אלגברה ליניארית

תוכן העניינים

אלגברה ליניארית

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{array}{r} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{array}$
ב. $\begin{array}{r} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{array}$
ג. $\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{array}$
ד. $\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{array}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{array}{r} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{array}$
ב. $\begin{array}{r} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{array}$
ג. $\begin{array}{r} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{array}$
ד. $\begin{array}{r} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{array}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו,
ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3+R_1,\ R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2,\ R_2 \to R_2+R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3,\ R_3 \to R_3-3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3,\ R_2 \to R_2+3R_3$
$R_1 \to 5R_1-8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,
כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

8)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

10)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

12)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

15)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$F=\mathbb{C}$, $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

16)
$$\begin{aligned} 2x+3y&=8\\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$$

17)
$$\begin{aligned} 4x+8y&=20\\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$$

18)
$$\begin{aligned} 8x-4y&=10\\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$$

19)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5\\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5\\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$$

20)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=-11\\ 2x+3y-z&=-5\\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$$

21)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=3\\ 4x+6y+16z&=8\\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$$

22)
$$\begin{aligned} x+3y&=2\\ 2x+y&=-1\\ x-y&=-2 \end{aligned}$$

23)
$$\begin{aligned} 4x-7y&=0\\ 8x-14y&=2\\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$$

24)
$$\begin{aligned} 3x-2y&=1\\ -9x+6y&=-3\\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$$

25)
$$\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2\\ 2x+5y-8z+6t&=5\\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$$

26)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$$

27)
$$\begin{aligned} x+2y+2z&=2\\ 3x-2y-z&=5\\ 2x-5y+3z&=-4\\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}9&2&6&8\\3&5&-1&0\\4&2&8&2\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}0&0&-4&4\\0&5&-4&2\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

12) $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15) $\underset{F=\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\underset{F=\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

16) $(x,y)=(1,2)$

17) $(x,y)=(5-2t,t)$

18) ϕ

19) ϕ

20) $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

21) $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

22) $(x,y)=(-1,1)$

23) ϕ

24) $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

25) $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

26) ϕ

27) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

28) א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$ ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכת:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

1) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k = 1$ 3. $k = -2$

2) 1. $k \neq 1,\ k \neq -2$ 2. $k = -2$ 3. $k = 1$

3) 1. $k \neq -1,\ k \neq \frac{4}{7}$ 2. $k = \frac{4}{7}$ 3. $k = -1$

4) 1. $k \neq 1,\ k \neq -0.4$ 2. $k = 1,\ k = -0.4$

5) 1. $k \neq \pm 1,\ k \neq -2$ 2. $k = \pm 1, k = -2$

6) 1. $k \neq -1,\ k \neq -3,\ k \neq 2$ 3. $k = -1,\ k = -3,\ k = 2$

7) 1. $k = -1$ 2. $k \neq \pm 1$ 3. $k = 1$

אלגברה ליניארית

פרק 2 - מטריצות

תוכן העניינים

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}$, $B_{4\times6}$, $C_{6\times2}$, $D_{4\times2}$, $E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x,y,z, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקימות $A^2=-4I$.

11) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12) שתי מטריצות A ו-B יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:
א. אם המטריצות A ו-B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות A ו-B מתחלפות.
ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14) יהיו A ו-B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

15) לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.
א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר ℓ?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו-B, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר A ו-I ריבועיות מסדר ℓ.

16) א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש-A ו-B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות AB ו-$A+B$ נילפוטנטיות.

17) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.
א. כתבו את המטריצות A ו-B בצורה מפורשת.
ב. המטריצה C מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1\le i,j\le n$.

18) מצאו מטריצה ממשית A, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6
ז. 6×2 ח. לא ט. 6×4 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

9) שאלת הוכחה.

10) $A=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

16) שאלת הוכחה.

17) א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב. $c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

18) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ **הפיכה**?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את X:

12) א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

14) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

15) נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

16) נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$.

חשבו את Y, אם ידוע כי $BYB^{T}=B^{-1}+B$.

17) נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את B, אם נתון בנוסף כי $5A^{T}B\left(I+2A\right)^{-2}=\left(7A\right)^{-2}$.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10) $k \neq 1,\ k \neq -2$

11) $k = 1,\ k = -4$

12) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

13) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

14) $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

15) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

16) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

17) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

1) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה:
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x-2y+2z&=5 \\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$$
.

2) פתרו את מערכת המשוואות הבאה,

בעזרת המטריצה ההפוכה:
$$\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ y+z+t&=1 \\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$$
.

תשובות סופיות

1) $(x,y,z)=(1,2,3)$

2) $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

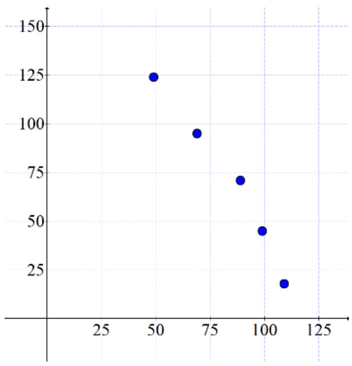
שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור : $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.

$price\,(x)$	$Demand\,/\,sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18



א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.
ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ״ל.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.
ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
ד. 14.41

אלגברה ליניארית

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

17) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

בשאלות **19-18** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

18) א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

19) א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

20) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

21) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

22) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

23) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

24) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

25) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

26) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) א. 4 ב. 2^{13}
19) א. -8 ב. -2^{11}
20) שאלת הוכחה.
21) $\frac{81}{32}$
22) $|A|=18,\ |B|=-2/3$
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) 7
26) 4^n

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,\dots,a_{n-1}$, המטריצה הבאה הפיכה:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}?$$

2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של n עבורו דרגת המטריצה קטנה מ-n?

3) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

5) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\neq j\end{cases}$.

6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n\ge 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

7) חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי :

א. $a_{ij}=\min\{i,j\}$

ב. $a_{ij}=Max\{i,j\}$

8) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי : $a_{ij}=\begin{cases}\min\{3(i-1),3(j-1)\} & 1<i,j\le n \\ 1 & i=1\ or\ \ j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

9) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי : $a_{ij}=\begin{cases}\min\{k(i-1),k(j-1)\} & 1<i,j\le n \\ 1 & i=1\ or\ \ j=1\end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הפיכה.

10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n\ge 3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \quad \left(a_{ij}=\begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & 2\le i\le n,\ j=1 \\ 1 & 2\le j\le n,\ i=1 \\ x & else \end{cases} \right).$$

11) תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי : $a_{ij}=\begin{cases} ij & i\ne j \\ 1+ij & i=j\end{cases}$.

חשבו את $|A_{n\times n}|=D_n$.

הערה : נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

12) המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

13) נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה B.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

14) חשבו את $D_n=\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & else \end{cases}$.

15) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} 2 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} i & i+j=n+1 \\ 2 & else \end{cases}$.

16) חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix} a & & & b \\ & & b & \\ & \iddots & & \\ b & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases} b & i+j=n+1 \\ a & else \end{cases}$.

17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.

18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, כאשר $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

תשובות סופיות

1) א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. A הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

2) א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

3) $|A|=n!$

4) $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

5) $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

6) $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

7) א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

8) $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

9) $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

10) $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

11) $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

12) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

13) $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

14) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\end{cases}$$

15) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n\ even\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n\ odd\end{cases}$$

16) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ even\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n\ odd\end{cases}$$

17) $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\ odd\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n\ even\end{cases}$$

18) $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ even\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n\ odd\end{cases}$$

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו-B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבון:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

2) א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו-B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

10) נתון
$$M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18,\ |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1)
$$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

אלגברה ליניארית

פרק 4 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

תשובות סופיות

1) כן **2)** כן **3)** כן **4)** לא **5)** לא

6) כן **7)** לא

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?
ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.
א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו-u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו-u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=2u_3+u_2,\ \ u_2=u_1-2u_3$.
3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=4u_4-u_2,\ \ u_2=4u_4-u_1$.
4) א+ב+ג. $k=-4$
5) $a=5t+3s,\ b=4t-13s,\ c=7s,\ d=7t$
6) $v=2u_1+u_2+u_3$, אינסוף.
7) $v=\frac{7}{4}u_1+\frac{3}{4}u_2$, אינסוף.

בסיס וממד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T.

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3.

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$

.2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$

.3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

9) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4:

$U=span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$

$V=span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

10) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

11) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U=span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **12-13** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה,
וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

(12

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(13

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

11) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

12) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

13) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

אלגברה ליניארית

פרק 5 - תכנון לינארי

תוכן העניינים

תכנון ליניארי

שאלות

1) חקלאי צריך לתכנן את עיבוד שדותיו לעונה החקלאית, כך שרווחיו יהיו מקסימליים. המשאבים העומדים לרשותו הם: שטח של 10 דונמים, 2,800 מ"ק מים ו-364 ימי עבודה. הוא החליט לנצל את כל משאביו לגידול עגבניות ופלפל. הצרכים והרווחים לדונם, לגידולים אלה, נתונים בטבלה שלפניך:

	מים לדונם	ימי עבודה לדונם	רווחים לדונם
עגבניות	350 מ"ק	14 יום	800 שקל
פלפל	210 מ"ק	42 יום	1400 שקל

א. כתבו את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה לבעיה.

ב. מצאו על כמה דונמים צריך החקלאי לגדל עגבניות ועל כמה דונמים הוא צריך לגדל פלפל, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.

ג. מצאו מה יהיו הרווחים המקסימליים של החקלאי.

2) לרשות נגריה 3 מ"ק עצים, 21 מ"ר דיקט ו-104 ימי עבודת פועל.
לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו-12 ימי עבודת פועל.
לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו-5 ימי עבודת פועל.
הרווח ממכירת ארון מטבח הוא 1,000 שקל וממכירת ארון בגדים 1,500 שקל.
כמה ארונות וכמה ארונות בגדים כדאי לנגריה לייצר, כדי שרווחיה יהיו מקסימליים?

3) מפעל מייצר שני סוגי שולחנות: שולחן אוכל ושולחן סלוני.
תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים: חיתוך, עיבוד וצביעה.
במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד החיתוך 16 שעות לכל היותר, את ציוד העיבוד אפשר להפעיל 18 שעות לכל היותר ואת ציוד הצביעה 12 שעות לכל היותר. אותו ציוד משמש לייצור שני סוגי השולחנות.
פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור שולחן אחד נתון בטבלה שלפניך:

	חיתוך	עיבוד	צביעה
שולחן אוכל	2 שעות	1 שעה	1 שעה
שולחן סלוני	1 שעה	3 שעות	1 שעה

רווח המפעל מכל שולחן אוכל הוא 200 שקל ומכל שולחן סלוני הוא 350 שקל.

א. כמה שולחנות מכל סוג על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים?

ב. באחד ממחזורי הייצור התקלקלה מכונת הצביעה לשעה אחת ולכן היה אפשר להפעילה רק 11 שעות.
האם התשובה לסעיף א' תשתנה לגבי מחזור ייצור זה? נמקו.

4) נתונים האילוצים:

$$y \ge 0 \ , \ x \ge 0$$
$$y \le 2x + 4$$
$$y \le -2x + 8$$
$$y \ge 2x - 4$$

פונקציית המטרה היא: $f(x,y) = 3x - y + 6$.

א. קווקו בשרטוט מדויק את התחום האפשרי של הבעיה.

ב. הוסף לשרטוט את קו הגובה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 5.

ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

5) מצא ערך מינימלי של הפונקציה $f(x,y) = 2x - y$

כאשר האילוצים הם:

$$x + y \le 5$$
$$y \ge 0$$
$$y \ge 6 - 2x$$

6) מצא ערך מינימלי וערך מקסימלי של פונקציית המטרה $f(x,y) = x + 2y$.

תחת האילוצים: $x \le 2$, $x \ge y$, $x + y \le 3$, $y + 2 \ge 0$.

7) נתונים האילוצים:

$$y \le 2x + 3$$
$$x + 2y \le 21$$
$$x + 7y \ge 21$$
$$y \le 7$$

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. מצא את הערך המקסימלי שמקבלת פונקציית המטרה $f(x,y) = 16x - 8y$ בתחום זה.

ג. מצא שני פתרונות אפשריים, שעבורם מקבלת פונקציית המטרה את הערך 8.

8) נתונה מערכת האילוצים:

$$2y+5x\ge 0$$
$$2y-x\le 12$$
$$x+y\le 10$$
$$y\ge 2\frac{1}{2}$$

פונקציית המטרה היא: $f(x,y)=10x-10y$.

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. באיזה נקודה בתחום מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

ג. תן דוגמא לשתי נקודות השייכות לתחום האפשרי ושעבורן הערך של פונקציית המטרה הוא 20-.

תשובות סופיות

1) א. מערכת אילוצים:
פונקציית מטרה: $f(x,y)=800x+1400y$.

$$x+y\le 10$$
$$14x+42y\le 364$$
$$350x+210y\le 2800$$
$$y\ge 0\ ;\ x\ge 0$$

ב. עגבניות: 2 דונם, פלפל: 8 דונם.   ג. 12,800 שקל.

2) 7 ארונות מטבח, 4 ארונות בגדים.

3) א. 4 שולחנות סלוניים, 6 שולחנות אוכל.

ב. לא תשתנה. כיוון שהאילוץ של מכונת הצביעה, גם הוא משתנה ל- $x+y\le 1$, עדיין נמצא מחוץ לתחום.

4) ג. $(3,2)$

5) מינימום: $f(1,4)=-2$.

6) מינימום: $f(-2,-2)=-6$, מקסימום: $f(1.5,1.5)=4.5$.

7) ב. מקסימום: $f(7,2)=96$. ג. נקודות בתחום על הקו $y=2x-1$, לדוגמא: $(2,3)\ ;\ (3,5)\ ;\ (4,7)$.

8) ב. מקסימום בנקודה $(7.5,2.5)$.   ג. לדוגמא: $(2,4)\ ;\ (1,3)\ ;\ (3,5)$.

אלגברה ליניארית

פרק 6 - וקטורים גיאומטרים

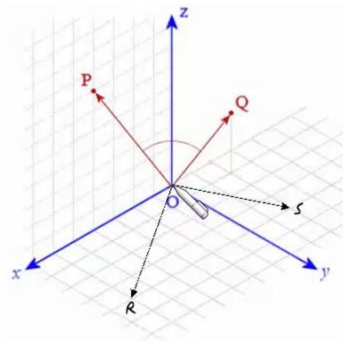
תוכן העניינים

וקטורים

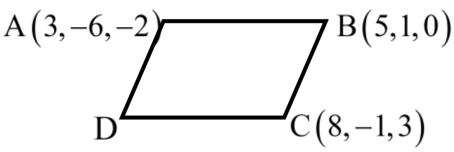
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

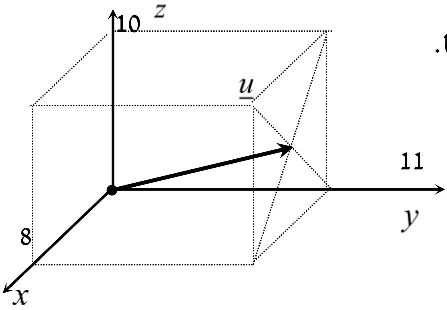
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



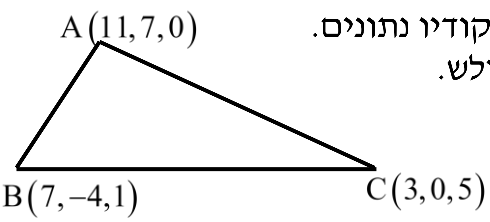
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

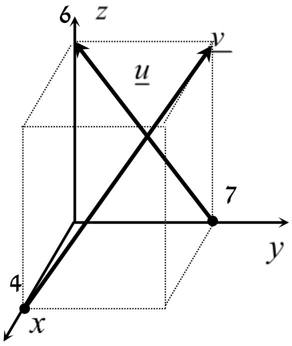


5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



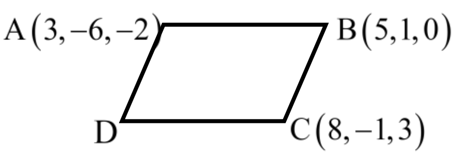
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים : $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבון :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבון :

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $\mathrm{d}(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\mathrm{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות : $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים :

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.
א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.
ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :
א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$
ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$
ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם :
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים : $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים :
א. הוכיחו כי $u\perp v\Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
ב. הוכיחו כי $u\perp v\Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) ענו על חמשת הסעיפים הבאים :
א. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.
ב. הוכיחו כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.
ג. הוכיחו כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.
ד. הוכיחו כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.
ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$.

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0 \qquad u\cdot w=0, \qquad u\times v=0$.

הוכיחו כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4 \qquad |u|=1, \qquad u\perp v$.

חשבו: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a, a-b, a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:
א. $u\cdot(w\times v)$
ב. $(v\times w)\cdot u$
ג. $w\cdot(u\times v)$
ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. -6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3}, \quad L_2: \quad x+7=y-5, \ \ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

אלגברה ליניארית

פרק 7 - אלגברה בוליאנית

תוכן העניינים