\mu_0 Jd}{2}\hat{\theta}\,,\ \vec{B}_C=\frac{\mu_0 Jd}{2}\hat{\theta}\,,\ \vec{B}_D=\frac{\mu_0 Jr}{2}\hat{\theta}-\frac{\mu_0 Jb^2}{2(r-d)}\hat{\theta}$

$\vec{B}_E=\frac{\mu_0 Ja^2}{2r}-\frac{\mu_0 Jb^2}{2(r-d)}\hat{\theta}$

ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0 J}{2}\hat{z}\times d$

8) $\vec{B}=\frac{b^4-r^4}{4}\mu_0\hat{z}\quad a<r<b\,,\ \vec{B}=A\frac{b^4-a^4}{4}\mu_0\hat{z}\quad 0<r<a$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 17 - מציאת צפיפות זרם משדה מגנטי נתון

תוכן העניינים

חוק אמפר הדיפרנציאלי:

רקע:

מציאת צפיפות זרם משטחית $\vec{J}$ משדה מגנטי נתון (חוק אמפר הדיפרנציאלי):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

מציאת צפיפות זרם קווית $\vec{k}$ משדה מגנטי נתון (כאשר יש אי רציפות בשדה):

$$\hat{n}_{1\to2}\times\Delta\vec{B}=\mu_0\vec{k}$$

כאשר $\hat{n}_{1\to2}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הקפיצה מתחום 1 לתחום 2

$$\Delta\vec{B}=\vec{B}_2-\vec{B}_1$$

בשביל למצא זרם של תיל נחפש שדה מהצורה:

$$\vec{B}=\frac{c}{r}\hat{\theta}$$

בקואורדינטות גליליות ובאזור הכולל את הראשית, לאחר מכן נשווה אותו לשדה של תיל אינסופי ($\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$) ונקבל $I=\frac{c2\pi}{\mu_0}$

שאלות:

1) מציאת צפיפות זרם משדה מגנטי נתון

מצאו את צפיפות הזרם (משטחית וקווית) היוצרת את השדה המגנטי הבא:

$$B_\theta = \begin{cases} \mathrm{Ar} + \frac{C}{r} & r < a \\ \frac{D}{r} + \frac{C}{r} & a < r \end{cases}.$$

r הוא המרחק מציר ה-z (קואורדינטות גליליות).

2) שדה בכיוון z

מצאו את צפיפות הזרם (משטחית וקווית) היוצרת את השדה המגנטי הבא:

$$\vec{B} = \begin{cases} (\mathrm{Ar}+\mathrm{C})\hat{z} & r < a \\ 0 & a < r \end{cases}.$$

r הוא המרחק מציר ה-z (קואורדינטות גליליות).

תשובות סופיות:

1) $$I = \frac{2\pi C}{\mu_0} \ , \ \vec{K} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{D}{A} - Aa\right)\hat{z} \ , \ \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\begin{cases} 2A\hat{z} & r < a \\ 0 & a < r \end{cases}$$

2) $$\vec{K}(a) = \frac{Aa + C}{\mu_0}\hat{\theta} \ , \ \vec{J} = \begin{cases} -\frac{A}{\mu_0}\hat{\theta} & r < a \\ 0 & a < r \end{cases}$$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 18 - הפוטנציאל הוקטורי

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

הפוטנציאל הוקטורי $\vec{A}$מוגדר לפי:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

משוואת פואסון לפוטנציאל הוקטורי (מחוק אמפר):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

עבור כיול של הפוטנציאל $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

פתרון המשוואה:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ניתן למצא פוטנציאל וקטורי מתוך שדה מגנטי במקרים סימטריים באמצעות אינטגרל מסלולי:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

תנאי שפה לפוטנציאל הוקטורי:

כל רכיבי הפוטנציאל הוקטורי רציפים.

פיתוח מולטיפולי עד לסדר שני:

סדר ראשון תמיד מתאפס והסדר השני הוא:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

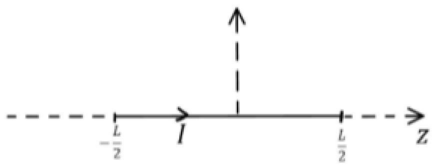
כאשר $\vec{m}$ הוא מונט הדיפול המגנטי של המערכת.

שאלות:

1) מצא צפיפות מפוטנציאל

מצא את צפיפות הזרם שיצרה את הפוטנציאל הוקטורי $\vec{A} = C\hat{\varphi}$ בקואורדינטות גליליות, כאשר C קבוע.

2) פוטנציאל וקטורי של תיל סופי



תיל סופי באורך L נושא זרם I מונח לאורך ציר ה-z.

א. מצא את הפוטנציאל הוקטורי בכל המרחב שיוצר התיל.

ב. מצא את השדה המגנטי בנקודה מעל אמצע התיל.

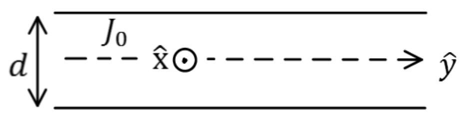
3) סליל אינסופי

נתון סליל אינסופי עם צפיפות ליפופים ליחידת אורך n ורדיוס a.
מצא את הפוטנציאל הוקטורי בכל המרחב אם בסליל זורם זרם I.

4) גליל אינסופי

מצא את הפוטנציאל הוקטורי שיוצר גליל אינסופי ברדיוס a הנושא זרם I, אם צפיפות הזרם בגליל אחידה.

5) מישור עבה עם צפיפות זרם אחידה



מישור אינסופי נמצא במקביל למישור $x-y$ כאשר המישור $x-y$ נמצא במרכזו.
במישור צפיפות זרם אחידה $\vec{J} = J_0\hat{x}$.
עובי המישור הוא d.

א. מצא את כיוון הפוטנציאל הוקטורי במרחב.

ב. מצא את פונקציית הפוטנציאל הוקטורי בכל המרחב.

תשובות סופיות:

1) $\vec{J}=\frac{C}{r^2}\hat{\varphi}$

2) א. $\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{z+\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+x^2+y^2}}{z-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+x^2+y^2}}\right)\hat{z}$ ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0 IL\cdot\hat{y}}{4\pi x\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+x^2}}$

3) $\vec{A}=\frac{\mu_0 In}{2}\hat{\varphi}\quad r<a\ ,\ \vec{A}=\frac{\mu_0 Ina^2}{2r}\hat{\varphi}\quad r>a$

4) $\vec{A}=\frac{\mu_0 J_0}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\hat{z}\quad r<a\ ,\ \vec{A}=\frac{\mu_0 J_0}{2}\left(\frac{a^2}{2}+a^2\ln\frac{r}{a}\right)\hat{z}\quad r>a$

5) א. $\vec{A}=A(z)\hat{x}\ ,\ \vec{B}=B(z)\hat{y}$ ב. $A(z)=\begin{cases}-\mu_0 J\frac{z^2}{2}\hat{x} & |z|<\frac{d}{2}\\ \frac{-\mu_0 Jd}{2}\left(z-\frac{d}{4}\right)\hat{x} & |z|>\frac{d}{2}\end{cases}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 19 - מומנט דיפול מגנטי

תוכן העניינים

הסברים ותרגילים:

רקע:

דיפול מגנטי הוא לולאת זרם סגורה.

מומנט הדיפול המגנטי:

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

I - הזרם בלולאה

$\vec{A}$ - השטח הסגור על-ידי הלולאה. כיוונו במאונך למשטח ובהתאם לכלל יד ימין של הזרם.

מומנט הדיפול מסומן לעיתים גם באות $\vec{m}$.

השדה שיוצר דיפול מגנטי במרחק הגדול בהרבה מממדיי הדיפול:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0[3(\vec{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}]}{4\pi r^3}$$

מומנט כוח שפועל על דיפול מגנטי הנמצא בשדה מגנטי חיצוני:

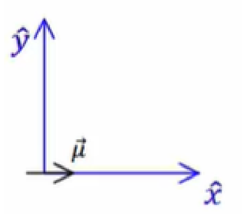
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

האנרגיה הפוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי חיצוני:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

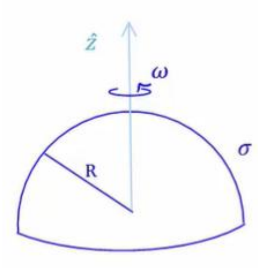
שאלות:

1) מטען מסתובב סביב דיפול בראשית



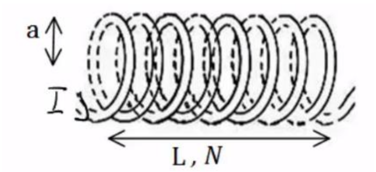
נתון דיפול מגנטי הממוקם בראשית $\mu = (\mu, 0,0)$.
מצא את μ כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $(0, -a, 0)$
עם מהירות $(0,0, v)$ יבצע תנועה מעגלית.

2) חצי קליפה כדורית מסתובבת



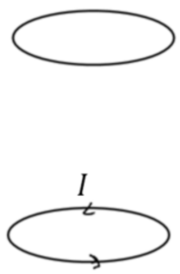
חצי קליפה כדורית, טעונה בצפיפות מטען
משטחית σ ומסתובבת סביב ציר z.
מצא את מומנט הדיפול המגנטי של הקליפה.

3) מומנט דיפול מגנטי של סליל



חשב את מומנט הדיפול המגנטי של סליל.

4) טבעת משרה זרם בטבעת



נתונות שתי טבעות מוליכות הנמצאות זו מעל זו.
מזרימים זרם בטבעת התחתונה נגד כיוון השעון
שעוצמתו הולכת וגדלה.

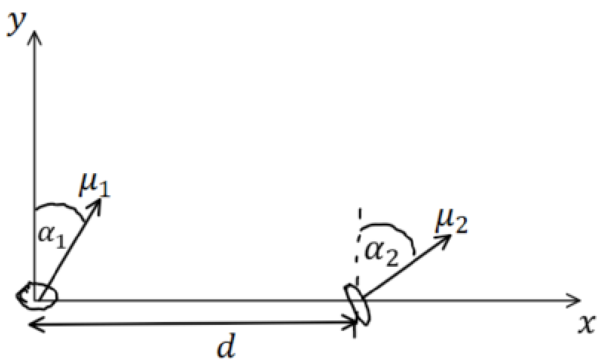
א. מה כיוון הזרם בטבעת העליונה?
ב. ניתן להסתכל על דיפול מגנטי כמגנט קטן כך שכיוון מומנט הדיפול הוא הכיוון מדרום לצפון של המגנט.
לאן יפעל הכוח בין הטבעות?

מזיזים את הטבעת העליונה להיות לצד הטבעת התחתונה .

ג. חזרו על סעיף א.

5) אנרגיית דיפול דיפול

שני דיפולים מגנטיים נמצאים במרחק d זה מזה לאורך ציר ה-x.
לשני הדיפולים מומנט מגנטי הזהה בגודלו: $|\vec{\mu_1}| = |\vec{\mu_2}| = \mu$.
שני וקטורי מומנט הדיפול נמצאים על מישור $x - y$ והזוויות שלהם עם ציר ה-y הן α_1 ו- α_2 בהתאמה. מצאו את העבודה הדרושה להרחיק את הדיפולים ממצב זה עד אינסוף. הניחו שהדיפולים אינם משנים את כיוונם בזמן שהם מתרחקים.



תשובות סופיות:

1) $|e|\frac{\mu_0 \cdot \mu}{4\pi a^2} = m_e v$

2) $\vec{\mu} = \frac{2\pi R^4}{3}\sigma\omega \cdot \hat{z}$

3) $\mu_T = NI\pi a^2$

4) א. עם השעון. ב. כוח דחייה. ג. נגד השעון.

5) $\frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{4\pi d^3}\left(2\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\right)$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 20 - חומרים מגנטים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

חומרים פאראמגנטיים - חומרים המחזקים את השדה החיצוני.

בד"כ חומרים בעלי אטומים עם מס אלקי' לא זוגי, לאטומים אלו דיפול מגנטי כתוצאה מסיבוב האלקטרון ה"נוסף".
הדיפולים מתיישרים לכיוון השדה החיצוני ומגבירים אותו.

חומרים דיאמגנטיים - חומרים המקטינים את השדה החיצוני.

בד"כ חומרים ללא מונמט דיפול טבעי של האטומים.

נוכחות השדה החיצוני גורמת ליצירת מומנט דיפול הפוך לשדה הקיים (על ידי שינוי מהירות הסיבוב של האלקטרון) ובכך להחלשת השדה החיצוני.

חומרים פרומגנטיים - חומרים בהם הקיטוב המגנטי נשמר גם כאשר השדה החיצוני נפסק.
הקיטוב תלוי "בהיסטוריה" של החומר.

אפקט פרומגנטי>> דיאמגנטי>>פאראמגנטי.

וקטור המגנטיזציה $\vec{M}$:
מומנט דיפול ליחידת נפח בחומר (יחידות של מומנט דיפול מגנטי חלקי נפח).

$$\vec{M} = N\vec{m}_1$$

N - מספר הדיפולים ליחידת נפח בחומר.
$\vec{m}_1$ - מומנט הדיפול של דיפול יחיד בחומר.

מומנט הדיפול הכולל של החומר:

$$\vec{m} = \int \vec{M}\, dV$$

ניתן לחשב את השדה המגנטי שיוצרים הדיפולים באמצעות חישוב השדה של צפיפות זרם קשורה.

צפיפות זרם קשורה משטחית וקווית בחומר:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{k}_b = \vec{M} \times \hat{n}$$

$\hat{n}$ - וקטור המאונך לשפת החומר וכלפי חוץ.

ניתן להפריד את צפיפות הזרם לשני חלקים:

$$\vec{J}_T = \vec{J}_b + \vec{J}_{free}$$

כאשר $\vec{J}_{free}$- היא צפיפות הזרם הנובעת ממטענים החופשיים לזוז בחומר
ו-$\vec{J}_b$ נובעת מהמגנטיזציה.

הוקטור $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

הוקטור $\vec{H}$ מקיים את חוק אמפר עבור הזרמים החופשיים:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{free}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{in_{free}}$$

הדיברגנט של $\vec{H}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

חומרים לינארים:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

כאשר χ_m היא הסוסטביליות המגנטית, תכונה שתלויה בחומר ובדרך קבועה.
ו- μ היא הפרמביליות המגנטית כך ש:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

תנאי שפה :

1. $H_{2\perp} - H_{1\perp} = -(M_{2\perp} - M_{1\perp})$
2. $\vec{H}_{2||} - \vec{H}_{1||} = \vec{k}_{free} \times \hat{n}_{1\to 2}$
3. $B_{2\perp} = B_{1\perp}$
4. $\vec{B}_{2||} - \vec{B}_{1||} = \vec{k}_{T} \times \hat{n}_{1\to 2}$

הכי נוח להשתמש בתנאים 2 ו- 3 ואלו מספיקים בשביל למצא את כל הרכיבים של כל השדות בהנחת הלינאריות או בהינתן המגנטיזציה.

מודל המטען המגנטי :

אם : $\vec{J}_{free} = 0$ אז : $\vec{H}$ שדה משמר וניתן להגדיר פונקציית פוטנציאל מגנטי :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_m$$

את הפוטנציאל (או השדה) ניתן למצא כמו שמוצאים פוטנציאל באלקטרוסטטיקה ממטען (באמצעות חוק גאוס, חוק קולון, משוואת לאפלאס או כל שיטה אחרת), כאשר "המטען" המגנטי הוא :

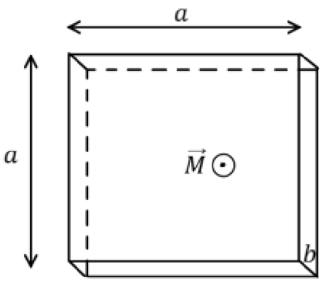
$$\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

משוואת לאפלאס :

$$\vec{\nabla}^2\phi_m = -\rho_m$$

- המודל תקף גם אם יש $\vec{k}_{free}$ (זרם חופשי על השפה).
- המודל תקף גם עבור חומרים לא לינאריים.

שאלות:

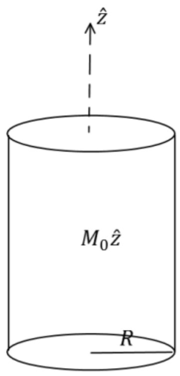


1) תיבה דקה ממוגנטת

נתונה תיבה בעלת אורך ורוחב a ועובי b << a.
לתיבה מגנטיזציה "קפואה" (התיבה ממוגנטת כאשר היא לא בתוך שדה מגנטי חיצוני)ואחידה $\vec{M}$.
כיוון המגנטיזציה בכיוון מקביל לצלע b.

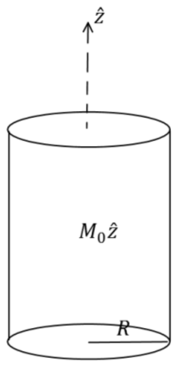
א. מצא את השדה המגנטי במרכז התיבה.

ב. מצא את השדה המגנטי רחוק מאוד מהתיבה.



2) גליל אינסופי ממוגנט

גליל אינסופי ברדיוס R מקוטב בצורה אחידה $\vec{M} = M_0\hat{z}$.
מצא את השדה המגנטי בכל המרחב.



3) גליל ממוגנט נוסף

גליל אינסופי ברדיוס R מקוטב בצורה $\vec{M} = Ar\hat{\varphi}$.
כאשר A קבוע כלשהו ו- r הוא המרחק ממרכז הגליל.

א. מצא את הזרמים הקשורים בגליל ומצא את השדה המגנטי במרחב.

ב. מצא את השדה המגנטי בכל המרחב ע"י שימוש בוקטור השדה H וללא שימוש בזרמים קשורים.

4) סליל עם ליבה מגנטית

נתון סליל אינסופי עם צפיפות ליפופים ליחידת אורך n.
מכניסים לסליל ליבה מגנטית בעל סוספטביליות נתונה χ_m הממלאת את כל הנפח הכלוא בסליל.
מצא את השדה המגנטי בתוך הסליל אם בסליל זורם זרם I.

5) אנרגיה להאט גליל מסתובב

גליל אינסופי ברדיוס R בעל מקדם פראמבליות יחסי $\mu_r = \alpha r$ טעון בצפיפות מטען אחידה ליח' נפח ρ .

הגליל מסתובב סביב ציר הסימטריה שלו במהירות זוויתית ω.

א. מהו השדה המגנטי בתוך הגליל?

ב. כמה אנרגיה ליחידת אורך יש להשקיע על מנת להאט את המהירות הזוויתית של הגליל לרבע ממהירותו הנוכחית?

6) חומר ממלא חצי מרחב

חומר בעל צפיפות אטומים של $\mathrm{n} = 2 \cdot 10^{28}\left[\frac{1}{m^3}\right]$ נמצא תחת שדה מגנטי חיצוני אחיד. החומר מתמגנט כך שבכל אטום מתקבל בממוצע דיפול מגנטי של $\vec{m} = 1.2 \cdot 10^{-24}[\mathrm{A} \cdot m^2]\hat{x}$.

השדה המגנטי הנמדד בתוך החומר הוא : $\vec{\mathrm{B}} = 0.04[\mathrm{T}]\hat{x}$.

א. מצא את המגנטיזציה $\vec{\mathrm{M}}$ בחומר, את הסוספטביליות המגנטית χ_m ואת הפאראמביליות μ של החומר.

ב. הנח שהחומר ממלא את חצי המרחב $x < 0$ וחצי המרחב השני הוא ריק. מהם הזרמים המושרים במרחב?

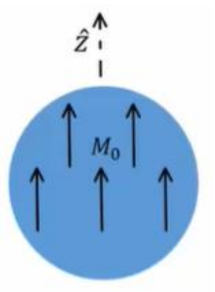
ג. מצא את השדה החיצוני $\vec{\mathrm{H}}$ אשר יצר את המגנטיזציה.

ד. מה יהיה השדה המגנטי $\vec{\mathrm{B}}$ בריק, סמוך מאוד לגבול בין הריק לחומר? כיצד תשתנה התוצאה אם החומר ממלא את חצי המרחב $y < 0$?

7) כדור ממוגנט

כדור ברדיוס R ממוגנט במגנטיזציה קבועה $\vec{\mathrm{M}} = \mathrm{M}_0\hat{z}$.

מצא את הפוטנציאל המגנטי בכל המרחב.



תשובות סופיות:

1) א. ראה סרטון ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{(3Ma^2b\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}-Ma^2b\hat{z}}{r^3}\right)$

2) $\vec{B}=\mu_0\vec{M}$

3) א. $\vec{k}_b=-AR\hat{z}$, $\vec{J}_b=2A\hat{z}$, $\begin{matrix}\vec{B}=\mu_0\vec{M} & r<R \\ B=0 & r>R\end{matrix}$ ב. $\vec{B}=\mu_0\vec{M}$

4) $\vec{B}=\mu_0(1+Xm)nI\hat{z}$

5) א. $\vec{B}=\mu_0\alpha r\rho\omega\frac{R^2-r^2}{2}\hat{z}\quad r<R$, $\vec{B}=0\quad r>R$

ב. $\Delta\left(\frac{U_B}{l}\right)=\mu_0\alpha\rho^2\cdot\pi R^7\omega^2\cdot\frac{1}{56}(-1)$

6) א. $\mu=3.86\cdot10^{-6}\left(\frac{T\cdot m}{A}\right)$, $Xm\approx2.07$, $\vec{M}=2.4\cdot10^4\left(\frac{A}{m}\right)\hat{x}$ ב. $\vec{J}_b=0$, $\vec{k}=0$

ג. $H=\begin{cases}1.16\cdot10^4\left(\frac{A}{m}\right)\hat{x} & x<0 \\ 3.56\cdot10^4\left(\frac{A}{m}\right)\hat{x} & x>0\end{cases}$ ד. $B_x(0^+)=0.04T$, $\vec{B}\approx0.01T\hat{x}$

7) $\phi_{m_1}=\frac{M_0}{3}r\cos\varphi$, $\phi_{m_2}=\frac{M_0R^3}{3}\cos\varphi$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 21 - חוק פאראדיי-מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

חוק פארדיי:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

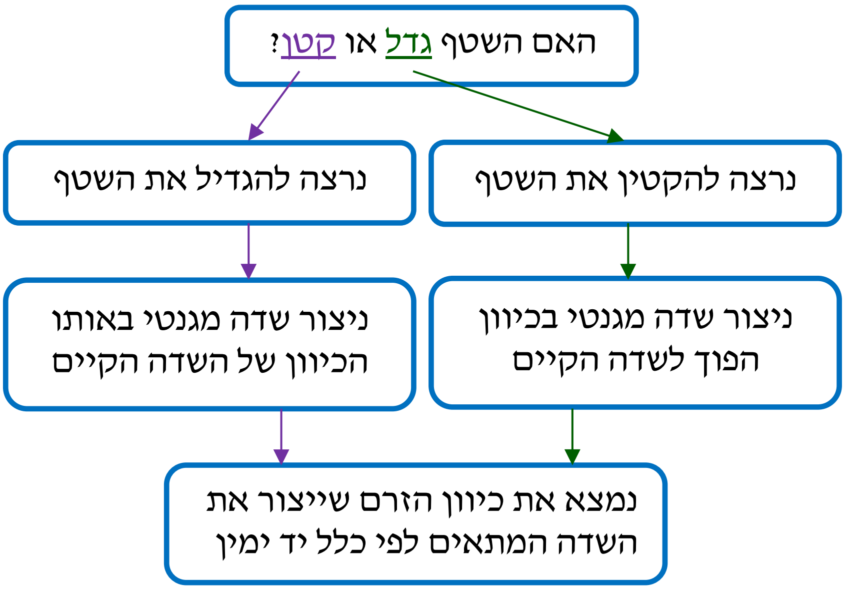
$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

הכא"מ מתנהג כמו מקור מתח במעגל.

בד"כ נמצא באמצעות החוק את גודל הכא"מ ואת הכיוון נמצא לפי חוק לנץ.

חוק לנץ:

הזרם נוצר בניגוד לשינוי בשטף.



הספק של כוח הפועל על גוף בתנועה:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

כאשר $\vec{v}$ היא מהירות הגוף.

כא"מ הנוצר במוט הנע בשדה מגנטי:

$$\varepsilon = BLv\sin\alpha$$

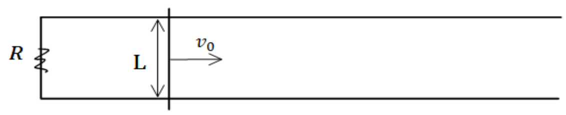
כאשר v היא מהירות המוט, L האורך שלו ו- α היא הזווית בין המהירות לשדה.

כיוון הכא"מ הוא בכיוון של הכוח המגנטי הפועל על מטען חיובי בתוך המוט.

שאלות:

1) מוט שזז על מסילה

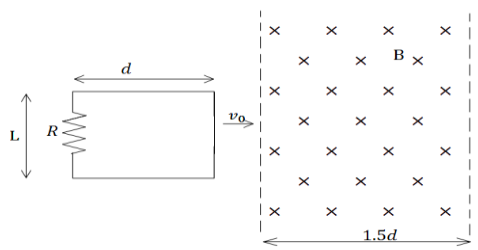
במערכת הבאה ישנה מסילה המורכבת ממוליכים אידיאליים.
בתחילת המסילה נמצא נגד R.
המרחק בין פסי המסילה הוא L.
על המסילה נמצא מוט מוליך נוסף המחבר בין שני פסי המסילה,
המוט הנוסף נע במהירות קבועה V_0.



א. מהו הכא"מ במעגל?
ב. מהו הזרם במעגל?
ג. מהו הכוח החיצוני הדרוש על מנת למשוך את המוט במהירות קבועה?
ד. מהו ההספק של הכוח החיצוני?
ה. מהו ההספק בנגד?

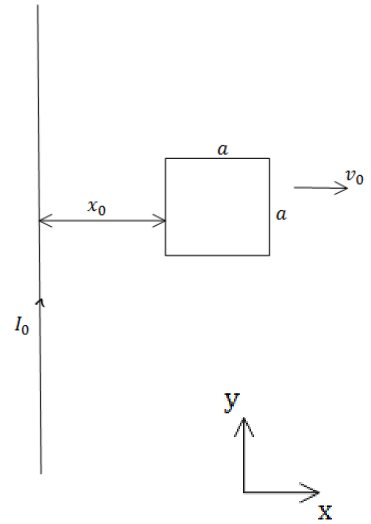
2) מסגרת נעה בתוך שדה

מסגרת מלבנית בעלת אורך d ורוחב L,
נעה במהירות קבועה v_0, לכיוון אזור בו שורר שדה מגנטי אחיד B.
אורך האזור הוא 1.5d ורוחבו ארוך מאוד.
למסגרת התנגדות כוללת R.
הנח כי ב- $t = 0$ הצלע הימנית של המסגרת נכנסת לאזור עם השדה.



א. מצאו את הכא"מ במסגרת (כתלות בזמן).
ב. מצאו את הזרם במסגרת, גודל וכיוון (כתלות בזמן).
ג. מצאו את הכוח הדרוש להפעיל על המסגרת על מנת שתנוע במהירות קבועה.
ד. מהו ההספק של הכוח ומהו ההספק שהופך לחום בנגד?

3) מסגרת נעה ליד תיל אינסופי



מסגרת ריבועית מוליכה עם צלע a נמצאת על מישור xy.

ונע במהירות קבועה V_0 בכיוון ציר ה- x.

מיקום המסגרת ב- $t=0$ הוא x_0.

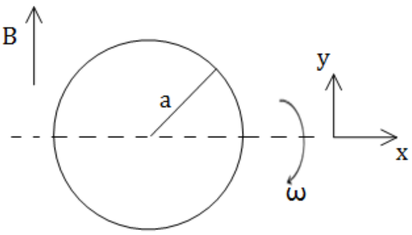
תיל אינסופי מונח לאורך ציר ה- y וזורם בו זרם I_0 בכיוון החיובי של ציר ה- y.

א. מצא את הכא"מ במסגרת.

ב. מצא את הזרם במסגרת אם ידוע שההתנגדות הכללית שלה היא R.

ג. מצא את הכוח הדרוש על מנת להזיז את המסגרת במהירות קבועה.

4) טבעת מסתובבת



טבעת מוליכה ברדיוס a מונחת במישור xy ומתחילה להסתובב במהירות זוויתי קבועה ω סביב ציר ה-x.

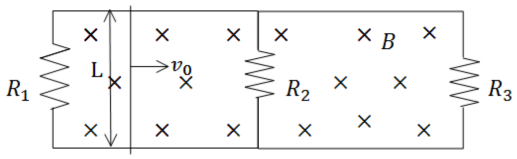
במרחב קיים שדה מגנטי אחיד B_0 בכיוון ציר y.

א. מצא את הכא"מ בטבעת כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את הכא"מ בטבעת אם גם השדה המגנטי משתנה בזמן לפי $B(t) = B_0\cos(\omega t)$.

5) מוט זז בתוך מעגל

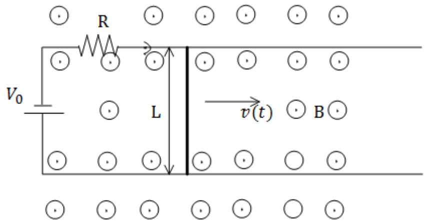
מוט מוליך באורך L נע על צלעותיו של המעגל הבא.



בתוך המעגל קיים שדה מגנטי אחיד וקבוע לתוך הדף B.

נתונים: L, v_0, R_1, R_2, R_3, B.

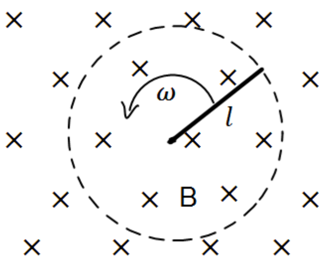
מצא את הזרם משני צידי המוט עבור המקרה בו המוט נמצא בין הנגד הראשון לשני ועבור המקרה בו המוט נמצא בין הנגד השני לשלישי.



6) מוט נע על מסגרת עם מקור מתח

מוט מוליך באורך L ומסה M נע על גבי מסילה מוליכה במהירות שאינה קבועה בזמן. למסילה מחוברים נגד בעל התנגדות R ומקור מתח V_0 .
בכל המרחב קיים שדה מגנטי אחיד B החוצה מהדף.

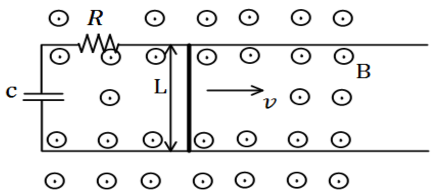
א. מצא את הכא״מ במוט כתלות במהירות המוט, ומצא את הזרם במעגל גודל וכיוון.
ב. רשום משוואת תנועה עבור המוט, מהי מהירותו הסופית.
ג. מצא את מהירות המוט כתלות בזמן אם התחיל ממנוחה.
ד. מהו הספק החום בנגד?



7) מוט מסתובב

מוט בעל אורך l מסתובב סביב אחד הקצוות שלו במהירות זוויתית קבועה ω.
המוט נמצא בשדה מגנטי אחיד B הניצב למישור בו הוא מסתובב.

א. מצא את המתח בין קצות המוט באמצעות אינטגרציה על חוק לורנץ.
ב. מצא את המתח במוט באמצעות חוק פארדיי.

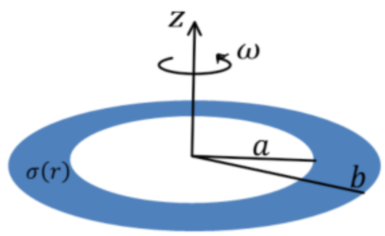


8) פארדיי עם קבל ונגד ביחד

מוט מוליך באורך L נע על גבי מסילה מוליכה במהירות קבועה בזמן v.
למסילה מחוברים נגד בעל התנגדות R וקבל בעל קיבול C.
בכל המרחב קיים שדה מגנטי אחיד B החוצה מהדף.

א. מצא את הזרם במעגל גודל וכיוון (כתלות בזמן).
ב. מה הכוח בו צריך למשוך את המוט על מנת שיישאר במהירות קבועה?
ג. מצא מהו ההספק של הכוח הנ״ל (כתלות בזמן).
ד. מצא מהו ההספק בנגד ובקבל (כתלות בזמן).
ה. הראה כי ההספק של הכוח החיצוני שווה להספק של הקבל והנגד. הסבר מדוע ההספקים שווים.

9) טבעת בתוך טבעת רחבה



טבעת מבודדת בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b טעונה בצפיפות מטען משטחית חיובית ולא אחידה.

$$\sigma(r)=\begin{cases}0 & r<a\\ \sigma_0\dfrac{a}{r} & a\le r\le b\\ 0 & b<r\end{cases}.$$

הטבעת מונחת במישור xy כך שמרכזה מתלכד עם ראשית הצירים וציר z עובר דרך מרכז הטבעת ומאונך לפני הטבעת.

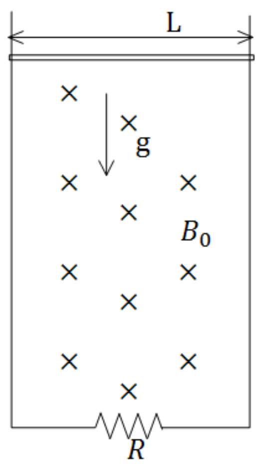
מסובבים את הטבעת סביב ציר z (המאונך למישור הטבעת) במהירות זוויתית שהולכת וגדלה עם הזמן לפי הנוסחה $\omega = \alpha t^3$.

א. מהו השדה המגנטי במרכז הטבעת?

ב. במרכז הטבעת מניחים טבעת קטנה ודקה במישור xy כך שמרכזה מתלכד עם ראשית הצירים ורדיוסה r_0 ($r_0 \ll a$).
חשבו את השטף בטבעת הקטנה, מאחר והטבעת הקטנה מאוד קטנה יחסית לטבעת הגדולה תוכלו להזניח את השינוי במרחב של השדה המגנטי העובר דרך הטבעת הקטנה.

ג. חשבו את הזרם שייווצר בטבעת הקטנה אם התנגדותה R.

10) מוט נופל מחובר למסילה



מוט מוליך מונח על מסילה אנכית ונופל בהשפעת כוח הכובד. במרחב קיים שדה מגנטי B_0 לתוך הדף.
רוחב המסילה הוא L ומסת המוט היא M.
התנגדות המסילה קבועה ושווה ל-R.

א. מצא את הכא"מ במעגל כתלות במהירות המוט v.

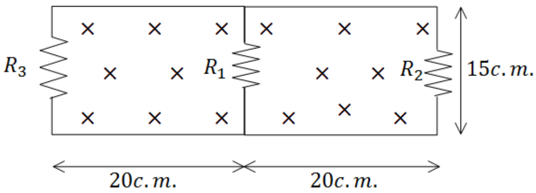
ב. מצא את כיוון השדה המושרה ואת כיוון הזרם שנוצר במעגל.

ג. מצא את הכוח המגנטי הפועל על המוט (עדיין כתלות במהירות).

ד. רשום משוואת כוחות על המוט.
מהי המהירות הסופית של המוט?

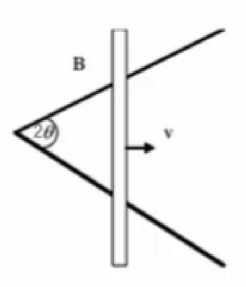
ה. מצא את המהירות והזרם כפונקציה של הזמן.

11) כא"מ בשני מעגלים



במעגל הבא התנגדות הנגדים היא:
$R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 3\Omega$.
במרחב קיים שדה מגנטי $B = 2\frac{T}{sec} \cdot t$
אחיד לתוך הדף.
ממדי המעגל נתונים בשרטוט.
מצא את הזרם בכל נגד.

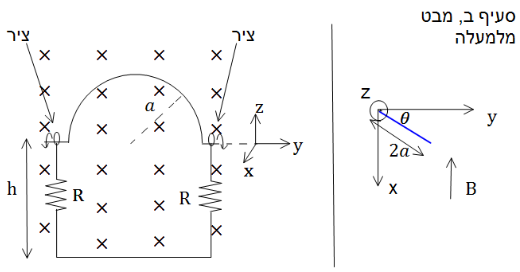
12) מוט נע על מסילות בזווית



שתי מסילות מוליכות יוצרות זווית 2θ ביניהן.
מוט מוליך מונח עליהן ויוצר משולש שווה שוקיים.
המוט נע לאורכם במהירות קבועה v, ומתחיל את תנועתו בקדקוד המשולש.
כל המערכת נמצאת בשדה מגנטי אחיד B היוצא מהדף.

א. מצא את הכא"מ המושרה כפונקציה של הזמן.
ב. אם התנגדותו של המוט ליחידת אורך היא R_1, והמסילות חסרות התנגדות, חשב את הזרם המושרה כפונקציה של הזמן.
ג. חשב את ההספק שמועבר למערכת ליצירת הזרם.

13) כבל מסתובב

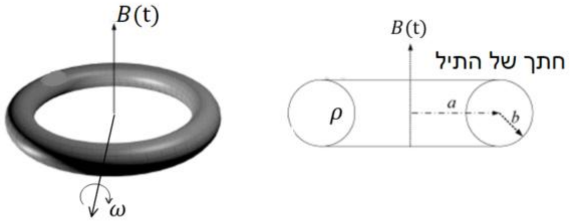


במערכת הבאה ישנו כבל מוליך אידיאלי בצורת חצי מעגל ברדיוס a.
בשתי הקצוות של חצי המעגל הכבל מחובר לצירים כך שניתן לסובבו סביבם (סביב ציר ה-y בציור).
הצירים מחוברים למסגרת מלבנית בגובה $h > a$, המסגרת קבועה במקום.
בכל צד של המסגרת קיים נגד R.
במרחב קיים שדה מגנטי אחיד B לתוך הדף (במינוס x).
ב- $t = 0$ הכבל נמצא במצב המתואר בציור ומתחילים לסובבו סביב הצירים (ציר ה-y) במהירות זוויתית ω (להמחשה, ברגע הראשון כל הנקודות במעגל מתקדמות אלינו).

א. מהו הזרם בכבל?
ב. נניח כי העמוד השמאלי של המסגרת נמצא בראשית וניתן לסובב את כל המערכת סביב עמוד זה.
מצא את הזווית בה צריך לסובב את המסגרת כך שהזרם יקטן פי 2.
ג. מצא את הזווית בה צריך לסובב את המסגרת כך שההספק יקטן פי 2.

14) גוש נחושת מעוצב לטבעת

נתון גוש נחושת בעל מסה m צפיפות מסה α והתנגדות סגולית ρ.
מעבדים את הנחושת לתיל שרדיוס שטח החתך שלו הוא b.
יוצרים מהתיל טבעת שרדיוסה a כך ש-a >> b.



מניחים את הטבעת מקובעת במרחב כך שקיים שדה מגנטי אחיד המשתנה בזמן $B(t)$ במאונך לטבעת.
קצב השינוי של השדה הוא $\beta = \frac{dB}{dt}$.

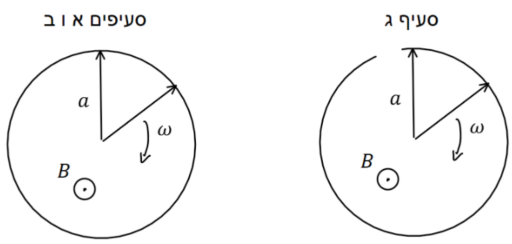
א. חשב את הזרם המושרה בטבעת.

ב. הראה כי אפשר לבטא את הזרם כתלות של β, ρ, α, m וללא תלות במימדי התיל (כלומר אינו תלוי ב-a ו-b).

ג. כעת מתחילים לסובב את הטבעת במהירות זוויתית ω סביב ציר העובר במרכזה ומאונך לשדה המגנטי.
חשב את הזרם הנוצר בטבעת כתלות בזמן.
האם כעת הוא תלוי במימדי התיל?

15) שעון פארדיי

לטבעת מוליכה שאורך מחוגה a והתנגדותה ליחדת אורך היא r מחברים שני מחוגים מוליכים שהתנגדות כל אחד מהם היא R.
המחוגים מחוברים אחד לשני במרכז הטבעת ובקצה השני נוגעים בטבעת.
מחוג אחד קבוע במקומו והשני מסתובב במהירות זוויתית קבועה ω.



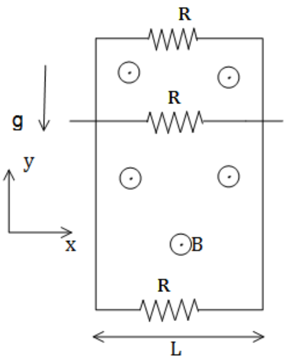
בכל המרחב קיים שדה מגנטי אחיד B החוצה מהדף.

א. חשבו את ההתנגדות הכוללת של המעגל כתלות בזווית θ.

ב. חשבו את גודל וכיוון הזרם כתלות בזמן בכל מחוג עבור הסיבוב הראשון (הניחו שהמוט הנע מתחיל תנועתו בצמוד למוט הנייח).

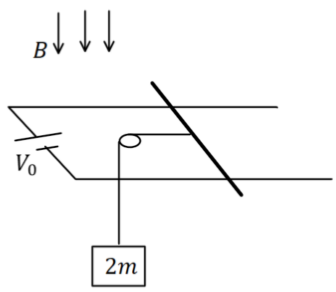
ג. חותכים חתיכה בסוף המעגל של הטבעת (ראה ציור).
חזור על סעיף ב.

16) נגד נופל במסגרת



מסגרת מלבנית מוליכה, ארוכה מאוד ובעלת רוחב L, נמצאת בשדה הכובד. אורכה נמצא על ציר ה-y ורוחבה על ציר ה-x. בצלע העליונה ובצלע התחתונה של המסגרת קיימים נגדים עם התנגדות זהה R.
מוט מוליך בעל התנגדות זהה R מחליק לאורך ציר ה-y על המסגרת.
מצא את המהירות הסופית של המוט אם במרחב קיים שדה מגנטי אחיד B בכיוון z ונתונה מסת המוט.

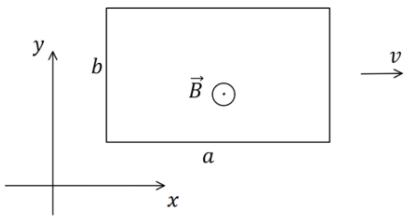
17) מוט על מסילה מחובר למשקולת



מוט מוליך בעל אורך L, מסה m והתנגדות R מונח על מסילה אופקית חלקה העשויה משני מוליכים ארוכים מאוד וחסרי התנגדות.
המוליכים מחוברים בקצה למקור מתח V_0.
בכל המרחב קיים שדה מגנטי אחיד B המאונך למישור המסילה וכלפי מטה.
משקולת שמסתה $2m$ מחוברת למוט באמצעות חוט דרך גלגלת אידיאלית.

א. חשבון את V_0 אם נתון שהמוט במנוחה.
ב. חותכים את החוט.
רשמו משוואת תנועה עבור המוט ומצאו את המהירות המירבית של המוט, מה הזרם במהירות זו?
ג. מצאו את מהירות המוט כתלות בזמן והשוו לתשובה של סעיף ב.

18) מסגרת נעה בשדה מגנטי משתנה ליניארית



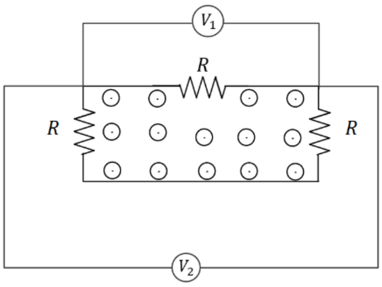
מסגרת מלבנית בגודל $a \times b$ מסה m והתנגדות R נמצאת על מישור xy. המסגרת נעה באיזור בו קיים שדה מגנטי $\vec{B}(x) = \alpha(x_0 - x)\hat{z}$.
ברגע $t = 0$ מהירות המסגרת היא $v_0\hat{x}$
כאשר v_0, x_0, α קבועים נתונים.

א. מצא את הכא״מ בלולאה כתלות במהירות הלולאה.
הראה כי הוא אינו תלוי במיקום ההתחלתי של המסגרת.
ב. מצא את מהירות הלולאה כתלות בזמן.
ג. מהו המרחק אותו עברה הלולאה עד לעצירתה?

19) מעגל עם פארדיי

במעגל המכיל שלושה נגדים זהים קיים שדה מגנטי משתנה בזמן בחלק הפנימי של המעגל בלבד.

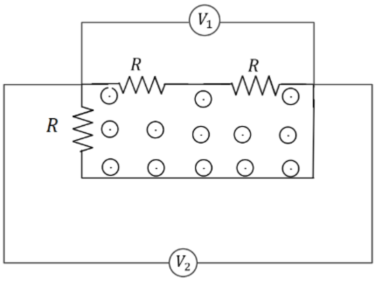
אם מד המתח V_1 מורה $1mV$ מה מורה מד המתח V_2?



20) מעגל עם פארדיי 2

במעגל המכיל שלושה נגדים זהים קיים שדה מגנטי משתנה בזמן בחלק הפנימי של המעגל בלבד.

אם מד המתח V_1 מורה $1mV$ מה מורה מד המתח V_2?



21) מעגל עם פארדיי 3

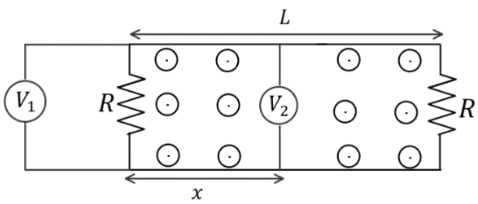
במעגל הבא שני נגדים זהים. בין הנגדים (ורק ביניהם) קיים שדה מגנטי אחיד המשתנה בזמן. המרחק בין הנגדים הוא L. מחברים שני מדי מתח אידיאלים כפי שמתואר באיור כאשר x הוא המרחק של מד המתח V_2 מהנגד השמאלי.

נתון כי מד המתח V_1 מודד $1mV$.

מה ימדוד מד המתח V_2 אם:

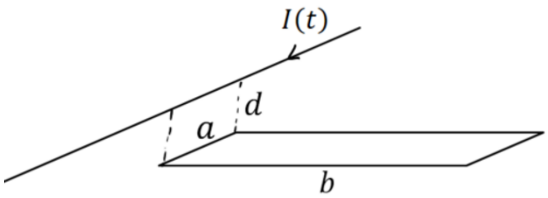
א. $x = \frac{1}{2}L$

ב. $x = \frac{1}{4}L$



22) תיל מעל מסגרת

בתיל אינסופי זורם זרם התלוי בזמן $I(t)$. התיל נמצא בגובה d מעל מסגרת מלבנית ובמקביל לאחת מצלעות המסגרת, ראו שרטוט. גודל המסגרת הוא $a \times b$ מהו השטף של השדה המגנטי דרך המסגרת כתלות ב-$I(t)$?



תשובות סופיות:

1) א. $\varepsilon=-BLV_0$ ב. $I=\frac{BLV_0}{R}$ ג. $\vec{F}_{0xt}=\frac{B_0^2L^2V_0}{R}\hat{x}$

ד. $\rho_{ext}=\frac{B_0^2L^2V_0}{R}$ ה. $\rho_R=\frac{BLV}{R}$

2) א. $|\varepsilon|=BLV_0$ ב. $I=\frac{BLV_0}{R}$ ג. $\vec{F}_{ext}=\frac{B^2L^2V_0}{R}\hat{x}$

ד. $\rho_{ext}=\frac{B^2L^2V_0{}^2}{R}$

3) א. $\varepsilon=-\frac{\mu_0I_0a}{2\pi}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}\right)V_0$ ב. $I=\frac{-\frac{\mu_0I_0a}{2\pi}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}\right)V_0}{R}$

ג. $\left|\vec{F}\right|=F_1-F_2$

4) א. $\varepsilon=-B_0\pi a^2(-\omega)\sin(\omega t)$ ב. $\varepsilon=\omega B_0\pi a^2\sin(2\omega t)$

5) בין הראשון לשני: $I_L=I_1\ ,\ I_R=I_2+I_3$

בין השני לשלישי: $I_L=I_1+I_2\ ,\ I_R=I_3$

6) א. $|\varepsilon|=BLV(t)$ ב. $a=\frac{BL}{MR}\left(-BLV(t)+V_0\right)\ ,\ V_{final}=\frac{V_0}{BL}$

ג. $V(t)=\frac{V_0}{BL}\left(1-e^{-\frac{B^2L^2}{MR}t}\right)$ ד. $P_R=\left(\frac{BLV(t)-V_0}{R}\right)^2R$

7) א. $\varepsilon=B\frac{l^2}{2}\omega$ ב. $\varepsilon=-B\cdot\omega\frac{l^2}{2}$

8) א. $I(t)=\frac{BLV}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ ב. $F_{ext}=\frac{B^2L^2V}{R}e^{\frac{-t}{RC}}\hat{x}$ ג. $P_F=\frac{B^2L^2V^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\neq I^2R$

ד. $P_R=\frac{B^2L^2V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\ ,\ P_C=\frac{B^2L^2V^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{RC}}-e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$ ה. הוכחה

9) א. $\vec{B}=\mu_0\sigma_0a\omega\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\hat{z}$ ב. $\varphi=\mu_0\sigma_0a\omega\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\pi r_0^2$

ג. $I=\frac{3\mu_0\sigma_0a\pi r_0^2\alpha\ln\frac{b}{a}}{2R}$

10) א. $|\varepsilon|=B_0LV_y$ ב. כיוון השדה המושרה בכיוון השדה שקיים, לתוך הדף.

ג. $F=\frac{B_0{}^2L^2}{R}V\hat{y}$ ד. $V_{final}=\frac{mgR}{B_0^2\cdot L^2}$ ה. $V(t)=\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\frac{mg}{k}\ ,\ k=\frac{B_0^2L^2}{R}$

11) $I_{R1}=\frac{0.6}{110}A\ ,\ I_{R2}=\frac{3}{110}A\ ,\ I_{R3}=\frac{2.4}{110}A$

12) א. $\varepsilon=2V^2\tan\theta tB$ ב. $I=\frac{V\cdot B}{R_1}$ ג. $P_{out}=\frac{V^2B^2}{R_1}2\cdot V\cdot t\cdot\tan\theta$

13) א. $I=\frac{B\pi a^2\omega}{4R}\sin\omega t$ ב. $\theta=60°$ ג. $\theta=45°$

14) א. $I=\frac{\beta\pi b^2 a}{2\rho}$ ב. $I=\frac{\beta m}{4\pi\rho\alpha}$ ג. $I=\frac{m(\beta\cos\theta-B\sin\theta\omega)}{4\rho\alpha\pi}$

15) א. $R_T=2R+\frac{ar\theta(2\pi-\theta)}{2\pi}$

ב. $I_T=\frac{B\omega a^2\pi}{4\pi R+ar\omega t(2\pi-\omega t)}$, במחוג שעומד בכיוון הרדיאלי ובמחוג שנע בכיוון $\hat{r}$.

ג. $I(t)=\frac{B\omega\frac{a^2}{2}}{2R+ra\omega t}$

16) $V=\frac{3Rmg}{2B^2L^2}$

17) א. $V_0=\frac{2mgR}{BL}$ ב. $\frac{BL}{R}(V_0-BLV)=ma\ ,\ V_{max}=\frac{V_0}{BL}$

ג. $V(t)=\frac{V_0}{BL}\left(1-e^{-\frac{B^2L^2}{MR}t}\right)$

18) א. $|\varepsilon|=\alpha baV$ ב. $V(t)=V_0e^{-kt}$ ג. $\Delta x=\frac{V_0}{k}$

19) $1mV$

20) $0.5mV$

21) א. 0 ב. $0.5mV$

22) $\frac{\mu_0 aI(t)}{4\pi}\ln\left|\frac{b^2+d^2}{d^2}\right|$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 22 - אפקט הול

תוכן העניינים

הסבר ודוגמה:

רקע:

בפועל רק אלקטרונים זזים במוליך כשיש זרם. כתוצאה מהתנועה הזו הם מרגישים כוח (אם יש שדה מגנטי) שדוחף אותם לדופן המוליך ונוצרת הפרדת מטענים הגורמת לשדה חשמלי לרוחב המוליך. בשיווי משקל הכוח החשמלי שווה למגנטי. מהשוויון ניתן לחשב את השדה החשמלי ו-

המתח הנוצר לרוחב המוליך:

$$V = \frac{IdB_{\perp}}{nqA} = \frac{2IB_{\perp}}{nq\pi R}$$

V – המתח בין הקצוות של המוליך שמאונכות לכיוון הזרם וכיוון השדה המגנטי.

I – הזרם במוליך.

$B_{\perp}$ – הרכיב של השדה המגנטי שמאונך לזרם.

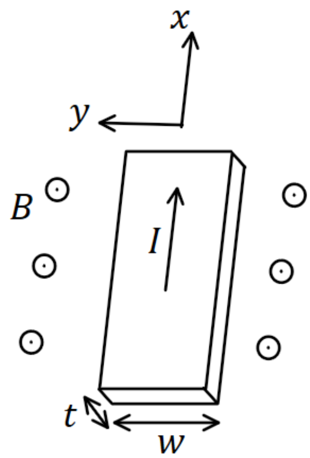
n – מספר האלקטרונים ליחידת נפח במוליך.

q – מטען האלקטרון. d – הרוחב של המוליך שמצדדיו נמדד המתח. A – שטח החתך של המוליך(מאונך לזרם)

השוויון השני למקרה של מוליך גלילי, R רדיוס הגליל.

שאלות:

1) **חישוב המתח במוליך מלבני**



במוליך מלבני זורם זרם I לאורך המוליך ובמקביל לציר ה-x.
רוחב המוליך הוא w והוא מקביל לציר ה-y.
העובי של המוליך הוא t והוא מקביל לציר ה-z (ראה איור).
במרחב קיים שדה מגנטי אחיד בגודל B ובכיוון z.
מצא את גודל וכיוון המתח בין קצוות המוליך.
(הנח שצפיפות האלקטרונים ליחידת נפח נתונה).

תשובות סופיות:

1) $V = \frac{IB}{nq_0 t}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 23 - השראות-מתוך פיזיקה 2

תוכן העניינים

השראות עצמית:

רקע:

ההשראות ברכיב:

$$L = \frac{\phi_B}{I}$$

כאשר ϕ_B הוא השטף המגנטי דרך הרכיב ו- I הוא הזרם ברכיב.

- ההשראות היא תכונה שתלויה רק במבנה ולכן היא בד"כ קבועה.

חישוב השראות לפי הגדרה:

1. נניח שזורם זרם I ברכיב.
2. נחשב את השדה המגנטי הנוצר מהזרם בתוך הרכיב.
3. נחשב את השטף המגנטי ברכיב.
4. נציב בנוסחה של ההשראות והזרם יצטמצם.

השראות של סליל:

$$L = \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{l}$$

כאשר N מספר הליפופים הכולל, l אורך הסליל ו- a רדיוס טבעת.

כא"מ ברכיב עם השראות L:

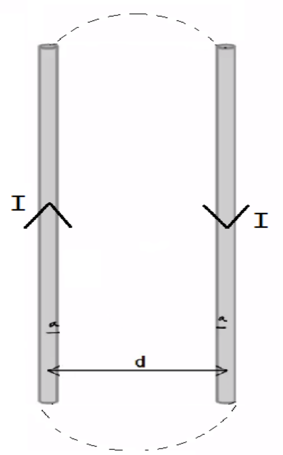
$$\varepsilon = -L\dot{I}$$

האנרגיה האגורה בסליל (או בכל רכיב בעל השראות) :

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

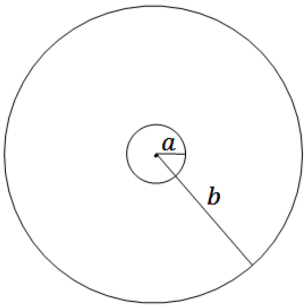
שאלות:

1) שני תיילים ארוכים



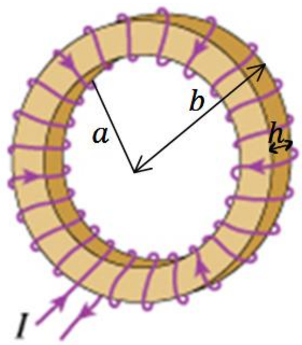
נתונים שני תיילים מאוד ארוכים שהמרחק ביניהם הוא d.
רדיוס כל אחד מהתיילים הוא a ונתון שהתיילים מחוברים ביניהם באינסוף. נתון זרם I במערכת.
הנח כי $a << d$ והתיילים אינם משפיעים אחד על השני.
חשבו השראות של המערכת ליחידת אורך.
ניתן להזניח את השדה בתוך התיילים.

2) השראות בכבל קואקסיאלי



כבל קו אקסיאלי מורכב מתיל פנימי ברדיוס a ומעטפת דקה ברדיוס b. התיל והמעטפת באורך $l \gg a, b$.
בתיל הפנימי זורם זרם I נתון, ובמעטפת זורם זרם זהה בכיוון ההפוך.
מצאו את ההשראות העצמית ליחידת אורך של המערכת.
הזנח את השדה המגנטי בתוך התיל הפנימי.

3) השראות בטורואיד



בתמונה נתון טורואיד.
הרדיוס הפנימי של הטורואיד הוא a והחיצוני b.
גובה (או עובי) הטורואיד הוא h ומספר הליפופים N.

א. מצאו את ההשראות של הטורואיד.
ב. מצאו את האנרגיה האגורה בטורואיד אם זורם בו זרם I.

תשובות סופיות:

1) $L = \frac{l\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$

2) $\frac{L}{l} = \frac{\mu_0 \ln \frac{b}{a}}{2\pi}$

3) א. $L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln \frac{b}{a}}{2\pi}$ ב. $U_L = \frac{1}{2} L I^2$

מעגלי RL:

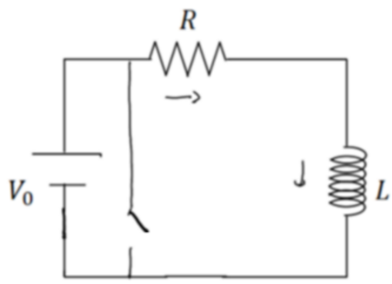
רקע:

המתח על סליל (משרן) במעגל:

$$V_L = L\dot{I}$$

הצד הגבוה הוא בנקודה שבה נכנס הזרם לסליל.

טעינה:



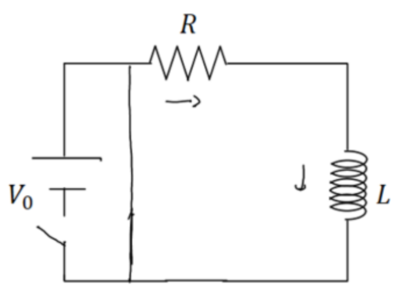
$$V_0 - IR - L\dot{I} = 0$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

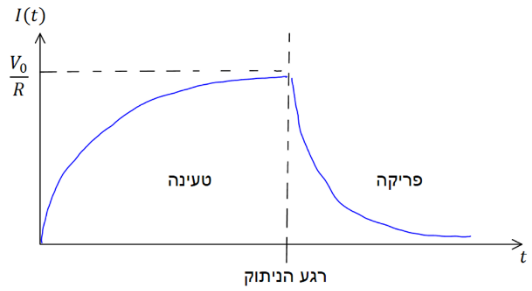
סליל (משרן) בהתחלה מתנהג כמו נתק ולאחר זמן רב כמו קצר.

פריקה:



$$-IR - L\dot{I} = 0$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



חיבור סלילים (משרנים) במעגל הוא כמו חיבור נגדים:

בטור:

$$L_T = L_1 + L_2 + \cdots$$

$$V_T = V_1 + V_2 + \cdots$$

$$I_T = I_1 = I_2 = \cdots$$

במקביל:

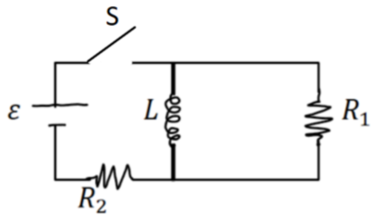
$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots$$

$$V_T = V_1 = V_2 = \cdots$$

$$I_T = I_1 + I_2 + \cdots$$

שאלות:

1) תרגיל 1 ב- RL



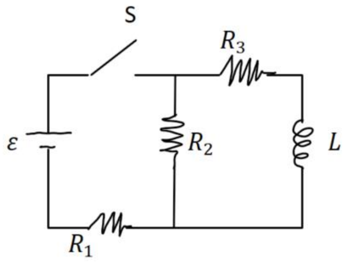
במעגל הבא המפסק סגור זמן רב, התנגדות הנגדים והשראות הסליל נתונה.

א. מצאו את הזרם בכל נגד ואת הזרם בסליל.

ב. פותחים את המפסק, מהו הזרם ברגע פתיחת המפסק ולאחר זמן רב?

ג. מהו הזרם כתלות בזמן לאחר פתיחת המפסק?

2) תרגיל 2 ב- RL



במעגל הבא מתקיים:

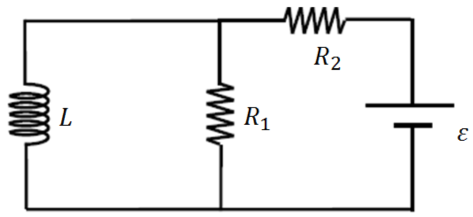
$\varepsilon = 5V, R_1 = 100\Omega, R_2 = 200\Omega, R_3 = 300\Omega, L = 30mH$.

א. מה המתח שמייצר הסליל עם סגירת המפסק?

ב. מה הזרם בכל נגד לאחר זמן רב?

ג. מהו קבוע הזמן של המעגל?

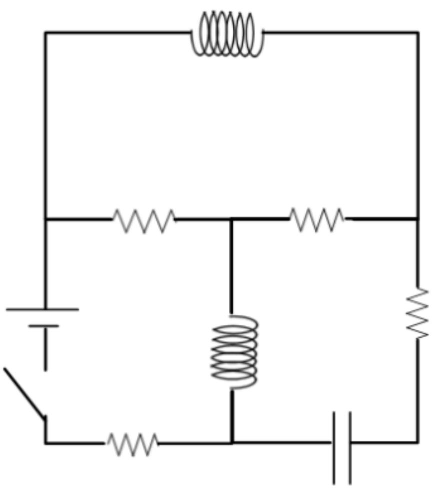
3) תרגיל 3 ב- RL



במעגל הבא נתון כא"מ המקור, התנגדות הנגדים והשראות הסליל.

מצאו את הזרם בסליל כפונקציה של הזמן אם נתון שהזרם בו שווה לאפס ב-t=0.

4) תרגיל 4 ב- RL



במעגל הבא התנגדות כל הנגדים היא R ומתח הסוללה הוא V (R ו-V נתונים).

א. מצאו את הזרם בסוללה ברגע סגירת המתג (הניחו שהקבל אינו טעון ואין זרמים במעגל לפני סגירת המתג).

ב. מצאו את הזרם בסוללה ובסלילים לאחר זמן רב. מהו המתח על הקבל?

ג. חזרו על סעיפים א ו-ב אם במקום כל סליל היה קבל ובמקום הקבל היה סליל.

תשובות סופיות:

1) א. $I_L = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2}$, $I_1 = 0$
ב. $I_L(0) = I_1 = \frac{\varepsilon}{R_2}$, $I_L(\infty) = 0$
ג. $I(t) = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-\frac{t}{\frac{R_1}{L}}}$

2) א. $V_L = 3.3V$
ב. $I_1 = 22.7mA$, $I_2 = 13.6mA$, $I_3 = 9.09mA$
ג. $\tau = 81.7\mu s$

3) $I_3(t) = \frac{\varepsilon}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{RT}{L}t}\right)$

4) א. $\frac{V}{4R}$
ב. סוללה: $I = \frac{2V}{3R}$, סליל עליון: $I = \frac{V}{3R}$, סליל תחתון: $I = \frac{2V}{3R}$, קבל: $V = \frac{V}{3}$
ג. א: $I = \frac{2V}{3R}$, ב: סוללה: $I = \frac{V}{4R}$, סליל: $I = \frac{V}{4R}$, קבל עליון: $V = \frac{V}{2}$,
קבל תחתון: $V = \frac{V}{2}$

השראות הדדיות:

רקע:

השראות הדדית:

$$M_{1,2} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

חישוב השראות הדדית:

1. נניח שזורם זרם I_2 ברכיב 2.
2. נחשב את השדה המגנטי הנוצר מהזרם ברכיב 1.
3. נחשב את השטף המגנטי ברכיב 1.
4. נציב בנוסחה של ההשראות ו- I_2 יצטמצם.

- השראות הדדית תמיד סימטרית $M_{1,2} = M_{2,1} = M$

ולכן ניתן תמיד לחשב $M_{1,2}$ ולהסיק על $M_{2,1}$ (או להפך).

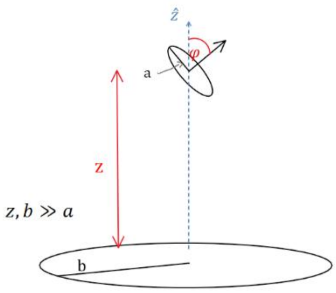
יחס המתחים בשנאי:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

N הוא מספר הליפופים בכל צד.

שאלות:

1) טבעת בזווית מעל טבעת גדולה



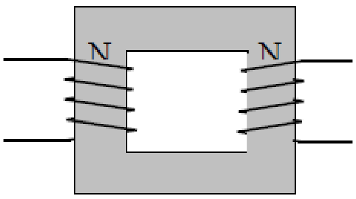
טבעת ברדיוס b מונחת על מישור $x-y$ במקביל לקרקע.
טבעת נוספת ברדיוס a שקטן מאוד ביחס ל-b מונחת בגובה z מעל מישור $x-y$.
מרכזי הטבעות נמצאים על ציר ה-z אחד מעל השני.
הטבעת הקטנה גם מוטת ביחס למישור $x-y$ כך שהוקטור המאונך למישור הטבעת יוצר זווית φ עם ציר ה-z.

א. מצא את $M_{1,2}$.

ב. התנגדות הטבעת הקטנה נתונה ומסומנת ב-R_a.
כמו כן ידוע הזרם כתלות בזמן בטבעת הגדולה והוא שווה ל-$I_b = I_0 \cos(\omega t)$. I_0 ו-ω קבועים נתונים.
מצא את הזרם בטבעת הקטנה.

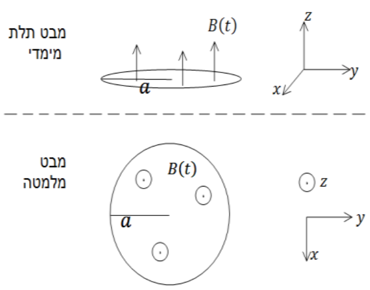
ג. מהו מומנט הכוח הפועל על הטבעת הגדולה?

2) שנאי



שנאי מורכב משני סלילים בעלי מספר ליפופים שונה המקיפים ליבה מגנטית מלבנית משני צידי הליבה.
הנח כי ליבה מגנטית שומרת את כל קווי השדה המגנטי בתוכה, או לחלופין, כי השטף המגנטי אחיד בכל חתך של הליבה.
נתון כי המתח על הסליל השמאלי הוא מתח חילופין (מתח מהצורה $V(t) = V_0 \sin \omega t$).
מצא את המתח על הסליל הימני כתלות במתח של הסליל השמאלי.
נתון N_1, N_2 מספר הליפופים בכל סליל.

3) שטף חיצוני השראות ונגד בטבעת



טבעת מוליכה ברדיוס a והתנגדות R נמצאת בתוך שדה מגנטי אחידה במרחב ומשתנה בזמן $B(t) = At$ כאשר A קבוע חיובי.
כיוון השדה בניצב למישור בו נמצאת הטבעת (השטף מקסימאלי).

א. מצא את סך הכא"מ הפועל על הטבעת כתלות בזרם, אם ההשראות העצמית של הטבעת L נתונה.

ב. מצא משוואה על הזרם כתלות בזמן ופתור אותה למציאת הזרם כתלות בזמן. (היעזר בפתרון של סליל במעגל טעינה).

ג. מצא את הזרם והשטף הכולל כתלות בזמן בקירוב $R \to 0$, התעלם מהרגעים הראשונים.

תשובות סופיות:

1) א. $M=\frac{\mu_0 b^2 \pi a^2 \cos\varphi}{2}\left(b^2+z^{\alpha}\right)^{-\frac{3}{2}}$

ב. $I_a=\frac{-MI_0\left(-\omega \sin \omega t\right)}{R_a}$

ג. $\left|\vec{\tau}\right|=\mu_a B_z \sin\varphi$

2) $\varepsilon_2=\frac{N_2}{N_1}V_0 \sin \omega t$

3) א. $\varepsilon=-A\pi a^2-LI$

ב. $I\left(t\right)=-\frac{A\pi a^2}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

ג. $\phi_{BT}=0\ ,\ I\left(t\right)=-\frac{A\pi a^2}{L}t$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 24 - משוואות מקסוואל

תוכן העניינים

המשוואות והמעברים:

רקע:

משוואות מקסוואל:

	הצורה הדיפרנציאלית	הצורה האינטגרבילית	הערות
1	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,\mathrm{d}V$	חוק גאוס
2	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	$\oint\vec{B}\cdot d\vec{s}=0$	השטף המגנטי על משטח סגור תמיד מתאפס= אין מטען מגנטי
3	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$	$\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$	מהמשוואה ניתן לקבל את חוק פארדיי $\varepsilon=-\dot{\phi}_B$
4	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$	$\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\int\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\mu_0\int\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{s}$	חוק אמפר והתיקון של מקסוול (שנקרא גם זרם העתקה)

שאלות:

1) שדה מגנטי רדיאלי והיקפי מתאפסים

באזור מסוים במרחב נתון כי ישנו שדה מגנטי בכיוון ציר z בעל סימטריה גלילית. כמו כן נתון כי אין זרמים באזור זה. הראו כי B_θ ו- B_r מתאפסים.

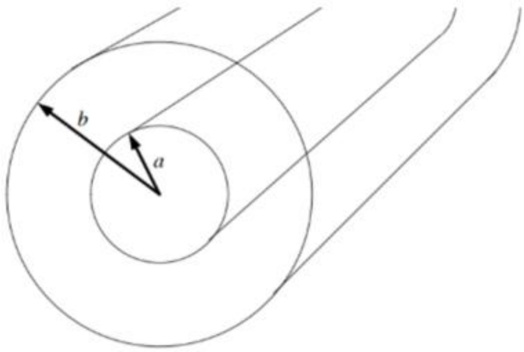
2) גלים בכבל קו אקסיאלי

כבל קו-אקסיאלי עשוי משתי קליפות גליליות מוליכות וארוכות מאוד בעלות רדיוסים b , a. ציר הסימטריה של הכבל הוא ציר z ובין הקליפות אין חומר.
השדה החשמלי בין הקליפות נתון לפי הפונקציה:

$$\vec{E}=\begin{cases}\frac{E_0}{r}\cos\left(\omega t-\omega\frac{z}{c}\right)\hat{r} & a<r<b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

ידוע שאין זרמי DC.

א. מצאו את השדה המגנטי.
ב. מצאו את צפיפות הזרם המשטחית על הקליפות.
ג. מצאו את צפיפות המטען המשטחית על הקליפות.
ד. הראו כי משוואת הרציפות מתקיימת.



תשובות סופיות:

1) הוכחה בסרטון.

2) א. $\vec{B}=\begin{cases}\frac{E_0}{cr}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

ב. $\overrightarrow{k_{(b)}}=-\frac{E_0}{cb}\cos\left(wt-\frac{w}{c}z\right)\hat{z}$, $\overrightarrow{k_{(a)}}=-\frac{E_0}{ca}\cos\left(wt-\frac{w}{c}z\right)\hat{z}$.

ג. $\sigma_{(b)}=-\frac{\varepsilon_o E_0}{b}\cos\left(wt-w\frac{z}{c}\right)$, $\sigma_{(a)}=\frac{\varepsilon_o E_0}{a}\cos\left(wt-w\frac{z}{c}\right)$.

ד. הוכחה בסרטון.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 25 - שדות משתנים בזמן

תוכן העניינים

הסברים ותרגילים:

רקע:

ממשואות מקסוול רואים ששדה מגנטי שמשתנה בזמן יוצר שדה חשמלי ולהפך.

אם נתון שדה מגנטי משתנה בזמן וצריך לחשב את השדה החשמלי אז:
נשתמש במשוואה השלישית של מקסוול כמו חוק פארדי ובמקום הכא״מ נחשב את האינטגרל כאשר בדר״כ יש סימטריה גלילית והאינטגרל הופך ל $E2\pi r$

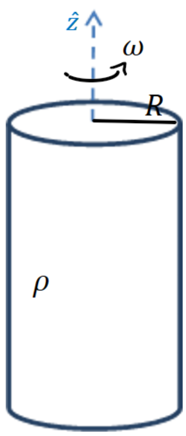
אם נתון שדה חשמלי משתנה בזמן וצריך לחשב את השדה המגנטי אז:
נשתמש במשוואה הרביעית כמו חוק אמפר רק שבמקום זרם יש $\int \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s}$ (או במקום צפיפות זרם $\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$) שנקרא זרם העתקה (לא באמת זרם).

שאלות:

1) גליל טעון מסתובב בתאוצה

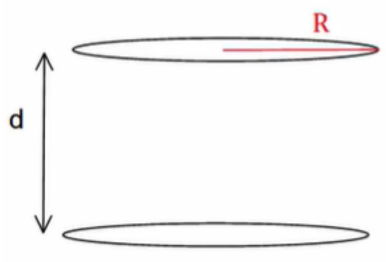
גליל אינסופי מלא ברדיוס R טעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת נפח ρ.
הגליל מסתובב סביב ציר הסימטריה שלו במהירות זוויתית המשתנה בזמן $\omega = \alpha t$ כאשר α קבועה ונתונה.

א. מה השדה המגנטי בכל המרחב?
ב. מה השדה החשמלי בכל המרחב?
ג. מה הכוח שפועל על מטען?



2) שדה חשמלי תלוי בזמן בתוך קבל לוחות ווקטור פוינטינג על השפה

קבל לוחות מורכב משני לוחות עגולים ברדיוס R המקבילים זה לזה ונמצאים במרחק d אחד מהשני $d<<R$.



הקבל מחובר למעגל חשמלי המספק לקבל זרם I קבוע (ונתון).

א. מצא את המטען על הקבל כפונקציה של הזמן אם נתון ש-$q(t=0)=0$

ב. מצא את השדה החשמלי כפונקציה של הזמן.

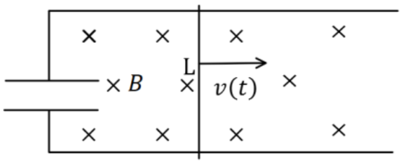
ג. מצא את השדה המגנטי כפונקציה של הזמן והמיקום, בתוך הקבל ומחוץ לו.

ד. מצא את האנרגיה האגורה בין הלוחות.

ה. מצא את הוקטור פוינטינג על שפת הקבל וחשב את השטף שלו על מעטפת הקבל.

3) פארדיי עם קבל

קבל לוחות מעגלי ברדיוס a ומרחק בין הלוחות ($d<<a$) מחובר למסילה מוליכה חסרת התנגדות.



על המסילה מונח מוט חסר התנגדות באורך L. מושכים את המוט כך שהוא מתרחק מהקבל במהירות $v(t)=At$.

במרחב קיים שדה מגנטי B אחיד וקבוע לתוך הדף.

א. מהו המטען על הקבל? על איזה לוח המטען החיובי?

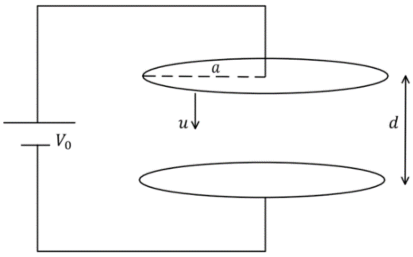
ב. מהו השדה החשמלי בתוך הקבל?

ג. מהו השדה המגנטי בתוך הקבל ומחוץ לו, גודל וכיוון (התעלם מהשדה שנוצר ע"י התיילים והמוט)?

ד. מהו הכוח שיש להפעיל על המוט על מנת שינוע במהירות הנתונה אם מסת המוט היא M?

4) לוחות בקבל מתקרבים בזמן

קבל לוחות מורכב משני לוחות מעגליים ברדיוס a ומרחק $a \ll d$ ביניהם.
הקבל מחובר למקור מתח קבוע V_0.
בזמן $t = 0$ מתחילים לקרב את הלוח העליון אל התחתון במהירות קבועה ונמוכה u.



א. מהו המתח בין לוחות הקבל כתלות בזמן?
ב. מהו השדה החשמלי בין לוחות הקבל כתלות בזמן?
ג. מהו השדה המגנטי בין לוחות הקבל ומחוץ להן כתלות בזמן?
ד. חזור על כל הסעיפים אם ניתקו את הקבל מהמקור רגע לפני תחילת ההזזה של הלוח.

תשובות סופיות:

1) א. $r<R$ $\vec{B}=\mu_0\rho\omega\frac{R^2-r^2}{2}\hat{z}$, $r>R$ $\vec{B}=0$

ב. $r<R$ $\vec{E}=-\mu_0\rho\alpha\frac{1}{2r}\left(R^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\hat{\theta}+E_r(r)\hat{r}$, $r>R$ $\vec{E}=\frac{-\mu_0\rho\alpha}{2r}\left(\frac{R^4}{4}\right)\hat{\theta}+(E_r)\hat{r}$

ג. $\vec{F}=q\vec{E}$

2) א. $q(t)=It$ ב. $\vec{E}=\frac{-q(t)}{\varepsilon_0\pi R^2}\hat{z}$ ג. $\vec{B}=\frac{-\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\hat{\theta}$

ד. $U=\frac{I^2t^2d}{2\varepsilon_0\pi R^2}+\frac{\mu_0 I^2 d}{16\pi}$ ה. $\vec{S}=\frac{-1}{\mu_0}\cdot\frac{q(t)}{\varepsilon_0\pi R^2}\frac{\mu_0 IR}{2\pi R^2}\hat{r}$, $\phi_S=\frac{-I^2td}{\varepsilon_0\pi R^2}$

3) א. $q_c=\frac{\varepsilon_0\pi a^2}{d}BLAt$, עליון. ב. $\vec{E}=\frac{BLAt}{d}\hat{z}$ ג. $r<a$ $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 B_0LAr}{2d}\hat{\theta}$, $a<r$ $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 BLAa^2}{2dr}\hat{\theta}$

ד. $F=MA+\frac{\varepsilon_0\pi a^2}{d}B_0^2L^2A$

4) א. $V_c(t)=V_0$ ב. $\vec{E}=\frac{-V_0\hat{z}}{d-ut}$ ג. $r<a$ $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0 ur\hat{\theta}}{2(d-ut)^2}$, $r>a$ $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0 ua^2\hat{\theta}}{2(d-ut)^2 r}$

ד. $\vec{B}=0$, $\vec{E}=\frac{-V_0 z}{d}$, $V_c(t)=\frac{d-ut}{d}\cdot V_0$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 26 - גלים אלקטרומגנטיים

תוכן העניינים

הסברים ותרגילים:

רקע:

ממשוואות מקסוול למשוואות הגלים בריק ($\rho = J = 0$):

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{B}}{dt^2}$$

c - מהירות האור $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

המשוואה מתקיימת עבור כל רכיב בנפרד:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 E_x = \frac{1}{c^2}\frac{d^2E_x}{dt^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 E_y = \frac{1}{c^2}\frac{d^2E_y}{dt^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 E_z = \frac{1}{c^2}\frac{d^2E_z}{dt^2}$$

תזכורת ללאפלסיאן:

$$\vec{\nabla}^2 E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}$$

פתרון המשוואה עבור רכיב כלשהו של $\vec{E}$ או של $\vec{B}$:

$$E_i(\vec{r},t) = A_i\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

$\vec{k} = \left(k_x, k_y, k_z\right)$ - וקטור הגל, כיוונו הוא כיוון התקדמות הגל

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

ω - התדירות הזוויתית

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

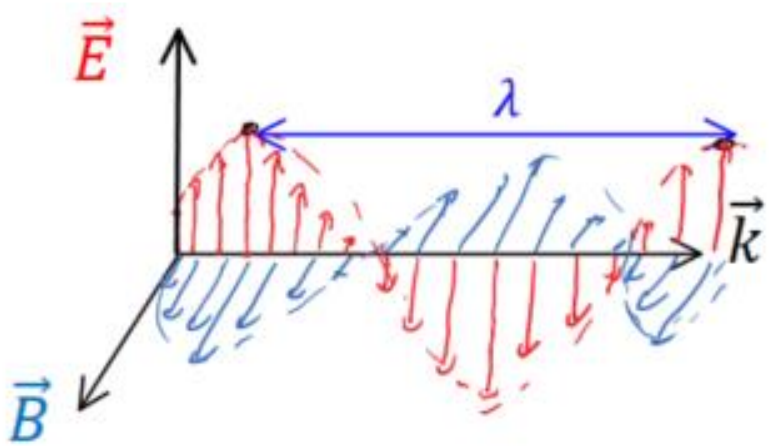
f - התדירות בהרץ
T - זמן המחזור

הקוסינוס בפתרון זהה לכל הרכיבים של השדה החשמלי והמגנטי, ההבדל בין הרכיבים הוא רק במקדם A_i

איך למצא שדה מגנטי מחשמלי ולהפך :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}$$
$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{k}$$

צורת הגל במרחב :



λ - אורך הגל, המרחק בין שיא לשיא:

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

יחס הדיספרסיה :

$$\omega = c|k|$$

היחס מתקבל מהצבה של הפתרון במשוואת הגלים

השדה החשמלי תמיד מאונך לשדה המגנטי ושניהם תמיד מאונכים לכיוון התקדמות הגל.

פתרון נוסף :

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t\right)$$

במקרה הזה הגל מתקדם בכיוון הפוך ל $\vec{k}$-

שאלות:

1) תרגיל 1

נתון השדה המגנטי: $\vec{B}=B_0\cos(Ax-2Ay-\omega t)\hat{z}$.

א. מצא את וקטור הגל של השדה?

ב. הבא את התדירות באמצעות הפרמטר A.

ג. מצא את השדה החשמלי?

ד. מה הכוח הפועל על מטען Q הנמצא בראשית עם מהירות $\vec{v}=v_0\hat{x}$ ב- $t=0$?

ה. מצא את הוקטור פויטינג?

2) מצא שדה מגנטי

השדה החשמלי בגל אלקטרו מגנטי נתון לפי: $\vec{E}=E_0(1,1,2)e^{i(2x-z-\omega t)}$.
מצא את השדה המגנטי.

3) גל עומד

משוואת הגלים בצורה כללית היא: $\nabla^2\phi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ כאשר ϕ היא פונקציית הגל במרחב ו- v היא מהירות הגל $\left(v=\frac{\omega}{k}\right)$. במקרה של גלים אלקטרו מגנטים ϕ תהיה הפונקציה של השדה החשמלי או המגנטי, $v=c$.

א. הראה שהפונקציה $\phi(x,t)=A\cos(kx)\sin(\omega t)$ מקיימת את משוואת הגלים ולכן היא פתרון אפשרי למשוואה.

ב. פתרון דלמבר למשוואת הגלים אומר שכל פתרון צריך להיות מהצורה $f(x-vt)+g(x+vt)$, כאשר f ו- g הם פונקציות כלשהן.
הראה שהפונקציה מסעיף א' היא גם פיתרון מהצורה הכללית של הפתרון של דלמבר.
רמז: השתמש בזהויות טריגונמטריות.

4) תרגיל 4

השדה החשמלי של גל אלקטרו מגנטי המתפשט בריק בכיוון x נתון לפי:

$$\vec{E}=E_0e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}\hat{y}+E_0e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}\hat{z}$$

כאשר E_0 ו- a הם קבועים חיוביים.

א. מהו השדה המגנטי של הגל?

ב. הראו כי השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי.

ג. כתבו ביטוי לצפיפות האנרגיה של הגל.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{k}=(A,-2A,0)$ ב. $\omega=C\cdot A\cdot\sqrt{S}$

ג. $\vec{E}=+C^2 2AB_0\cos(Ax-2Ay-\omega t)\cdot\frac{1}{+\omega}\hat{x}+C^2 2AB_0\cos(Ax-2Ay-\omega t)\cdot\frac{1}{+\omega}\hat{y}$

ד. $\vec{F}=Q\left(\frac{C^2AB_0}{\omega}(2\hat{x}+\hat{y})+V_0B_0(-\hat{y})\right)$ ה. $\vec{S}\cdot\vec{E}=0$

2) $\vec{B}=\frac{E_0}{\sqrt{5}c}(1,-5,2)e^{i(2x-z-\omega t)}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{E_0}{c}e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}(\hat{z}-\hat{y})$ ב. הוכחה. ג. $2\varepsilon_0E_0{}^2e^{-2\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 27 - וקטור פויינטינג והאנרגיה האגורה בשדות

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

<u>אנרגיה אלקטרו מגנטית האגורה בשדות:</u>

$$U=\int\left(\frac{\varepsilon_0(\vec{E})^2}{2}+\frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0}\right)dv$$

צפיפות האנרגיה:

$$u_{em}=\frac{\varepsilon_0(\vec{E})^2}{2}+\frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0}$$

<u>וקטור פויינטינג:</u>

$$\vec{s}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

שטף האנרגיה ליחידת שטח וליחידת זמן.

<u>הקשר בין האנרגיה לוקטור פויינטינג בריק:</u>

$$\oint\vec{s}\,d\vec{s}=-\frac{dU}{dt}$$

בצד שמאל עושים אינטגרל של הוקטור פויינטינג על משטח סגור (שטף) ובצד ימין גוזרים בזמן את האנרגיה האגורה בשדות בנפח הכלוא במשטח.

הקשר הדיפרנציאלי בריק:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{s}=-\frac{du_{em}}{dt}$$

שאלות:

1) **קבל לוחות עם מתח ליניארי בזמן**

קבל לוחות מורכב משני לוחות מעגליים ברדיוס a הנמצאים במרחק $d << a$ זה מזה.

הקבל מחובר למקור מתח התלוי לינארית בזמן $V(t) = A \cdot t$,

כאשר A קבוע נתון.

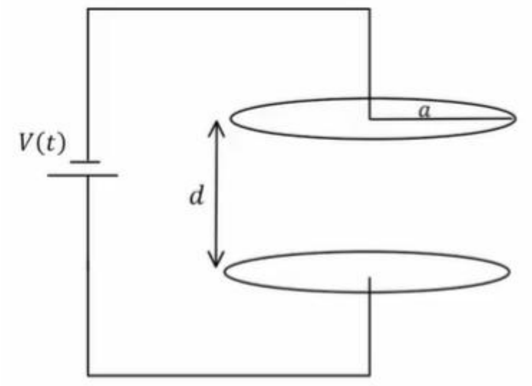
א. מצא את השדה החשמלי בקבל כתלות בזמן.

ב. מצא את השדה המגנטי בתוך הקבל ומחוץ לו.

ג. מצא את האנרגיה האגורה בתוך משטח סגור העוטף את הקבל.

ד. מצא את הוקטור פויינטינג על השפה של המשטח מסעיף ג'.

ה. חשב את השטף של הוקטור פויינטינג על המשטח והראה כי הוא שווה למינוס השינוי בזמן של האנרגיה מסעיף ג'.



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E} = \frac{A \cdot t}{d}\hat{z}$ ב. $\vec{B} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 A a^2}{2rd}\hat{\theta} \quad r \geq a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 A r}{2d}\hat{\theta} \quad r < a$

ג. $U = \frac{\varepsilon_0 A^2 \pi a^2}{2d}\left(t^2 + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 a^2}{2}\right)$ ד. $\vec{S} = \frac{-A^2 \varepsilon_0 t a}{d}\pi a$ ה. הוכחה.

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 28 - יחסות פרטית

תוכן העניינים

דינמיקה יחסותית:

רקע:

תנע ואנרגיה יחסותיים:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma m c^2$$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ואינו קשור למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot mc$$

אנרגיית מנוחה:

$$E_0 = mc^2$$

אנרגיה קינטית:

$$E_k = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו).

$$E = |p|c = \mathrm{h}\nu$$

ν – תדירות

קבוע פלאנק:

$$\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34} j \cdot s$$

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$$
$$p_x' = \gamma_0(p_x - v_0\, E/c^2)$$
$$p_y' = p_y$$
$$p_z' = p_z$$

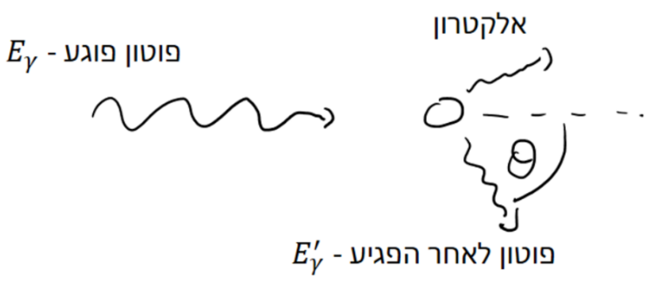
וקטור תנע אנרגיה:

$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right)$$
$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = const$$

- הקבוע זהה בכל מערכות הייחוס.
- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
- עבור גוף יחיד הקבוע הוא : m^2c^2.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$$\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_{γ} - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט:

$$1\ \text{eV} = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Object	Mass (kg)	Energy Equivalent	
Electron	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14}$ J	($\approx$ 511 keV)
Proton	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10}$ J	($\approx$ 938 MeV)
Uranium atom	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8}$ J	($\approx$ 225 GeV)

ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ - $\frac{eV}{c}$.

שאלות:

1) הגעת נייטרון ממרחקים

מצא את האנרגיה הדרושה לנויטרון להגיע לכדור הארץ ממרחק של 5 שנות אור בהינתן שזמן החיים של נויטרון הוא 881 שניות והמסה שלו היא: $M_n = 940\text{Me}\frac{\text{V}}{\text{c}^2}$.

2) התנגשות בסיסית

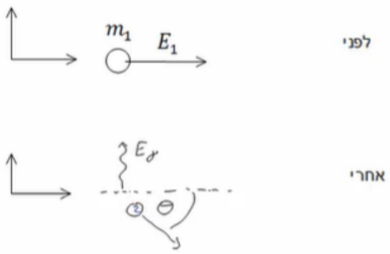
חלקיק בעל מסה m מתנגש בחלקיק בעל מסה 3m.
לחלקיק הראשון אנרגיה כוללת לפני ההתנגשות $5mc^2$ ונתון כי התנע הכולל שלהם במערכת המעבדה הוא אפס. כתוצאה מההתנגשות שני החלקיקים מושמדים ונוצר חלקיק חדש הנמצא במנוחה.

א. מצאו את האנרגיה הקינטית של החלקיק הראשון.

ב. מצאו את פקטור לורנץ של החלקיקים לפני ההתנגשות ואת האנרגיה הקינטית של החלקיק השני.

ג. מצאו את מסת החלקיק הנוצר לאחר ההתנגשות.

3) חלקיק מתפרק לפוטון וחלקיק נוסף



חלקיק בעל אנרגיה כוללת E_1 ומסת מנוחה m_1

נע במעבדה בכיוון החיובי של ציר ה- x.

ברגע מסוים מתפרק החלקיק לפוטון ולחלקיק נוסף.

אנרגיית הפוטון נתונה E_y וידוע כי הפוטון נע בציר ה- y, בכיוון החיובי.

א. מהו התנע של החלקיק הראשון לפני ההתפרקות?

ב. מהי הזווית של התנע של חלקיק 2 ביחס לציר ה- x?

ג. מצא מערכת ייחוס חדשה S' שבה הפוטון יפלט בכיוון נגדי לכיוון תנועתו של חלקיק מס' 2.
מה מהירותה של מערכת זו ביחס למערכת המעבדה?

4) פוטון פוגע בפרוטון ויוצר פיון

פוטון פוגע בפרוטון הנמצא במנוחה במערכת המעבדה.

נתונות מסת הפרוטון והפיון M_p, M_π.

מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לפוטון על מנת שלאחר ההתנגשות ייווצרו פרוטון ופיון (π)?

5) דוגמה - חישוב תנע ואנרגיה קינטית של אלקטרון ופרוטון

חשבו את התנע והאנרגיה הקינטית של פרוטון ואלקטרון בעלי אנרגיה של 1GeV במערכת המעבדה.

6) דוגמה - גמה וביטה של אלקטרון

מסת האלקטרון היא: $9.10938188 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ ומהירות האור היא: $299792458\ \mathrm{m/sec}$.

מצאו בדיוק של 6 ספרות את γ ו-β של אלקטרון שהאנרגיה הקינטית שלו היא: $K = 100.000\mathrm{MeV}$ במערכת המעבדה.

7) בטה של מיואונים מתפרקים

מסת מיואון היא פי 207 ממסת האלקטרון.

זמן מחצית החיים הממוצע של מיואון הוא $2.20\mu s$.

מיואונים נעים ביחס למעבדה בניסוי כלשהו.

זמן החיים הנמדד של המיואונים ביחס למערכת המעבדה הוא: $6.90\mu s$.

מהם β, התנע והאנרגיה הקינטית של המיואונים ביחידות $\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}$?

תשובות סופיות:

1) $E_n = 1.69\cdot10^8\,\mathrm{MeV}$

2) א. $E_{k_1=4mc^2}$ ב. $E_{k_2} = 3mc\left(\sqrt{\frac{11}{3}}-1\right)$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{11}{3}}$ ג. $m_3 = 6.91m$

3) א. $\vec{p}_1 = \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - m_1^2c^2}\cdot\hat{x}$ ב. $\tan\theta = -\frac{E_\gamma}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4}}$

ג. $v_0 = \sqrt{1-\left(\frac{m_1c^2}{E_1}\right)^2}\cdot c$

4) $E_\gamma = \frac{1}{2m_p}\left(m_\pi^2 + 2m_\pi m_p\right)c^2$

5) אלקטרון: $K = 0.999\,\mathrm{GeV}$, $P = 1\frac{\mathrm{GeV}}{c}$

פרוטון: $K = 0.062\,\mathrm{GeV}$, $P = 0.347\frac{\mathrm{GeV}}{c}$

6) $\gamma = 196.695$, $\beta = 0.999987$

7) $K = 226\,\mathrm{MeV}$, $P = 314\frac{\mathrm{MeV}}{c}$, $\beta = 0.898$

טרנספרמציית לורנץ למיקום והזמן:

רקע:

תורת היחסות הפרטית עוסקת בתיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות.

מערכות הייחוס תמיד יהיו מערכות אינרציאליות (צופים שזזים במהירות קבועה ביחס למערכת הכוכבים).

הגדרת מאורע:

מאורע הוא אירוע פיזיקאלי המוגדר בזמן ובמרחב.
כל מאורע ניתן לתאר ע״י ארבע קואורדינטות (x, y, z, t).

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות.

האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו.

מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס.

אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. כתוצאה מכך מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס.
הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם : x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

טרנספורמציית לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_o(x - v_o t)$$

$$t' = \gamma_o\left(t - \frac{v_o x}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v_o}{c}$$

$$\gamma_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_o}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_o(x' + v_o t')$$

$$t = \gamma_o\left(t' + \frac{v_o x'}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

תנאים לשימוש בטרנספורמציית לורנץ:

הצירים של המערכות מקבילים.

בזמן: $t = t' = 0$ הראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת עצמית היא מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

זמן עצמי τ - מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

אורך עצמי - האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך:

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

l_0 - האורך העצמי

התארכות הזמן:

$$\Delta t = \gamma_0 \tau > \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$\tan\theta = \gamma_0 \tan\theta'$$

θ' - זווית במערכת העצמית

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda'$$

λ' - אורך הגל במערכת העצמית

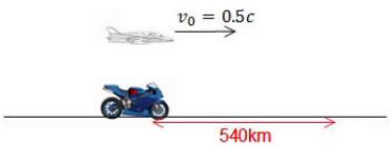
תדירות הגל:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f'$$

f' - תדירות במערכת העצמית

שאלות:

1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

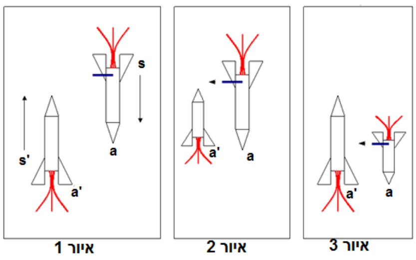


אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר.
צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של $540km$.
צופה הנע במטוס ממש מהיר $v = 0.5c$, בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.

א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.

ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.

2) בדיקת ירי

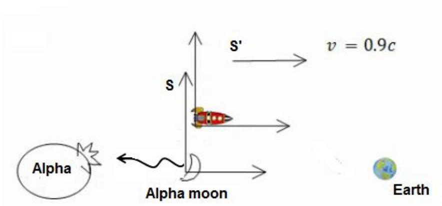


שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה.
בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית 's (איור 1).
בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה 'a (זנב 's).
מכיוון שאורך החללית 's קצר מהאורך העצמי בחללית ב-s מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2).
אולם במערכת 's אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו-'a מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3).
ישב/י את הפרדוקס.

3) מוט פולט אור לסירוגין

מוט בעל אורך l_0 נע במהירות V נתונה ביחס לכדה"א.
נתון כי ב-$t=0$ הקצה השמאלי של המוט נמצא ב-$x=x'=0$.
ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.
לאחר זמן τ המוט פולט אור מקצהו הימני.
מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה"א
(הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).

4) פיצוץ בכוכב אלפה



החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה"א.
בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה
פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב.
ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם
ה"קליגונים". 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה
פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו
הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית.
מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא 0.9c.

א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?
ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?
ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

תשובות סופיות:

1) א. $v = 5.65 \cdot 10^7 \frac{m}{sec}$ ב. $x'_2 = -10.32 \cdot 10^5 m$

2) ראה סרטון.

3) $\Delta t = \gamma_0 (1+\beta)\left(\tau - \frac{l_0}{c}\right)$

4) א. $t_3 = -3.525 sec$ ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.
ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס, $x_2 = 11.47 \cdot 10^8 \cdot m > 10.575 \cdot 10^8 m$

טרנספורמציית לורנץ למהירות:

רקע:

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

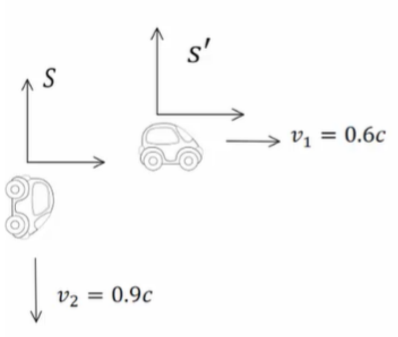
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0\left(\cos\theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שאלות:

1) **מהירות יחסית בין מכוניות**

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא 0.6c ומהירות המכונית השנייה היא 0.9c.
מצא את המהירות היחסית.



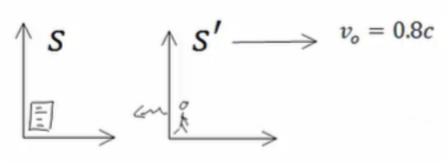
תשובות סופיות:

1) $v'_{2_x} = -0.6c$, $v'_{2_y} = -0.72c$

תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

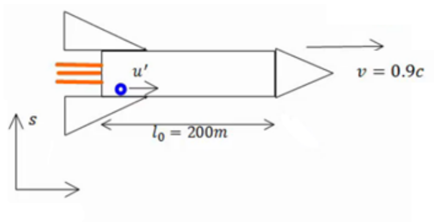
שאלות:

1) דודה יוצאת לטיול



המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יוצאת לטייל במהירות $0.8c$ (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה.
כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

2) כדור מתגלגל בחללית



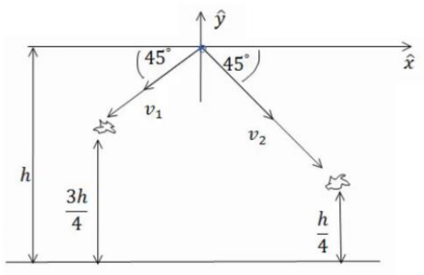
חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות $0.9c$ ביחס למערכת אינרציאלית S. כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות $u' = 0.04c$ בכיוון ציר x, כפי שנמדד ע"י צופה בחללית.

א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב- S?
(הבא את התשובה ביחידות של c).

ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב- s?
(הבא את התשובה במיליוניות שנייה).

ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת s? (ביחידות של ק"מ).

3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



שני חלקיקים נוצרים בגובה h מעל הקרקע.
אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה- x
והשני בזווית -45 מעלות עם ציר ה- x.

החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן T בגובה $\frac{3h}{4}$

והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן T_2 בגובה $\frac{h}{4}$.

התעלם מהכבידה בבעיה.

א. הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות h ו- T.

ב. מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).

ג. מצא מערכת s' הנעה בכיוון החיובי של ציר ה- x בה ההתפרקויות מתרחשות באותו הזמן.

ד. מה המרחק בין ההתפרקויות במערכת s'?

4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון

מיואון (μ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות $0.7c$ ביחס לקרקע.
המיואון מתפרק לאחר שנע 3 ק"מ ממקום היווצרו.

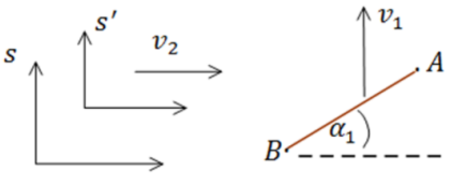
א. כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו?

אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות $0.5c$ ביחס למעבדה.

ב. מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?

ג. איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

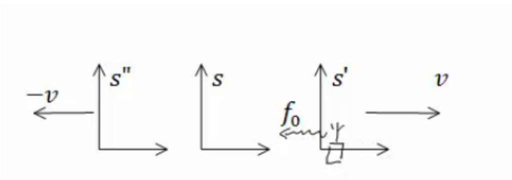
5) זווית של מוט נע



מוט בעל אורך l (לא נתון) נע במהירות v_1 בכיוון ציר ה- y ביחס לצופה הנמצא במעבדה. הצופה במעבדה מודד זווית α_1 של המוט ביחס לציר ה- x.

איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות $v_2\hat{x}$ ביחס למעבדה?

6) תדר יחסי



במערכת s' הנעה במהירות v ביחס למערכת המעבדה S, נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות f_0 ?

א. מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?

ב. מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת s'' הנעה במהירות $\vec{v}=-v\hat{x}$ ביחס למעבדה?

תשובות סופיות:

1) $\Delta t = 1.08 \cdot 10^4 \sec$

2) א. $v_x = 0.907c$ ב. $t_1 = 39.62\mu s$ ג. $x_1 = 10.78km$

3) א. $v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2T}}$, $v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2T}}$ ב. $\tau_1 = T\sqrt{1-\frac{h^2}{8T^2c^2}}$, $\tau_2 = 2T\sqrt{1-\frac{9h^2}{64T^2c^2}}$

ג. $v_0 = \frac{c^2T}{h}$ ד. $d'^2 = \frac{\frac{5h^4}{4} - 3c^2T^2h^2 + c^4T^4}{h^2 - c^2T^2}$

4) א. $\tau = 10^{-5} \sec$ ב. $V_{12} = 0.31c$ ג. $\Delta x_{12} = 0.98km$

5) $\tan\alpha' = \gamma_2\left(\tan\alpha_1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$

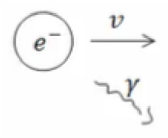
6) א. $f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} f_0$ ב. $f'' = \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2} f_0$

תרגילים לדינמיקה יחסותית:

שאלות:

1) חלקיק מתפרק לשני חלקיקים
חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה מתפרק לשני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1 , m_2.
מה יהיו האנרגיה והתנע של החלקיקים שנוצרו? (כל המסות נתונות).

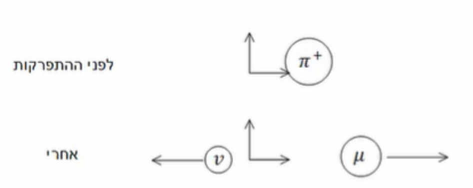
2) אלקטרון חופשי פולט פוטון



הראו כי אלקטרון חופשי הנע בואקום אינו יכול לפלוט פוטון בודד.

3) התנגשות חלקיקים זהים ויצירת חלקיקים
חלקיק בעל מסת מנוחה m פוגע בחלקיק זהה לו הנמצא במנוחה.
כתוצאה מההתנגשות נוצרים שני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1 , ו- m_2.
מצא את אנרגיית הסף ליצירת ריאקציה זו. (הנח ש: $(m_1+m_2)>2m$).

4) פיון מתפרק



פיון (π^+) מתפרק למיואון חיובי $(M_\mu=160Me\frac{V}{c^2})$
וניטרינו חסר מסה.
מצא את מסת המנוחה של הפיון אם למיואון אנרגיה קינטית של $5MeV$.

5) פוטון מתנגש אלסטית באלקטרון

אלקטרון נע במהירות v ומתנגש בפוטון בעל אנרגיה E_γ הנע לקראתו.
מצא את הערך של v אם ידוע כי הפוטון מוחזר באותה אנרגיה בה פגע.
הנח כי מסת האלקטרון ידועה.

תשובות סופיות:

1) $E_1 = m_1c^2\gamma_1 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2+m_1^2-m_2^2\right)$, $p_1 = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2+m_1^2-m_2^2\right)^2-1}$,

$$E_2 = m_2c^2\gamma_2 = \frac{c^2}{2m}\left(m^2+m_2^2-m_1^2\right)\ ,\ p_2 = m_2c\sqrt{\gamma_2^2-1} = c\sqrt{\frac{1}{2m}\left(m^2+m_2^2-m_1^2\right)^2-1}$$

2) שאלת הוכחה.

3) $E_{min} = \frac{1}{2m}c^2\left(\left(m_1+m_2\right)^2-2m^2\right)$

4) $M_\pi = 144\frac{MeV}{c^2}$

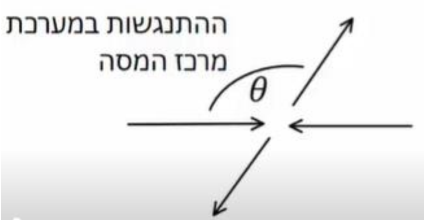
5) $v=c\left|1-\left(\left(\frac{E_\gamma}{m_ec^2}\right)^2+1\right)^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}$

תרגילים נוספים:

שאלות:

1) פוטון מתנגש ומעבר למרכז מסה

פוטון עם אנרגיה E_0 מתנגש אלסטית עם חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה (במערכת המעבדה).



א. מצא את מהירות מערכת מרכז המסה של המערכת פוטון פלוס חלקיק.

ב. מצא את התנע והאנרגיה של החלקיק והפוטון לפני ההתנגשות במערכת מרכז המסה.
מצא את התנע והאנרגיה של הפוטון והחלקיק אחרי ההתנגשות אם ידוע שהפוטון מפוזר בזווית θ ביחס לכיוון בפגיעה במערכת מרכז המסה (ראה איור).

ג. מהם האנרגיה והערך המוחלט של התנע של הפוטון והחלקיק לאחר ההתנגשות במערכת המעבדה?

ד. מצא את הזווית θ עבורה האנרגיה של הפוטון במערכת המעבדה תהיה מינימלית.

2) שאלה 1

נתונים שני גופים הנעים בניצב זה לזה. ידוע כי מסת הגופים זהה ושווה ל- M,
וכן כי התנעים של הגופים הם: p_1 , p_2 .
ברגע מסוים, הגופים מתנגשים ומופיעים ארבעה גופים חדשים.
מסות הגופים החדשים שנוצרו הן: m , $2m$, $3m$, $4m$.
מהו m המקסימלי האפשרי?
נתון: $p_1 = 6Mc$, $p_2 = 17Mc$.

3) שאלה 2

נתונים שני חלקיקים בעלי מסה m, וכן נתונות האנרגיות שלהם E_1 , E_2 .
החלקיקים נעים זה אל עבר זה, ומתנגשים.
חשבו את מסת החלקיק M הנוצר כתוצאה מהתנגשות החלקיקים.
נתון: $E_1 = 4mc^2$, $E_2 = 7mc^2$.

4) שאלה 3

שתי חלליות יוצאות מאותה נקודה, בכיוון ניצב אחת לשנייה.
חללית א׳ טסה במהירות v_1 , וחללית ב׳ טסה במהירות v_2 .
חשבו את וקטור המהירות של חללית ב׳ ביחס לחללית א׳.
נתון : $\mathrm{v}_1 = 0.8\mathrm{c}(+\hat{x})$, $\mathrm{v}_2 = 0.9\mathrm{c}(-\hat{y})$

5) שאלה 4

חלקיקים 1,2 נוצרים במעבדה ונמצאים במנוחה.
ידוע לגבי זמני החיים שלהם כי : $t_2 = 0.75t_1$ (במצב מנוחה חלקיק 2 נעלם לפני חלקיק 1).
מהי המהירות אליה יש להאיץ את חלקיק 2, כדי שלא ידעך לפני חלקיק 1?

6) זריקה אופקית יחסותית

מסלולו של חלקיק במערכת S נתון ע״י : $y = \frac{1}{2}at^2$, $x = \mathrm{v}t$ כאשר v , a קבועים ידועים.
מצא את תאוצת החלקיק במערכת S' הנעה במהירות v בכיוון ציר ה-x ביחס ל-S .
תאר את צורת המסלול בשתי המערכות (v אינה זניחה ביחס למהירות האור).

תשובות סופיות:

1) א. $v_{c.m}=\frac{E_0\cdot c}{mc^2+E_0}$

ב. פוטון לפני ההתנגשות: $P'_{pH}=\frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$, $E'_{pH}=E_0\sqrt{\frac{mc^2}{2E_0+mc^2}}$

חלקיק לפני ההתנגשות: $P'_{m_x}=\frac{-mE_0c}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}$, $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$

פוטון אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

חלקיק אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

כיוון התנע: $\vec{P}_m=-\vec{P}_{pH}=(P\cos\theta,P\sin\theta,0)$, $\vec{P}_{pH}=(P(-\cos\theta),P\sin(\theta),0)$

ג. $|P_m|=\sqrt{\left(\frac{E_m}{c}\right)^2-m^2c^2}$, $E'_m=mc^2\left(\frac{mc^2+E_0}{\sqrt{m^2c^4+2E_0mc^2}}\right)$

ד. $\theta=\frac{\pi}{2}$

2) $m_{max}\approx1.45M$

3) $M\approx\sqrt{112}m$

4) $\vec{v}'=(-0.8c,-0.54c,0)$

5) $v\approx0.66c$

6) $x'=0\ ,\ y'=\frac{1}{2}a\gamma_0^{\,2}t'^2$

כוחות ודינמיקה יחסותית:

רקע:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{dt}} = m\gamma^3\vec{a}_{||} + m\gamma\vec{a}_{\perp}$$

$\vec{a}_{||}$ - רכיב התאוצה שמקביל למהירות

$\vec{a}_{\perp}$ - רכיב התאוצה שמאונך למהירות

$$a_{||} = \dot{v}$$

טרנספורמציה של הכוחות:

$$F_x' = F_x - \frac{v_0(F_y v_y + F_z v_z)}{c^2 - v_0 v_x}$$

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$F_z' = \frac{F_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$F_x = F_x' + \frac{v_0(F_y' v_y' + F_z' v_z')}{c^2 + v_0 v_x'}$$

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma_0\left(1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}\right)}$$

$$F_z = \frac{F_z'}{\gamma_0\left(1 + \frac{v_0 v_x'}{c^2}\right)}$$

שאלות:

1) דוגמה-כוח קבוע בזמן

כוח קבוע F פועל על חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה.
מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.

2) כוח קבוע

כוח קבוע F פועל על חלקיק יחסותי בעל מסה m המתחיל תנועתו ממנוחה.

א. כתוב את משוואת התנועה של החלקיק.
ב. מצא את מהירות החלקיק כתלות בזמן.
ג. מצא את מיקום החלקיק כתלות בזמן.
ד. רשום תנאי למהירויות נמוכות והראה שהביטוי שקיבלת למהירות ולמיקום מתכנס לפתרון הקלאסי במהירויות נמוכות.
ה. צייר גרף של המהירות היחסותית והקלאסית כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{\mathrm{mc}}{\mathrm{F}}$.
ו. צייר גרף של המיקום היחסותי והקלאסי כתלות בזמן עד זמן $t=\frac{\mathrm{mc}}{\mathrm{F}}$.

3) כוח גרר מתכונתי לתנע היחסותי

כוח קבוע F פועל על מסה m המתחילה תנועתה במערכת המעבדה.
בנוסף פועל על המסה כוח גרר המתכונתי לתנע היחסותי $f=-\lambda p$ כאשר λ קבוע נתון.

א. רשום משוואת תנועה לתנע היחסותי.
ב. פתור את המשוואה ומצא מהו קבוע הזמן האופייני להתייצבות התנע על ערך קבוע.
ג. מצא את מהירות הגוף כתלות בזמן.
ד. מהי המהירות בגבול של זמנים קצרים וזמנים ארוכים ביחס לקבוע הזמן שמצאת בסעיף ב'? להזכירך הפתרון של המקרה הקלאסי בו פועל כוח קבוע F על גוף וכוח גרר $f=-\lambda p$ הוא: $\mathrm{v}(t)=\frac{\mathrm{F}}{\lambda \mathrm{m}}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

תשובות סופיות:

1) $$v(t)=\frac{\frac{F\cdot t}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{F\cdot t}{mc}\right)^2}}$$

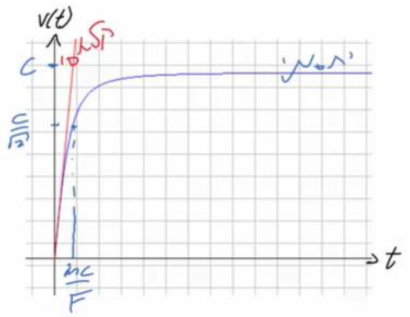
2) א. $F=m\gamma^3\dot{v}$

ב. $$v=\frac{\frac{Ft}{m}}{\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

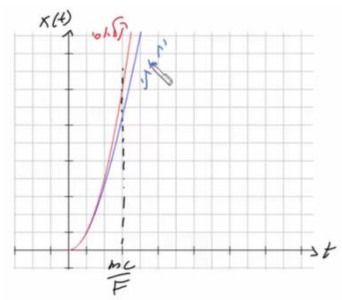
ג. $$x(t)=\frac{mc^2}{F}\left(\left(1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

ד. ראה סרטון.

ה.



ו.



3) א. $F-\lambda p=\frac{dp}{dt}$

ב. $p(t)=\frac{F}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, $\tau=\frac{1}{\lambda}$

ג. $$v(t)=\frac{\frac{F}{\lambda m}\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ד. זמן קצר: $v(t)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{F}{\lambda m}\approx v(t)$,

זמן ארוך: $$\underset{t\gg\frac{1}{\lambda}}{v(t)}=\frac{F}{\lambda m}\neq\underset{t\gg\frac{1}{\lambda}}{v(t)}\approx\frac{\frac{F}{\lambda m}}{\left(1+\left(\frac{F}{\lambda mc}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

פרק 29 - טרנספורמציה יחסותית של השדות עם נוסחאות מלאות

תוכן העניינים

הסברים ודוגמאות:

רקע:

טרנספורמציה של השדות עבור צופה הנע במהירות $\vec{v}$ ביחס למעבדה:

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_{\perp}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$\vec{E}$ ו-$\vec{B}$ הם השדות במערכת המעבדה ו-$\vec{E}',\vec{B}'$ הם השדות במערכת הנעה.

הטרנספורמציה ההפוכה:

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \qquad \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}'_{\perp} - \vec{v} \times \vec{B}'_{\perp})$$

$$\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \qquad \vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}'_{\perp}\right)$$

טרנספורמציה של צפיפויות המטען:

$$\lambda = \gamma\lambda_0$$

$$\sigma = \gamma\sigma_0$$

$$\rho = \gamma\rho_0$$

כאשר λ_0, σ_0, ρ_0 הן צפיפות אורכית, משטחית ונפחית במערכת העצמית של הגוף.

הסיבה לטרנספורמציה היא שסך המטען זהה בשתי המערכות אבל האורך משתנה.

נוסחאות לצפיפויות הזרם:

$$\vec{J} = \gamma\rho_0\vec{v}$$

$$\vec{k} = \gamma\sigma_0\vec{v}$$

$$I = \gamma\lambda_0 v$$

כאשר $\lambda_0,\quad \sigma_0,\quad \rho_0$ הן צפיפות אורכית, משטחית ונפחית במערכת העצמית של הגוף.

שאלות:

1) שדה בכיוון Z במערכת הצופה שנע

צופה הנע במהירות V בכיוון ציר x ביחס למעבדה מודד שדה חשמלי E_0 בכיוון ציר z, ושדה מגנטי אפס.
מהם השדות המגנטי והחשמלי שימדוד הצופה במעבדה?

2) חישוב שדות וצפיפויות בשתי דרכים

מישור אינסופי טעון בצפיפות מטען ליחידת שטח σ.
המישור מתחיל לנוע במהירות קבועה $\vec{v} = v\hat{x}$ ביחס למעבדה.
בתרגיל זה נמצא את השדות והצפיפויות במערכת המעבדה בשתי דרכים:
דרך ראשונה:

א. מצא את השדה החשמלי והמגנטי במערכת המישור תוך שימוש בצפיפות המטען של המישור.

ב. מצא את השדה החשמלי והמגנטי במערכת המעבדה באמצעות טרנספורמציה של השדות שמצאת בסעיף א.

ג. מצא את צפיפות המטען וצפיפות הזרם במערכת המעבדה באמצעות השדות שמצאת בסעיף ב.

דרך שניה:

ד. מצא את צפיפות המטען וצפיפות הזרם במערכת המעבדה תוך שימוש בצפיפות המטען במערכת המישור בלבד. השווה לסעיף ג.

ה. מצא את השדה החשמלי והמגנטי במערכת המעבדה, מצפיפויות המטען שמצאת בסעיף ד. השווה לסעיף ב.

תשובות סופיות:

1) $\vec{E} = \gamma E_0 \hat{z}\ E\ ,\ \vec{B} = \gamma \cdot \frac{1}{c^2} V E_0 \left(-\hat{y}\right)$

2) א. $\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}\ ,\ \vec{B}' = 0$

ב. $\vec{E} = \frac{\gamma\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}\ ,\ \vec{B} = \frac{-\gamma\sigma V}{2c^2\varepsilon_0}\hat{y}$

ג. $\sigma = \gamma\sigma\ ,\ \vec{k} = \gamma\sigma V\hat{x}$

ד. $\sigma = \gamma\sigma\ ,\ k = \gamma\sigma V\hat{x}$

ה. $\vec{E} = \frac{\gamma\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}\ ,\ \vec{B} = -\frac{\mu_0\gamma\sigma V}{2}\hat{y}$

אלקטרומגנטיות אנליטית 1

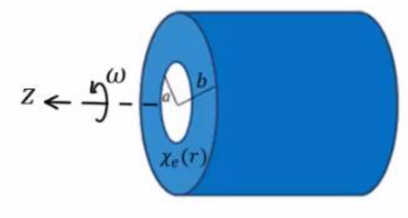
פרק 30 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

תרגילים:

שאלות:

1) קליפה גלילית דיאלקטרית מסתובבת



מעטפת גלילית עבה עם רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b עשויה מחומר דיאלקטרי מבודד בעל סוספטביליות חשמלית: $\chi_e(r)=\frac{\alpha}{r}$

הנתונה בקואורדינטות גליליות (r הוא המרחק מציר ה- z) α קבוע נתון.

המעטפת מסתובבת סביב צירה במהירות זוויתית קבועה ω.

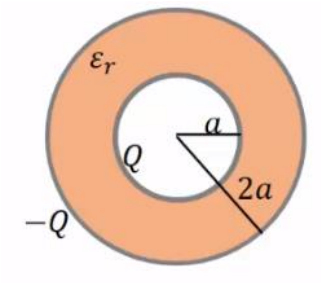
במרחב קיים שדה מגנטי הנתון לפי: $\vec{B}=B_0\left(\frac{3}{\pi}\hat{\theta}+\frac{1}{2\pi}\hat{z}\right)$. מצא את:

א. וקטור הפולריזציה $\vec{P}$ בתוך הקליפה.

ב. התפלגות המטען הקשור (משטחית ונפחית).

ג. סה״כ המטען הקשור הנפחי וסך כל המטען הקשור המשטחי ליחידת אורך של המעטפת.

2) קליפה כדורית דיאלקטרית מסתובבת



קליפה כדורית בעלת רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני $2a$ עשויה מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε_r.

על השפה הפנימית של הקליפה יש מטען חופשי Q המפוזר באופן אחיד, ועל השפה החיצונית יש מטען $-Q$ המפוזר באופן אחיד.

א. מהי האנרגיה האלקטרוסטטית של המערכת?

ב. הקליפה מסתובבת סביב ציר ה- z במהירות זוויתית קבועה ω. מהו השדה המגנטי והפוטנציאל הוקטורי בנקודה הנמצאת במרכז הקליפה?

3) גליל טעון בשדה מגנטי

נתון גליל אינסופי ברדיוס R. הגליל טעון בצפיפות מטען נפחית קבועה ונתונה ρ. ציר הגליל חופף עם ציר z. במרחב קיים שדה מגנטי הנתון לפי הנוסחה הבאה בקואורדינטות גליליות: $\vec{B}=\begin{cases}B_0\sin(\omega t+\alpha)\hat{z} & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}$.

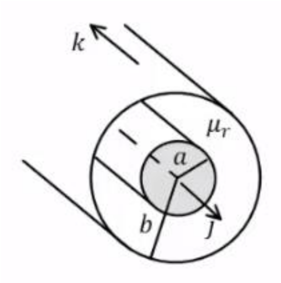
א. מצא את פונקציית הפוטנציאל הוקטורי בכל מקום.

ב. מצא את השדה החשמלי בכל מקום.

ג. מה ניתן ללמוד מתנאי השפה על B ב- $r=R$?

4) **כבל קו-אקס עם חומר מגנטי**

כבל קואקסיאלי בעל אורך אינסופי עשוי מגליל מלא פנימי בעל רדיוס a הנושא זרם I בצפיפות זרם נפחית אחידה. החלק החיצוני של הכבל הוא מעטפת גלילית דקה מאוד ברדיוס b הנושאת זרם I בכיוון הפוך ובצפיפות זרם משטחית אחידה. התחום שבין הגלילים מלא בחומר מגנטי עם מקדם פרמאביליות: $\mu_r = 1$.



חשבו את:

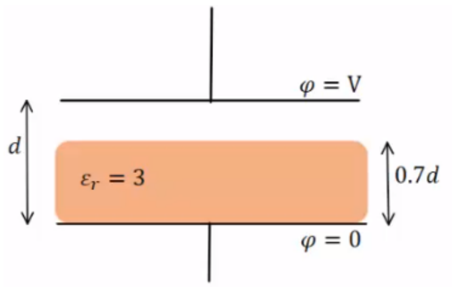
א. $\vec{H}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של H כתלות ב-r והראו ש-H מקיים את תנאי השפה הדרושים.

ב. $\vec{B}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של B כתלות ב-r והראו ש-B מקיים את תנאי השפה הדרושים.

ג. $\vec{M}$ בכל המרחב, כולל בתוך המוליך הפנימי. ציירו גרף של M כתלות ב-r והראו ש-$\vec{M}$ מקיים את תנאי השפה הדרושים.

5) **קבל עם חומר דיאלקטרי חלקי**

קבל לוחות מורכב משני לוחות במרחק d. הפוטנציאל על הלוח התחתון הוא אפס והפוטנציאל על הלוח העליון הוא V. בתוך הקבל ישנו חומר דיאלקטרי עם מקדם דיאלקטרי $\varepsilon_r = 3$ ובעובי $0.7d$.



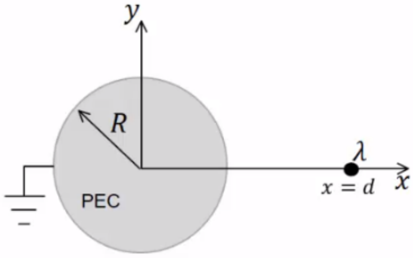
החומר מונח על הלוח התחתון וממלא את כל שטחו. הזניחו אפקטים של הקצוות ומצאו את:

א. פונקציית השדה החשמלי ופונקציית הפוטנציאל בתוך הקבל.

ב. התפלגות המטען החופשי והקשור במערכת.

6) **תיל טעון מול גליל מוארק**

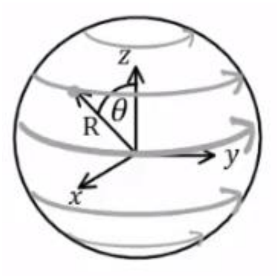
נתון גליל אינסופי העשוי מוליך מושלם (PEC) בעל רדיוס R. נקבע את ראשית הצירים במרכז הגליל ואת ציר ה-z לאורך ציר הסימטריה של הגליל. מחוץ לגליל ובמרחק d על ציר ה-x החיובי ישנו תיל אינסופי עם צפיפות מטען λ (ראה איור).



הנח כי הגליל מוארק בנקודה: $(-R,0)=(x,y)$

וכן המקדמים הם: ε_0, μ_0 בכל המרחב.

א. מצא את מיקום צפיפות המטען המשוקפת $\lambda-$ הנחוצה לבעיה השקולה ואת תחום השקילות. קבע את הנקודה: $(x,y)=(0,R)$ על ציר ה- y כנקודת ייחוס לפוטנציאלים. יש להראות פיתוח מלא של התוצאה.
ב. מצא את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.
ג. מצא את צפיפות המטען המושרה ואת סך כל המטען המושרה ליחידת אורך בחתך הגליל.
ד. כעת נתון כי: $d>>R$, מצא את צפיפות המטען המושרה על הגליל בקירוב סדר ראשון.
ה. בתנאי של סעיף ד', נתון כי קו המטענים נע במהירות איטית כך שמיקומו הינו: $(x,y)=(d(t),0)$. מצא את כל סוגי צפיפות המקורות המושרים בקירוב הקוואזיסטטי ואת התנאי על פרמטרי הבעיה לנכונות הקירוב הקוואזיסטטי.



7) צפיפות זרם משטחית על כדור מגנטי

נתונה צפיפות זרם משטחית המפולגת על גבי פני כדור בעל רדיוס R שמרכזו בראשית הצירים: $\vec{k}(\varphi,\theta)=k_0\sin(2\theta)\hat{\varphi}$.

הנח שהמקדמים הם: ε_0,μ_0 בכל המרחב.

א. רשום ביטוי אינטגרלי לשדה המגנטי על ציר ה- z (אין צורך לפתור את האינטגרל אך יש לפשט ככל הניתן).

כעת נתון כי בנפח הכדור יש חומר מגנטי לינארי עם מקדם פרמהביליות יחסית μ_r ומקדם דיאלקטרי ε_0.

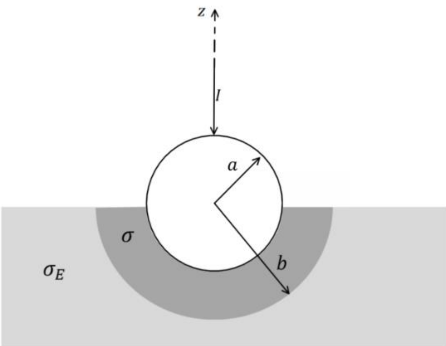
ב. הוכח כי קיים פוטנציאל סקלרי לשדה המגנטי ורשום את המשוואה הדיפרנציאלית של הפוטנציאל ואת כל תנאי השפה הנחוצים להגדרת הבעיה.
ג. חשב את הפוטנציאל המגנטי הסקלרי בכל המרחב.

כעת מוסיפים דיפול חשמלי בראשית הצירים בעל מומנט דיפול: $\vec{p}=p_0\hat{z}$.

ד. חשב את הוקטור פוינטינג עבור נקודה על ציר x בתוך הכדור. מה המשמעות הפיזיקלית של תשובתך?

8) הארקה דרך כדור שקוע בקרקע

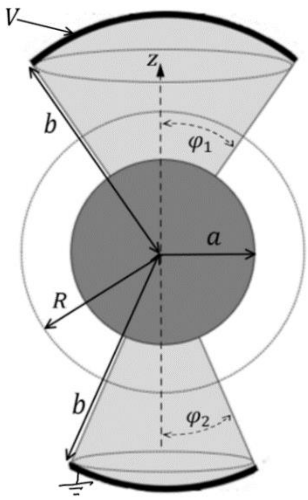
הארקה מחוברת לקרקע באופן הבא.
חוט מוביל זרם I לתוך כדור מוליך מושלם ברדיוס a. הכדור שקוע בקרקע עד קו המשווה שלו. סמוך לשפת הכדור נוצרת שכבה שעוביה $a-b$ בעלת מוליכות σ.
המוליכות של האדמה היא σ_E.



א. רשמו את תנאי השפה לפוטנציאל האלקטרוסטטי באדמה ובשכבה מסביב לכדור.
ב. חשבו את פונקציית הפוטנציאל באזורים הנ"ל.
ג. מצאו את ההתנגדות של האדמה כולל השכבה.
ד. מהי צפיפות הזרם המשטחית על שפת הכדור (מעל המשווה ומתחת)?

9) כדור ושתי גזרות

המבנה באיור עשוי מהחלקים הבאים:
גזרה כדורית עליונה
בתחום: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$,
$a \le r \le b$ העשויה מחומר בעל מוליכות σ.
כדור מרכזי ברדיוס a עשוי מוליך מושלם
וגזרה כדורית תחתונה
בתחום: $0 \le \theta \le 2\pi$ $a \le r \le b$,$0 \le \varphi \le \varphi_2$,
בעלת מוליכות σ גם כן.
על פני הגזרה העליונה מונח משטח כדורי עשוי מוליך מושלם ברדיוס $r=b$ המחובר לפוטנציאל V.
באותו האופן מונח משטח כדורי על פני הגזרה התחתונה עשוי מוליך מושלם ומוארק.
המשטחים מתוארים בקו העבה באיור.

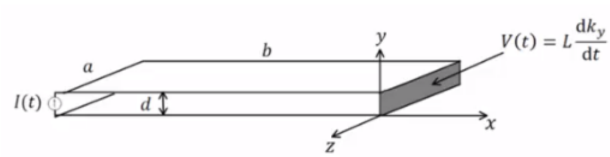


א. הניחו כי צפיפויות הזרם הנפחיות בגזרה העליונה והתחתונה הן: $\vec{J}_1$ ו-$\vec{J}_2$ ורשמו את חוק שימור המטען, בצורתו האינטגרלית, על מעטפת כדורית ברדיוס R (מסומנת במקווקו באיור).
ב. הראו כי בתוך המוליכים הסופיים הפוטנציאל מקיים את משוואת לאפלס ורשמו את תנאי השפה לפוטנציאל.
ג. מצאו את הפוטנציאל וחשבו את השדה החשמלי בתוך המבנה ואת צפיפות הזרם המתאימה.
ד. השתמשו בחוק אמפר האינטגרלי וחשבו את $\vec{H}$ בגזרה העליונה.
הניחו כי השדה בכיוון $\hat{\theta}$ בלבד.
ה. הראו כי משפט פויינטינג מתקיים בגזרה העליונה.

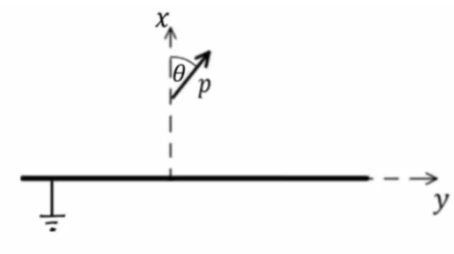
10) שני לוחות ומקור זרם

נתון התקן העשוי משני לוחות מוליכים אידיאליים בגודל $a\times b$ ומרחק d ביניהם.
בצד אחד של הלוחות ישנו מקור זרם המספק זרם: $I(t)=I_0\sin(\omega t)$.
בצד השני הלוחות מחוברים על יד דופן בעלת תכונות השראתיות כך שעל הדופן מתקיים: $V(t)=L\frac{dk_y}{dt}$. נתון כי על פני המקור אין תיקונים לזרם מסדר גבוה.
כמו כן: $b>>a>>d$ וניתן להניח שהשדות מחוץ להתקן מתאפסים.

א. חשב את השדות מסדר אפס בתוך ההתקן.
ב. חשב את התיקונים מסדר ראשון לשדות.
ג. מהי צפיפות המטען המשטחית על פני הלוח התחתון?
ד. חשב את התיקון מסדר שני לצפיפות הזרם המשטחית בלוח התחתון.
ה. השווה את $k^{(2)}$ ל- $k^{(0)}$ ותן תנאי לנכונות הקירוב הקווזיסטטי
(ניתן להניח: $\frac{L}{\mu_0 d}>>b$).
ו. חשב את הווקטור פויינטינג בהתקן עד סדר ראשון.
ז. הראה כי משפט פויינטינג בצורתו הדיפרנציאלית מתקיים בתוך ההתקן עד סדר ראשון.



11) דיפולים בזווית מעל מישור מוארק



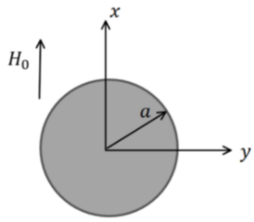
דיפול חשמלי p מונח במרחק a מעל מישור אינסופי העשוי מוליך מושלם ומוארק.
המישור נמצא על מישור yz והדיפול נמצא בזווית θ ביחס לציר ה- x.

א. מהו דיפול השיקוף?
ב. מהו השדה שיוצר דיפול השיקוף במיקום של הדיפול הנתון?
ג. מהו מומנט הכוח שפועל על הדיפול הנתון?
ד. חשבו את העבודה שצריך להשקיע כוח חיצוני על מנת לסובב את הדיפול מזווית $\theta=0$ לזווית θ כלשהי. רמז: העבודה של מומנט כוח היא: $W=\int\tau d\theta$.
ה. מהם מצבי שיווי המשקל? מי מתוכם יציבים ומי לא יציבים?
ו. חזור על סעיפים א עד ה עבור דיפול מגנטי.

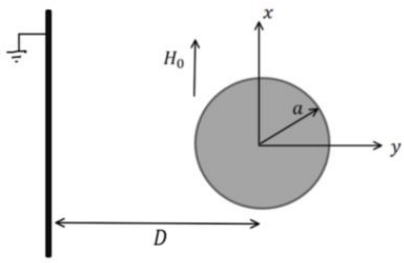
12) קיטוביות מגנטית של גליל מול מישורים מוארקים

גליל אינסופי עשוי מוליך מושלם נמצא בשדה אחיד: $\vec{H} = H_0\hat{x}$.
ציר הגליל הוא לאורך ציר z באיור.

א. מצאו את השדה המגנטי בכל המרחב וחשבו ממנו את הקיטוביות המגנטית α_m של הגליל.

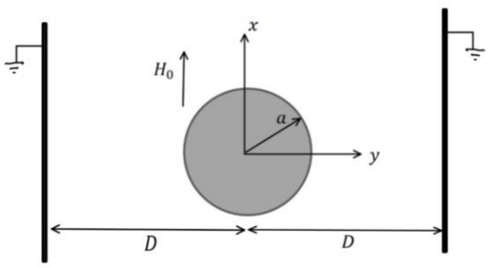


כעת מניחים ליד הגליל מישור אינסופי מוליך מושלם ומוארק כך שהמרחק בין המישור לגליל הוא D כאשר $D >> a$.
חשבו את הקיטוביות המגנטית המתוקנת של הגליל המוגדרת על ידי $\tilde{\alpha}_m = \frac{m}{H_0}$.

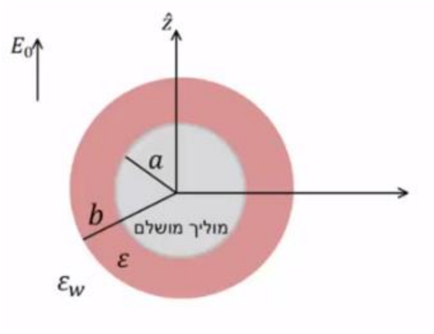


כעת מניחים מצידו השני של הגליל מישור נוסף זהה באותו המרחק.

ב. חשבו שוב את הקיטוביות המתוקנת במקרה זה.



13) שכבת הסוואה בתוך מים



המערכת הבאה צריכה להסוות מכשיר חשמלי בתוך מים. נניח כי המכשיר הוא כדור מוליך מושלם ניטרלי ברדיוס a.
מקיפים את הכדור בשכבה בעובי $b-a$ העשויה מחומר דיאלקטרי בעל מקדם ε.
המקדם הדיאלקטרי של מים הוא ε_W.
בשביל לבדוק את יעילות ההסוואה שמים את המערכת בתוך שדה אחיד $E_0\hat{z}$.

א. רשום את תנאי השפה לפונקציות הפוטנציאל במרחב.
ב. חשב את הפוטנציאל והשדה החשמלי בכל המרחב.
ג. מה צריך להיות רדיוס השכבה b כך שמחוץ לשכבה השדה החשמלי יישאר ללא שינוי $E_0\hat{z}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{P}=\dfrac{\alpha\varepsilon_0\omega B_0\hat{r}}{2\pi\left(1+\dfrac{\alpha}{r}\right)}$.

ב. $\sigma_b(a)=-\dfrac{\alpha\varepsilon_0\omega B_0}{2\pi\left(1+\dfrac{\alpha}{a}\right)}$, $\sigma_b(b)=\dfrac{\alpha\varepsilon_0\omega B_0}{2\pi\left(1+\dfrac{\alpha}{b}\right)}$, $\rho_b=-\dfrac{\varepsilon_0\alpha\omega}{2\pi}\dfrac{r+2\alpha}{(r+\alpha)^2}$.

ג. $\dfrac{Q_b}{l}=\varepsilon_0\alpha\omega B_0\left(a+\dfrac{\alpha^2}{a+\alpha}-b-\dfrac{\alpha^2}{b+\alpha}\right)$, $\dfrac{Q_b}{l}=\alpha\varepsilon_0\omega B_0\left(\dfrac{b}{1+\dfrac{\alpha}{b}}-\dfrac{a}{1+\dfrac{\alpha}{a}}\right)$.

2) א. $U=\dfrac{Q^2}{16\pi a\varepsilon_0\varepsilon_r}$.

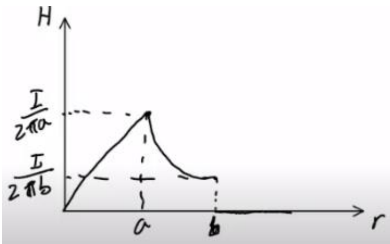
ב. $B_z=\dfrac{\mu_0 Q\omega}{12\pi\varepsilon_r a}$, $\vec{A}_T=0$.

3) א. $\vec{A}=\begin{cases}\dfrac{B_0 r}{2}\sin(\omega t+\alpha)\hat{\theta} & r<R\\ \dfrac{B_0 R^2}{2r}\sin(\omega t+\alpha)\hat{\theta} & r>R\end{cases}$.

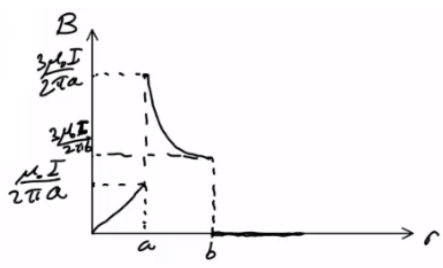
ב. $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}-\dfrac{B_0 r\omega}{2}\cos(\omega t+\alpha)\hat{\theta}\\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}-\dfrac{B_0 R^2\omega}{2r}\cos(\omega t+\alpha)\hat{\theta}\end{cases}$.

ג. $\vec{k}=|\vec{k}|\cdot\hat{k}=-\dfrac{B_0}{\mu_0}\sin(\omega t+\alpha)\hat{\theta}$.

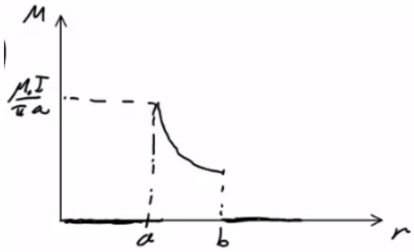
4) א. $\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta} & r<a\\ \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:



ב. $\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta} & a<r\\ \dfrac{3\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:



ג. $\vec{M}=\begin{cases}0 & r<a\\ \dfrac{\mu_0 I}{\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & b<r\end{cases}$, גרף:



5) א. $\vec{E}=\begin{cases}-\dfrac{V}{1.6d}\hat{z} & z<0.7d\\ -\dfrac{3V}{1.6d}\hat{z} & 0.7d<z<d\end{cases}$, $\varphi=\begin{cases}-\dfrac{V}{1.6d}z & z<0.7d\\ \dfrac{3V}{1.6d}z-0.875V & 0.7d<z<d\end{cases}$.

ב. $\sigma_b=\dfrac{\varepsilon_0 V}{0.8d}$, $\sigma_{free}=-1.875\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}$.

6) א. $b_2=\dfrac{R^2}{d}$. ב. $\varphi=\begin{cases}0 & r<R\\ k\lambda\ln\left(\dfrac{r^2+b^2-2rb\cos\theta}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\cdot\dfrac{R^2+d^2}{R^2+b^2}\right) & r>R\end{cases}$.

$$\vec{E}=-k\lambda\left(\frac{1(2r-2b\cos\theta)}{r^2+b^2-2rb\cos\theta}-\frac{1\cdot(2r-2rd\cos\theta)}{r^2+d^2-2rd\cos\theta}\right)\hat{r}-$$

$$\frac{k\lambda}{r}\left(\frac{1\cdot(2rb\sin\theta)}{r^2+b^2-2rb\cos\theta}-\frac{2rd\sin\theta}{r^2+d^2-2rd\cos}\right)\hat{\theta}$$

ג. $\eta=\dfrac{\lambda}{2\pi R}\dfrac{R^2-d^2}{R^2-2dR\cos+d^2}$. ד. $k_\theta=-\dfrac{Ru\lambda}{\pi d^2}\sin\theta$.

7) א. $\vec{B}=\mu_0 R^3 k_0\hat{z}\int_1^{-1}\dfrac{-dx\cdot x(1-x^2)}{z^2+R^2-2zRx}$. ב. $\theta_m(r=0)<\infty$, $\theta_m(r=\infty)<\infty$,

$+\dfrac{\partial\phi_{m2}}{2r}l_R=\mu_r\left(+\dfrac{\partial\phi_{m1}}{2r}l_R\right)$, $-\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\phi_{m2}}{2\theta}l_R+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\phi_{m1}}{2\theta}l_R=k_0\sin 2\theta$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

ג. $\phi_{m2}(r,\theta)=\dfrac{\mu_r R^4 k_0}{9+6\mu_r}r^{-3}(3\cos(2\theta)+1)$, $\phi_{m1}(r,\theta)=-\dfrac{k_0 r^2}{R(6+4\mu_r)}(3\cos(2\theta)+1)$.

ד. $\vec{H}=\dfrac{p_0 k_0\hat{y}}{\pi\varepsilon_0 R(6+4\mu_r)x^2}$.

8) א. ראה סרטון.

ב. $\phi_2=\dfrac{I}{2\pi\sigma_E r}$, $A_1=\dfrac{I}{2\pi b}\left(\dfrac{1}{\sigma_E}+\dfrac{1}{\sigma}\right)$, $\phi_1=A_1+\dfrac{I}{2\pi\sigma r}$.

ג. $R=\dfrac{1}{2\pi b}\left(\dfrac{1}{\sigma_E}-\dfrac{1}{\sigma}\right)+\dfrac{1}{2\pi a\sigma}$. ד. $K_\varphi=\dfrac{I}{2\pi a}\left(\dfrac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}\right)$.

9) א. $J_{1_r}\left(1-\cos\varphi_1\right)=-J_{2_r}\left(1-\cos\varphi_2\right)$. ב. ראה סרטון.

ג. $\phi_2=A_2+\dfrac{B_2}{r}$, $\phi_1=A_1+\dfrac{B_1}{r}$, $B_1=-\dfrac{abKV}{(b-a)(1-K)}$, $A_1=V-\dfrac{aKV}{(b-a)(1-K)}$,

$K=\dfrac{1-\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_1}$, $B_2=\dfrac{abV}{(b-a)(1-K)}$, $A_2=-\dfrac{aV}{(b-a)(1-K)}$.

ד. $\vec{H}=\dfrac{\sigma B_1}{r}\dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\hat{\theta}$.

10) א. $\vec{E}^{(0)}=0$, $\vec{H}^{(0)}=-k\hat{z}=-\dfrac{I}{a}\hat{z}$. ב. $\mathrm{H}^{(1)}=0$, $E_y^{(1)}=\mu_0\dfrac{\dot{I}}{a}\left(x+\dfrac{L}{\mu_0 d}\right)$.

ג. $\eta^{(1)}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\dot{I}}{a}\left(x+\dfrac{L}{\mu_0 d}\right)$. ד. $K_x^{(2)}=-\dfrac{\varepsilon_0\mu_0\ddot{I}}{a}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{Lx}{\mu_0 d}+\dfrac{Lb}{\mu_0 d}-\dfrac{b^2}{2}\right)$.

ה. $\lambda>>\dfrac{L}{\mu_0 d}$. ו. $\vec{S}=\dfrac{\mu_0\dot{I}I}{Q^2}\left(x+\dfrac{L}{\mu_0 d}\right)(-\hat{x})$ ז. הוכחה.

11) א. $\vec{P}=P\left(\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}\right)$. ב. $\vec{E}=\dfrac{kP\left(2\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}\right)}{(2a)^3}$.

ג. $\vec{\tau}=\dfrac{-kP^2\sin2\theta}{16a^3}\hat{z}$. ד. $w=\dfrac{kP^2}{32a^3}\left(\cos2\theta-1\right)$.

ה. $\theta=0$: יציב , $\theta=\dfrac{\pi}{2}$: לא יציב , $\theta=\pi$: יציב , $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$: לא יציב.

ו.א. $\vec{m}=m\left(\sin\theta\hat{y}-\cos\theta\hat{x}\right)$. ו.ב. $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{\left(-2\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}\right)}{8a^3}$.

ו.ג. $\vec{\tau}=\dfrac{\mu_0 m^2\sin2\theta\hat{z}}{64\pi a^3}$. ו.ד. $w=\dfrac{\mu_0 m^2}{128\pi a^3}\left(1-\cos2\theta\right)$.

ו.ה. $\theta=0$: לא יציב , $\theta=\dfrac{\pi}{2}$: יציב , $\theta=\pi$: לא יציב , $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$: יציב.

12) א. $\alpha_m=-2\pi a^2$, $H_0\hat{x}+\dfrac{2\pi\left(H_0a^2\right)\left(\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}\right)}{2\pi r^2}$.

ב. $\tilde{\alpha}_m=\dfrac{-2\pi a^2}{1-\dfrac{a^2}{4D^2}}$. ג. $\tilde{\alpha}_m=\dfrac{-2\pi a^2}{1-\dfrac{\pi^2a^2}{12D^2}}$.

13) א. $\theta_2(a)=C=0$, $\theta_2(b)=\theta_3(b)$, $\varepsilon w\cdot\frac{\partial\theta_3}{\partial r}l_b=\varepsilon\frac{\partial\theta_2}{\partial r}l_b$, $\theta_3(r\to\infty)=-E_0z=-Er\cos\varphi$.

ב. $B=\frac{E_0b^3\left(\left(b^3+2a^3\right)\varepsilon_r-\left(b^3-a\right)\right)}{2\left(b^3-a^3\right)+\left(b^3+2a^3\right)\varepsilon_r}$, $\tilde{A}=\frac{-3E_0b^3}{2\left(b^3-a^3\right)+\varepsilon_r\left(b^3+2a^3\right)}$, $\tilde{B}=-a^3\tilde{A}$, $\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_w}$,

$E_0\frac{\left(\cos\varphi\hat{r}-\sin\varphi\hat{\varphi}\right)}{\hat{x}}+\frac{2B\cos\varphi\hat{r}+B\sin\varphi\hat{\varphi}}{r^3}$, $\vec{E}_2=-\vec{D}\phi_2=-\tilde{A}\hat{x}+\frac{2\tilde{B}\cos\varphi\hat{r}+\tilde{B}\sin\varphi\hat{\varphi}}{r^3}$.

ג. $b=a\left(\frac{1+2\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{3}}$.