אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

תוכן העניינים

אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

פרק 1 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f,g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.
7) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו :

א. $\langle u,v\rangle$ ב. $\langle u,w\rangle$ ג. $\langle v,w\rangle$ ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$ ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$

ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשבו :

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשבו :

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.

9) $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}\ ,\ \langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $\left|\langle u,v\rangle\right| = \|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\dots,y_n$ מספרים ממשיים.

הוכיחו כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n\right)^2 \le \left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.

הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח כי $v=(v_1,\dots,v_n)$, $u=(u_1,\dots,u_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.

הוכיחו כי $\left|u_1v_1+\dots+u_nv_n\right|\le 1$.

ב. נניח ש- $u=(u_1,\dots,u_n)\in R^n$.

הוכיחו כי $\left(u_1+\dots+u_n\right)^n \le n\left(u_1^2+\dots+u_n^2\right)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\dots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\dots+a_n=1$.

הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\dots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \le \sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \ge \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i-b_i)^2}{a_i+b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i+b_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u=(1,2,2),\ v=(-2,1,2)$,

ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u=(3,4),\ v=(1,2)$,

ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61^\circ$
12) $\theta=9.44^\circ$
13) $\cos\theta=0.173^\circ$
14) $\cos\theta=0.00036^\circ$
15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,2,3)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,k,3)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $v=(2,5,7)$, $u=(1,2,3)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $q(x)=6x^2-6x+1$, $p(x)=2x-1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,

מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) הוכיחו כי : $\|u\| = \|v\| \Leftarrow (u-v) \perp (u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a = u - 2v,\ b = 3u + v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1 ?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W=span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w=span\{(1,1,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W=span\{x\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W=span\{x,x^2\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$
ב- $M_{2\times2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot\underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $W_1\subseteq W_2\Rightarrow W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממימד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1+W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6)
$$B_W = \left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right)$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

פרק 2 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\dots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.
הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.
בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}, A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}, A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),\dots,f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,
$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,
$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,
$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\ge\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\operatorname{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$, במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב-$[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\parallel}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),..., f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\text{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2) $\text{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3) $\text{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4) $\text{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6) $(3,4,5,6)=v_{\parallel}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7) $v=v_{\parallel}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8) $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9) $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+...+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7 & 14\\ -9 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

פרק 3 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^TA=I$.

ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1}=A^T$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.

ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.

ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.

ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו או הפריכו:

א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n.

ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n, אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n, אשר עמודותיה, $\{v_1,\dots,v_n\}$,
מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל- R^n. נסמן $v_iv_i=\lambda_i$.
הוכיחו כי $A^TA=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי,
יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\2&2&-\sqrt{8}\\-\sqrt{0.5}&\sqrt{0.5}&0\end{pmatrix}$.

6) הוכיחו את המשפט:
יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C, של המרחב R^n,
כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C.

ב. יהי $v\in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$.
הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא
הווקטור v.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.
נגדיר $B=I+A$.
א. הוכיחו כי $B^2=2B$.
ב. ידוע ש- $|B|=1024$.
מצאו את n.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.
ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- R^2.
ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$ ב- R^2.

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.
א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$
ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה $R=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון, כאשר $0\le\theta\le\pi$.
כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v\in\mathbb{R}^2$ לבין Rv היא θ.

13) נסמן: $\mathrm{Ref}_{\theta/2}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\mathrm{Rot}_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי:
א. $\mathrm{Rot}_\theta\cdot\mathrm{Rot}_\phi=\mathrm{Rot}_{\theta+\phi}$
ב. $\mathrm{Ref}_{\theta/2}\cdot\mathrm{Ref}_{\phi/2}=\mathrm{Rot}_{\theta-\phi}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) תהי $A_{2\times2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- A היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

15) יהי $v_{n\times1}\in\mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.
נגדיר מטריצה $H_{n\times n}$ על ידי: $H=I-2v\cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).
הוכיחו:
א. H מטריצה סימטרית.
ב. H מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2=I$.
ג. המטריצה H עבור $v=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y=-x$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) א. שאלת הוכחה. ב. $n=10$

10) א. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$.

ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. המטריצה מתארת סיבוב של 90° במישור.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow$ $\forall u\in R^n \quad \|T(u)\|=\|u\|$.

2) תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי T איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם T^{-1} אורתוגונלית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, על ידי $T(u)=Au$.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n\to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u)=Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ±1.
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ±1.

5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכיחו ש- $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n\to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,\dots,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה אורתוגונלית. הוכיחו ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

דמיון ולכסון אורתוגונלי

שאלות

1) A,B,C מטריצות ריבועיות.

הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:

א. A דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).

ב. אם A דומה אורתוגונלית ל- B אז B דומה אורתוגונלית ל- A (סימטריות).

ג. אם A דומה אורתוגונלית ל- B ו- B דומה אורתוגונלית ל- C אז A דומה אורתוגונלית ל- C (טרנזיטיביות).

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.

ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

3) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&0&-1&-1\\-1&-1&0&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$.

כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

4) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

5) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

כלומר, מצא מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$

3) $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{6}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

4) $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

5) $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

פרק 4 - שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית

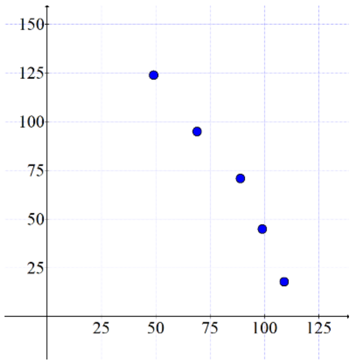
תוכן העניינים

שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price\,(x)$	$Demand\,/\,sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18

א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.
ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

3) נתונות ארבע נקודות במישור: $(4,7),\ (3,6),\ (2,6),\ (1,5)$
א. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
ב. מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(5,6,6,7)$ על $W=sp\{(1,2,3,4),\ (1,1,1,1)\}$.

4) נתונות חמש נקודות במרחב: $(1,-2,3),\ (-3,2,1),\ (-1,4,5),\ (3,-4,2),\ (1,1,1)$.
מצא את המישור הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
כלומר, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין המישור והנקודות יהיה מינימלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שלוש נקודות במישור: $(1,3),\ (2,6),\ (3,11)$.
מצאו את משוואת הפרבולה הקרובה ביותר לנקודות הללו.

ב. נתונות ארבע נקודות במישור: $(0,y_1),(1,y_2),(3,y_3),(4,y_4)$
נתון כי ישר הרגרסיה של הנקודות הוא $y=x-3$.
מצאו את ההיטל של הווקטור (y_1,y_2,y_3,y_4) על המרחב
$W=sp\{(0,1,3,4),(1,1,1,1)\}$.

תשובות סופיות

1) $f(x)=0.8x+2$

2) א. $f(x)=-1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.
ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
ד. 14.41

3) א. $f(x)=0.6x+4.5$ ב. $(5.1,5.7,6.3,6.9)$

4) $z=0.44x+0.41y+2.22$

5) א. $y=x^2+2$ ב. $(-3,-2,0,1)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אלגברה ליניארית 2 (חלקי מאד)

פרק 5 - פירוקים של מטריצה (פירוק LU, פירוק SVD, פירוק QR)

תוכן העניינים

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-4&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{U}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-8&5\\1&3&1&3\\3&8&-1&13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\-4&5&-7\\3&5&-1\\-6&4&-8\\8&-3&9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-2&1&0&0\\-3&2&0&1&0\\4&-3&0&0&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&-6&6\\0&-7&5\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק SVD

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים והימניים של המטריצה.

2) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **הימניים** של המטריצה.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

5) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

6) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

11) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $$\sigma_1=5,\ \sigma_2=3\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix},\ v_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$$

2) $$\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3) $$\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

4) $$\sigma_1=\sqrt{8},\ \sigma_2=\sqrt{2}\ \ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

5) $$\sigma_1=3,\ \sigma_2=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{1.25}}\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

6) $$\sigma_1=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$$

7) $$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

8) $$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

9) $$\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{8}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$ **(10**

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$ **(11**

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פירוק QR

שאלות

בשאלות **1-4** הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W.

1) $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,1)\}$

2) $U=\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(2,1,0),\ u_3=(0,1,1)\}$

3) $U=\{u_1=(1,3),\ u_2=(2,4)\}$

4) $U=\{u_1=(2,2,2,2),\ u_2=(1,1,2,4),\ u_3=(1,2,-4,-3)\}$

בשאלות **5-7**:

א. הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 3 וקטורים.

5) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(2,3,4)\}$

6) $U=\{u_1=(1,2,3),\ u_2=(4,5,6),\ u_3=(7,8,9)\}$

7) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(3,3,3)\}$

8) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה $U=\{u_1=(2,3),\ u_2=(4,6)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

9) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה
$U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,2,1),\ u_4=(1,3,2)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה:
$U=\{u_1=(1-i,1+i),\ u_2=(1+2i,1-2i)\}$.
נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

11) א. מצאו פירוק QR למטריצה: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

ב. בעזרת הפירוק מסעיף א' פתרו את המערכת: $\begin{cases}x+2y=3\\y+z=-1\\x+z=-1\end{cases}$.

12) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

13) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\2&2&-4\\2&4&-3\end{bmatrix}$.

14) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$.

15) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

16) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&2&0\\1&3&4&0\\0&4&4&1\end{bmatrix}$.

17) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

19) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1-i & 1+2i\\ 1+i & 1-2i\end{bmatrix}$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד על מטריצות אוניטריות.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

2) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\}$

3) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right\}$

4) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{4}(2,2,2,2)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}(1,3,-6,2)\right\}$

5) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,01)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

6) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

7) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$

8) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\right\}$ ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)\right\}$

9) א. $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$

ב. $\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$

10) $W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{2}(1-i,1+i),\ \frac{1}{2}(1+i,1-i)\right\}$

11) א. $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}$ ב. $(x,y,z)=(1,1,-2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{14}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

13) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{\sqrt{50}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{-9}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

14) $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{14}} & \frac{32}{\sqrt{14}} & \frac{50}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} & \frac{18}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{9}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{7\sqrt{2}} & \frac{-8}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{4}{7\sqrt{2}} & \frac{-22}{7\sqrt{13}} & \frac{-1}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{7\sqrt{2}} & \frac{8}{7\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{2}} & \frac{5}{7\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{11}{7\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17) $$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{4}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{6}}&\sqrt{6}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

19) $$\begin{bmatrix}1-i&1+2i\\1+i&1-2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©