# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה



# תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות ..... 1
2. מטריצות ..... 9
3. דטרמיננטות ..... 28
4. מרחבים וקטורים ..... 42
5. תכנון לינארי ..... 54
6. וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת ושימושיהם ..... 57
7. אלגברה בוליאנית ..... (ללא ספר)

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 1 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

### תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 1
2. חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר) ..... 6

# פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

**1)** מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{matrix}$

**2)** רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ ג. $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ ד. $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

**3)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

**4)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

**5)** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

**6)** מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-15** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

**7)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**13)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

**14)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**15)** $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

$F=\mathbb{C}$ , $F=\mathbb{R}$

* בשאלה **15** יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{C}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{R}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **16-27** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

**16)** $\begin{aligned}2x+3y&=8\\5x-4y&=-3\end{aligned}$

**17)** $\begin{aligned}4x+8y&=20\\3x+6y&=15\end{aligned}$

**18)** $\begin{aligned}8x-4y&=10\\-6x+3y&=1\end{aligned}$

**19)** $\begin{aligned}2x_1-x_2-3x_3&=5\\3x_1-2x_2+2x_3&=5\\10x_1-6x_2-2x_3&=32\end{aligned}$

**20)** $\begin{aligned}x+2y+3z&=-11\\2x+3y-z&=-5\\3x+y-z&=2\end{aligned}$

**21)** $\begin{aligned}x+2y+3z&=3\\4x+6y+16z&=8\\3x+2y+17z&=1\end{aligned}$

**22)** $\begin{aligned}x+3y&=2\\2x+y&=-1\\x-y&=-2\end{aligned}$

**23)** $\begin{aligned}4x-7y&=0\\8x-14y&=2\\-16x+28y&=4\end{aligned}$

**24)** $\begin{aligned}3x-2y&=1\\-9x+6y&=-3\\6x-4y&=2\end{aligned}$

**25)** $\begin{aligned}x+2y-3z+2t&=2\\2x+5y-8z+6t&=5\\6x+8y-10z+4t&=8\end{aligned}$

**26)** $\begin{aligned}x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3\\3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2\\2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0\end{aligned}$

**27)** $\begin{aligned}x+2y+2z&=2\\3x-2y-z&=5\\2x-5y+3z&=-4\\2x+8y+12z&=0\end{aligned}$

**28)** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל **השדה** $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\(-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

א. $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

ב. $\mathbf{F}=\mathbb{C}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

**2)** א. $\begin{pmatrix}1&10&11\\2&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&-4&1&-7\\1&-1&0&-1\\1&1&1&5\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\2&1&0&0&4\\0&0&1&1&8\end{pmatrix}$

**3)** $\begin{pmatrix}9&2&6&8\\3&5&-1&0\\4&2&8&2\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}4&1&0&2\\0&3&1&-1\\0&0&1&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}0&0&-4&4\\0&5&-4&2\\-1&4&-5&1\end{pmatrix}$

**6)** א. $R_1\to 2R_1+R_2$ ב. $R_2\to R_2-4R_1$ ג. $R_2\to 2R_2+4R_1$

**7)** $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&4&1\\0&1&-2&3&-2&2\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&1&0&24&21\\0&1&-2&0&-8&-7\\0&0&0&1&2&3\end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-6&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**9)** $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&2&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{17}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

**10)** $\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

**11)** $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**12)** $\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&2&1&3&5\\0&1&1&-5&-4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**14)** $\begin{pmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-2&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

**15)** $\begin{pmatrix}1&1+i\\1+i&2i\\0&0\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1&1+i\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

F=ℝ F=ℂ

**16)** $(x,y)=(1,2)$

**17)** $(x,y)=(5-2t,t)$

**18)** $\phi$

**19)** $\phi$

**20)** $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

**21)** $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

**22)** $(x,y)=(-1,1)$

**23)** $\phi$

**24)** $(x,y)=\left(\frac{1+2t}{3},t\right)$

**25)** $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

**26)** $\phi$

**27)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**28)** א. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

ב. $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

## שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**1)**
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

**2)**
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

**4)**
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

**5)**
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

**6)**
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

בשאלות **7-9** מצאו לאילו ערכי $k$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**7)**
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

**8)**
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

**9)**
$$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

בשאלות **10-12** מצאו לאילו ערכים של $a$ ושל $b$ (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

**10)**
$$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

**11)**
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

**12)**
$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצאו תנאי עבור $a,b,c,d$, כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצאו תנאי עבור $b,c,d$, כך שלכל $a$, למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

**14)** נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת:

1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצאו לאילו ערכי $k$ יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצאו עבור איזה ערך של $k$ פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.

ח. מצאו לאיזה ערך של $k$, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

**15)** נתונות המשוואות של 3 מישורים: $\begin{cases} 3x+my=3\\ mx+2y-mz=1\\ -x+mz=-1 \end{cases}$.

בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $m$ שלושת המישורים:

א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).

ב. לא נפגשים באף נקודה.

ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).

ד. האם קיים ערך של $m$ עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=1$ 3. $k=-2$

**2)** 1. $k\neq 1, k\neq -2$ 2. $k=-2$ 3. $k=1$

**3)** 1. $k\neq -1, k\neq \frac{4}{7}$ 2. $k=\frac{4}{7}$ 3. $k=-1$

**4)** 1. $k\neq 1, k\neq -0.4$ 2. $k=1, k=-0.4$

**5)** 1. $k\neq \pm 1, k\neq -2$ 2. $k=\pm 1, k=-2$

**6)** 1. $k\neq -1, k\neq -3, k\neq 2$ 3. $k=-1, k=-3, k=2$

**7)** 1. $k=-1$ 2. $k\neq \pm 1$ 3. $k=1$

**8)** 2. $k=3$ 3. $k\neq 3$

**9)** 1. $k\neq 1$ 2. $k=1$

**10)** 1. $a\neq 2$ 2. $a=2,\ b\neq -3$ 3. $a=2, b=-3$

**11)** 2. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$. 3. $a=-6,\ b=2.5$

**12)** 2. $a=2,\ b\neq 2$ 3. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

**13)** א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

**14)** א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1,\ k\neq 2$ . 2. $k=-1$ 3. $k=2$ ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$ , לא. ח. $k=-2$

**15)** א. $m\neq 0,-2,3$ ב. $m=-2,3$ ג. $m=0$ ד. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 2 - מטריצות

### תוכן העניינים

1. מטריצות ..... 9
2. המטריצה ההופכית ..... 14
3. בחזרה למערכת משוואות ליניארית ..... 21

# מטריצות

## שאלות

**1)** נתונות המטריצות הבאות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. $AB$ ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^TB$

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

**2)** מצאו את $x,y,z$, אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

**3)** א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

**4)** $2tr\left(D^2-2E\right)$

**5)** א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

**6)** $I_2BC$

**7)** $tr\left(C^TC\right)$

**8)** $DABC$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $(A-I)(A+I)=0$.
הוכיחו או הפריכו: $A=I$ או $A=-I$.

**10)** אפיינו את כל המטריצות $A_{2\times 2}$ שמקיימות $A^2=-4I$.

**11)** הוכיחו כי לכל $n$ טבעי מתקיים $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 1-2^n & 1\end{pmatrix}$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

**12)** שתי מטריצות $A$ ו-$B$ יקראו מתחלפות אם $AB=BA$.
הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז המטריצות $A$ ו-$B$ מתחלפות.

ב. אם המטריצה $A$ מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, אז $A^T=-A$.

**13)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.
נתון כי $AA^T=0$. הוכיחו כי $A=0$.
האם הטענה נשארת נכונה אם איברי $A$ מרוכבים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

**14)** יהיו $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=BA$ (מטריצות מתחלפות).
א. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $AB^k=B^kA$.
ב. הוכיחו כי לכל $k$ טבעי מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

**15)** לפי נוסחת הבינום של ניוטון $(A+B)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$, כאשר $A,B\in\mathbb{R},\ n,k\in\mathbb{N}$.

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם $A$ ו-$B$ מטריצות ריבועיות מסדר $\ell$?
ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות $A$ ו-$B$, על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.
ג. מצאו את הפיתוח של $(A+I)^n$ ו-$(A-I)^n$, כאשר $A$ ו-$I$ ריבועיות מסדר $\ell$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
ב. נניח ש- $A$ ו- $B$ מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
הוכיחו שגם המטריצות $AB$ ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

**17)** תהי $A_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij}=\min\{i,j\}$.
תהי $B_{n\times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

א. כתבו את המטריצות $A$ ו- $B$ בצורה מפורשת.
ב. המטריצה $C$ מקיימת $C=A\cdot B$.
חשבו את $C$ ומצאו נוסחה עבור $c_{ij}$ לכל $1\le i,j\le n$.

**18)** מצאו מטריצה ממשית $A$, כך שיתקיים $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A-\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}A\right)^T=A-A^T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $4\times 6$ ב. לא. ג. $2\times 4$ ד. לא. ה. לא. ו. $6\times 6$
ז. $2\times 6$ ח. לא ט. $4\times 6$ י. $6\times 6$

**2)** $(x,y,z)=(2,1,-1)$

**3)** א. $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$
ד. $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

**4)** 230

**5)** א. $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$

**6)** $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

**7)** 63

**8)** $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $A=\begin{pmatrix}a&-\dfrac{a^2+4}{c}\\c&-a\end{pmatrix}$

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א+ב. שאלת הוכחה.

ג.
$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}A^1+\binom{n}{n}I$$
$$(A-I)^n=\binom{n}{0}A^n-\binom{n}{1}A^{n-1}+\binom{n}{2}A^{n-2}-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1+(-1)^n\binom{n}{n}I$$

**16)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** א.
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&2&\cdots&2\\1&2&3&3&3&\cdots&3\\1&2&3&4&4&\cdots&4\\1&2&3&4&5&\cdots&5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&5&\cdots&n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&\iddots&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ב.
$$C=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&1&1&1\\2&\cdots&2&2&2&2&1\\3&\cdots&3&3&3&2&1\\4&\cdots&4&4&3&2&1\\5&\cdots&5&4&3&2&1\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&\cdots&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\quad c_{ij}=\min\{i,n+1-j\}$$

**18)**
$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$


www.GooL.co.il לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# המטריצה ההופכית

## שאלות

בשאלות **1-9** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

**1)** $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

**4)** $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

**7)** $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

**10)** עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1&1\\5&-7&k^2+3\\3&-1&k+3\end{pmatrix}$ **הפיכה**?

**11)** עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה $\begin{pmatrix}1&1&1&1&k\\1&1&1&k&1\\1&1&k&1&1\\1&k&1&1&1\\k&1&1&1&1\end{pmatrix}$ **איננה** הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות **12-14** הן הפיכות מסדר $n$, וחלצו את $X$:

**12)** א. $AXC=D$ ב. $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP=A$

**13)** א. $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ ב. $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$

**14)** $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

**15)** נתון $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&9\end{pmatrix}$.

חשבו את $X$, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$. חשבו את $Y$, אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

**17)** נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}$.

חשבו את $B$, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$.

**18)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכיחו כי $A$ הפיכה ובטאו את $A^{-1}$ במונחי $A$ ו- $I$.

ב. נתון: $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכיחו כי $A$ הפיכה ובטאו את $A^{-1}$ במונחי $A$ ו- $I$.

**19)** נתון כי $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$ הפיכה, ובטאו את $A^{-1}$ בעזרת $A$ ו- $I$ בלבד.

**20)** נתון כי $A$ מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכיחו כי $A$ לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I-A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

**21)** נתון כי $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\Q^{-1}BQ=C\end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה $D$, כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם $A$ דומה ל- $B$ ו- $B$ דומה ל- $C$, אז $A$ דומה ל- $C$.

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**22)** תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $AB=BA$.

ב. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח $B$ הפיכה.

ג. אם $A^2-AB=I_n$, אז בהכרח $A$ הפיכה.

ד. אם $(AB)^{100}=I$, אז בהכרח $(BA)^{100}=I$.

ה. אם $(AB)^{100}=0$, אז בהכרח $(BA)^{101}=0$.

**23)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, עבורן $A^2+AB=I$.

א. הוכיחו ש-$AB=BA$.

ב. אם נתון בנוסף ש-$B^2+BA$ היא מטריצת האפס,
הוכיחו שגם $B$ היא מטריצת האפס.

**24)** תהיינה $A,B$ מטריצות כלשהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $AB=I$ אז $B=A^{-1}$.

ב. אם המכפלה $AB$ היא מטריצה ריבועית, אזי $A,B$ מטריצות ריבועיות.

ג. אם המכפלה $AB$ היא מטריצה הפיכה, אזי $A,B$ מטריצות ריבועיות.

ד. המכפלה $AB$ לא הפיכה.

ה. אם $A$ מטריצה ריבועית והמכפלה $AB$ מוגדרת, אזי $B$ מטריצה ריבועית.

**25)** מטריצה ריבועית $A$ תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2=A$.
הוכיחו:

א. למעט המקרה בו $A=I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.

ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.

ג. אם $A$ מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2,
אז $tr(A)=1$ או ש-$A$ מטריצה אלכסונית.

ד. $A$ אידמפוטנטית $\Leftrightarrow$ $A^n=A$, לכל $n$ טבעי.

**26)** נתונה $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

מצאו תנאי על הקבועים $a,b,c,d$ כך ש-$M$ תהיה הפיכה ומצאו את $M^{-1}$ במקרה זה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** נתון כי $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

א.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y&=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y&=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y&=\alpha_{33}\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w&=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w&=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w&=-4\end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z&=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z&=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z&=1\end{aligned}$$

**28)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$.

הוכיחו:

א. אם $BA=I-A^2$ וגם $B^2=-AB$, אז $B=0$.

ב. אם $A^2=2I$, אז $A+I$ ו- $A-I$ הפיכות.

**29)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $B^2A=-2B^3$ $(1)$ וגם $B^3+AB^2=3I$ $(2)$.

הוכיחו ש- $A$ ו- $B$ הפיכות, ובטאו את $A^{-1}$ ו- $B^{-1}$ באמצעות $B$.

**30)** תהיינה $A,B$ מטריצות מסדר $n\times n$, כך ש- $BA+2I=B$.

א. הוכיחו ש- $B$ הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$ סימטרית.

הוכיחו כי $A$ סימטרית.

**31)** תהי $A$ מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים $n$ טבעי כך ש- $A^n=0$).

א. הוכיחו כי $A$ לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I-A$ ו- $I+A$ הפיכות.

ג. נגדיר: $e^A=I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\ldots+\frac{1}{n!}A^n+\ldots$.

הוכיחו: אם $e^A=I$ אז $A=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** נתונות שתי מטריצות, $A$ ו- $B$, מסדר $n$.
סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

א. ל- $A$ ול- $A^T$ יש אותה צורה מדורגת קנונית.

ב. אם $A,B$ מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.

ג. אם $A,B$ מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.

ד. אם בצורה המדורגת קנונית של $B$ יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של $AB$ יש שורת אפסים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

**4)** $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

**8)** $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

**10)** $k \neq 1, k \neq -2$ **11)** $k = 1, k = -4$

**12)** א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. $D$ ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

**13)** א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$

**14)** $BA^TC(B^{-1})^T BC^T$ **15)** $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

**16)** $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ **17)** $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

**18)** א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$

**19)** א. $P(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $A^{-1} = -\frac{1}{48}A^2 + \frac{1}{12}A + \frac{5}{12}I$

**20)** א. שאלת הוכחה. ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** שאלת הוכחה.

**24)** שאלת הוכחה.

**25)** שאלת הוכחה.

**26)** $M^{-1} = \frac{1}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)} M^T \quad \left((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
**28)** שאלת הוכחה.
**29)** שאלת הוכחה.
**30)** שאלת הוכחה.
**31)** שאלת הוכחה.
**32)** ד


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בחזרה למערכת משוואות ליניארית

## שאלות

**1)** בסעיפים הבאים מצאו מטריצות $A$ , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$ :

א.
$$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

בשאלות **2-6** נתון כי $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}$.

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות לינאריות:

**2)** $A\underline{x}=\underline{b}$ **3)** $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ **4)** $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$

**5)** $A\underline{x}=\underline{x}$ **6)** $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

**7)** פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

**8)** פתרו את מערכת המשוואות
$$\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$$
בעזרת המטריצה ההפוכה.

**9)** למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$ , $(x,y,z)=(2,-8,4)$.
הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים:
$(x,y,z)=(-1,4,-2)$ , $(x,y,z)=(2,3,4)$.
מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

**11)** נתונה המערכת $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.
מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$, למערכת:
א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

**12)** נתון $b=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\m\end{pmatrix}$ , $A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&0&1&2\\5&8&4&2\\0&-5&3&k\end{pmatrix}$.
ידוע כי $rank(A)=3$, וידוע כי למערכת $Ax=b$ יש פתרון.
מצאו את הקבועים $k,m$.

**13)** נתונה מטריצה ריבועית $A$, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה $A$ שווה 0.
הוכיחו ש-$A$ מטריצה **לא** הפיכה.

**14)** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה $A$, המקיימת את התכונה הבאה:
סכום האיברים בכל שורה של המטריצה $A$ שווה $k$.
הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
בטאו קבוע זה בעזרת $k$.

**15)** מטריצה $A$ מקיימת $A\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=0$.
הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix}6\\15\\24\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת $(AB)x=0$ קיימים שני פתרונות שונים,
אז בהכרח $A$ לא הפיכה.

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x=0$,
אז למערכת $(BA)x=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ד. אם למערכת $(A^tA)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $A$ לא הפיכה.

ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$,
אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון שונה מ-0.

**17)** נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{R}$ : $Ax=d$ $(d\neq 0)$.
נתון כי $A$ מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $rank(A)=2$.
ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
$u=(x_1,x_2,6,7),\ v=(y_1,y_2,1,2),\ w=(z_1,z_2,4,3)$.
מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:

א. $x=au+bv+cw$

ב. $x=(a+b+1)u-av-bw$

ג. $x=au+bv+w$

ד. $x=(a-b)u+(b-c)v+(c-a)w$

ה. $x=(a+b)u-(av+bw+u)$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$.

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
בהינתן מערכת הומוגנית $Ax=0$:
1. אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
2. מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

**18)** נתונה מערכת $A_{m\times n}\cdot x=b$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $u$ וגם $\lambda u$ $(\lambda\neq 1)$ פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.

ב. אם $u$ ו- $v$ וגם $\alpha u+\beta v$ $(\alpha,\beta\neq 0)$ פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.

ג. אם הווקטורים $(1,2,...,n),\ (n,...,2,1)$ פותרים את המערכת והווקטור $(n+1,...,n+1)$ לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**19)** תהי $A$ מטריצה כך שלמערכת $Ax=0$ פתרון יחיד.
הוכיחו או הפריכו:
א. $A$ הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים $A^T$ פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים $A$ פתרון יחיד.

**20)** תהי $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית כך ש- $m<n$.
הוכיחו או הפריכו:
א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.

**21)** תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר $n$, מתקיים $AB\neq 0$.
הוכיחו ש- $rank(A)=n$.

**22)** תהי $A$ מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^Tx=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ג. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ד. ייתכן ש- $A^TA=I_n$ וגם $AA^T=I_m$.
ה. אם $m\neq n$ ואם למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.

**23)** תהא $A\in M_{4\times 4}\left(R\right)$ ויהי $b\in R^4$.
ידוע כי $u$ ו- $v$ פתרונות של המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$.
א. נגדיר $w=\alpha u+\beta v$.
הוכיחו כי אם גם $w$ פתרון של המערכת $Ax=b$, אז $\alpha+\beta=1$.
ב. נניח בנוסף כי $w=-u+2v$ הוא פתרון של המערכת $A^2x=b$.
הוכיחו כי $A-I$ לא הפיכה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&3\\2&4&1&3&6\\-3&-6&3&-8&-8\end{pmatrix}$, ויהי $b=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

א. הראו כי $v=(2,-1,1,-1,1)^T$ הוא פתרון של המערכת $Ax=b$.

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$.

ג. מצאו $C,D\in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, כך ש-$C\neq D$ ו-$AC=AD=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$

ב. $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$

**2)**
$$\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&=3\end{aligned}$$

**3)**
$$\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$$

**4)**
$$\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$$

**5)**
$$\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$$

**6)**
$$\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$$

**7)** $(x,y,z)=(1,2,3)$

**8)** $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$

**11)** אם $k\neq 2$ או $k\neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k=2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k=-1$, אז אין פתרונות.

**12)** $m=5,k=9$

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** סכום האיברים בכל שורה של $A^{-1}$ הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.

**23)** שאלת הוכחה.

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-t,-2s,s,-t,-t,t)$

ג. $D=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\0&0\\-2&2\\2&-2\end{pmatrix}(t=s=1)$ $C=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\\1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}(t=s=0)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 3 - דטרמיננטות

### תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג ..... 28
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n ..... 33
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות ..... 38
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 40
5. שימושי הדטרמיננטה ..... 41

# חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

## שאלות

בשאלות **1-5** חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

**1)** א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

**2)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

**3)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

**4)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**5)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

**6)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

**8)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

**9)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

**10)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

**11)** א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

**13)** $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

**14)** $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

**15)** $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

**16)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

**18)** חשבו: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**19)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות $A$ ו-$B$ מסדר $n$ הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-$k$ $(1 \le k \le n)$.
תהי $C$ מטריצה הזהה למטריצות $A$ ו-$B$ אך נבדלת מהן בשורה ה-$k$, שם היא שווה לסכום השורה ה-$k$ של $A$ והשורה ה-$k$ של $B$.
הוכיחו כי $|C| = |A| + |B|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $ad-bc$ ב. 29 ג. $-1$

**2)** א. $-1$ ב. $-3$ ג. $-14$

**3)** א. 24 ב. 234 ג. $-300$

**4)** 9

**5)** 6

**6)** א. 0 ב. 0 ג. 3

**7)** א. 24 ב. 44 ג. 104

**8)** 120

**9)** 114

**10)** 6

**11)** פתרונות באתר: www.GooL.co.il

**12)** פתרונות באתר.

**13)** $-8$

**14)** 16

**15)** 9

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** $(k-1)^4(k+4)$

**19)** א. שאלת הוכחה. ב. 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j<n\\ a & 1\le i\le n,\ j=n\\ a & 1\le j\le n,\ i=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים $a_0,...,a_{n-1}$, המטריצה הבאה

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

הפיכה?

**2)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה על ידי:

$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & else\end{cases}.$$

האם קיים ערך של $n$ עבורו דרגת המטריצה קטנה מ-$n$?

**3)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$.

**4)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י: $a_{ij}=|i-j|$.

**5)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i\neq j\end{cases}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 1$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}.$$

**7)** חשבו את $|A|$ כאשר המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי:

א. $a_{ij} = \min\{i, j\}$

ב. $a_{ij} = Max\{i, j\}$

**8)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$.

**9)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$.

חשבו את $|A|$ ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע $k$ המטריצה הפיכה.

**10)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 3$:

$$\left( a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n,\ i = 1 \\ x & else \end{cases} \right) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

**11)** תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$.

חשבו את $D_n = |A_{n\times n}|$.

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים וקטורים עצמיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** המטריצה $A=(a_{ij})$ נתונה על ידי: $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$.

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב $D_n=|A_{n\times n}|$.

ב. הניחו כי $a=3,b=1,c=2$ וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.
2. את הדטרמיננטה עבור $n=20$.

**13)** נתונה מטריצה $A_{n\times n}$.

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.
בסוף התהליך מקבלים מטריצה $B$.
חשבו את $|B|$ במונחי $|A|$.

**14)** חשבו את $D_n=\begin{vmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{vmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & else\end{cases}$.

**15)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}2 & & 1\\ & \iddots & \\ n & & 2\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}i & i+j=n+1\\ 2 & else\end{cases}$.

**16)** חשבו את $D_n=\det\begin{pmatrix}a & & b\\ & \iddots & \\ b & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$ כאשר $n\geq 2$ טבעי.

הערה: $d_{ij}=\begin{cases}b & i+j=n+1\\ a & else\end{cases}$.

**17)** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_{n\times n}=(a_{ij})$ הנתונה ע"י:

$a_{ij}=\min\{i,n-j+1\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר $n$, כאשר $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $|A|=a-(n-1)a^2$ ב. $A$ הפיכה אם ורק אם $a_0\neq 0$.

**2)** א. $(-1)^{n+1}n!$ ב. לא.

**3)** $|A|=n!$

**4)** $|A|=(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

**5)** $|A|=(a-b)^{n-2}[a+(n-1)b]$

**6)** $(-3)^{n-1}(2n-3)n!$

**7)** א. $|A|=1$ ב. $|A|=(-1)^{n+1}n$

**8)** $|A|=2\cdot 3^{n-2}$

**9)** $|A|=(k-1)\cdot k^{n-2}$ והמטריצה הפיכה אם ורק אם $k\neq 1$ וגם $k=0$.

**10)** $|A|=(-1)^{n-1}x^{n-2}(n-1)$

**11)** $D_n=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

**12)** א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-1},\ D_2=a^2-bc,\ D_3=a^3-2abc$

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$ ב.2. $D_{20}=2^{21}-1$

**13)** $$|B|=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}|A| & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}|A| & n \text{ odd}\end{cases}$$

**14)** $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\end{cases}$$

**15)** $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+2}{2}}2(n-2)! & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}2(n-2)! & n \text{ odd}\end{cases}$$

**16)** $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ even}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b-a)^{n-1}\left[b+(n-1)a\right] & n \text{ odd}\end{cases}$$

**17)** $$D_n=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd}\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}+n-1} & n \text{ even}\end{cases}$$

**18)** $$D_n=\begin{cases}a_n(-1)^{\frac{n}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ even}\\ a_n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}) & n \text{ odd}\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי $A$ ו-$B$ מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$.
חשבו:

**1)** א. $\left|ABA^{-1}B^T\right|$ ב. $|4A^2B^3|$

**2)** א. $|-A^{-2}B^TA^3|$ ב. $|-2A^2A^T adjB|$

**3)** נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

**4)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-$2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

**5)** נתון: $A$ ו-$B$ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-$B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|B|, |A|$.

**6)** הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

**7)** נתון כי $A$ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש-$|A|=0$.

**8)** נתון: $A$ מטריצה מסדר $n$, $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו-$B$ הפיכה.
מצאו את $n$.

**9)** נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2, \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 4 ב. $2^{13}$

**2)** א. $-8$ ב. $-2^{11}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{81}{32}$

**5)** $|A|=18,\ |B|=-2/3$

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** 7

**9)** $4^n$

**10)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# כלל קרמר

## שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

**1)** $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

**2)** $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

**3)** $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

**4)** נתונה מערכת המשוואות: $\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$.

א. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של $k$ למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים $k$ עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

**5)** יהיו $A,B$ מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

## תשובות סופיות

**1)** $x=1,\ y=2$

**2)** $x=1,\ y=1,\ z=2$

**3)** $x=y=z=t=1$

**4)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

**5)** א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי הדטרמיננטה

## שאלות

**1)** א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1),\ (-1,3,1),\ (3,3,-2)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

## תשובות סופיות

**1)** א. 13. א. 1. 14 א. 2. ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 4 - מרחבים וקטורים

### תוכן העניינים

1. מרחבים ותת-מרחבים ..... 42
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית ..... 46
3. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה ..... 50

# מרחבים ותת-מרחבים

**סימון**

$R^n$ - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$M_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל השדה הממשי $R$.

$P_n[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-$n$ מעל השדה $R$.

$F[R]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה $R$.

## שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $R^3$:

**1)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

**2)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

**3)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

**4)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

**5)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

**6)** $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה חשבונית.

**7)** $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, $a$, $b$ ו-$c$ מהווים סדרה הנדסית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-15** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $M_n[R]$:

**8)** $W$ מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A \mid A=A^T\}$.

**9)** $W$ מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה $B$.
כלומר, $W=\{A \mid AB=BA\}$.

**10)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A \mid |A|=0\}$.

**11)** $W$ מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A \mid A^2=A\}$.

**12)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

**13)** $W$ מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה $B$ הוא אפס.
כלומר, $W=\{A \mid AB=0\}$.

**14)** $W$ מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

**15)** $W$ מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **16-21** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

**16)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

**17)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

**18)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה $\geq 4$.
כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\leq 4\}$.

**19)** $W$ מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של $x$.

**20)** $W$ מורכב מכל הפולינומים ממעלה $n$, כאשר $4\leq n\leq 7$.

**21)** $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **22-30** בדקו האם $W$ הוא תת-מרחב של $F[R]$:

**22)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

**23)** $W$ מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל $x$ ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

**24)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

**25)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

**26)** $W$ מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

**27)** $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- $f$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

**28)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**29)** $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- $f$ גזירה לכל $x$).

**30)** $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

**31)** בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של $C^3$:
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

**32)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים $b$, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של $R^5$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**33)** יהי $V$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה $F$.

א. מצאו תנאי על $k$, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של $V$.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- $V$, שפורשים את $W$.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

## תשובות סופיות

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | כן | 2) | כן | 3) | כן | 4) | לא | 5) | לא |
| 6) | כן | 7) | לא | 8) | כן | 9) | כן | 10) | לא |
| 11) | לא | 12) | כן | 13) | כן | 14) | כן | 15) | כן |
| 16) | כן | 17) | לא | 18) | כן | 19) | כן | 20) | לא |
| 21) | לא | 22) | כן | 23) | כן | 24) | כן | 25) | כן |
| 26) | כן | 27) | לא | 28) | כן | 29) | לא | 30) | כן |

**31)** א. כן ב. לא

**32)** א. $u=(1,0,0,0,0)$

ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$

ג. לא.

**33)** א. $k=0$

ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3,6x-7x^2+x^4\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

## שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

**1)** א. האם $u_1$ הוא צירוף לינארי של $u_4$?

ב. האם $u_1$ שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

**2)** א. האם $u_3$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_3$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**3)** א. האם $u_4$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_4$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**4)** נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**5)** נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$ ו- $u_3$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**7)** הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו- $u_4$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**8)** נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.

ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

ג. האם המטריצה $A$ שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

**9)** נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

ג. האם הפולינום $p_2$ שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

**10)** עבור איזה ערכים של $a,b,c$, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

**11)** $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

**12)** $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

**13)** $\{u+v,v+w,w\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- $C^3$ :

**14)** מעל $\mathbb{C}$.

**15)** מעל $\mathbb{R}$.

**16)** נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה $Q$.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- $R$, כשהוא מרחב וקטורי מעל $Q$.

**17)** תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

**18)** להלן 3 תת-קבוצות של $R^4$ :

$$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$$
$$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$$
$$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3,\ u_1 = 2u_3 + u_2$.

**3)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1,\ u_1 = 4u_4 - u_2$.

**4)** א+ב+ג. $k = -4$

**5)** $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

**6)** $v = 2u_1 + u_2 + u_3$ , אינסוף.

**7)** $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$ , אינסוף.

**8)** א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $D = 0.25A + 0.25B,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad B = A - 2C,\quad A = B + 2C$

**9)** א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2,\ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ p_2 = p_1 - 2p_3,\ p_1 = p_2 + 2p_3$

**10)** לכל ערך של $a, b, c$.

**11)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**12)** הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ y = 0.5x + 0.5z,\ x = 2y - z$.

**13)** בלתי תלויים ליניארית.

**14)** תלויים.

**15)** בלתי תלויים ליניארית.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** א. כן. ב. לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

## שאלות

**1)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$R^3$:

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

**2)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

**3)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

**4)** נתונה קבוצת וקטורים ב-$R^3$: $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),(2,3,4)\}$.

א. האם $T$ בסיס ל-$R^3$?

ב. מצאו קבוצה $T'$, שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה לינארית ב-$T$.

ג. השלימו את $T'$ לבסיס של $R^3$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית**

**5)** להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- $W$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- $U$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- $V$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- $W$, $U$ ו- $V$.

**6)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**7)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**8)** נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**9)** נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**10)** נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**11)** נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- $U$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

**12)** להלן שני תתי מרחבים של המרחב $R^4$ :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.

**13)** להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$ :

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**14)** להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$ :

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3,\ 4+x-x^2+x^3,\ 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- $U$.

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

**15)**
$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

**16)**
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. $W$ - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

$U$ - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

$V$ - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ p_2(x)=-1+x^2,\ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 5 - תכנון לינארי

### תוכן העניינים

1. תכנון לינארי ..... 54

# תכנון לינארי

## שאלות

**1)** חקלאי צריך לתכנן את עיבוד שדותיו לעונה החקלאית, כך שרווחיו יהיו מקסימליים. המשאבים העומדים לרשותו הם: שטח של 10 דונמים, 2,800 מ"ק מים ו-364 ימי עבודה. הוא החליט לנצל את כל משאביו לגידול עגבניות ופלפל. הצרכים והרווחים לדונם, לגידולים אלה, נתונים בטבלה שלפניך:

| | מים לדונם | ימי עבודה לדונם | רווחים לדונם |
|---|---|---|---|
| **עגבניות** | 350 מ"ק | 14 יום | 800 שקל |
| **פלפל** | 210 מ"ק | 42 יום | 1400 שקל |

א. כתבו את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה לבעיה.

ב. מצאו על כמה דונמים צריך החקלאי לגדל עגבניות ועל כמה דונמים הוא צריך לגדל פלפל, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.

ג. מצאו מה יהיו הרווחים המקסימליים של החקלאי.

**2)** לרשות נגריה 3 מ"ק עצים, 21 מ"ר דיקט ו-104 ימי עבודת פועל.
לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו-12 ימי עבודת פועל.
לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו-5 ימי עבודת פועל.
הרווח ממכירת ארון מטבח הוא 1,000 שקל וממכירת ארון בגדים 1,500 שקל.
כמה ארונות וכמה ארונות בגדים כדאי לנגריה לייצר, כדי שרווחיה יהיו מקסימליים?

**3)** מפעל מייצר שני סוגי שולחנות: שולחן אוכל ושולחן סלוני.
תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים: חיתוך, עיבוד וצביעה.
במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד החיתוך 16 שעות לכל היותר, את ציוד העיבוד אפשר להפעיל 18 שעות לכל היותר ואת ציוד הצביעה 12 שעות לכל היותר. אותו ציוד משמש לייצור שני סוגי השולחנות.
פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור שולחן אחד נתון בטבלה שלפניך:

| | חיתוך | עיבוד | צביעה |
|---|---|---|---|
| **שולחן אוכל** | 2 שעות | 1 שעה | 1 שעה |
| **שולחן סלוני** | 1 שעה | 3 שעות | 1 שעה |

רווח המפעל מכל שולחן אוכל הוא 200 שקל ומכל שולחן סלוני הוא 350 שקל.

א. כמה שולחנות מכל סוג על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים?

ב. באחד ממחזורי הייצור התקלקלה מכונת הצביעה לשעה אחת ולכן היה אפשר להפעילה רק 11 שעות.
האם התשובה לסעיף א' תשתנה לגבי מחזור ייצור זה? נמקו.

**4)** נתונים האילוצים:

$$y \geq 0 \ , \ x \geq 0$$
$$y \leq 2x+4$$
$$y \leq -2x+8$$
$$y \geq 2x-4$$

פונקציית המטרה היא: $f(x,y)=3x-y+6$.

א. קווקו בשרטוט מדויק את התחום האפשרי של הבעיה.

ב. הוסף לשרטוט את קו הגובה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 5.

ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

**5)** מצא ערך מינימלי של הפונקציה $f(x,y)=2x-y$

$$x+y \leq 5$$

כאשר האילוצים הם: $y \geq 0$.

$$y \geq 6-2x$$

**6)** מצא ערך מינימלי וערך מקסימלי של פונקציית המטרה $f(x,y)=x+2y$.
תחת האילוצים: $x \leq 2$ , $x \geq y$ , $x+y \leq 3$ , $y+2 \geq 0$.

**7)** נתונים האילוצים:

$$y \leq 2x+3$$
$$x+2y \leq 21$$
$$x+7y \geq 21$$
$$y \leq 7$$

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. מצא את הערך המקסימלי שמקבלת פונקציית המטרה $f(x,y)=16x-8y$ בתחום זה.

ג. מצא שני פתרונות אפשריים, שעבורם מקבלת פונקציית המטרה את הערך 8.

**8)** נתונה מערכת האילוצים:

$$2y+5x\geq 0$$
$$2y-x\leq 12$$
$$x+y\leq 10$$
$$y\geq 2\frac{1}{2}$$

פונקציית המטרה היא: $f(x,y)=10x-10y$.

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. באיזה נקודה בתחום מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

ג. תן דוגמא לשתי נקודות השייכות לתחום האפשרי ושעבורן הערך של פונקציית המטרה הוא 20-.

## תשובות סופיות

**1)** א. מערכת אילוצים: $x+y\leq 10$, $14x+42y\leq 364$, $350x+210y\leq 2800$, $y\geq 0$ ; $x\geq 0$. פונקציית מטרה: $f(x,y)=800x+1400y$.

ב. עגבניות: 2 דונם, פלפל: 8 דונם. ג. 12,800 שקל.

**2)** 7 ארונות מטבח, 4 ארונות בגדים.

**3)** א. 4 שולחנות סלוניים, 6 שולחנות אוכל.

ב. לא תשתנה. כיוון שהאילוץ של מכונת הצביעה, גם הוא משתנה ל- $x+y\leq 1$, עדיין נמצא מחוץ לתחום.

**4)** ג. $(3,2)$

**5)** מינימום: $f(1,4)=-2$.

**6)** מינימום: $f(-2,-2)=-6$, מקסימום: $f(1.5,1.5)=4.5$.

**7)** ב. מקסימום: $f(7,2)=96$. ג. נקודות בתחום על הקו $y=2x-1$, לדוגמא: $(2,3)$ ; $(3,5)$ ; $(4,7)$.

**8)** ב. מקסימום בנקודה $(7.5,2.5)$. ג. לדוגמא: $(2,4)$ ; $(1,3)$ ; $(3,5)$.

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 6 - וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת ושימושיהם

### תוכן העניינים

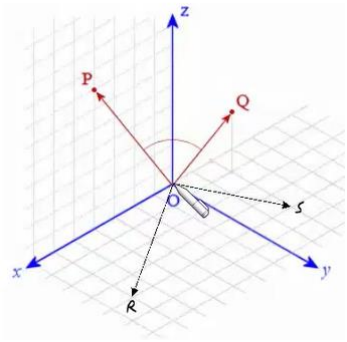

1. וקטורים ..... 57
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת ..... 64
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב ..... 66

# וקטורים

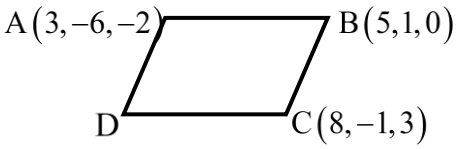
**הערת סימון:** נסמן את הווקטור $u$ כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

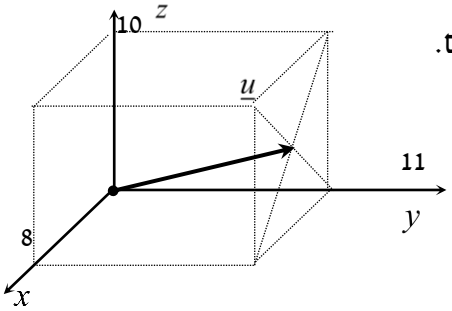
**1)** רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



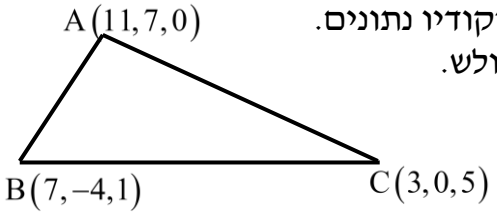

**2)** בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.




**3)** נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**4)** בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.





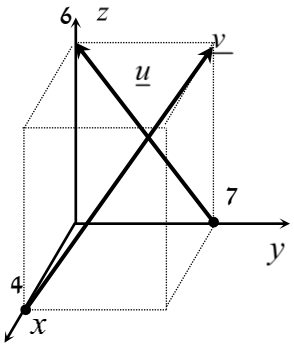
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה $N$, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

**6)** נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



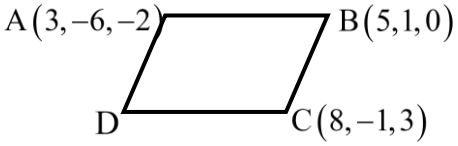

**7)** מצאו את $x$, $y$ ו-$z$, אם נתון ש-$\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$,
$\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

**8)** נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ , $\underline{w}=(2,6,-5)$ .

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

**10)** חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

**11)** חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

**12)** $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** $\underline{u}/|\underline{u}|$

**14)** $\mathrm{d}(\underline{u},\underline{v})$

**15)** $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

**16)** $\mathrm{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$ ,
ויש למצוא את הווקטורים:

**17)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

**18)** $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

**19)** $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**20)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$ , $B(0,2,-1)$ , $C(-3,-5,0)$ , $D(-7,-5,2)$ .
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$, כאשר:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$

**23)** מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$ , $B(0,3,2)$ , $C(5,-1,0)$.

**24)** נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$ , $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

**25)** מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

**26)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**27)** ענו על חמשת הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.

ב. הוכיחו כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.

ג. הוכיחו כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.

ד. הוכיחו כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $u\cdot v=\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם $\alpha$ היא הזווית בין $a$ ל- $b$, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

**29)** יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- $0$, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה $k$.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- $w_1$.
מהו המרחק של $v$ מ- $w_1$?

**30)** יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- $u$ ו- $v$ הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**29)** $\frac{5}{4}k$

**30)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

## שאלות

**1)** נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

**2)** חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

**3)** נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0,\quad u\cdot w=0,\quad u\times v=0$.

הוכיחו כי: $v\cdot w=0$.

**4)** נתונים שני וקטורים $u,v$ במרחב.

ידוע כי: $|v|=4,\quad |u|=1,\quad u\perp v$.

חשבו: $\left|(u+v)\times(u-v)\right|$.

**5)** נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

**7)** חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

**9)** נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

**10)** נתונים שלושה וקטורים $u,v,w$ במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$

ב. $(v\times w)\cdot u$

ג. $w\cdot(u\times v)$

ד. $v\cdot(u\times w)$

**11)** נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

## תשובות סופיות

**1)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

**2)** $S=22.5$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** 8

**5)** א. $-3$ ב. $-3$ ג. $-3$

**6)** א. $-6$ ב. 1

**7)** $9\frac{1}{3}$

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** א. $-4$ ב. 4 ג. 4 ד. 4

**11)** אין לו נוסחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

## שאלות

**1)** הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$ , $B(1,1,1)$ , $C=(2,1,2)$ , $D(2,2,2)$.

**2)** מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

**3)** נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\quad L_2:\ x+7=y-5,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** $\sqrt{26}$

**3)** א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אלגברה ליניארית להנדסאי תוכנה

## פרק 7 - אלגברה בוליאנית

### תוכן העניינים

1. אלגברה בוליאנית ..... (ללא ספר)