

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)



תוכן העניינים

1.	העתקות לינאריות	1
2.	מטריצות והעתקות לינאריות	11
3.	ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון	23
4.	וקטורים גיאומטרים	48
5.	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב	58
6.	מרחבי מכפלה פנימית	89
7.	קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט	101
8.	מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי	109

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 1 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות.....1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות.....3
3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם.....6
4. פעולות עם העתקות ליניאריות.....10

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(2)}$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \textbf{(3)}$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(4)}$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(5)}$$

$$(B \in M_n[R]) \quad T(A) = BA + AB ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad \textbf{(6)}$$

$$T(A) = A + A^T ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad \textbf{(7)}$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad \textbf{(8)}$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad \textbf{(9)}$$

$$T(A) = A^{-1} ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad \textbf{(10)}$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; \quad T : P_3[R] \rightarrow P_2[R] \quad \textbf{(11)}$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad \textbf{(12)}$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad \textbf{(13)}$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_{2n}[R] \quad \textbf{(14)}$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad \textbf{(15)}$$

16 עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1, 2, 3)$, $T(0,1,1) = (4, 5, 6)$, $T(0,0,1) = (7, 8, 9)$

18 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1, 2, 1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

19 $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1), T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0), T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

20 $T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

$$T(1, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3)$$

21 נתונה העתקה ליניארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, המקיימת:

$$T(0, 1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

22 נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	2) כן	3) לא	4) לא	5) לא
6) כן	7) כן	8) לא	9) לא	10) לא
11) כן	12) כן	13) כן	14) לא	15) לא
16) כן	17) כן	18) כן	19) כן	20) כן

21 שאלת הוכחה. **22** שאלת הוכחה.

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו :

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^3 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר תמונתה נפרשת על ידי: } \{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}.$$

$$(8) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^4 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: } \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow U$.

$$(9) \quad \text{הוכיחו כי אם } \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) \text{ אז הממד של } V \text{ זוגי.}$$

(10) הוכיחו או הפריכו :

א. קימת העתקה ליניארית $T: R^5 \rightarrow R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T: R^4 \rightarrow R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$.

11 ידוע שהעתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$, מקיימת: $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$, $\dim(W) = 4$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

12 הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$.

ב. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ שמקיימת:

$$T = T^2, \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^2), \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$,

אז בהכרח $T = 0$.

13 מטריצה $A_{m \times n}$ מגדירה העתקה $T: R^n \rightarrow R^m$; $T(x) = Ax$,

ואילו $A_{n \times m}^T$ מגדירה העתקה $S: R^m \rightarrow R^n$; $S(y) = A^T y$.

הראו כי $\operatorname{Im}(T) = (\operatorname{Ker}(S))^\perp$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס : $\{(0,0,1,4)\}$, מימד : 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד : 3.

(2) גרעין – בסיס : $\{(0,0,0)\}$, מימד : 0.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד : 3.

(3) גרעין – בסיס : $\{(-7,3,0,1), (1,-2,1,0)\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד : 2.

(4) גרעין – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2.

תמונה – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2.

(5) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$, מימד : 2.

(6) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1.

תמונה – בסיס : $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$, מימד : 3.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע¹, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_3[\mathbb{R}] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: U \rightarrow V. \text{ הוכיחו:}$$

- א. אם $\dim(U) < \dim(V)$, אז T לא על.
- ב. אם $\dim(U) > \dim(V)$, אז T לא חח"ע.
- ג. אם $\dim(U) = \dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: V \rightarrow W. \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

- א. אם $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
- ב. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ג. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
- ד. אם $\dim(V) < \dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

¹ הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V) > \dim(W)$ ואם $T(v_1) = 0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.

ב. אם $\dim(V) > \dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W .

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W , אז T חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T היא איזומורפיזם אז $m = n$.

ב. אם $m > n$, אז T חח"ע.

ג. אם $T(v) = Av$ לכל v , אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם T על, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V = \{0\}$.

ג. T היא איזומורפיזם.

ד. T היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m \times n}$,

כך ש- $T(v) = Av$ לכל $v \in R^n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v \in \text{Ker}(T)$, אז $v \in \text{rowsp}(A)$.

ב. אם $v \in \text{rowsp}(A)$, אז $v \in \text{Ker}(T)$.

ג. אם $v \in \text{colsp}(A)$, אז $v \in \text{Im}(T)$.

ד. אם $\text{Ker}(T) = \{0\}$, אז $n < m$.

13 נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^n$, ונתונה מטריצה A ,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_3[R] \rightarrow R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \rightarrow R$.

15 נתונה העתקה ליניארית $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T .

תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = 3$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, \dots, -1+x^n\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$(15) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Im}(T) = M_n[R]$$

$$\text{ב. חח"ע ועל. } T^{-1}(A) = A^T \text{ ג.}$$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות 1-9, תהייה $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ו- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x, y, z) = (x - z, y)$, $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- | | | | | |
|-------------|--------------|----------------|-----------|----------|
| (1) $S + T$ | (2) $4S$ | (3) $4S - 10T$ | (4) TS | (5) ST |
| (6) T^2 | (7) T^{-1} | (8) T^{-2} | (9) S^2 | |

תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2) $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5) $ST(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$; $ST: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (6) $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7) $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x, -y, 17x - 4y - z)$
- (8) $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 2 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

- 1. מטריצה שמייצגת העתקה 11
- 2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס 17
- 3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה 20

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה :

כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים). לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 .

סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 .

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 .

סמנו מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשרו את הטענות הבאות:

$$1. [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$$

$$2. [T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$$

$$3. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2}$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3) נתונה העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3 , ויהי T אופרטור לינארי על R^3 .

$$\text{נתון כי: } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו- } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

חשבו את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} : \text{לפי הבסיס}$$

(6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R] \rightarrow P_3[R]$, $D(p(x)) = p'(x)$, לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

(7) נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$. ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$. נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B = \{1, 1-x, x+x^2\}$,

$$. [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את $T(p(x))$.

* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את $T^2(p(x))$.

(10) תהי $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית,

כך שמתקיים $T(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.

נתון כי B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $\text{rank}(A) = n$.

הוכיחו כי $[T]_B$ הפיכה.

11 נתונה העתקה לינארית $T: P_3[R] \rightarrow P_3[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

12 נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

13 נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(a + bx + cx^2) = b + cx$.

הוכיחו ש- T העתקה נילפוטנטית.

14 יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B = \{1, x, x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית

$$T(p(x)) = xp''(x) - p'(x) ; T: V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיס וממד עבור $\text{Im}(T), \text{Ker}(T)$.

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15 נתונות שתי העתקות לינאריות $S, T: V \rightarrow V$.

יהי $B = \{u, v, w\}$ בסיס ל- V .

$$\text{נתון כי: } \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

א. הוכיחו כי: $\text{Ker}(S) = \{0\}$, $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם $\{T(u), T(v), T(w)\}$ פורשת את V .

ד. קבעו האם $\{S(u), S(v), S(w)\}$ פורשת את V .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג. הוכחה.}$$

$$\text{ד. לא.} \quad \text{ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.} \quad \text{ו. 0 עייע יחיד; הוייע שלו: (1, -1, 1).} \quad \text{ז. לא.}$$

$$(3) \quad T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$$

$$(4) \quad [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6) \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$$

$$(9) \quad \text{א. } T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c) + (2a+4c)x + (2a+b+2c)x^2$$

$$\text{ב. } T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2$$

$$(10) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(11) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\{-x+x^3, -1+x^2\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\{1+x^2, x+x^3\}$$

$$\text{ב. } T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

$$(12) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{ב. } \text{tr}(T) = 15, \quad \det(T) = 0, \quad \text{rank}(T) = 2$$

$$(13) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(14) \quad \text{א. } [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \quad \dim(\text{Im}(T)) = 1$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1, x^2\}, \quad \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

$$(15) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

(1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות,

ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T(x, y) = (x + y, y, -x)$, $T : R^2 \rightarrow R^3$

ב. $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$, $T : R^4 \rightarrow R^2$

(2) נתונה העתקה לינארית $T : R^4 \rightarrow R^2$; $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$

מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2 .

(3) תהי $T : R^3 \rightarrow R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$$

חשבו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס

$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ של R^3 , לבסיס $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$ של R^2 .

כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

(4) עבור העתקה לינארית $T : R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

כאשר : $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(5) עבור העתקה לינארית $T : R^3 \rightarrow R^2$ מתקיים : $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

כאשר $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(6) נתונה העתקה לינארית $T : P_3[R] \rightarrow P_2[R]$.

המטריצה שמייצגת את ההעתקה T , מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$

לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי : $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

7 נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$, אשר המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

8 נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

9 תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, כך ש- $\dim(V) = n$,

ויהיו B_1, B_2 בסיסים סדורים של V . הוכיחו או הפריכו:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{א.}$$

ב. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1} = I_n$.

ג. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} = I_n$.

10 נתונה העתקה לינארית $T: P_2[R] \rightarrow R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a, b, c)$.

ג. חשבו את $T^4(a + bx + cx^2)$.

11 נתונה העתקה לינארית $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את $T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

12 חשבו את ST ואת TS , עבור ההעתקות:

$$S(x, y) = (x - y, x + y, y) \quad ; \quad S: R^2 \rightarrow R^3$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow R^2$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ א. } [T] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

$$(2) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [T] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

$$(5) \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$(6) \quad T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (b + 2c)1 + (2c + 6d)x + (3d)x^2$$

$$(7) \quad T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

$$(8) \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

(9) שאלת הוכחה.

$$(10) \quad T^{-1}(a, b, c) = (a - b + c)1 + (b - c)x + cx^2 \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

ג. לא ניתן.

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$\text{ב. } T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad ST(a + bx + cx^2) = (a + c, a + 2b - c, b - c)$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

(1) נתונה העתקה לינארית, $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P , שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W .
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה לינארית, $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$, $T(X) = PX$; כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.
חשבו את $|P|$.

(3) מצאו העתקה לינארית T , שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה לינארית $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשבו $T^{2009}(x, y, z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$; $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי מממד n .

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

- א. הוכיחו ש- T הפיכה אם"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.
 ב. הוכיחו כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1} ?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א. } v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1).$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x = 0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1), \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), v_{\lambda=2} = (1, 0, 1).$$

$$\text{ב. ניתנת ללכסון.}$$

$$\text{ג. } T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad \text{א. } [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. } v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד. } T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א. } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } v_{\lambda=1} = 1 \quad \text{ג. לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 3 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב 23
2. לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה..... 27
3. חקירת הלכסינות של מטריצה עם פרמטרים 39
4. דמיון מטריצות 43

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצאו מטריצה אופיינית.
- מצאו פולינום אופייני.
- מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצאו וקטורים עצמיים.
- קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009} .
- מצאו את הפולינום המינימלי.
- קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
- פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$.

מצאו את המטריצה A .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 ,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = x(x-1)^2 \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.
י. לא הפיכה.

$$(2) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=1, x=2$$

הריבוב האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוב האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ – ו-ח. לא ניתנת.

ט. $m(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \deg = 3$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.
י. הפיכה.

$$(3) \quad \text{א.} \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב.} \quad p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג.} \quad x=0, x=1, x=2$$

$x=0$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=1$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי : 1.

ד. $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי : 1.

$$\text{ה.} \quad \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז.} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח.} \quad \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix} \quad \text{ט.} \quad m(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{י. לא הפיכה.}$$

$$(4) \quad \begin{matrix} \text{א.} & \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \\ \text{ב.} & p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \end{matrix}$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

$$x=-4 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=2 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x=6 - \text{ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

$$(5) \quad \text{אין פתרונות מעל } \mathbb{R}, \text{ ולכן אין ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.}$$

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, v_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \text{ערכים עצמיים: } x=3, \text{ וקטורים עצמיים: } v_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle. \text{ לא ניתנת ללכסון.}$$

$$(7) \quad \text{ערכים עצמיים: } x_1=2, x_{2,3}=3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(8) \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x=-1, x=3$$

$$(11) \quad v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$(12) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad \text{אין כזו מטריצה.}$$

לכסון מטריצות – תרגילי תיאוריה

שאלות

(1) נתונה מטריצה ריבועית A .

הוכיחו או הפריכו:

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

(2) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. ידוע שלמטריצה A יש וקטור עצמי v השייך לערך העצמי 4.

$$B = A^4 - 2A^2 + 10A - 4I$$

הוכיחו ש- v וקטור עצמי גם של המטריצה B וחשבו את הערך העצמי המתאים לו.

ב. נתון ש- v וקטור עצמי של מטריצה A השייך לערך עצמי λ .

יהי $p(x)$ פולינום.

הוכיחו ש- v ו"ע של המטריצה $p(A)$ השייך לערך עצמי $p(\lambda)$.

(3) פתרו את 2 הסעיפים הבאים:

א. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2.

1. הוכיחו כי הפולינום האופייני של המטריצה שווה ל-

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + |A|$$

2. נתון כי $\text{tr}(A) = 4$. חשבו את $|A|$, אם ידוע בנוסף שלמטריצה

יש ערך עצמי אחד.

ב. נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .

נניח כי $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ הפולינום האופייני של A .

הוכיחו כי $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$, $a_0 = (-1)^n |A|$.

(4) נתונה מטריצה A מסדר n .

הוכיחו:

א. λ ע"ע של $A \Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I) < n$.ב. הריבוי הגיאומטרי של ע"ע λ שווה ל- $n - \text{rank}(A - \lambda I)$.ג. אם $\text{rank}(A) = k < n$ אז 0 ע"ע של המטריצה A מריבוי גיאומטרי $n - k$.
מה ניתן לומר על הריבוי האלגברי במקרה זה.(5) נתונה מטריצה ריבועית B מסדר 4. ידוע כי $\text{rank}(B) = 1$.

הוכיחו:

א. 0 ע"ע של המטריצה B .

ב. הריבוי הגיאומטרי של הע"ע 0 הוא 3.

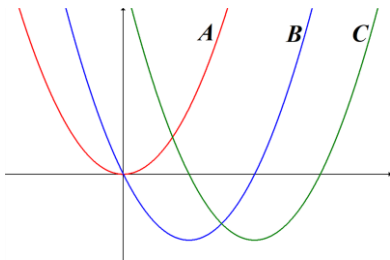
ג. הריבוי האלגברי של הע"ע 0 הוא 3 או 4.

ד. למטריצה B לכל היותר 2 ערכים עצמיים.ה. אם למטריצה B ע"ע פרט ל-0 אז הוא שווה ל- $\text{tr}(B)$.(6) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a & 4b & 4c \\ 10a & 10b & 10c \end{pmatrix}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).ידוע שלמטריצה קיים ערך עצמי $\lambda = k \neq 0$.הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .(7) תהינה A ו- B מטריצות מסדר n המקיימות $AB = BA$.נניח כי $\text{rank} A = n - 1$ ו- v וקטור עצמי השייך לערך העצמי 0 של המטריצה.הוכיחו כי v הוא וקטור עצמי של המטריצה B .(8) תהי A מטריצה מסדר 3 המקיימת $0 < \text{rank}(A - 10I) < \text{rank}(A - 4I) < 3$.א. מצאו את הפולינום האופייני של המטריצה A .ב. מצאו את הערכים העצמיים של A ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע.ג. קבעו האם A ניתנת ללכסון. אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .ד. קבעו האם A הפיכה?ה. הוכיחו כי $(A - 10I)^2(A - 4I) = 0$. האם ייתכן ש- $A = 4I$ או $A = 10I$?(9) תהי A מטריצה מסדר 5×5 , כך ש- $\det A = 12$ וגם $\rho(I + A) = \rho(2I - A) = 3$.הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו מטריצה אלכסונית דומה לה.

(10) נתונה מטריצה $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ (מטריצה עם שורה אחת). מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה $A^T A$ (הניחו $n > 1$).

(11) תהי A מטריצה מסדר 3×3 , כך ש- $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, וכן $\rho(2I + A) < \rho(4I - A)$. הוכיחו ש- A לכסינה.

(12) תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\rho(2I - A) > \rho(5I + A)$. ידוע גם ש- $\text{span}\{(3, 1, -1)\}$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$. הוכיחו ש- A לכסינה, ורשמו את כל המטריצות האלכסוניות הדומות ל- A .



(13) באיור שלפניך הגרפים של הפולינום האופייני של 3 מטריצות A , B ו- C מסדר 2. ידוע שהמטריצה A ניתנת ללכסון. מצאו את הדרגה של כל אחת מהמטריצות והוכיחו שגם המטריצות B ו- C ניתנות ללכסון.

(14) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3. נתון כי $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$ וכי $\lambda = 1$ ערך עצמי של המטריצה. הוכיחו כי המטריצה ניתנת לליכסון ומצאו את כל הערכים העצמיים שלה.

(15) יהיו $A, B \in M_2[\mathbb{R}]$. ידוע כי $A = AB - BA$. הוכיחו כי $A^2 = 0$.

(16) תהי A מטריצה ממשית לא הפיכה מסדר 2 כך ש- $\text{tr}(A) \neq -1$.

א. הוכיחו כי $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{1 + \text{tr}(A)} A$.

ב. בעזרת סעיף א מצאו את $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

(17) נתונה מטריצה ריבועית A מסדר n .
ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של המטריצה.
הוכיחו:

א. $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

ב. $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

הערה:

הערכים העצמיים של המטריצה מתקבלים ממציאת השורשים של הפולינום האופייני מעל $\mathbb{C}$. בנוסף, הערכים העצמיים לא בהכרח שונים זה מזה.

(18) נתונה מטריצה ממשית A מסדר 2.

- א. אם $tr(A) = 3$, $tr(A^2) = 5$. מצאו את $|A|$.
ב. אם וקטורי העמודה של A מקבילים ואם $tr(A) = 5$ מצאו את $tr(A^2)$.
ג. אם $|A| = 5$ ואם ל- A ע"ע שהם מספרים שלמים וחיוביים מהו $tr(A)$.

(19) תהי A מטריצה מסדר 3 שמקיימת $|A| = 1$.

- א. אם $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הוא ערך עצמי של A מצאו את כל הע"ע של A .
ב. ידוע כי $A^{100} = aA^2 + bA + cI$.
מצאו את a, b, c .

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $p_A(x) = x^2 + bx + c$.
מצאו את הפולינום האופייני $p_{4A}(x)$ של המטריצה $4A$.
ב. מטריצה $A \in M_2[R]$ מקיימת $|A| < 0$.
הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון.

(21) תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p(t) = (t-2)^2 (t+1)^2 (t-5)^8 (t+3)^7$.

- א. מה הדרגה של A ?
ב. ידוע שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $AP = PD$, כאשר D אלכסונית.
חשבו את הדרגה של $A - 5I$.

(22) תהי $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית.

א. נסמן את העי"ע של A על ידי α ו- β .
הוכיחו שהם ממשיים.

ב. הניחו ש- $\alpha = \beta$, והוכיחו ש- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(23) תהי A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$, שהפולינום האופייני שלה

$$p(t) = t^4 + 2it^3 + 3t^2.$$

הוכיחו שהמטריצה $A^2 - 3A + I$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ורשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(24) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{R}$, בעלת פולינום אופייני $p(t) = t^3 - 2t + 5$.
הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^3$ יש למערכת $Ax = b$ פתרון יחיד ומצאו את $|A|$ ו- $\text{tr}(A)$.
ב. תהי A מטריצה ממשית, כאשר $A \neq I$, ובעלת פולינום אופייני $p(t) = (t-1)^3$.
הוכיחו ש- A הפיכה, וחשבו את $\text{tr}(A - 2I)$.

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו ש- λ עי"ע של A אם ורק אם $A - \lambda I$ לא הפיכה.
ב. תהי A מטריצה ריבועית, עם פולינום אופייני $p(t) = (t-1)(t+2)^{n-1}$,
כאשר $n \geq 2$.
הוכיחו שהמטריצה $C = A^2 + A - 2I$ לא הפיכה, ושהמטריצה $D = A^2 - 2I$ הפיכה.

(26) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. הוכיחו שכל הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית הם אפס.
ג. האם הטענה ההפוכה לטענה בסעיף ב נכונה? הוכיחו או הפריכו.
ד. הוכיחו שאם A מטריצה נילפוטנטית מסדר n אז $A^n = 0$.
ה. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר n , ותהי $B = A - I$.
מצאו את $|B|$.

(27) צטטו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים. בעזרת המשפט לעיל חשב את הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(28) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$. חשבו את $|A|$.

(29) נסחו את המשפט בנוגע לחישוב פולינום אופייני של מטריצת בלוקים. בעזרת המשפט לעיל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה הבאה:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו את המשפט מסעיף א.

(30) נתונות שתי מטריצות ריבועיות, A ו- B , מסדר n . הוכיחו או הפריכו: א. ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

ב. נניח ש- v וקטור עצמי, שונה מאפס, של A ו- B , אז v גם הוא וקטור עצמי של המטריצה $4A+10B$.

(31) תהי A מטריצה ריבועית הניתנת ללכסון.

א. הוכיחו כי לכל סקלר k , המטריצה $A+kI$ ניתנת ללכסון.

ב. אם 4 הוא ערך עצמי של המטריצה A , מצאו את הערך העצמי של המטריצה $A+kI$.

(32) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 . ידוע כי v_1, v_2 הם ו"ע של A , שונים מאפס, המתאימים לע"ע $\lambda = 1$, וכי v_3 הוא ו"ע, שונה מאפס, המתאים לע"ע $\lambda = -1$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם הווקטורים v_1, v_2 בת"ל, אז $A^{2018} = I$.

ב. A ניתנת ללכסון.

ג. v_3 הוא צרף לינארי של הווקטורים v_1, v_2 .

(33) הוכיחו או הפריכו :

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.
 ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

(34) נתונות שתי מטריצות מסדר n : מטריצה B הניתנת ללכסון ומטריצה Q הפיכה. הוכיחו או הפריכו :

- א. המטריצה $Q^{-1}BQ$ אלכסונית.
 ב. המטריצה $Q^{-1}BQ$ ניתנת ללכסון.
(35) נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות מסדר n , שעבורן v הוא ו"ע.
 א. הוכיחו כי W תת מרחב של מרחב המטריצות מסדר n .
 ב. עבור $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = 2$, מצאו בסיס ל- W .

(36) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר a קבוע ממשי.

- א. עבור $a = 3$, תנו דוגמה לזוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שאינו וקטור עצמי של A .
 ב. עבור איזה ערך של a , הזוג $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A ?
 ג. יהי $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$ וקטור שאינו ו"ע של A .
 הוכיחו כי הקבוצה $\{u, Au\}$, מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.

**(37) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית, אם $A^2 = A$.
תהי A מטריצה אידמפוטנטית.**

- א. הוכיחו כי הערכים העצמיים של A הם 0 או 1 בלבד.
 ב. רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A .
 ג. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים.
 ד. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון.
 ה. הוכיחו כי $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ (סעיף זה דורש ידע בדימיון מטריצות).

- (38) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5. הוכיחו או הפריכו:
- קיים תת מרחב $W_\alpha = \{u \mid Au = \alpha u\}$ של R^5 , כך ש- $\dim W_\alpha \geq 1$.
 - אם u_1, u_2 ו"ע של A , אז גם הווקטור $u_1 + u_2$ ו"ע של A .
 - אם המטריצה B שקולת שורות למטריצה A , אז לשתי המטריצות אותם ערכים עצמיים.
 - אם A לכסינה מעל R , אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.
 - אם כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה, אז המטריצה A לכסינה מעל R .

- (39) תהי A מטריצה ממשית מסדר 4, שכל הערכים העצמיים שלה ממשיים. ידוע שהערך העצמי הקטן ביותר של המטריצה הוא 2, והערך העצמי הגדול ביותר של המטריצה הוא 4. מכאן נובע ש:

- $\text{rank}(A) = 4$.
- A לכסינה.
- $\text{tr}(A) > 10$.
- $|A| \leq 127$.
- קיים וקטור עצמי v של A , כך ש- $A^2 v = 2v$.

- (40) תהי A מטריצה ריבועית ויהי n מספר טבעי. הוכיחו או הפריכו:
- אם v וקטור עצמי של A , אז v וקטור עצמי גם של A^n .
 - אם v וקטור עצמי של A^n , אז v וקטור עצמי גם של A .
 - אם A לכסינה, אז A^n לכסינה.
 - אם A^n לכסינה, אז A לכסינה.

- (41) נתונה מטריצה A , שהפולינום המינימלי שלה הוא $m(x) = (x-1)^2$. הוכיחו כי המטריצה $A^2 + 4A + 3I$ הפיכה.

- (42) הוכיחו שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם בהכרח ממשיים.

- (43) נתונה מטריצה סימטרית ממשית A . הוכיחו שווקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

- (44) תהי A מטריצה ממשית מסדר n .
 נתון: (1) A ניתנת ללכסון. (2) קיים k טבעי כך ש- $A^k = I$.
 צריך להוכיח: $A^2 = I$.

- (45) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. תהי A מטריצה מסדר $n \times n$, לכסינה ובעלת דרגה 1. הוכיחו שהעקבה שלה שונה מ-0.
 ב. תהי A מטריצה ריבועית נילפוטנטית מסדר n . הוכיחו ש-0 ע"ע של A , ושהוא הע"ע היחיד שלה.

(46) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

- א. הוכיחו ש- A לכסינה.
 ב. האם המטריצה $B = 4A^{11} - 10A + 20I$ הפיכה?
 (47) תהי $A_{n \times n}$ מטריצה ריבועית ממשית שמקיימת $A^2 + I = 0$.
 הוכיחו את הטענות בסעיפים א'-ד':
 א. A הפיכה.
 ב. A לא ניתנת לליכסון.
 ג. A לא סימטרית.
 ד. n זוגי.
 ה. האם הטענה בסעיף ד' נשארת נכונה גם אם המטריצה A מרוכבת?

- (48) תהי A מטריצה מסדר n ויהי c קבוע.
 ידוע ש- λ ע"ע של המטריצה A עם וקטור עצמי v .
 א. הוכיחו כי $\lambda + c$ הוא ערך עצמי של המטריצה $A + cI$ עם וקטור עצמי v .
 ב. הוכיחו שהריבוי האלגברי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי האלגברי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.
 ג. הוכיחו שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע λ של המטריצה A שווה לריבוי הגיאומטרי של הע"ע $\lambda + c$ של המטריצה $A + cI$.

$$(49) \text{ נתונה מטריצה } A \text{ על ידי } a_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ a & i \neq j \end{cases} \text{ כאשר } 1 \leq i, j \leq n.$$

חשבו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה A .
קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן, לכסנו אותה.
בעזרת התוצאות שקיבלת חשבו גם את $|A|$.
הערה: ניתן לפתור ללא חישוב של הפולינום האופייני.

(50) תהי A מטריצה ממשית מסדר n .
הוכיחו:

- א. אם n אי-זוגי אז למטריצה לפחות ע"ע ממשי אחד.
ב. אם λ ע"ע של A אז גם הצמוד המרוכב שלו $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע של A .

(51) תהי A מטריצה מסדר n .
הוכיחו:

- א. אם A ניתנת ללכסון ואם הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1 אז $A^2 = I$.
ב. אם כל הערכים העצמיים של A ממשיים וקטנים מ-1 אז $|I - A| > 0$.

(52) תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
הוכיחו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מדומה.
תזכורת: מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi כאשר b ממשי.

(53) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הגדר את המושגים מטריצה צמודה, מטריצה נורמלית ומטריצה אוניטרית.
צטט משפט מפורסם הנוגע ללכסינות מטריצות נורמליות.
תהי A מטריצה אנטי-סימטרית ממשית.
ב. הוכיחו שהמטריצה A נורמלית.
ג. הוכיחו שהדרגה של A היא זוגית.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

(54) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

(55) סדרה (a_n) מוגדרת רקורסיבית על ידי: $a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$.
מצאו ביטוי סגור עבור a_n (כלומר, נוסחה לא רקורסיבית).

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il.

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) א. הערך העצמי הוא 260.
- (3) א.2. $|A| = 4$
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) $D = \text{diag}(0, 0, k)$
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א. $p(\lambda) = (\lambda - 10)^2(\lambda - 4)$
- ב. ע"ע 4 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. ע"ע 10 עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2.
- ג. $D = \text{diag}(10, 10, 4)$ ד. כן. ה. לא.
- (9) $\text{diag}(-1, -1, 2, 2, 3)$
- (10) 0 ו- $\text{tr}(A)$.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) $\text{diag}(2, -5, -5), \text{diag}(-5, 2, -5), \text{diag}(-5, -5, 2)$
- (13) $\text{rank}(A) = 0, \text{rank}(B) = 1, \text{rank}(C) = 2$
- (14) 0, 1, -1
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) ב. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א. $|A| = 2$ ב. $\text{tr}(A^2) = 25$ ג. $\text{tr}(A) = 6$
- (19) א. $1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ב. $a = 0, b = 1, c = 0$
- (20) א. $p_{4A}(x) = x^2 + 4bx + 16c$
- (21) א. 19 ב. 11
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) $\text{diag}(1, 1, -3i, -8 + 9i)$
- (24) א. $|A| = -5$ ו- $\text{tr}(A) = 0$ ב. $\text{tr}(A - 2I) = -3$
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) ה. $|B| = (-1)^n$
- (27) $|A| = -384$

$$m_M(x) = (x-2)^2(x-7) \quad (28)$$

$$p_M(x) = (x-5)^2(x-6)(x-7) \quad \text{א.} \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

$$4+k \quad \text{ב.} \quad (31)$$

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ב.} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (36)$$

$$p(x) = x, \quad p(x) = x-1, \quad p(x) = x(x-1) \quad \text{ב.} \quad (37)$$

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

(41) שאלת הוכחה.

(42) שאלת הוכחה.

(43) שאלת הוכחה.

(44) שאלת הוכחה.

(45) שאלת הוכחה.

(46) שאלת הוכחה.

(47) שאלת הוכחה.

(48) שאלת הוכחה.

$$|A| = (b-a)^{n-1} [a(n-1) + b] \quad (49)$$

(50) שאלת הוכחה.

(51) שאלת הוכחה.

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

$$a_n = 2^{n+1} - 3^n \quad (54)$$

$$a_n = \frac{1}{3} (3 + (-1)^n + 2^{n+1}) \quad (55)$$

חקירת הלכסינות של מטריצה

שאלות

(1) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

- א. לאיזה ערכים של k המטריצה לכסינה?
 ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

(2) נתון $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי.

לאיזה ערכים של k (אם בכלל) המטריצה לכסינה?

(3) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר $a \in \mathbb{R}$.

- א. מצאו את כל ערכי a , כך ש- A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.
 ב. במקרה בו A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(4) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, כאשר $m \in \mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של m , המטריצה A לכסינה?
 כאשר היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

(5) נתון $A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$, כאשר k קבוע ממשי חיובי.

- א. לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?
 עבור ערך ה- k שמצאת בסעיף א:
 ב. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 2.
 ג. הוכיחו שהמטריצה ניתנת ללכסון ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1- בלבד.
 ב. עבור ערכי a ו- b שמצאתם בסעיף א' קבעו האם המטריצה לכסינה.

$$(7) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{R}.$$

- א. מצאו את כל הערכים של a , עבורם A לכסינה.
 ב. במקרים בהם A לכסינה מצאו מטריצה אלכסונית D הדומה ל- A .

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}.$$

- א. עבור כל ערך של a , מצאו את הערכים העצמיים של A .
 ב. עבור אילו ערכי a , המטריצה A לכסינה?
 בכל אחד מהמקרים, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה הבאה מעל } \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix},$$

- כאשר a, b, c מספרים ממשיים המקיימים $a - b + c = -1$.
 א. הוכיחו כי -1 הוא ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגיאומטרי שלו.
 ב. נתון כי $a = b > 1$.
 הוכיחו כי המטריצה ניתנת ללכסון ומצאו את כל ערכיה העצמיים.

$$ג. \text{ ידוע כי } \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + a < 0.$$

הוכיחו שהמטריצה לא ניתנת ללכסון.

- (10) מצאו את כל הערכים של המספרים הממשיים a, b , כך שהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ לכסינה.}$$

$$(11) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

א. עבור אילו ערכי a, b A לכסינה? נמקו.

ב. בכל אחד מהמקרים ש- A לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית ש- A דומה לה.

$$(12) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a, b \in \mathbb{R}$$

מצאו את כל הערכים של a ו- b , כך ש- A לכסינה.
בכל מקרה בו היא לכסינה, רשמו מטריצה אלכסונית הדומה לה.

$$(13) \text{ נתונה מטריצה ממשית } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \text{ פרמטר ממשי.}$$

ידוע ש- $\lambda = -2$ הוא ערך עצמי שלה, עם ריבוב גיאומטרי 2.

א. מהו ערכו של a ?

ב. האם המטריצה לכסינה?

$$(14) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } a \in \mathbb{R}$$

האם קיימים ערכי a , כך ש- A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?
אם כן, עבור כל ערך כזה של a , רשמו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .

$$(15) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ a & -a & a \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{R}.$$

מצאו את כל ערכי a עבורם A לכסינה:

א. מעל $\mathbb{R}$.

ב. מעל $\mathbb{C}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $k \neq 4$ ב. $D = \text{diag}(4, k, k)$
- (2) המטריצה A לא ניתנת ללכסון לכל ערך של k .
- (3) א. A לכסינה אם ורק אם $a \neq \pm 1$ ב. $D = \text{diag}(1, -a^2, a^2)$
- (4) A לכסינה לכל m ודומה למשל ל- $D = \text{diag}(m-1, m-1, m+2)$
- (5) א. $k=3$ ב. ר"א $= 1$ ר"ג $= 1$ ג. $D = \text{diag}(2, -3, -5)$
- (6) א. $a=3, b=-4$ או $a=1, b=0$ ב. המטריצה לא לכסינה.
- (7) א. A לכסינה עבור כל a ב. דומה למטריצה אלכסונית $D = \text{diag}(a, 1, 2)$.
- (8) א. אם $a \neq 0, 2, -1$, אז יש שלושה ע"ע שונים $a^2, 2a, a+2$
 אם $a=0$, הע"ע הם 0 ו-2.
 אם $a=-1$, הע"ע הם 1 ו-2.
 אם $a=2$, יש ע"ע אחד והוא 4.
 ב. A לכסינה אם ורק אם $a \neq 2, -1$
 במקרה זה היא דומה למטריצה $D = \text{diag}(a^2, 2a, a+2)$
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) אם $a=b=0$, או אם $a \neq 0$ ו- $b=0$, אז A לכסינה.
- (11) א+ב. A לכסינה בשלושה מקרים:
 כאשר $a \neq 0, 1$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(1, 0, a)$
 או כאשר $a=0$ וגם $b=0$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(0, 0, 1)$
 או כאשר $a=1$ וגם $b=-\frac{1}{2}$ ואז דומה ל- $D = \text{diag}(0, 1, 1)$
- (12) A לכסינה אם ורק אם:
 1. $b \neq 2, 3$ ואז $D = \text{diag}(3, 2, 2, b)$
 או 2. $b=2$ וגם $a=0$ ואז $D = \text{diag}(3, 2, 2, 2)$
 או 3. $b=3$ וגם $a=0$ ואז $D = \text{diag}(3, 3, 2, 2)$
- (13) א. $a=3$ ב. כן.
- (14) מעל $\mathbb{R}$: לכסינה אם $a=0$ ודומה ל- $D = \text{diag}(0, 0, 0, 0)$
 מעל $\mathbb{C}$: לכסינה לכל a דומה ל- $D = \text{diag}(a, -a, ai, -ai)$
- (15) א. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם $a=0$ ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל a .

דמיון מטריצות

שאלות

(1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. $|A| = |B|$

ב. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(2) הוכיחו באינדוקציה: אם $P^{-1}AP = B$, אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$. הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות: $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

האם קיימים קבועים ממשיים a, b , כך שהמטריצה A דומה למטריצה B ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C . הוכיחו כי:

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B , אז B דומה ל- A .

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

ד. אם A דומה ל- B ושתייהן הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1} .

ה. אם A דומה ל- B , אז A^k דומה ל- B^k , לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B , אז A^T דומה ל- B^T .

ח. אם A דומה ל- B , אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B , אז $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$.

הערה – $\text{Nullity}(A) =$ מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

(6) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א. $\text{rank}(A)$

ב. $\dim \text{Ker}(A)$

ג. $\text{tr}(A)$

ד. $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור $A^T A$.

ו. ע"ע עבור $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$.

הערה $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

(9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. A ו- B שתי מטריצות הדומות למטריצה C .
 הוכיחו כי A דומה ל- B .

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

(11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) נתונות שתי מטריצות $A, B \in M_n[\mathbb{R}]$.

נתון כי A ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

B דומה ל- A אם ורק אם B ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של A .

(13) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.

עבור אילו ערכים של a ו- b המטריצות A ו- B דומות?

(14) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ כאשר $a \in \mathbb{R}$.

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = B$.

(15) נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

(16) תהיינה A, B מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$, בעלות דרגה 1, וכן $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = k$, כאשר

k מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו- B .

ב. הוכיחו ש- A ו- B דומות.

(17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופייני $p(t) = (t-1)(t+4)^2$, ונתון כי $\rho(4I + A) = 1$.

- א. רשמו את הפולינום האופייני של A^2 .
 ב. הוכיחו שהמטריצה $A^4 - 10A + 9I$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $(A^4 - 10A + 9I)\underline{x} = \underline{0}$.

(18) נתון כי $A, B, C, D \in M_n[\mathbb{R}]$ כך ש- A דומה ל- B ו- C דומה ל- D . הוכיחו או הפריכו:

- א. $A+C$ דומה ל- $B+D$.
 ב. AC דומה ל- BD .

(19) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.
 ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

(20) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו: אם A דומה ל- B אז $A - kI$ דומה ל- $B - kI$.
 ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(21) נתון כי A ו- B מטריצות דומות.

הוכיחו של- A ו- B אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

(22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4.

- נתון שהפולינום $q(t) = t^4 - 7t^2 + 10$ מחלק את הפולינום האופייני $p(t)$ של A .
 מצאו את הפולינום האופייני של A .
 א. הוכיחו ש- A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.
 ב. מצאו את $\text{tr}(A^2)$.

(23) נתונות שתי מטריצות $A, B \in M_n(R)$.

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $B+I$ דומה ל- $I-A$ אז A^2 דומה ל- B^2 .

ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) לא.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 0 ה. לא ניתן לחשב. ו. $1, \frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) $x=0$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) $a=0$ ו- $b=-2$

(14) כן, עבור $a=\pm 2$

(15) המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

(16) א. $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.

(17) א. $p(x) = (x-1)(x-16)^2$ ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

(18) שאלת הוכחה.

(19) שאלת הוכחה.

(20) א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. $D = \text{diag}(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$ ב. $\text{tr}(A^2) = 14$

(23) שאלת הוכחה.

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 4 - וקטורים גיאומטרים

תוכן העניינים

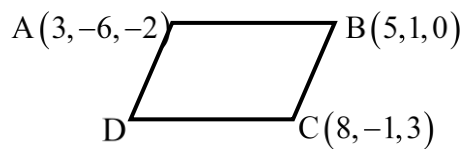
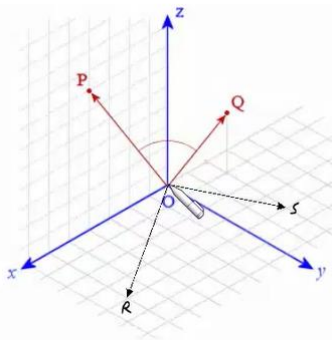
- 1. וקטורים 48
- 2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 55
- 3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 57

וקטורים

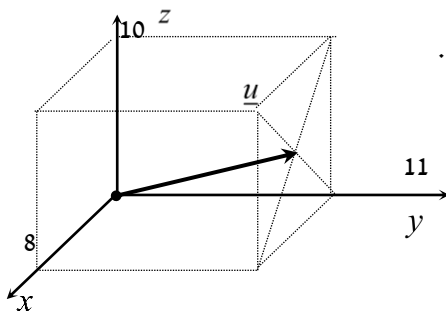
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

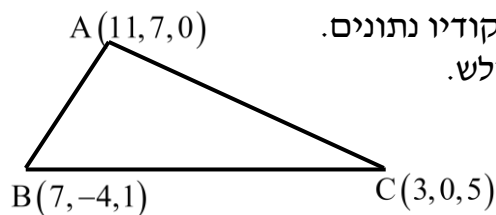
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



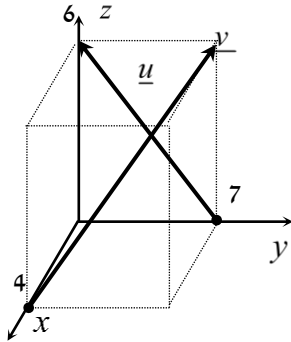
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

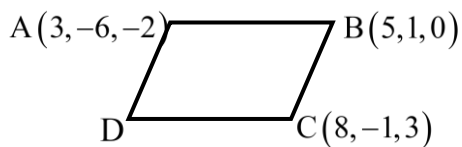
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים: $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{u} = (-3, 1, 4)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21 נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22 חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

23 מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם :

$$A(-3, 2, 1), B(0, 3, 2), C(5, -1, 0)$$

24 נתונים הווקטורים : $\underline{u} = (2, -1, 0), \underline{v} = (5, 0, 3)$

מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25 מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26 ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27 ענו על חמשת הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. הוכיחו כי $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. הוכיחו כי $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. הוכיחו כי $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.

אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k .

יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .

מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$.

הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

(1) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
חשבו: $(u \times v) \times w$.

(2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$.

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי: $|u| \neq 0, u \cdot w = 0, u \times v = 0$,
הוכיחו כי: $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.
ידוע כי: $|v| = 4, |u| = 1, u \perp v$,
חשבו: $|(u+v) \times (u-v)|$.

(5) נתון $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
חשבו:

א. $u \cdot (v \times w)$ ב. $v \cdot (w \times u)$ ג. $(u \times v) \cdot w$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.
ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.

(7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$.

(8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c .
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

(9) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

(10) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי: $u \cdot (v \times w) = 4$.
חשבו:

א. $u \cdot (w \times v)$

ב. $(v \times w) \cdot u$

ג. $w \cdot (u \times v)$

ד. $v \cdot (u \times w)$

(11) נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.
מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

(1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $S = 22.5$

(3) שאלת הוכחה.

(4) 8

(5) א. -3 ב. -3 ג. -3

(6) א. -6 ב. 1

(7) $9\frac{1}{3}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

(11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:
- $$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, \quad z=3$$
- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
 (2) $\sqrt{26}$
 (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 5 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

58	1. הצגה פרמטרית של ישר
61	2. מצב הדדי בין ישרים
63	3. הצגה פרמטרית של מישור
64	4. משוואת מישור
65	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
66	6. מישורים המקבילים לצירים
67	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
68	8. מצב הדדי בין מישורים
69	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
70	11. זווית בין שני ישרים
71	12. זווית בין ישר ומישור
72	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
73	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
74	16. מרחק בין נקודה לישר
75	17. מרחק בין נקודה למישור
76	18. מרחק בין ישרים מקבילים
77	19. מרחק בין ישר למישור
78	20. מרחק בין מישורים מקבילים
79	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
80	23. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

- (1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?
- (2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?
- (3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$ ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.
- (6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ ומאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.
- (7) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$. כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .
 - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות: $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$. כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.
- (9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- z .
- (10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

- 11) ישר עובר בנקודה $(1, -1, 4)$ וכיוונו $(4, 10, 2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב. $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד. $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

- 12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1, -1, 2)$ ו- $B(4, 0, 1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

- א. משוואה וקטורית אחת.
ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).
ג. הצגה אלגברית.
ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

- 13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב. $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג. $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד. $\ell: x-1 = y+10, z = 4$

ה. $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10) $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א. $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג. $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

(13) א. $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$ ב. $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$ ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$ ד. $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$ ה. $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

מצב ההדדי בין ישרים

שאלות

- (1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצאו את ערכו של הפרמטר k , שבעבורו הישרים:
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
הראו כי לכל ערך של k , הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

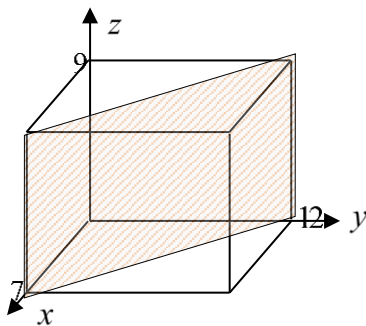
תשובות סופיות

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים, $(1, 5, 0)$.
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים, $(1, 8, -1)$.
- (7) א. $k = 2$ ב. $k = -2$.
- (8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

- (1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$
- (2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$,
 ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.
- (3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$.
 הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$
 ומכיל את ציר ה- x .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



- (6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
 מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2) $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3) $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6) $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

משוואת מישור

שאלות

(1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$:

א. $D(5, 7, 1)$

ב. $E(2, -1, 1)$

(2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על

המישור $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.

(3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$.

מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$.

מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

(1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(2) $k = 3$

(3) $(3, 0, 0)$, $\left(0, 4\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 0, -9)$

(4) $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$. כתבו הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצאו את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (4) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, 0, 5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.
 1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד, ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
 2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
 - ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
 - ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2) $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3) $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4) $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ 2. $-2x + 3y + z - 1 = 0$
 ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

(1) נתונה משוואת המישור $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

(1) $k=3$

(2) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור

(1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.

קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

(2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.

קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

(3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.

קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

(4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.

מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

(1) הישר חותך, $(1, -1, 3)$.

(2) מקבילים.

(3) הישר מוכל.

(4) $a = 1$, $b = -7$

מצב ההדדי בין מישורים

שאלות

(1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0 , \pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

(2) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

(1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

(6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

$$\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad (1)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad (2)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad (3)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad (4)$$

$$\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad (5)$$

$$\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad (6)$$

זווית בין שני ישרים

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.
- א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$. מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

- (1) א. 78.521° ב. 90°
- (2) 63.37° . הישרים מצטלבים.
- (3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. 3. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°
- (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

זווית בין ישר ומישור

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים :
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$
 מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
 וקדקוד הפירמידה הוא $S(3, 1, -2)$.
 מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

- (1) 18.87°
- (2) 44.83°
- (3) 14.9°

זווית בין שני מישורים

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים : $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$ ו- $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$.

- (2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם : $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$. מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

- (3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

- (1) 90°
(2) 87.539°
(3) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

- (1) נתונות הנקודות $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13-k)$. מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

- (1) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

- (1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$.
- (2) נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשבו את שטח המשולש ABC .
- (3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

- (1) $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3) $B(5, 4, -6)$ או $B(5, -4, 2)$.

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

- (1) מצאו את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.
- (2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.
- (3) נתונים ישר ומישור $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$, $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

- (1) $2\frac{1}{2}$
- (2) $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$ או $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3) $(4, 5, 1)$ או $(1, -9, 5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

(1) נתונות הנקודות $A(15, 0, -4)$, $B(12, -5, 2)$, $C(6, 1, 4)$, $D(12, 11, -8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת המישור $4x - z + 6 = 0$.
- א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k-1, 5) + t(4, -2, -3)$.
- א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.
- ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. $k = 2, 4$.

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$. מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$. מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$, $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$, $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$, $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$
 מצאו את ערכי הפרמטרים k, q, p , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

- (1) $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2) $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3) $k = 2$, $q = -2$, $p = 18, -12$
- (4) $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

- (1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.
- (3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות

- (1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3) $\sqrt{2}$ יח"א.

שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C .
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
- ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .
- ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .
- (2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.
- א. $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
- ב. $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
- ג. $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
- ד. $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.
- א. $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
- ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
- ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- א. $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
- ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
- ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$, שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה $A(4, 0, -1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1, 1, 2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z, הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$.
ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן $PQQ'P'$.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)
- (10) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות

(1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$

(2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$. הזווית היא: 47.6° .

(3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78° .

(4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° .
ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.

(5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$

(6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$

(7) $(0, 0, 4)$ או $\left(0, 0, 14\frac{4}{5}\right)$

(8) $\ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$

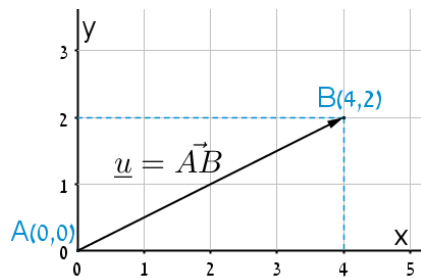
(9) 10.467 יח"ש.

(10) $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$ או $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

סיכום כללי

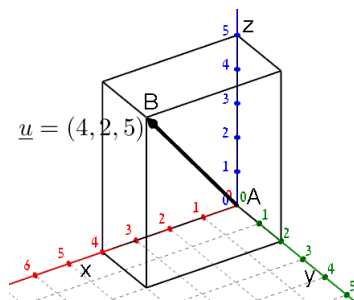
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הוקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הוקטור $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$
הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא **ווקטור ההעתקה**.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא **ווקטור הכיוון של הישר**.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

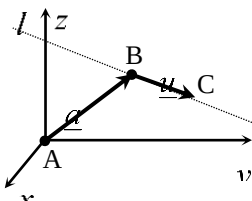
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$.

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l .

דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$.

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.



***הערות:**

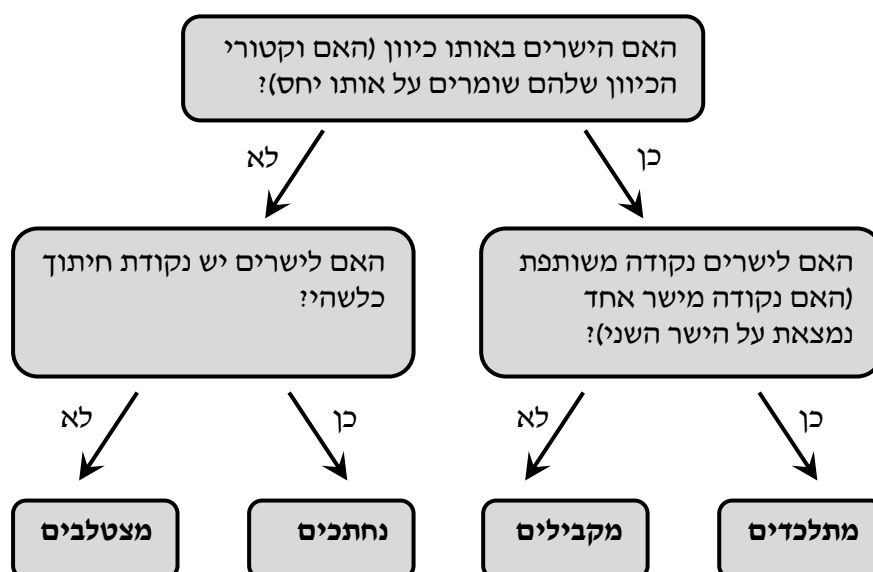
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

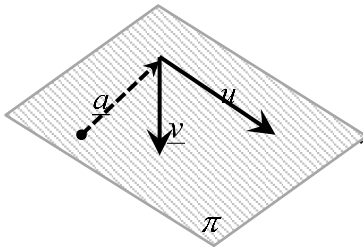
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם ווקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

משוואת מישור

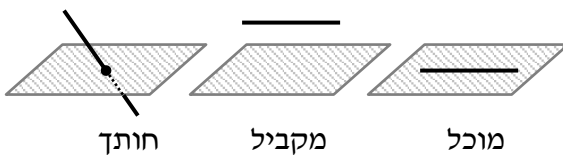
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|} \right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב ע"י: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
 - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
 - ב. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 6 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

89	1. מרחבי מכפלה פנימית
91	2. הנורמה והמרחק
93	3. אי שוויון קושי-שוורץ, זווית בין וקטורים
96	4. אורתוגונליות
99	5. משלים אורתוגונלי

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

(1) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

(2) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

(3) לכל שני וקטורים $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

(4) לכל שני וקטורים $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$, כאשר $k_1, \dots, k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$?

(5) לכל שתי מטריצות A, B ב- $M_{mn}[R]$, נגדיר: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות f, g ב- $C[a, b]$, נגדיר: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.

- (7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי. חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$.

תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2) $k > 9$
- (3) $-1 < k < 1$
- (4) עבור $k_i = 1$ לכל $1 \leq i \leq n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$.
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$.
- (7) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -2, 2)$, $v = (3, -2, 6)$, $w = (5, 3, -2)$

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו :

א. $\langle u, v \rangle$	ב. $\langle u, w \rangle$	ג. $\langle v, w \rangle$	ד. $\langle u + v, w \rangle$
ה. $\ u\ $	ו. $\ v\ $	ז. $\ u + v\ $	ח. $d(u, v)$
ט. $\hat{u}$	י. $\hat{v}$		

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2 \times 3}[R]$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 3}[R]$,

חשבו :

א. $\langle A, B \rangle$	ב. $\langle A, C \rangle$	ג. $\langle A, B + C \rangle$
ד. $\langle B, C \rangle$	ה. $\langle 4A + 10B, 11C \rangle$	ו. $\ A\ $
ז. $\ B\ $	ח. $d(A, B)$	ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x) = x + 3, q(x) = 3x + 1, r(x) = x^2 - 4x - 1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$,

חשבו :

א. $\langle p, q \rangle$	ב. $\langle p, r \rangle$	ג. $\langle p, q + r \rangle$
ד. $\ p\ $	ה. $d(p, q)$	ו. $\hat{r}$

$$(4) \text{ הוכיחו: } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$(5) \text{ הוכיחו: } \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$(6) \text{ הוכיחו: } \langle u-v, u+v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$(7) \text{ הוכיחו: } \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

$$(8) \text{ הוכיחו: } \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle$$

$$(9) \text{ יהי } V \text{ ממ"פ ויהיו } u, v \in V \text{ וקטורים המקיימים: } \|u\| = a, \|u+v\| = b, \|u-v\| = c$$

מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u, v \rangle$.

תשובות סופיות

- (1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
 ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
 ט. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$
- (2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
 ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- (3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$

$$\text{ה. } \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{ו. } \frac{x^2 - 4x - 1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad \|v\| = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}}, \quad \langle u, v \rangle = \frac{b^2 - c^2}{4}$$

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

(1) הוכיחו כי אם u, v תלויים לינארית, אז $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

(2) יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ ו- $y_1, y_2, \dots, y_n$ מספרים ממשיים.

הוכיחו כי $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

(3) יהיו f, g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a, b]$.

הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח כי $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in R^n$ שני וקטורי יחידה ב- R^n .

הוכיחו כי $|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq 1$.

ב. נניח ש- $u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$.

הוכיחו כי $(u_1 + \dots + u_n)^n \leq n(u_1^2 + \dots + u_n^2)$.

(5) נניח ש- $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

הוכיחו כי $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n}$.

(6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \leq \sqrt{\frac{n^2 + n}{2}}$.

(7) נתון כי $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$.

$$(8) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$$

$$ב. \text{ נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i = 1, \text{ הוכיחו כי } \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \text{נתון כי } \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{(a_i - b_i)^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}$$

$$ב. \text{ הוכיחו כי } \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i}$$

(11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (1, 2, 2)$, $v = (-2, 1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

(12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $u = (3, 4)$, $v = (1, 2)$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ ב- $\mathbb{R}^2$.

(13) מצאו את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x) = 2x - 1$ ו- $q(x) = x^2$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ שב- $C[0, 1]$.

(14) מצאו את $\cos \theta$ עבור הזווית θ שבין $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$.

(15) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$. הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) $\theta = 63.61^\circ$
- (12) $\theta = 9.44^\circ$
- (13) $\cos \theta = 0.173^\circ$
- (14) $\cos \theta = 0.00036^\circ$
- (15) שאלת הוכחה.

אורתוגונליות

שאלות

- (1) הוכיחו כי הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.
- (2) מצאו את ערכו של הקבוע k , עבורו הווקטורים $u = (1, k, 3)$, $v = (4, 7, -6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.
- (3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 5, 7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.
- (4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x) = 2x - 1$, $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$ אורתוגונליים בקטע $[0, 1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$).
- (5) במרחב $P_n[\mathbb{R}]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n \geq 1$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:
- $$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n p(k)q(k) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$$
- הראו כי הפולינומים:
- $$p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6), \quad q(x) = x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
- אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[\mathbb{R}]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.
- (6) נתונות שתי מטריצות: $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ ב- $M_{2 \times 2}[\mathbb{R}]$, מצאו את הערך של הקבוע k , עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.
- (7) הוכיחו כי: $\|u+v\| = \|u-v\| \Leftrightarrow u \perp v$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?
- (8) הוכיחו כי: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכיחו כי : $(u-v) \perp (u+v) \iff \|u\| = \|v\|$
 מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,
 ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
 נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.
 אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k .
 יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .
 מהו המרחק של v מ- w_1 ?

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) $k = 2$ (3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) $k = 0.5$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ or } v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (12) $\frac{5}{4}k$

משלים אורתוגונלי

שאלות

(1) יהי $W = \text{span}\{(1, 2, -1, 1), (2, 5, 3, 1)\}$.

מצא בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

(2) יהי $w = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^\perp$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

(3) יהי $W = \text{span}\{x\} \subseteq P_2[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(4) יהי $W = \text{span}\{x, x^2\} \subseteq P_2[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0, 1]$.

(5) יהי $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_{2 \times 2}[R]$.

מצאו בסיס וממד עבור $W^\perp$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$
ב- $M_{2 \times 2}[R]$.

(6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

(7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

(8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A \cdot \underline{x} = 0$.

יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A .

(9) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכיחו כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

(10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

(11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V .

הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V מממד סופי).

(12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

(13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V .

הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

תשובות סופיות

$$W^\perp = \text{span}\{(-3, 1, 0, 1), (11, -5, 1, 0)\} \quad (1)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \quad (2)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\left(-\frac{2}{3} + x\right), \left(-\frac{1}{2} + x^2\right)\right\} \quad (3)$$

$$W^\perp = \text{span}\{(1.5x^2 - 6x + 5)\} \quad (4)$$

$$W^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad (5)$$

$$B_W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_{W^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (7)$$

(8) הסבר בוודא.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 7 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

- 1. בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל 101
- 2. ההיטל של וקטור 105
- 3. תהליך גרם-שמידט 108

בסיס אורתוגונלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

- הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.
- נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
- ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13, -1, 7)$,
כצירוף לינארי של איברי S .

3 נתונה קבוצת וקטורים $S = \{(2, 1, -4), (1, 2, 1), (3, -2, 1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v = (a, b, c)$ ב- $\mathbb{R}^3$,
ביחס לבסיס S .

4 נניח ש- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V .
הוכיחו שלכל $v \in V$ אז $v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n$.
הערה: הקבוע $a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i ,
או הרכיב של v ביחס ל- u_i .

5 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$ ב- $V = C[0, \pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6 נתונה קבוצת פונקציות $S = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ב- $V = C[0, 2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7 נתונה קבוצה $S = \{(2, 4, 4), (4, -1, -1), (0, 2, -2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8 נתונה קבוצה $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ ב- $P_3[\mathbb{R}]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$)

9 נתונה קבוצה $S = \{1, 2x - 1, 6x^2 - 6x + 1\}$ ב- $P_2[\mathbb{R}]$.

בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$)

10 נתונה הקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_3[\mathbb{R}]$

בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11 נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12 ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v \in \mathbb{R}^2$

ב. יהי $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1) \right\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.

אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v \in \mathbb{R}^3$

$$(13) \text{ יהי } D = \left\{ A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$$

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A \in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

(14) במרחב $C([- \pi, \pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[- \pi, \pi]$ נגדיר את

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

המכפלה הפנימית הבאה $\{f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

(15) במרחב $C([- \pi, \pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[- \pi, \pi]$ נגדיר את

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

תהי $\{f_1 = \sin x, f_2 = \sin(2x), \dots, f_{60} = \sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה ביחס למערכת הנתונה.

תשובות סופיות

1 א. שאלת הוכחה. ב. $S \left\{ \frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}} \right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2 $(13, -1, 7) = \frac{-1}{7}(2, 1, 4) + 3(1, 2, 1) + \frac{24}{7}(3, -2, 1)$

3 $\frac{2a+b-4c}{21}(2, 1, 4) + \frac{a+2b+c}{6}(1, 2, 1) + \frac{3a-2b+c}{14}(3, -2, 1)$

4 שאלת הוכחה.

5 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}}, \dots \right\}$$

6 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

7 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{36}}(2, 4, 4), \frac{1}{\sqrt{8}}(4, -1, -1), \frac{1}{\sqrt{18}}(0, 2, -2) \right\},$$

8 הקבוצה לא אורתוגונלית.

9 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S = \{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

10 הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{80}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

11 שאלת הוכחה.

12 שאלת הוכחה.

13 שאלת הוכחה.

14 שאלת הוכחה.

15 $2 \geq \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{59^2} \right]$

ההיטל של וקטור

שאלות

- (1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, 2, 2)$ לאורך $w = (0, 1, -1)$ ב- $\mathbb{R}^3$.
- (2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v = (1, -2, 2, 0)$ לאורך $w = (0, 2, -1, 2)$ ב- $\mathbb{R}^4$. מקובל לסמן גם $\text{proj}(v, w)$.
- (3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x) = 2x - 1$ לאורך $q(x) = x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0, 1]$.
- (4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ לאורך $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) יהי $V = \mathbb{R}^3$ ויהי $W = \text{span}\{w_1 = (1, 2, 1), w_2 = (1, -1, 1)\}$ תת מרחב של V . מצאו את ההיטל של הווקטור $v = (-2, 2, 2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V = \mathbb{R}^3$. בנוסף, רשמו את v כסכום $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, כאשר $v_{\parallel} \in W$, $v_{\perp} \in W^{\perp}$.
- (6) יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ויהי $W = \text{span}\{w_1 = (1, 1, 0, -1), w_2 = (1, 0, 1, 1), w_3 = (0, -1, 1, -1)\}$ תת מרחב של V . מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v = (3, 4, 5, 6)$ בתת המרחב W . בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.
- (7) יהי $V = C([0, 1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0, 1]$. ויהי $W = \text{span}\left\{w_1 = 1, w_2 = x - \frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V . מצאו את ההיטל של $v = 4x^2 - 4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W = \text{sp}\{f_1 = |x| + x, f_2 = |x| - x\}$

מצאו את ההיטל של $f(x) = x^2$ על W .

9) נתון המרחב $C([-π, π])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-π, π])$:

$W = \text{sp}\{f_1 = \sin x, f_2 = \sin(2x), \dots, f_{60} = \sin(60x)\}$

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$ על W .

תשובות סופיות

$$\text{proj}(v, w) = cw = 0, \quad c = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{proj}(v, w) = cw = -\frac{2}{3}(0, 2, -1, 2), \quad c = \frac{-2}{3} \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{proj}(p, q) = c \cdot q(x) = \frac{5}{6}x^2, \quad c = \frac{5}{6} \quad \textbf{(3)}$$

$$\text{proj}(A, B) = cB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{6} \quad \textbf{(4)}$$

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = (0, 2, 0) + (-2, 0, 2), \quad \pi(v) = (0, 2, 0) \quad \textbf{(5)}$$

$$(3, 4, 5, 6) = v_{\parallel} + v_{\perp} = (5, 2, 3, 6) + (-2, 2, 2, 0), \quad \pi(v) = (5, 2, 3, 6) \quad \textbf{(6)}$$

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = \left(-\frac{14}{3} + 4x\right) + \left(4x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right), \quad \pi(v) = -\frac{14}{3} + 4x \quad \textbf{(7)}$$

$$\text{proj}_W f = \frac{3}{4}|x| \quad \textbf{(8)}$$

$$\text{proj}_W f = \frac{4 \sin(x)}{\pi} + \frac{4 \sin(3x)}{3\pi} + \frac{4 \sin(5x)}{5\pi} + \dots + \frac{4 \sin(59x)}{59\pi} \quad \textbf{(9)}$$

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1 נתון: $U = \text{span}\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U .

2 נתון: $U = \text{span}\{(2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 2, -4, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U .

3 נתון: $U = \text{span}\{4, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1, 1]$.

4 נתון: $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U , בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4, -1, 2) \right\} \quad (1)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ w_1 = \frac{(2, 2, 2, 2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1, -1, 0, 2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1, 3, -6, 2)}{\sqrt{50}} \right\} \quad (2)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3 - 3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}} \right\} \quad (3)$$

$$B_{\text{orthonormal}} = \left\{ \hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{33}} \right\} \quad (4)$$

אלגברה ליניארית 2 (חלקי)

פרק 8 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

109	1. מטריצות אורתוגונליות
114	2. העתקות אורתוגונליות
117	3. דמיון ולכסון אורתוגונלי

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

- 1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- 2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

- א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.
ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

- 3) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.
ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר), היא מטריצה אורתוגונלית.
ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.
ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?
ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

- 4) תהי A מטריצה מסדר n .

הוכיחו או הפריכו:

- א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n .
ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n ,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n .

(5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי A מטריצה מסדר n , אשר עמודותיה, $\{v_1, \dots, v_n\}$,

מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n . נסמן $v_i v_i = \lambda_i$.

הוכיחו כי $A^T A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי, יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{8} \\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0 \end{pmatrix}$.

(6) הוכיחו את המשפט :

יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n .
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C , של המרחב R^n .

הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C , של המרחב R^n .

הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n ,

אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C , של המרחב R^n , כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C .

ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\| = 1$.

הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא הווקטור v .

9) תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.

נגדיר $B = I + A$.

א. הוכיחו כי $B^2 = 2B$.

ב. ידוע ש- $|B| = 1024$.

מצאו את n .

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית 30° ב- R^2 .

ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- R^2 .

ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$ ב- R^2 .

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- θ מעלות

נגד כיוון השעון, כאשר $0 \leq \theta \leq \pi$.

כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ לבין Rv היא θ .

13) נסמן: $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\text{Ref}_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

הוכיחו כי:

א. $\text{Rot}_\theta \cdot \text{Rot}_\phi = \text{Rot}_{\theta+\phi}$

ב. $\text{Ref}_{\theta/2} \cdot \text{Ref}_{\phi/2} = \text{Rot}_{\theta-\phi}$

(14) תהי $A_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- A היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

(15) יהי $v_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.
נגדיר מטריצה $H_{n \times n}$ על ידי: $H = I - 2v \cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).
הוכיחו:

א. H מטריצה סימטרית.

ב. H מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2 = I$.

ג. המטריצה H עבור $v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y = -x$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \text{ א.} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

ג. לא אורתוגונלית.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) א. שאלת הוכחה. ב. $n = 10$

$$(10) \quad \text{א.} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y = 0.4142x$.ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{2}x$.ג. המטריצה מתארת סיבוב של 90° במישור.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

- (1) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow \forall u \in R^n, \|T(u)\| = \|u\|$.
- (2) תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי T איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם T^{-1} אורתוגונלית.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n .
נגדיר העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T: R^n \rightarrow R^n$, ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של העתקה אורתוגונלית הם ± 1 .
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של מטריצה אורתוגונלית הם ± 1 .
- (5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.
- (6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n .
הוכיחו ש- $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n .
ב. תהי $T: R^n \rightarrow R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1, \dots, u_n\}$ של R^n ,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n .
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.
- ב. הוכיחו שכל העתקה לינארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T :

- א. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
- ב. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \sqrt{3}x$.
- ג. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30° ב- $\mathbb{R}^2$.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ב. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 \text{ג. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{ד. } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
 \end{array}$$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצאו נוסחה עבור ההעתקה T .

11) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y = \tan \frac{\theta}{2} x$. מצאו נוסחה עבור ההעתקה T .

12) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה אורתוגונלית. הוכיחו ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

$$(8) \quad \text{א. } T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \quad \text{ב. } T(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

$$\text{ג. } T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$$

$$(9) \quad \text{א. שיקוף ביחס לישר } y = 0.4142x \quad \text{ב. שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

$$\text{ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר } y = \frac{1}{2}x$$

$$\text{דרך II: שיקוף ביחס לישר } y = -\frac{1}{3}x$$

$$(10) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(12) שאלת הוכחה.

דמיון ולכסון אורתוגונלי

שאלות

- (1) A, B, C מטריצות ריבועיות. הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:
- א. A דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).
- ב. אם A דומה אורתוגונלית ל- B אז B דומה אורתוגונלית ל- A (סימטריות).
- ג. אם A דומה אורתוגונלית ל- B ו- B דומה אורתוגונלית ל- C אז A דומה אורתוגונלית ל- C (טרנזיטיביות).

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.
- ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

- (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ לכסנו אורתוגונלית את המטריצה. כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P , כך ש- $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$.

- (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ לכסנו אורתוגונלית את המטריצה. כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P , כך ש- $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$.

- (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ לכסנו אורתוגונלית את המטריצה. כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P , כך ש- $P^T A P = D_{\text{diagonal}}$.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{48}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$